CENGAGE Learning

QUINTA EDICIÓN

TAN

MATEMÁTICAS APLICADAS
A LOS NEGOCIOS, LAS CIENCIAS SOCIALES Y DE LA VIDA

QUINTA EDICIÓN

MATEMÁTICAS APLICADAS

A LOS NEGOCIOS, LAS CIENCIAS SOCIALES Y DE LA VIDA

SOO T. TAN

STONEHILL COLLEGE

Traducción

Lorena Peralta Rosales
María Elsa Ocampo Malagamba
Traductoras profesionales

Revisión técnica

María de Guadalupe Arroyo Santisteban
Academia de Matemáticas ECCE
Universidad Panamericana

Iren Castillo Saldaña
Academia de Matemáticas ECCE
Universidad Panamericana

Ignacio García Juárez
Academia de Matemáticas ECCE
Universidad Panamericana

José Cruz Ramos Báez
Academia de Matemáticas ECCE
Universidad Panamericana

CENGAGE Learning™

Australia • Brasil • Corea • España • Estados Unidos • Japón • México • Reino Unido • Singapur

CENGAGE
Learning™

Matemáticas aplicadas a los negocios, las ciencias sociales y de la vida. Quinta edición.
Soo T. Tan

Director de producto y desarrollo Latinoamérica:
Daniel Oti Yvonnet

Director editorial y de producción Latinoamérica:
Raúl D. Zendejas Espejel

Editor Senior:
Javier Reyes Martínez

Coordinadora de producción editorial:
Abril Vega Orozco

Editor de producción:
Omar A. Ramírez Rosas

Coordinador de manufactura:
Rafael Pérez González

Diseño de portada:
Irene Morris

Imagen de portada:
Mark Van Deer Laan

Composición tipográfica:
Editec S.A. de C.V.

Traducido del libro *Applied Mathematics: For the Managerial, Life, and Social Sciences, Fifth edition*
Soo T. Tan
Publicado en inglés por Brooks/Cole, una compañía de Cengage Learning © 2010.
ISBN: 978-0-495-55967-2

Datos para catalogación bibliográfica:
Tan T. Soo
Matemáticas aplicadas a los negocios, las ciencias sociales y de la vida
Quinta edición.
ISBN-13: 978-607-481-758-4
ISBN-10: 607-481-758-8

Visite nuestro sitio web en:
http://latinoamerica.cengage.com

Impreso en México
1 2 3 4 5 6 7 13 12 11 10

PARA PAT, BILL Y MICHAEL

CONTENIDO

CAPÍTULO 3 Funciones exponenciales y logarítmicas 153

CAPÍTULO 4 Matemáticas financieras 185

CAPÍTULO 5 Sistemas de ecuaciones lineales y matrices 241

CAPÍTULO 6 Programación lineal 321

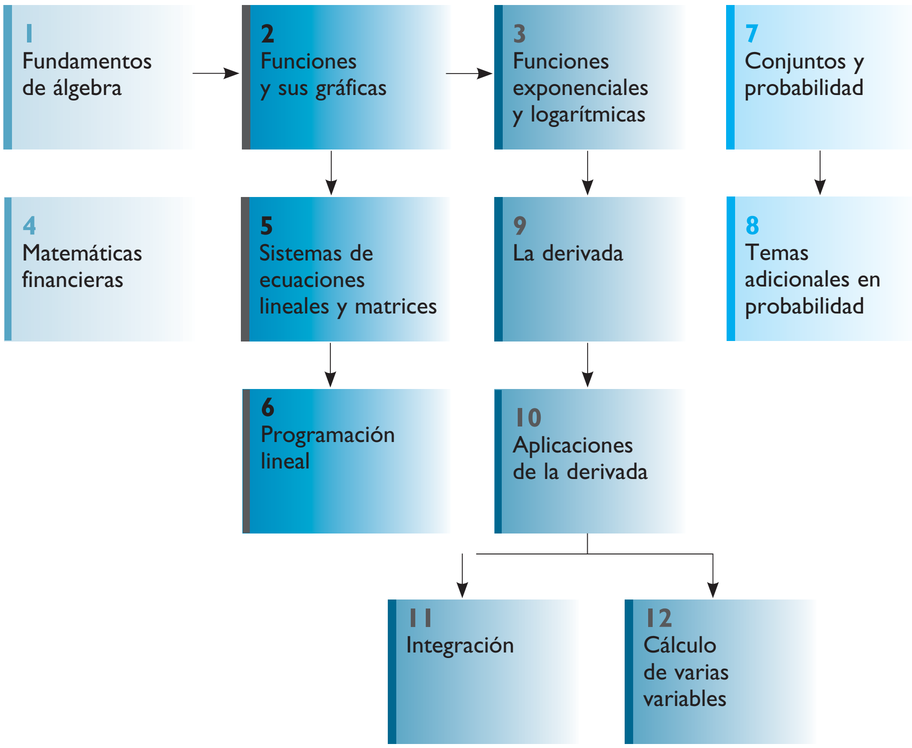
CAPÍTULO 7 Conjuntos y probabilidad 395

CAPÍTULO 8 Temas adicionales en probabilidad 463

PREFACIO

Las matemáticas son una parte integral de nuestra cada vez más compleja vida cotidiana. *Matemáticas aplicadas a los negocios, las ciencias sociales y de la vida, quinta edición*, trata de ilustrar este punto con su enfoque aplicado. Los tres objetivos para esta quinta edición son: 1) escribir un texto aplicado que motive al lector, a la vez que proporcione la experiencia en las técnicas cuantitativas necesarias para comprender y apreciar mejor los cursos que normalmente se toman a nivel licenciatura, 2) sentar las bases para cursos más avanzados, como estadística e investigación de operaciones y 3) hacer del libro una herramienta útil para los profesores.

Puesto que el libro contiene material más que suficiente para el curso usual de dos o tres semestres, el profesor puede ser flexible en la elección de los temas más adecuados para su curso. El siguiente cuadro sobre la correlación de los capítulos se ofrece para ayudarle en el diseño de un curso más adecuado para la audiencia prevista.



EL ENFOQUE

Nivel de presentación

Mi enfoque es intuitivo, y establezco los resultados de manera informal. Sin embargo, he tenido especial cuidado en garantizar que este enfoque no pone en peligro el contenido y el rigor matemático.

Enfoque de solución de problemas

En todo el libro se enfatiza en la solución de problemas. Numerosos ejemplos y aplicaciones ilustran cada concepto y resultado nuevos. Se hace especial hincapié en ayudar al lector a formular, resolver e interpretar los resultados de los problemas involucrados en las aplicaciones. Debido a que el lector suele tener dificultades para configurar y resolver problemas de palabras, se ha puesto un cuidado especial para ayudarle a dominar estas habilidades:

- Muy al inicio en el libro, se le da al estudiante la práctica en la solución de problemas de palabras (vea el ejemplo 7, sección 1.8).
- Se dan pautas para ayudar al estudiante a formular y resolver problemas de palabras (vea la sección 2.7).
- Una sección completa se dedicó al modelado y a la formulación de problemas de programación lineal (vea la sección 6.2).
- En dos secciones se cubren los problemas de optimización. En la sección 10.4 se pide al estudiante resolver problemas en los que se da la función objetivo a optimizar, y en la sección 10.5 se le pide resolver problemas en los que deben formular los problemas de optimización.

Introducción intuitiva a los conceptos

Cuando es apropiado, los conceptos matemáticos se presentan con ejemplos concretos de la vida real. Una lista ilustrativa de algunos de los temas que se muestran de este modo es la siguiente:

- **El álgebra de funciones**: el déficit presupuestal de Estados Unidos.
- **Modelos matemáticos**: activos del fideicomiso de la Seguridad Social.
- **Límites**: el movimiento de un tren de levitación magnética.
- **La regla de la cadena**: la población de estadounidenses mayores de 55 años.
- **Funciones crecientes y decrecientes**: la economía de combustible de un automóvil.
- **Concavidad**: Estados Unidos y el crecimiento de la población mundial.
- **Puntos de inflexión**: el punto de rendimientos decrecientes.
- **Trazo de curva**: el promedio industrial Dow Jones en el “lunes negro”.
- **Funciones exponenciales**: distribución del ingreso de las familias estadounidenses.
- **Área entre dos curvas**: petróleo ahorrado con las medidas de conservación.

Conexiones

Un ejemplo (el maglev, tren de levitación magnética) se utiliza como hilo común en el desarrollo del cálculo de los límites por medio de la integración. El objetivo aquí es mostrar al lector las conexiones entre los conceptos presentados: límites, continuidad, tasas de cambio, derivada, integral definida, y así sucesivamente.

Motivación

Ilustrar el valor práctico de las matemáticas en áreas aplicadas es un objetivo importante de mi enfoque. Muchas de las aplicaciones se basan en modelos matemáticos (funciones) que se han construido a partir de datos extraídos de diversas fuentes, como periódicos actuales, revistas e Internet. Las fuentes se dan en el texto de estos problemas aplicados.

Modelado

Una de las habilidades importantes que el estudiante debe adquirir es la capacidad de traducir un problema real en un modelo matemático que puede proporcionar información sobre el problema. En la sección 2.7 se discute el proceso de modelado, y se le pide al lector que utilice modelos (funciones) a partir de datos reales para responder a las preguntas. Los estudiantes obtienen experiencia práctica en la construcción de estos modelos en las secciones de Uso de la tecnología.

LO NUEVO EN ESTA EDICIÓN

Revisión del álgebra donde el lector más lo necesita

Notas de revisión del álgebra colocadas adecuadamente, enlazadas con los capítulos iniciales de revisión del álgebra, aparecen donde el lector necesita a menudo ayuda en la parte de cálculo. Se indican con el icono (x^2). Vea esta función en las páginas 542 y 577.

EJEMPLO 6 Evalúe:

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{1+h}-1}{h}$$

Solución Al permitir que h se aproxime a cero, se obtiene la forma indeterminada 0/0. Después, al racionalizar el numerador del cociente al multiplicar tanto el numerador como el denominador por la expresión $(\sqrt{1+h}+1)$, se obtiene

$$\frac{\sqrt{1+h}-1}{h} = \frac{(\sqrt{1+h}-1)(\sqrt{1+h}+1)}{h(\sqrt{1+h}+1)} \qquad {}^{*}(x^2) \text{ Vea la página 41.}$$

$$= \frac{1+h-1}{h(\sqrt{1+h}+1)} \qquad (\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b}) = a-b$$

$$= \frac{h}{h(\sqrt{1+h}+1)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+h}+1}$$

Motivantes aplicaciones del mundo real

Se han añadido más de 220 nuevas aplicaciones a los ejemplos y ejercicios aplicados. Entre ellas están el calentamiento global, el agotamiento de los activos del fideicomiso de la Seguridad Social, los costos de conducción de un sedán 2008 de tamaño mediano, las inversiones de fondos de cobertura, cuentas de mensajería instantánea móvil, contratación de cabilderos, conferencias web, cerebro autista, los ingresos de Polo Ralph Lauren, el gasto en TI para la atención de la salud en Estados Unidos y el consumo de agua embotellada.

EJEMPLO DE APLICACIÓN 1 Calentamiento global El incremento del bióxido de carbono (CO_2) en la atmósfera es una importante causa del calentamiento global. La curva de Keeling, nombrada en honor a Charles David Keeling, profesor de la Scripps Institution of Oceanography, da la cantidad promedio de CO_2, medida en volumen de partes por millón (ppmv), en la atmósfera desde principios de 1958 a 2007. Aun cuando los datos estuvieron disponibles en cada año de este intervalo de tiempo, construiremos la curva con base sólo en los siguientes datos seleccionados al azar.

Año	1958	1970	1974	1978	1985	1991	1998	2003	2007
Cantidad	315	325	330	335	345	355	365	375	380

La **curva de dispersión** asociada con estos datos se muestra en la figura 54a. Un modelo matemático que da la cantidad aproximada de CO_2 en la atmósfera durante este periodo es

$$A(t) = 0.010716t^2 + 0.8212t + 313.4 \qquad (1 \le t \le 50)$$

Modelado con datos

En muchas de las secciones de Uso de la tecnología, se encuentran ahora ejercicios de Modelado con datos. El lector puede ver en realidad cómo se construyen algunas de las funciones que se encuentran en los ejercicios. (Vea Usuarios de Internet en China, ejercicio 40, página 159, y el ejercicio correspondiente donde se deriva el modelo en el ejercicio 14, página 161.)

40. USUARIOS DE INTERNET EN CHINA El número de usuarios de Internet en China se proyecta que sea

$$N(t) = \ldots$$

donde $N(t)$ se mide…
$t = 1$ que correspo…

a. ¿Cuántos usuari… 2005? ¿A princi…

b. ¿Cuántos usuari… allí a principios…

c. Trazar la gráfica…

Fuente: C. E. Unterber…

14. MODELADO CON DATOS El número de usuarios de Internet en China (en millones) desde el comienzo de 2005 hasta 2010 se muestran en la tabla siguiente:

Año	2005	2006	2007	2008	2009	2010
Número	116.1	141.9	169.0	209.0	258.1	314.8

a. Utilice **ExpReg** para encontrar un modelo de regresión exponencial de los datos. Sea $t = 1$ correspondiente a principios de 2005.
Sugerencia: $a^x = e^{x \ln a}$.

b. Trace el diagrama de dispersión y la gráfica de la función f que se encuentra en la parte (a).

Hacer conexiones con la tecnología

Se actualizaron muchas secciones de Uso de tecnología. Al Uso de la tecnología 2.5 se añadió un nuevo ejemplo de comercialización de medicamentos para reducir el colesterol. El Uso de la tecnología 3.3 incluye un nuevo ejemplo en el que se construye un modelo exponencial de ventas de juegos en Internet que utilizan la función logística de una calculadora graficadora. Otro nuevo ejemplo sobre televisión en teléfonos celulares se añadió al Uso de la tecnología 10.3. Se han agregado pantallas adicionales de calculadora graficadora en algunas secciones y ejemplos de Exploración con la tecnología para ilustrar el uso de dicha calculadora en la solución de desigualdades y para generar números aleatorios.

EJEMPLO DE APLICACIÓN 2 Mercado de los medicamentos reductores del colesterol En un estudio realizado a principios de 2000, los expertos anticiparon un mejoramiento del mercado de los medicamentos reductores del colesterol. El mercado estadounidense (en miles de millones de dólares) de tales medicamentos de 1999 a 2004 es aproximadamente

$$M(t) = 1.95t + 12.19$$

donde t está en años, con t correspondiente a 1999.

a. Trace la gráfica de la función M en la ventana de visualización $[0, 5] \times [0, 25]$.

b. Suponga que la proyección se mantiene y la tendencia continúa, ¿cuál era el…

EJEMPLO DE APLICACIÓN 1 Ventas de juegos por Internet El crecimiento estimado en los ingresos mundiales de juegos por Internet (en miles de millones de dólares), según lo previsto por los analistas de la industria, se da en la siguiente tabla:

Año	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010
Ingreso	3.1	3.9	5.6	8.0	11.8	15.2	18.2	20.4	22.7	24.5

a. Utilice **Logistic** para encontrar un modelo de regresión para los datos. Sea $t = 0$ correspondiente a 2001.

b. Trace el diagrama de dispersión y la gráfica de la función f encontradas en la parte (a) usando la ventana de visualización $[0, 9] \times [0, 30]$.

Fuente: Christiansen Capital/Advisors

Diversos tipos de problemas

Se han añadido preguntas de rutina, de verdadero o falso y preguntas conceptuales para mejorar las series de ejercicios. (Vea, por ejemplo, las preguntas gráficas agregadas a las preguntas conceptuales 2.3, página 95.)

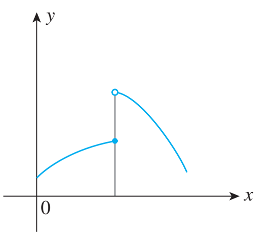
2.3 Preguntas de concepto

1. **a.** ¿Qué es una función?
b. ¿Qué es el dominio de una función? ¿El rango de una función?
c. ¿Qué es una variable independiente? ¿Una variable dependiente?

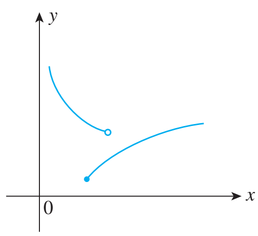
2. **a.** ¿Qué es la gráfica de una función? Utilice un dibujo para ilustrar la gráfica, el dominio y el rango de una función.
b. Si le dan una función en el plano xy, ¿cómo puede decir si la gráfica es la de una función f definida por $y = f(x)$?

3. ¿Las siguientes son gráficas de funciones? Explique.

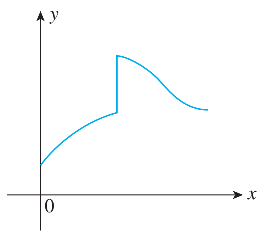
a.



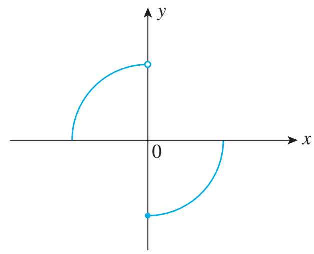
b.



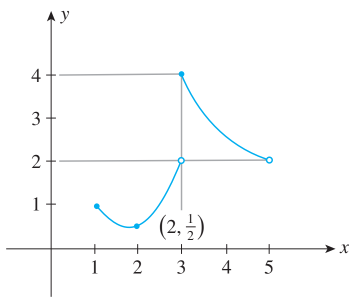
c.



d.



4. ¿Cuáles son el dominio y el rango de la función f con la gráfica siguiente?



Cambios específicos de contenido

- Se han agregado más aplicaciones a los capítulos de revisión del álgebra.
- El análisis de las hipotecas ha sido mejorado con un nuevo ejemplo de las hipotecas de tasa ajustable y la incorporación de muchos nuevos ejercicios aplicados.
- La sección 2.7, acerca de las funciones y los modelos matemáticos, se ha reorganizado y se presentan nuevos modelos. Ahora se le pide al lector utilizar un modelo que describe el calentamiento global para predecir la cantidad de dióxido de carbono (CO_2) que estará presente en la atmósfera en determinado año, y un modelo que describe los activos del fondo fiduciario del Seguro Social para determinar cuándo se espera que los activos se hayan agotado.
- La regla de la cadena en la sección 9.6 se presenta ahora con una aplicación: la población de estadounidenses de 55 años de edad y mayores.
- Se añadió un Índice de tecnología para una fácil referencia.
- Secciones de Nuevo uso de la tecnología de Excel para Microsoft Office 2007 están disponibles en la Web.

CARACTERÍSTICAS PROBADAS

Además de las nuevas características, se han conservado muchas de las características siguientes que han hecho de ésta una obra tan utilizada y bien recibida en ediciones anteriores:

- Los ejercicios de sección para ayudar al lector a entender y aplicar conceptos
- Las secciones de tecnología opcional para explorar ideas matemáticas y resolver problemas
- Las secciones de revisión de final de capítulo para evaluar la comprensión y las habilidades para resolver problemas
- Las características para motivar a una exploración más alta

Ejercicios de autoevaluación

Estos ejercicios, que dan inicio a cada conjunto de ejercicios de final de sección, ofrecen al lector retroalimentación inmediata sobre conceptos clave. Al final de cada sección de ejercicios se pueden encontrar soluciones totalmente elaboradas.

Preguntas de concepto

Estas preguntas, diseñadas para evaluar la comprensión del lector de los conceptos básicos tratados en la sección, le motivan a explicar con sus propias palabras los conceptos aprendidos.

Ejercicios

Cada sección de ejercicios contiene un amplio conjunto de problemas de rutina de cálculo, seguido de un amplio conjunto de problemas orientados a la aplicación.

2.5 Soluciones de los ejercicios de autoevaluación

Un fabricante tiene un costo fijo mensual de $60,000 y un costo de producción de $10 por unidad producida. El producto se vende a $15 por unidad.

1. ¿Cuál es la función de costo?
2. ¿Cuál es la función de ingreso?
3. ¿Cuál es la función de utilidad?
4. Calcule la utilidad (pérdida) correspondiente a niveles de producción de 10,000 y 14,000 unidades/mes.

Las soluciones de los ejercicios de autoevaluacón se encuentran en la página 120.

2.5 Preguntas de concepto

1. a. ¿Qué es una *función lineal*? Dé un ejemplo.
   b. ¿Cuál es el dominio de una función lineal? ¿El rango?
   c. ¿Cuál es la gráfica de una función lineal?
2. ¿Cuál es la forma general de una función lineal de costo? ¿Una función lineal de ingreso? Una función lineal de utilidad?
3. Explique el significado de cada término:
   a. Punto de equilibrio
   b. Cantidad de equilibrio
   c. Ingreso de equilibrio

2.5 Ejercicios

En los ejercicios 1-10 determine si la ecuación define y como una función lineal de x. De ser así, escríbala en la forma $y = mx + b$.

1. $2x + 3y = 6$
2. $-2x + 4y = 7$
3. $x = 2y - 4$
4. $2x = 3y + 8$
5. $2x - 4y + 9 = 0$
6. $3x - 6y + 7 = 0$
7. $2x^2 - 8y + 4 = 0$
8. $3\sqrt{x} + 4y = 0$
9. $2x - 3y^2 + 8 = 0$
10. $2x + \sqrt{y} - 4 = 0$
11. Un fabricante tiene un costo fijo mensual de $40,000 y un costo de producción de $8 por cada unidad producida. El producto se vende a $12 por unidad.
    a. ¿Cuál es la función de costo?
    b. ¿Cuál es la función de ingreso?

En los ejercicios 15-20 determine el punto de intersección de cada par de líneas rectas.

15. $y = 3x + 4$; $y = -2x + 14$
16. $y = -4x - 7$; $-y = 5x + 10$
17. $2x - 3y = 6$; $3x + 6y = 16$
18. $2x + 4y = 11$; $-5x + 3y = 5$
19. $y = \frac{1}{4}x - 5$; $2x - \frac{3}{2}y = 1$
20. $y = \frac{2}{3}x - 4$; $x + 3y + 3 = 0$

En los ejercicios 21-24 determine el punto de equilibrio para la empresa cuya función de costo C y función de ingreso R son

Uso de la tecnología

Estas características opcionales aparecen después de la sección de ejercicios. Si se desea, pueden utilizarse en el aula o como material para el autoaprendizaje por parte del alumno. En este caso, se utilizan la calculadora graficadora y Microsoft Excel 2003 como herramientas para resolver problemas. (En el sitio web del libro http://latinoamerica.cengage.com/tan se dan instrucciones para Microsoft Excel 2007.) Estas secciones están escritas en el formato tradicional de ejemplo del ejercicio, y las respuestas se encuentran en la parte posterior del libro. De manera prolija se utilizan ilustraciones que muestran pantallas de calculadora. En consonancia con el tema de la motivación mediante ejemplos de la vida real, muchas aplicaciones de origen están incluidas de nuevo. El lector puede construir sus propios modelos con datos de la vida real en muchas de las secciones de Uso de la tecnología. Éstos incluyen modelos para el crecimiento de la industria de juegos de azar indios, los propietarios de TIVO, el contenido de nicotina de los cigarrillos, seguridad informática y juegos en línea, entre otros.

USO DE LA TECNOLOGÍA

Cómo calcular el monto acumulado de una inversión, la tasa de interés efectiva y el valor presente de una inversión

Calculadora graficadora

Algunas herramientas de graficación han incorporado rutinas para resolver problemas relacionados con las matemáticas financieras. Por ejemplo, la función TVM SOLVER de la TI-83/84 incorpora varias funciones que se pueden utilizar para resolver los problemas que se calculen en las secciones 4.1 a 4.3. Para acceder a la TVM SOLVER en la TI-83 presione $\boxed{\text{2nd}}$, presione $\boxed{\text{FINANCE}}$ y, a continuación, seleccione $\boxed{\text{1: TVM Solver}}$. Para el acceso a la TVM Solver en la TI-83 plus y la TI-84, presione $\boxed{\text{APPS}}$, presione $\boxed{\text{1: Finance}}$ y, a continuación, seleccione $\boxed{\text{1: TVM Solver}}$. Los procedimientos paso a paso para usar estas funciones se pueden encontrar en el sitio web del libro.

EJEMPLO 1 Cálculo del monto acumulado de una inversión Calcule la cantidad acumulada después de 10 años si se invierten \$5000 a una tasa de 10% anual compuesta mensualmente.

Solución Utilizando TVM SOLVER de la TI-83/84 con las siguientes entradas:

N = 120 (10)(12)
I% = 10
PV = −5000 Recuerde que una inversión es un desembolso.
PMT = 0
FV = 0
P/S = 12 El número de pagos cada año
C/Y = 12 El número de periodos de conversión de cada año
PMT:FIN BEGIN

```
N    = 120
I%   = 10
PV   = −5000
PMT  = 0
■ FV = 13535.20745
P/Y  = 12
C/Y  = 12
PMT : END    BEGIN
```

FIGURA **T1**
La pantalla de la TI-83/84 muestra el valor futuro (VF) de una inversión.

obtenemos la pantalla que se muestra en la figura T1. Concluimos que la cantidad acumulada requerida es de \$13,535.21. ■

Excel

Excel tiene muchas funciones integradas para resolver problemas relacionados con las matemáticas financieras. Aquí se expone la aplicación de FV (valor futuro), EFFECT (tasa efectiva) y PV (valor presente) funciones para resolver problemas del tipo que hemos encontrado en la sección 4.1.

EJEMPLO 4 Cálculo del monto acumulado de una inversión Determine la cantidad acumulada después de 10 años si se invierten \$5000 a una tasa de 10% anual compuesta mensualmente.

Exploración con tecnología

Diseñadas para explorar los conceptos matemáticos y aportar más luz sobre los ejemplos en el libro, estas preguntas opcionales aparecen a lo largo del cuerpo principal del texto y sirven para mejorar la comprensión del estudiante de los conceptos y la teoría presentados. A menudo la solución de un ejemplo se complementa con una solución gráfica o numérica. Las soluciones completas de estos ejercicios se dan en el *Instructor´s manual*.

Exploración con TECNOLOGÍA

En el primer párrafo de la sección 3.1 se señaló que el monto acumulado de una cuenta que gana un interés *compuesto continuo* a la larga superará, con mucho, el monto acumulado de una cuenta que gana interés a la misma tasa nominal, pero con un interés simple. Ilustramos este hecho con el siguiente ejemplo.

Suponga que usted deposita \$1000 en la cuenta I, que genera intereses a la tasa de 10% anual compuesto en forma continua de modo que el monto acumulado al final de t años es $A_1(t) = 1000e^{0.1t}$. Suponga que también deposita \$1000 en la cuenta II, que genera un interés simple a la tasa de 10% anual, por lo que el monto acumulado al final de t años es $A_2(t) = 1000(1 + 0.1t)$. Utilice una herramienta de graficación para trazar las gráficas de las funciones A_1 y A_2 en la ventana de visualización $[0, 20] \times [0, 10{,}000]$ para ver las cantidades acumuladas de $A_1(t)$ y $A_2(t)$ durante un periodo de 20 años.

Resumen de las fórmulas y términos principales

Cada revisión de sección comienza con el resumen, destacando las ecuaciones importantes y los términos con los correspondientes números de página para una revisión rápida.

CAPÍTULO 5 Resumen de las fórmulas y términos principales

FÓRMULAS

1. Leyes para la suma de matrices	
a. Ley conmutativa	$A + B = B + A$
b. Ley asociativa	$(A + B) + C = A + (B + C)$
2. Leyes para la multiplicación de matrices	
a. Ley asociativa	$(AB)C = A(BC)$
b. Ley distributiva	$A(B + C) = AB + AC$
3. Inversa de una matriz 2×2	Si $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ y $D = ad - bc \neq 0$ entonces $A^{-1} = \frac{1}{D}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$
4. Solución del sistema $AX = B$ (A no es singular)	$X = A^{-1}B$

TÉRMINOS

columna unitaria (254)
escalar (280)
forma escalonada reducida de una matriz (253)
inversa de una matriz (302)
matriz (276)
matriz aumentada (252)
matriz columna (276)
matriz cuadrada (276)
matriz de coeficientes (252)
matriz identidad (291)
matriz no singular (302)
matriz renglón (276)
matriz singular (302)
método de eliminación de Gauss-Jordan (250)
operaciones por renglón (254)
parámetro (243)
pivotear (255)
producto matricial (288)
producto por un escalar (280)
sistema de ecuaciones lineales (242)
sistema dependiente (244)
sistema equivalente (250)
sistema inconsistente (244)
solución de un sistema de ecuaciones lineales (242)
tamaño de una matriz (276)
transpuesta de una matriz (280)

Preguntas de revisión de conceptos

Estas preguntas dan al lector la oportunidad de comprobar su conocimiento acerca de las definiciones y conceptos básicos que figuran en cada capítulo.

CAPÍTULO 5 Preguntas de revisión de conceptos

Llene los espacios en blanco.

1. **a.** Dos líneas pueden intersecar el plano en (a) exactamente ____ punto, (b) _____ puntos infinitos o (c) _____ punto.
   b. Un sistema de dos ecuaciones lineales con dos variables pueden tener: (a) una solución _____, (b) una _____ infinidad de soluciones o (c) _____ solución.
2. Para encontrar el (los) punto(s) de intersección de dos líneas, resolvemos el sistema de _____ que describe las dos líneas.
3. Las operaciones por renglón utilizadas en el método de eliminación Gauss-Jordan se denotan por _____, _____ y _____.

b. Un sistema de ecuaciones lineales con al menos tantas ecuaciones como variables pueden tener _____ solución, _____ soluciones o una solución _____.

5. Dos matrices son iguales siempre que tengan el mismo _____ y sus correspondientes _____ son iguales.
6. Dos matrices se pueden sumar (restar) si ambos tienen el mismo _____. Para sumar o restar dos matrices, se deben sumar o restar sus entradas _____.
7. La transpuesta de una matriz _____ con elementos a_{ij} es la

Ejercicios de revisión

Ofrecen una revisión sólida del material del capítulo, para lo cual, los ejercicios de revisión contienen ejercicios rutinarios de cálculo seguidos por problemas aplicados.

CAPÍTULO 5 Ejercicios de revisión

En los ejercicios 1 a 4 realice las operaciones si es posible.

1. $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$
2. $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$
3. $\begin{bmatrix} -3 & 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$
4. $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$

9. $2A + 3B$
10. $3A - 2B$
11. $2(3A)$
12. $2(3A - 4B)$
13. $A(B - C)$
14. $AB + AC$
15. $A(BC)$
16. $\frac{1}{2}(CA - CB)$

En los ejercicios 17 a 24 resuelva el sistema de ecuaciones lineales por el método de eliminación de Gauss-Jordan.

17. $\begin{aligned} 2x - 3y &= 5 \\ 3x + 4y &= -1 \end{aligned}$
18. $\begin{aligned} 3x + 2y &= 3 \\ 2x - 4y &= -14 \end{aligned}$
19. $\begin{aligned} x - y + 2z &= 5 \\ 3x + 2y + z &= 10 \\ 2x - 3y - 2z &= -10 \end{aligned}$
20. $\begin{aligned} 3x - 2y + 4z &= 16 \\ 2x + y - 2z &= -1 \\ x + 4y - 8z &= -18 \end{aligned}$

Antes de continuar . . .

Ubicados al final de cada revisión del capítulo, estos ejercicios dan al lector la oportunidad de ver si han llegado a dominar las habilidades básicas de cálculo desarrollado en cada capítulo. Si resuelven un problema de forma incorrecta, pueden acudir a la página web de la obra y volver a intentarlo. De hecho, pueden seguir intentando hasta hacerlo bien.

CAPÍTULO 5 Antes de continuar . . .

1. Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones lineales, utilizando el método de eliminación de Gauss-Jordan:
$$\begin{aligned} 2x + y - z &= -1 \\ x + 3y + 2z &= 2 \\ 3x + 3y - 3z &= -5 \end{aligned}$$
2. Encuentre la(s) solución(es), si existe, del sistema de ecuaciones lineales cuya matriz aumentada en forma reducida es la siguiente.
   a. $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$ **b.** $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$
   c. $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$ **d.** $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$
4. Sea
$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$
$$C = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$
Encuentre (a) AB, (b) $(A + C^T)B$ y (c) $C^TB - AB^T$.
5. Encuentre A^{-1} si
$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$
6. Resuelva el sistema
$$2x \quad + z = 4$$

Explore y analice

Estas preguntas opcionales se pueden discutir en clase o asignarse como tarea y generalmente requieren más atención y esfuerzo que los ejercicios habituales. También se pueden utilizar para agregar un componente de escritura a la clase o como proyectos de equipo. En el *Instructor´s Manual* se proporcionan soluciones completas a estos ejercicios.

Explore y analice

1. Piense en un sistema compuesto de dos ecuaciones lineales con dos variables. ¿El sistema puede tener exactamente dos soluciones? ¿Exactamente tres soluciones? ¿Exactamente un número finito de soluciones?
2. Suponga que al menos una de las ecuaciones en un sistema compuesto de dos ecuaciones con dos variables es no lineal. ¿El sistema puede no tener solución? ¿Exactamente una solución? ¿Exactamente dos soluciones? ¿Exactamente un número finito de soluciones? ¿Una infinidad de soluciones? Ilustre cada respuesta con un esquema.

Portafolios

Las experiencias de la vida real de una diversidad de profesionales que utilizan las matemáticas en su lugar de trabajo se relatan en estas entrevistas. Entre los entrevistados se cuentan un gerente de cuentas senior en PepsiCo y un asociado en Wall Street, que utilizan la estadística y el cálculo en opciones por escrito.

PORTAFOLIO Deb Farace

PUESTO Gerente senior de cuentas nacionales
INSTITUCIÓN PepsiCo Beverages & Foods

Mi trabajo en la división de cuentas nacionales de PepsiCo Beverages & Foods exige que entienda las matemáticas aplicadas para controlar las variables asociadas con la realización de utilidades, manufactura, producción y aún más importante la venta de nuestros productos a canales de clubes masivos. Ejemplos de estas grandes tiendas de "productos de calidad a un gran precio" son Wal*Mart, Costco y Target. Los tipos de productos que manejo incluyen Gatorade, Tropicana y Quaker.

Nuestros estudios muestran que las ventas a través de las tiendas de abarrotes se están nivelando o disminuyendo en su totalidad en vez de que suceda en las grandes tiendas como las mencionadas. Así que para incrementar al máximo el crecimiento en este segmento de nuestro negocio, me entrevisto con las oficinas regionales de compras de estas cadenas y discuto varias opciones de empaque, fijación de precios, promoción de productos y envío para que podamos competir con éxito en el mercado.

Varios factores deben tomarse en cuenta para satisfacer las predicciones financieras de mi empresa. La precisión al utilizar modelos matemáticos es clave en este caso, puesto que muchas variables pueden impactar la toma de decisiones de último minuto. Variables ampliadas de la oferta y la demanda incluyen la época del año, el panorama competitivo, la distribución especial de cupones y otras promociones, los ciclos de ventas y los días festivos, el tamaño de las tiendas y sí, incluso el clima.

Por ejemplo, es natural suponer que cuando hace calor las personas comprarán más productos que mitigan la sed como Gatorade. Pero como nuestro negocio es tan preciso, tenemos que entender matemáticamente cómo el clima afecta las ventas. Un modelo matemático desarrollado por Gatorade analiza datos a largo plazo que impactan las ventas por mercado geográfico debido al clima. Sus hallazgos incluyen ventas exponencialmente incrementadas de Gatorade por cada grado por encima de 90 grados. Comparto nuestro análisis matemático, como este estudio con los compradores, y negocio grandes pedidos con base en pronósticos del clima de último minuto. El resultado: ventas de producto incrementadas con base en las matemáticas.

© kolvenbach/Alamy

Videos de ejemplo

Disponible en el Online Resource Center y Enhanced WebAssign, estos ejemplos de video ofrecen horas de instrucción de la reconocida profesora Deborah Upton, de Stonehill College. Observe como guía al lector por medio de ejemplos clave del libro, paso a paso, dándoles fundamento en las habilidades que deben dominar. Cada ejemplo disponible en línea está identificado por el icono de video situado al margen.

VIDEO

EJEMPLO DE APLICACIÓN 3 Estudios del consumidor En un estudio realizado de 100 bebedores de café, se encontró que 70 toman azúcar, 60 toman crema y 50 toman crema y azúcar con su café. ¿Cuántos bebedores de café toman azúcar o crema con su café?

Solución Sea U el conjunto de los 100 bebedores de café encuestados y sean

$$A = \{x \in U \mid x \text{ toman azúcar}\}$$
$$B = \{x \in U \mid x \text{ toman crema}\}$$

Por tanto, $n(A) = 70$, $n(B) = 60$ y $n(A \cap B) = 50$. El conjunto de bebedores de café que toman azúcar o crema con su café está dado por $A \cup B$. Utilizando la ecuación (4), encontramos que

$$\begin{aligned} n(A \cup B) &= n(A) + n(B) - n(A \cap B) \\ &= 70 + 60 - 50 = 80 \end{aligned}$$

APOYOS PARA LA ENSEÑANZA

Este libro cuenta con una serie de complementos para el profesor, los cuales están en inglés y sólo se proporcionan a los docentes que adopten la presente obra como texto para sus cursos. Para mayor información, comuníquese a las oficinas de nuestros representantes o a las siguientes direcciones de correo electrónico:

Cengage Learning México y Centroamérica clientes@cengagelearning.com.mx
Cengage Learning América del Sur clicengage@andinet.com
Cengage Learning Caribe grisel.colon@cengage.com

INSTRUCTOR´S SOLUTIONS MANUAL (ISBN 0-495-55998-9) de Soo T. Tan
El manual de soluciones completo proporciona las respuestas a todos los problemas del libro, así como para las preguntas de "Exploración con tecnología" y "Explore y analice".

POWERLECTURE (ISBN 0-495-56002-2)
Este amplio CD-ROM incluye el *Instructor's Solutions Manual*, diapositivas de PowerPoint, y el examen computarizado ExamView® con exámenes generados por algoritmos, preguntas para crear, entregar y personalizar.

ENHANCED WEBASSIGN
Respuesta instantánea y facilidad de uso son sólo dos razones por las que WebAssign es el sistema de tareas más utilizado en la educación superior. WebAssign le permite asignar, recoger, graduar y registrar las asignaciones de tareas a través de la Web. Este probado sistema de tareas ha sido mejorado para incluir enlaces a las secciones de libros de texto, ejemplos de video y tutoriales de problemas específicos. Enhanced WebAssign es más que un sistema de tareas, es un completo sistema de aprendizaje para estudiantes de matemáticas.

AGRADECIMIENTOS

Deseo expresar mi agradecimiento a cada uno de los siguientes revisores de la quinta edición, cuyas sugerencias han ayudado a tener una obra mejorada por mucho.

Paul Abraham
Kent State University—Stark

James Adair
Missouri Valley College

Jill Britton
Camosun College

Debra D. Bryant
Tennessee Technological University

Michelle Dedeo
University of North Florida

Scott L. Dennison
University of Wisconsin—Oshkosh

Christine Devena
Miles Community College

Andrew Diener
Christian Brothers University

Mike Everett
Santa Ana College

Kevin Ferland
Bloomsburg University

Tao Guo
Rock Valley College

Mark Jacobson
Montana State University—Billings

Sarah Kilby
North Country Community College

Murray Lieb
New Jersey Institute of Technology

Lia Liu
University of Illinois at Chicago

Rebecca Lynn
Colorado State University

Mary T. McMahon
North Central College

Daniela Mihai
University of Pittsburgh

Kathy Nickell
College of DuPage

Carol Overdeep
Saint Martin's University

Mohammed Rajah
Miracosta College

Dennis H. Risher
Loras College

Brian Rodas
Santa Monica College

Dr. Arthur Rosenthal
Salem State College

Abdelrida Saleh
Miami Dade College

Stephanie Anne Salomone
University of Portland

Mohammad Siddique
Virginia Union University

Jennifer Strehler
Oakton Community College

Ray Toland
Clarkson University

Justin Wyss-Gallifent
University of Maryland at College Park

También quiero agradecer a los revisores de la edición anterior, cuyos comentarios y sugerencias en gran medida han dado forma a la edición actual.

Faiz Al-Rubaee
University of North Florida

Jose F. Alvarado
University of Texas, Pan American

Ronald Barnes
University of Houston

Larry Blaine
Plymouth State College

Albert Bronstein
Purdue University

Kimberly Jordan Burch
Montclair State University

Peter Casazza
University of Missouri—Columbia

J. Curtis Chipman
Oakland University

Lisa Cox
Texas A&M University

Candy Giovanni
Michigan State University

Harvey Greenwald
California Polytechnic State University—San Luis Obispo

Mohammed Kazemi
University of North Carolina—Charlotte

Rasul Khan
Cleveland State University

Daniel Lee
Southwest Texas State University

Jeffrey Lee
Texas Tech University

Joyce Longman
Villanova University

C. D. Luning
Sam Houston State University

Joseph Macaluso
DeSales University

Donald K. Mason
Elmhurst College

Dean Moore
Florida Community College at Jacksonville

Marna Mozeff
Drexel University

James Olsen
North Dakota State University

Wayne B. Powell
Oklahoma State University

Deborah Primm
Jacksonville State University

Virginia Puckett
Miami Dade College

Geetha Ramachandran
California State University, Sacramento

Mary E. Rerick
University of North Dakota

Allan Silberger
Cleveland State University

Mehrdad Simkani
University of Michigan, Flint

Anne Siswanto
East Los Angeles College

Laurence Small
L. A. Pierce College

Ray Stanton
Fresno City College

Michael Sterner
University of Montevallo

Giovanni Viglino
Ramapo College of New Jersey

Joyce Vilseck
Texas A&M University, Kingston

Jennifer Whitfield
Texas A&M University

Hiroko K. Warshauer
Texas State University—San Marcos

Hing-Sing Yu
University of Texas, San Antonio

También quiero dar las gracias a Jerrold Grossman y Tao Guo por sus cuantiosas sugerencias útiles para mejorar el texto. Un agradecimiento especial a Jill Britton por contribuir con algunos de los problemas de programación lineal nuevos para esta edición. También quiero agradecer al personal de edición, de producción y de marketing de Cengage Learning: Carolyn Crockett, Danielle Derbenti, Catie Ronquillo, Rebecca Dashiell, Jeannine Lawless, Cheryll Linthicum, Ashley Pickering, Joe Rogove, Angela Kim y Sam Subity por toda su ayuda y apoyo durante el desarrollo y la producción de esta edición. También agradezco a Martha Emry y Betty Duncan, que hicieron un trabajo excelente para asegurar la precisión y la legibilidad de esta edición. En palabras sencillas, el equipo con el que he estado trabajando es excelente, y realmente aprecio todo su arduo trabajo y esfuerzos. Por último, un agradecimiento especial a los matemáticos Chris Shannon y Mark van der Lann en UC Berkeley, Peter Blair Henry en Stanford, Jonathan D. Farley en Cal Tech y Navin Khaneja en Harvard, que tomaron tiempo libre de sus apretadas agendas para describir cómo se utilizan las matemáticas en sus investigaciones. Las imágenes y aplicaciones de su investigación aparecen en las portadas de mi serie de matemáticas aplicadas.

S. T. Tan

Un agradecimiento muy especial de Cengage Learning a las siguientes personas y universidades, por su valioso apoyo en el desarrollo de esta obra:

Medellín Colombia
Universidad Eafit

- Patricia Gómez Palacio
- Gustavo Antonio Mejía Quirós
- Gustavo de Jesús Castañeda Ramírez
- Rubén Darío Borja Tamayo
- Walter Andrés Acevedo Nanclares
- Arturo Yépez Ocampo
- Jorge Iván Jiménez Gómez
- Dora Leonor Naranjo Correa
- Rodrigo Hoyos Campuzano
- María Eugenia Puerta Yepes
- Heriberto Higuita David
- Juan Carlos Restrepo Santamaría
- Hernán Argenis Monsalve Pérez
- José Alberto Rúa Vásquez
- Martha Lucía Moreno Jaramillo

Bogotá Colombia
Universidad de la Sabana

- Omar Rodríguez Rueda
- Josefina García

Universidad de la Salle

- Jesús María Cárdenas
- Jaleydi Cárdenas
- Juvitsa Campos

Universidad de San Martín

- Lyda Magnolia Soto Urrea

Universidad de los Libertadores

- Edna Margarita Roa Vargas
- John Jairo Leal Gómez
- Carlos Alberto Escobar Otero
- Rafael Antonio Acosta Rodríguez
- Javier Fernando Pineda Gacharna
- Néstor Calderón Ramos
- Diana María Rodríguez Morantes
- María Liliana Méndez
- John Ademir Palomino Parra
- Lady Andrea Ibáñez Castelblanco
- John Jairo Vásquez
- Héctor Lozano Lozano
- Henry Mauricio Pulido Olaye
- Jorge Hernández
- Edison Caicedo
- José Luis Gamarra Palacios
- Magda Briggette Villamil
- Nelson Barrantes
- Luis Orlando Garzón Rico

ACERCA DEL AUTOR

SOO T. TAN obtuvo su grado universitario en el Massachusetts Institute of Technology, su grado de maestría en la University of Wisconsin–Madison y su doctorado en la University of California en Los Angeles. Ha publicado numerosos artículos acerca de teoría del control óptimo, análisis numérico y matemáticas financieras. En la actualidad es profesor emérito de matemáticas en Stonehill College.

En el momento en que empecé a escribir el primero de lo que resultó ser una serie de libros de matemáticas para estudiantes de negocios, y de ciencias sociales y de la vida, tenía unos cuantos años de experiencia enseñando matemáticas a estudiantes de carreras no matemáticas. Una de las lecciones más importantes que aprendí de mi primera experiencia enseñando en estos cursos, es que muchos de los estudiantes ingresan a ellos con un cierto grado de aprensión. Esta toma de conciencia condujo a la aproximación intuitiva que he adoptado en todos mis libros. Como se podrá ver, trato de introducir cada concepto matemático abstracto mediante un ejemplo extraído de una experiencia común de la vida real. Una vez que la idea se ha transmitido, entonces procedo a precisarla, lo cual garantiza que ningún rigor matemático se pierde en este tratamiento intuitivo de la materia. Otra lección que aprendí de mis alumnos es que tienen una apreciación mucho mayor del material si las aplicaciones se han extraído de sus campos de interés y de las situaciones que se producen en el mundo real. Ésta es una razón por la que el lector ve muchos ejercicios en mis libros que siguen el modelo de datos recabados de periódicos, revistas, periódicos y otros medios de comunicación. Ya sea el mercado de medicamentos para reducir el colesterol, el financiamiento de una casa, hacer una oferta por los derechos de cable, la banda ancha doméstica de Internet, o las ventas anuales de Starbucks, que tejen los temas de interés actual en mis ejemplos y ejercicios para mantener pertinente la obra para todos mis lectores.

FUNDAMENTOS DE ÁLGEBRA

1

ESTE CAPÍTULO CONTIENE un breve repaso del álgebra que utilizará en el curso. En el proceso de resolver numerosos problemas prácticos, tendrá que solucionar ecuaciones algebraicas. También simplificará expresiones algebraicas. El capítulo contiene además un breve repaso de las desigualdades y del valor absoluto; sus usos van desde la descripción de los dominios de funciones hasta la formulación de problemas prácticos.

Con base en proyecciones actuales del producto interno bruto de un cierto país (PIB), ¿cuándo el producto interno bruto será igual o excederá por primera vez $58 mil millones? En el ejemplo 7, página 57 aprenderemos a resolver este problema.

1.1 Números reales

El conjunto de los números reales

En la vida diaria utilizamos *números reales* para describir varias cantidades como temperatura, sueldos, tasa de porcentaje anual, la talla del calzado, el promedio de calificaciones, etc. Algunos de los símbolos que empleamos para representar números reales son

$$3, \quad -17, \quad \sqrt{2}, \quad 0.666\ldots, \quad 113, \quad 3.9, \quad 0.12875$$

Para construir el conjunto de los números reales, comenzamos con el conjunto de **números naturales** (también conocidos como números de contar)

$$N = \{1, 2, 3, \ldots\}$$

y adjuntamos otros números a éste. El conjunto

$$W = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

de **números enteros** se obtiene si adjuntamos el número 0 a N. Si adjuntamos los negativos de los números naturales al conjunto W, obtenemos el conjunto de **enteros**

$$I = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

A continuación consideramos el conjunto Q de **números racionales**, números de la forma $\frac{a}{b}$ donde a y b son enteros, con $b \neq 0$. Utilizando notación de conjuntos escribimos

$$Q = \left\{\tfrac{a}{b} \,\middle|\, a \text{ y } b \text{ son enteros}, b \neq 0\right\}$$

Observe que I está contenido en Q puesto que cada entero puede escribirse en la forma $\frac{a}{b}$, con $b = 1$. Por ejemplo, el entero 6 puede escribirse en la forma $\frac{6}{1}$. Simbólicamente, expresamos el hecho de que I está contenido en Q al escribir

$$I \subset Q$$

Sin embargo, Q no está contenido en I puesto que fracciones tales como $\frac{1}{2}$ y $\frac{23}{25}$ no son enteros. Para mostrar las relaciones de los conjuntos N, W, I y Q, escribimos

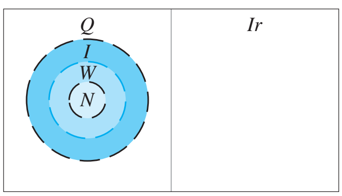
$$N \subset W \subset I \subset Q$$

Esto expresa que N es un subconjunto propio de W, W es un subconjunto propio de I, y así sucesivamente.*

Por último obtenemos el conjunto de números reales al adjuntar el conjunto de números racionales al conjunto de **números irracionales** (Ir) —números que no pueden expresarse en la forma $\frac{a}{b}$, donde a y b son enteros ($b \neq 0$)—. Ejemplos de números irracionales son $\sqrt{2}, \sqrt{3}$, π, etc. Por tanto, el conjunto

$$R = Q \cup Ir$$

que comprende todos los números racionales y los números irracionales se llama conjunto de los **números reales** (figura 1.)



Q = Racionales
I = Enteros
W = Números enteros
N = Números naturales
Ir = Irracionales

FIGURA 1
El conjunto de los números reales se compone del conjunto de números racionales más el conjunto de los números irracionales.

* Un conjunto A es un subconjunto propio de un conjunto B si cada elemento de un conjunto A también es un elemento de un conjunto B, y si existe por lo menos un elemento en B que no está en A.

Representación de números reales como decimales

Todo número real puede escribirse como decimal. Un número racional puede representarse como un decimal periódico o terminal. Por ejemplo, $\frac{2}{3}$ está representado por el decimal periódico

$$0.66666666\ldots \qquad \text{Decimal periódico —observe que el entero 6 se repite.}$$

el que también puede escribirse $0.\overline{6}$, donde la raya sobre el 6 indica que se repite de forma indefinida. El número $\frac{1}{2}$ está representado por el decimal terminal

$$0.5 \qquad \text{Decimal terminal}$$

Cuando un número irracional se representa como decimal, ni se termina ni se repite. Por ejemplo,

$$\sqrt{2} = 1.41421\ldots \quad \text{y} \quad \pi = 3.14159\ldots$$

La tabla 1 resume esta clasificación de números reales.

TABLA **1**

El conjunto de los números reales

Conjunto	Descripción	Ejemplos	Representación decimal
Números naturales	Números de contar	$1, 2, 3, \ldots$	Decimales terminales
Números enteros	Números de contar y 0	$0, 1, 2, 3, \ldots$	Decimales terminales
Enteros	Números naturales, sus negativos y 0	$\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots$	Decimales terminales
Números racionales	Números que pueden escribirse en la forma $\frac{a}{b}$, donde a y b son enteros y $b \neq 0$	$-3, -\frac{3}{4}, -0.22\overline{2}, 0, \frac{5}{6}, 2, 4.31\overline{1}$	Decimales terminales o periódicos
Números irracionales	Números que no pueden escribirse en la forma $\frac{a}{b}$, donde a y b son enteros y $b \neq 0$	$\sqrt{2}, \sqrt{3}, \pi$ $1.414213\ldots,$ $1.732050\ldots$	Decimales no terminales, no periódicos
Números reales	Números racionales e irracionales	Todos los anteriores	Todos los tipos de decimales

Representación de números reales en una línea de números

Los números reales pueden estar geométricamente representados por puntos sobre una línea. Esta línea de *números reales* o *coordenadas* se construye como sigue: seleccione arbitrariamente un punto sobre una línea recta para representar el número 0. Este punto se llama *origen*. Si la línea es horizontal, seleccione un punto a una distancia conveniente a la derecha del origen para representar el número 1. De esta manera se determina la escala de la línea de números.

El punto que representa cada número real positivo x queda a x unidades a la derecha de 0, y el punto que representa cada número real negativo x queda a $-x$ unidades a la izquierda de 0. Por tanto, los números reales pueden estar representados por puntos sobre una línea, de modo que correspondiente a cada número real haya exactamente un punto sobre una línea y viceversa. De esta manera se establece una *correspondencia uno a uno* entre el conjunto de los números reales y el conjunto de puntos sobre la línea de números con todos los números positivos situados a la derecha del origen y todos los números negativos situados a la izquierda del origen (figura 2).

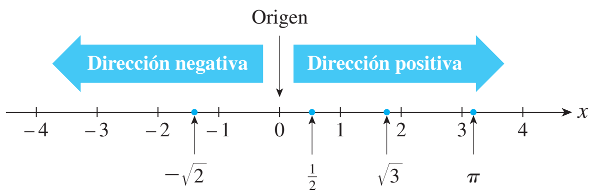


FIGURA **2**
Línea de los números reales.

Operaciones con números reales

Dos números reales pueden combinarse para obtener un número real. La operación de adición, escrita $+$, permite combinar dos números cualesquiera a y b para obtener su *suma*, denotada por $a + b$. Otra operación, la multiplicación escrita $\cdot$, permite combinar dos números reales cualesquiera a y b para formar su producto, el número $a \cdot b$ (más simplemente escrito ab). Estas dos operaciones están sujetas a las reglas de operación dadas en la tabla 2.

TABLA 2

Reglas de operación de los números reales

Regla		Ilustración
Bajo adición		
1. $a + b = b + a$	Ley conmutativa de la adición	$2 + 3 = 3 + 2$
2. $a + (b + c) = (a + b) + c$	Ley asociativa de la adición	$4 + (2 + 3) = (4 + 2) + 3$
3. $a + 0 = a$	Ley de identidad de la adición	$6 + 0 = 6$
4. $a + (-a) = 0$	Ley inversa de la adición	$5 + (-5) = 0$
Bajo multiplicación		
1. $ab = ba$	Ley conmutativa de la multiplicación	$3 \cdot 2 = 2 \cdot 3$
2. $a(bc) = (ab)c$	Ley asociativa de la multiplicación	$4(3 \cdot 2) = (4 \cdot 3)2$
3. $a \cdot 1 = 1 \cdot a$	Ley de identidad de la multiplicación	$4 \cdot 1 = 1 \cdot 4$
4. $a\left(\dfrac{1}{a}\right) = 1 \qquad (a \neq 0)$	Ley inversa de la multiplicación	$3\left(\dfrac{1}{3}\right) = 1$
Bajo adición y multiplicación		
1. $a(b + c) = ab + ac$	Ley distributiva de la multiplicación con respecto a la adición	$3(4 + 5) = 3 \cdot 4 + 3 \cdot 5$

La operación de sustracción se define en función de la adición. Por tanto

$$a + (-b)$$

donde $-b$ es el inverso aditivo de b, puede escribirse en la forma más conocida $a - b$ y decimos que b se sustrae de a. Asimismo, la operación de división se define en función de la multiplicación. Recuerde que el inverso multiplicativo de un número real no cero b es $\frac{1}{b}$, también escrito b^{-1}. Entonces

$$a\left(\frac{1}{b}\right)$$

se escribe $\frac{a}{b}$, y decimos que a está dividido entre b. Por tanto, $4\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{4}{3}$. Recuerde, el cero no tiene un inverso multiplicativo porque la división entre cero no está definida.

¿Son válidas las operaciones de asociatividad y conmutatividad para la sustracción y la división? Veamos primero la asociatividad, la respuesta es no, puesto que

$$a - (b - c) \neq (a - b) - c \qquad 7 - (4 - 2) \neq (7 - 4) - 2, \text{ o } 5 \neq 1$$

y

$$a \div (b \div c) \neq (a \div b) \div c \qquad 8 \div (4 \div 2) \neq (8 \div 4) \div 2, \text{ o } 4 \neq 1$$

Asimismo, la conmutatividad no es válida porque

$$a - b \neq b - a \qquad 7 - 4 \neq 4 - 7, \text{ o } 3 \neq -3$$

y

$$a \div b \neq b \div a \qquad 8 \div 4 \neq 4 \div 8, \text{ o } 2 \neq \tfrac{1}{2}$$

EJEMPLO 1 Exprese la propiedad de los números reales que justifica cada enunciado.

Enunciado	Propiedad
a. $4 + (x - 2) = 4 + (-2 + x)$	Ley conmutativa de la adición
b. $(a + 2b) + c = a + (2b + c)$	Ley asociativa de la adición
c. $x(y - z + 2) = (y - z + 2)x$	Ley conmutativa de la multiplicación
d. $4(xy^2) = (4x)y^2$	Ley asociativa de la multiplicación
e. $x(y - 2) = xy - 2x$	Ley distributiva de la multiplicación bajo la adición

Con las propiedades de los números reales enunciadas arriba, podemos determinar todas las propiedades algebraicas de los números reales. Algunas de las propiedades más importantes se dan en las tablas 3 a 5.

TABLA 3

Propiedades de los números negativos

Propiedad	Ilustración
1. $-(-a) = a$	$-(-6) = 6$
2. $(-a)b = -(ab) = a(-b)$	$(-3)4 = -(3 \cdot 4) = 3(-4)$
3. $(-a)(-b) = ab$	$(-3)(-4) = 3 \cdot 4$
4. $(-1)a = -a$	$(-1)5 = -5$

TABLA 4

Propiedades que implican el 0

Propiedad
1. $a \cdot 0 = 0$
2. Si $ab = 0$, entonces $a = 0$, $b = 0$, o ambos.

TABLA 5

Propiedades de los cocientes

Propiedad		Ilustración
1. $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$ si $ad = bc$	$(b, d \neq 0)$	$\dfrac{3}{4} = \dfrac{9}{12}$ porque $3 \cdot 12 = 9 \cdot 4$
2. $\dfrac{ca}{cb} = \dfrac{a}{b}$	$(b, c \neq 0)$	$\dfrac{4 \cdot 3}{4 \cdot 8} = \dfrac{3}{8}$
3. $\dfrac{a}{-b} = \dfrac{-a}{b} = -\dfrac{a}{b}$	$(b \neq 0)$	$\dfrac{4}{-3} = \dfrac{-4}{3} = -\dfrac{4}{3}$
4. $\dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{c}{d} = \dfrac{ac}{bd}$	$(b, d \neq 0)$	$\dfrac{3}{4} \cdot \dfrac{5}{2} = \dfrac{15}{8}$
5. $\dfrac{a}{b} \div \dfrac{c}{d} = \dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{d}{c} = \dfrac{ad}{bc}$	$(b, c, d \neq 0)$	$\dfrac{3}{4} \div \dfrac{5}{2} = \dfrac{3}{4} \cdot \dfrac{2}{5} = \dfrac{3}{10}$
6. $\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{d} = \dfrac{ad + bc}{bd}$	$(b, d \neq 0)$	$\dfrac{3}{4} + \dfrac{5}{2} = \dfrac{3 \cdot 2 + 4 \cdot 5}{8} = \dfrac{13}{4}$
7. $\dfrac{a}{b} - \dfrac{c}{d} = \dfrac{ad - bc}{bd}$	$(b, d \neq 0)$	$\dfrac{3}{4} - \dfrac{5}{2} = \dfrac{3 \cdot 2 - 4 \cdot 5}{8} = -\dfrac{7}{4}$

Nota En el resto del libro se asume que todas las variables están restringidas de modo que la división por cero está excluida.

VIDEO

EJEMPLO 2 Exprese la propiedad de número real que justifica cada enunciado.

Enunciado	**Propiedad**
a. $-(-4) = 4$	Propiedad 1 de los negativos
b. Si $(4x - 1)(x + 3) = 0$, entonces $x = \frac{1}{4}$ o $x = -3$.	Propiedad 2 de las propiedades del cero
c. $\dfrac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x-3)} = \dfrac{x+1}{x-3}$	Propiedad 2 de los cocientes
d. $\dfrac{x-1}{y} \div \dfrac{y+1}{x} = \dfrac{x-1}{y} \cdot \dfrac{x}{y+1} = \dfrac{x(x-1)}{y(y+1)}$	Propiedad 5 de los cocientes
e. $\dfrac{x}{y} + \dfrac{x}{y+1} = \dfrac{x(y+1) + xy}{y(y+1)}$	Propiedad 6 de los cocientes
$= \dfrac{xy + x + xy}{y(y+1)} = \dfrac{2xy + x}{y(y+1)}$	Ley distributiva ■

1.1 Ejercicios de autoevaluación

Exprese la propiedad (o propiedades) que justifica cada enunciado.

1. $(3v + 2) - w = 3v + (2 - w)$

2. $(3s)(4t) = 3[s(4t)]$

3. $-(-s + t) = s - t$

4. $\dfrac{2}{-(u - v)} = -\dfrac{2}{u - v}$

Las soluciones a los ejercicios de autoevaluación 1.1 se encuentran en la página 7.

1.1 Preguntas de concepto

1. ¿Qué es un número natural? ¿Un número entero? ¿Un entero? ¿Un número racional? Un número irracional? ¿Un número real? Dé ejemplos de cada uno.

2. a. La ley asociativa de la adición establece que $a + (b + c) =$ ______.
b. La ley distributiva establece que $ab + ac =$ ______.

3. ¿Qué podemos decir sobre a y b si $ab \neq 0$? ¿Qué tal a, b y c, si $abc \neq 0$?

1.1 Ejercicios

En los ejercicios 1-10, clasifique el número en cuanto a tipo. (Por ejemplo, $\frac{1}{2}$ es racional y real, mientras que $\sqrt{5}$ es irracional y real.)

1. -3 **2.** -420 **3.** $\dfrac{3}{8}$ **4.** $-\dfrac{4}{125}$

5. $\sqrt{11}$ **6.** $-\sqrt{5}$ **7.** $\dfrac{\pi}{2}$ **8.** $\dfrac{2}{\pi}$

9. $2.\overline{421}$ **10.** $2.71828\ldots$

En los ejercicios 11-16 indique si el enunciado es verdadero o falso.

11. Todo entero es un número entero.

12. Todo entero es un número racional.

13. Todo número natural es un entero.

14. Todo número racional es un número real.

15. Todo número natural es un número irracional.

16. Todo número irracional es un número real.

En los ejercicios 17-36 exprese la propiedad de número real que justifica el enunciado.

17. $(2x + y) + z = z + (2x + y)$

18. $3x + (2y + z) = (3x + 2y) + z$

19. $u(3v + w) = (3v + w)u$

20. $a^2(b^2c) = (a^2b^2)c$

21. $u(2v + w) = 2uv + uw$

22. $(2u + v)w = 2uw + vw$

23. $(2x + 3y) + (x + 4y) = 2x + [3y + (x + 4y)]$

24. $(a + 2b)(a - 3b) = a(a - 3b) + 2b(a - 3b)$

25. $a - [-(c + d)] = a + (c + d)$

26. $-(2x + y)[-(3x + 2y)] = (2x + y)(3x + 2y)$

27. $0(2a + 3b) = 0$

28. Si $(x - y)(x + y) = 0$, entonces $x = y$ o $x = -y$.

29. Si $(x - 2)(2x + 5) = 0$, entonces $x = 2$ o $x = -\frac{5}{2}$.

30. Si $x(2x - 9) = 0$, entonces $x = 0$ o $x = \frac{9}{2}$.

31. $\dfrac{(x+1)(x-3)}{(2x+1)(x-3)} = \dfrac{x+1}{2x+1}$

32. $\dfrac{(2x + 1)(x + 3)}{(2x - 1)(x + 3)} = \dfrac{2x + 1}{2x - 1}$

33. $\dfrac{a + b}{b} \div \dfrac{a - b}{ab} = \dfrac{a(a + b)}{a-b}$

34. $\dfrac{x + 2y}{3x + y} \div \dfrac{x}{6x + 2y} = \dfrac{x + 2y}{3x + y} \cdot \dfrac{2(3y + y)}{x} = \dfrac{2(x + 2y)}{x}$

35. $\dfrac{a}{b + c} + \dfrac{c}{b} = \dfrac{ab + bc + c^2}{b(b + c)}$

36. $\dfrac{x + y}{x + 1} - \dfrac{y}{x} = \dfrac{x^2 - y}{x(x + 1)}$

En los ejercicios 37-42 indique si el enunciado es verdadero o falso.

37. Si $ab = 1$, entonces $a = 1$ o $b = 1$.

38. Si $ab = 0$ y $a \neq 0$, entonces $b = 0$.

39. $a - b = b - a$

40. $a \div b = b \div a$

41. $(a - b) - c = a - (b - c)$

42. $a \div (b \div c) = (a \div b) \div c$

1.1 Soluciones de los ejercicios de autoevaluación

1. Ley asociativa de la adición: $a + (b + c) = (a + b) + c$

2. Ley asociativa de la multiplicación: $a(bc) = (ab)c$

3. Ley distributiva de la multiplicación: $a(b + c) = ab + ac$
Propiedades 1 y 4 de los negativos: $-(-a) = a$; $(-1)a = -a$

4. Propiedades 1 y 2 de los negativos: $\dfrac{a}{-b} = \dfrac{-a}{b} = -\dfrac{a}{b}$

1.2 Polinomios

Exponentes

Expresiones como 2^5, $(-3)^2$ y $\left(\frac{1}{4}\right)^4$ son expresiones exponenciales. De forma más general, si n es un número natural y a es un número real, entonces a^n representa el producto del número real a por sí mismo n veces.

Notación exponencial

Si a es un número real y n es un número natural, entonces

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{n \text{ factores}} \qquad 3^4 = \underbrace{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}_{4 \text{ factores}}$$

El número natural n se llama **exponente** y el número real a se llama **base**.

EJEMPLO 1

a. $4^4 = (4)(4)(4)(4) = 256$

b. $(-5)^3 = (-5)(-5)(-5) = -125$

c. $\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8}$

d. $\left(-\frac{1}{3}\right)^2 = \left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{9}$ ■

Cuando evaluamos expresiones como $3^2 \cdot 3^3$ se utiliza la siguiente propiedad de los exponentes para escribir el producto de forma exponencial.

Propiedad 1

Si m y n son números naturales y a es cualquier número real, entonces

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n} \qquad 3^2 \cdot 3^3 = 3^{2+3} = 3^5$$

Para verificar que la propiedad 1 se deriva de la definición de una expresión exponencial, observamos que el número de factores en la expresión exponencial

$$a^m \cdot a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{m \text{ factores}} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{n \text{ factores}}$$

es $m + n$.

EJEMPLO 2

a. $3^2 \cdot 3^3 = 3^{2+3} = 3^5 = 243$

b. $(-2)^2 \cdot (-2)^5 = (-2)^{2+5} = (-2)^7 = -128$

c. $(3x) \cdot (3x)^3 = (3x)^{1+3} = (3x)^4 = 81x^4$ ■

Tenga cuidado de aplicar el exponente sólo a la base indicada. Observe que

El exponente se aplica a $4x$.

$$4 \cdot x^2 = 4x^2 \neq (4x)^2 = 4^2 \cdot x^2 = 16x^2$$

El exponente se aplica sólo a la base x.

y

El exponente se aplica a -3.

$$-3^2 = -9 \neq (-3)^2 = 9$$

El exponente se aplica sólo a la base 3.

Polinomios

Recuerde que una *variable* es una letra que se utiliza para representar cualquier elemento de un conjunto dado. Sin embargo, a menos que se especifique lo contrario, las variables en este libro representarán números reales. En ocasiones las consideraciones físicas restringen los valores que una variable puede tener. Por ejemplo, si la variable x denota el número de televisores vendidos cada día en una tienda de electrónica, entonces x debe ser un entero no negativo. En otras ocasiones x debe restringirse para que una expresión tenga sentido. Por ejemplo, en la expresión $\frac{1}{x+2}$, x no podemos utilizar el valor -2 puesto que la división por 0 no está permitida. El conjunto de todos los números reales que una variable puede asumir se conoce como el *dominio de la variable*.

En contraste con una variable, una *constante* es un número fijo o letra cuyo valor permanece fijo a lo largo de una discusión particular. Por ejemplo, en la expresión $\frac{1}{2}gt^2$, la cual da la distancia en pies recorrida por un cuerpo en caída libre cerca de la superficie de la Tierra en t segundos a partir del reposo, la letra g representa la aceleración constante de la gravedad (aproximadamente 32 pies/segundo/segundo), mientras que la letra r es una variable con dominio compuesto de números reales no negativos.

Combinando constantes y variables mediante el uso de la adición, sustracción, multiplicación, división, exponenciación y extracción de raíces, se obtienen *expresiones algebraicas*. Ejemplos de expresiones algebraicas son

$$3x - 4y \qquad 2x^2 - y + \frac{1}{xy} \qquad \frac{ax - b}{1 - x^2} \qquad \frac{3xy^{-2} + \pi}{x^2 + y^2 + z^2}$$

donde a y b son constantes y x, y y z son variables. Por intimidantes que pudieran parecer algunas de estas expresiones, recuerde que son sólo números reales. Por ejemplo, si $x = 1$ y $y = 4$, entonces la segunda expresión representa el número

$$2(1)^2 - 4 + \frac{1}{(1)(4)}$$

o $-\frac{7}{4}$, obtenido al reemplazar x y y en la expresión por los valores apropiados.

Los polinomios son una clase importante de expresiones algebraicas. Los polinomios más simples son los de *una* variable.

Polinomio en una variable

Un **polinomio** en x es una expresión de la forma

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$$

donde n es un entero no negativo y $a_0, a_1, \ldots, a_n$ son números reales, con $a_n \neq 0$.

Las expresiones a_kx^k se llaman los *términos* del polinomio. Los números $a_0, a_1, \ldots,$ a_n se llaman los *coeficientes* de $1, x, x^2, \ldots, x^n$, respectivamente. El coeficiente a_n de x^n (la potencia mayor de x) se llama el *coeficiente principal* del polinomio. El entero no negativo n da el *grado* del polinomio. Por ejemplo, considere el polinomio

$$-2x^5 + 8x^3 - 6x^2 + 3x + 1$$

1. Los términos del polinomio son $-2x^5$, $8x^3$, $-6x^2$, $3x$ y 1.
2. Los coeficientes de $1, x, x^2, x^3, x^4$ y x^5 son 1, 3, -6, 8, 0 y -2, respectivamente.
3. El coeficiente principal del polinomio es -2.
4. El grado del polinomio es 5.

Un polinomio de sólo un término (como $2x^3$) se llama *monomio*; un polinomio de exactamente dos términos (como $x^3 + x$) se llama *binomio*; y un polinomio de sólo tres términos (como $-2x^3 + x - 8$) se llama *trinomio*. Asimismo, un polinomio compuesto de un término (constante) a_0 (como el monomio -8) se llama *polinomio constante*. Observe que el grado de un polinomio constante a_0, con $a_0 \neq 0$ es cero porque podemos escribir $a_0 = a_0x^0$ y vemos que $n = 0$ en esta situación. Si todos los coeficientes de un polinomio son cero, se llama *polinomio cero* y está denotado por 0. Al polinomio cero no se le asigna grado.

La mayor parte de la terminología utilizada para un polinomio en una variable se traslada a la discusión de polinomios en varias variables. Pero el *grado de un término* en un polinomio en varias variables se obtiene al sumar las potencias de todas las variables en el término, y el *grado del polinomio* está dado por el mayor grado de todos sus términos. Por ejemplo, el polinomio

$$2x^2y^5 - 3xy^3 + 8xy^2 - 3y + 4$$

es un polinomio en las dos variables x y y. Consta de cinco términos con grados 7, 4, 3, 1 y 0, respectivamente. Por consiguiente, el grado del polinomio es 7.

Adición y sustracción de polinomios

Los términos constantes y los términos que tienen la misma variable y exponente se llaman términos *similares* o *parecidos*. Estos términos pueden combinarse al sumar o restar sus coeficientes numéricos. Por ejemplo,

$$3x + 7x = (3 + 7)x = 10x \qquad \text{Sume los términos similares.}$$

y

$$\frac{1}{2}m^2 - 3m^2 = \left(\frac{1}{2} - 3\right)m^2 = -\frac{5}{2}m^2 \qquad \text{Reste los términos similares.}$$

Se utiliza la propiedad distributiva del sistema de números reales,

$$ab + ac = a(b + c)$$

para justificar este procedimiento.

Para sumar o restar dos o más polinomios, primero retire los paréntesis y luego combine los términos similares. La expresión resultante se escribe entonces en orden de grado descendente de izquierda a derecha.

EJEMPLO 3

a. $(3x^3 + 2x^2 - 4x + 5) + (-2x^3 - 2x^2 - 2)$

$= 3x^3 + 2x^2 - 4x + 5 - 2x^3 - 2x^2 - 2$ — Retire los paréntesis.

$= 3x^3 - 2x^3 + 2x^2 - 2x^2 - 4x + 5 - 2$ — Agrupe los términos similares.

$= x^3 - 4x + 3$ — Combine los términos similares.

b. $(2x^4 + 3x^3 + 4x + 6) - (3x^4 + 9x^3 + 3x^2)$

$= 2x^4 + 3x^3 + 4x + 6 - 3x^4 - 9x^3 - 3x^2$ — Retire los paréntesis. Observe que el signo menos que precede al segundo polinomio cambia el signo de cada término de dicho polinomio.

$= 2x^4 - 3x^4 + 3x^3 - 9x^3 - 3x^2 + 4x + 6$ — Agrupe los términos similares.

$= -x^4 - 6x^3 - 3x^2 + 4x + 6$ — Combine los términos similares. ■

Multiplicación de polinomios

Para determinar el producto de dos polinomios, de nueva cuenta utilizamos la propiedad distributiva de los números reales. Por ejemplo, para calcular el producto $3x(4x - 2)$ utilizamos la ley distributiva para obtener

$$\begin{aligned} 3x(4x - 2) &= (3x)(4x) + (3x)(-2) \qquad a(b + c) = ab + ac \\ &= 12x^2 - 6x \end{aligned}$$

Observe que cada uno de los términos de un polinomio se multiplica por cada uno de los términos del otro. La expresión resultante se simplifica entonces al combinar los términos similares. En general, una expresión algebraica se *simplifica* si ninguno de sus términos son similares.

EJEMPLO 4 Determine el producto de $(3x + 5)(2x - 3)$.

Solución

$$\begin{aligned}
(3x + 5)(2x - 3) &= 3x(2x - 3) + 5(2x - 3) && \text{Propiedad distributiva}\\
&= (3x)(2x) + (3x)(-3) && \text{Propiedad distributiva}\\
&\quad + (5)(2x) + (5)(-3) &&\\
&= 6x^2 - 9x + 10x - 15 && \text{Multiplique los términos.}\\
&= 6x^2 + x - 15 && \text{Combine los términos similares.}
\end{aligned}$$

■

EJEMPLO 5 Determine el producto $(2t^2 - t + 3)(2t^2 - 1)$.

Solución

$$\begin{aligned}
&(2t^2 - t + 3)(2t^2 - 1)\\
&\quad = 2t^2(2t^2 - 1) - t(2t^2 - 1) + 3(2t^2 - 1) && \text{Propiedad distributiva}\\
&\quad = (2t^2)(2t^2) + (2t^2)(-1) + (-t)(2t^2) && \text{Propiedad distributiva}\\
&\qquad + (-t)(-1) + (3)(2t^2) + (3)(-1) &&\\
&\quad = 4t^4 - 2t^2 - 2t^3 + t + 6t^2 - 3 && \text{Multiplique los términos.}\\
&\quad = 4t^4 - 2t^3 + 4t^2 + t - 3 && \text{Combine los términos similares.}
\end{aligned}$$

Solución alterna También podemos determinar el producto al reordenar los polinomios verticalmente y multiplicar:

$$\begin{array}{l}
2t^2 - t + 3\\
\underline{2t^2 - 1}\\
4t^4 - 2t^3 + 6t^2\\
\underline{ - 2t^2 + t - 3}\\
4t^4 - 2t^3 + 4t^2 + t - 3
\end{array}$$

■

Los polinomios en los ejemplos 4 y 5 son polinomios en una variable. Las operaciones de adición, sustracción y multiplicación se realizan en polinomios de más de una variable del mismo que para los de una variable.

VIDEO

EJEMPLO 6 Multiplique $(3x - y)(4x^2 - 2y)$.

Solución

$$\begin{aligned}
(3x - y)(4x^2 - 2y) &= 3x(4x^2 - 2y) - y(4x^2 - 2y) && \text{Propiedad distributiva}\\
&= 12x^3 - 6xy - 4x^2y + 2y^2 && \text{Propiedad distributiva}\\
&= 12x^3 - 4x^2y - 6xy + 2y^2 && \text{Acomode los términos en orden de potencias decrecientes de } x.
\end{aligned}$$

■

En la tabla 6 se resumen varios productos de polinomios comúnmente utilizados. Como los productos de este tipo ocurren con mucha frecuencia, verá que es útil memorizar estas fórmulas.

TABLA 6

Productos especiales de los polinomios

Fórmula	Ilustración
1. $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$	$(2x + 3y)^2 = (2x)^2 + 2(2x)(3y) + (3y)^2 = 4x^2 + 12xy + 9y^2$
2. $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$	$(4x - 2y)^2 = (4x)^2 - 2(4x)(2y) + (2y)^2 = 16x^2 - 16xy + 4y^2$
3. $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$	$(2x + y)(2x - y) = (2x)^2 - (y)^2 = 4x^2 - y^2$

EJEMPLO 7 Utilice las fórmulas de productos especiales para calcular:

a. $(2x + y)^2$ **b.** $(3a - 4b)^2$ **c.** $\left(\frac{1}{2}x - 1\right)\left(\frac{1}{2}x + 1\right)$

Solución

a.
$$\begin{aligned}(2x + y)^2 &= (2x)^2 + 2(2x)(y) + y^2 && \text{Fórmula 1}\\ &= 4x^2 + 4xy + y^2\end{aligned}$$

b.
$$\begin{aligned}(3a - 4b)^2 &= (3a)^2 - 2(3a)(4b) + (4b)^2 && \text{Fórmula 2}\\ &= 9a^2 - 24ab + 16b^2\end{aligned}$$

c.
$$\left(\frac{1}{2}x - 1\right)\left(\frac{1}{2}x + 1\right) = \left(\frac{1}{2}x\right)^2 - 1 = \frac{1}{4}x^2 - 1 \qquad \text{Fórmula 3} \qquad ■$$

Orden de las operaciones

Los pasos comunes en los ejemplos 1-7 fueron retirar los paréntesis y combinar los términos similares. Si hay más de un símbolo de agrupamiento, los símbolos más internos se retiran primero. Al resolver los ejemplos 8 y 9, observe el orden en el cual los símbolos de agrupamiento se retiran: primero los paréntesis ( ), luego los paréntesis cuadrados [ ] y finalmente las llaves { }. Observe también que las operaciones de multiplicación y división tienen prioridad sobre la adición y la sustracción.

EJEMPLO 8 Realice las operaciones indicadas:

$$2t^3 - \{t^2 - [t - (2t - 1)] + 4\}$$

Solución

$$\begin{aligned}&2t^3 - \{t^2 - [t - (2t - 1)] + 4\}\\ &\quad = 2t^3 - \{t^2 - [t - 2t + 1] + 4\} && \text{Retire los paréntesis.}\\ &\quad = 2t^3 - \{t^2 - [-t + 1] + 4\} && \text{Combine los términos similares entre los paréntesis cuadrados.}\\ &\quad = 2t^3 - \{t^2 + t - 1 + 4\} && \text{Retire los paréntesis cuadrados.}\\ &\quad = 2t^3 - \{t^2 + t + 3\} && \text{Combine los términos entre las llaves.}\\ &\quad = 2t^3 - t^2 - t - 3 && \text{Retire las llaves.}\end{aligned}$$
■

EJEMPLO 9 Simplifique $2\{3 - 2[x - 2x(3 - x)]\}$.

Solución

$$\begin{aligned}2\{3 - 2[x - 2x(3 - x)]\} &= 2\{3 - 2[x - 6x + 2x^2]\} && \text{Retire los paréntesis.}\\ &= 2\{3 - 2[-5x + 2x^2]\} && \text{Combine los términos similares.}\\ &= 2\{3 + 10x - 4x^2\} && \text{Retire los paréntesis cuadrados.}\\ &= 6 + 20x - 8x^2 && \text{Retire las llaves.}\\ &= -8x^2 + 20x + 6 && \text{Escriba la respuesta en orden de potencias descendentes de x.}\end{aligned}$$
■

1.2 Ejercicios de autoevaluación

1. Determine el producto de $(2x + 3y)(3x - 2y)$.

2. Simplifique $3x - 2\{2x - [x - 2(x - 2)] + 1\}$.

Las soluciones a los ejercicios de autoevaluación 1.2 se encuentran en la página 14.

1.2 Preguntas de concepto

1. Describa un polinomio de grado n en x. Dé un ejemplo de un polinomio de grado 4 en x.

2. Sin ver el libro, complete las siguientes fórmulas:
   a. $(1 + b)^2 =$ ______
   b. $(a - b)^2 =$ ______
   c. $(a + b)(a - b) =$ ______

1.2 Ejercicios

En los ejercicios 1-12 evalúe la expresión.

1. 3^4

2. $(-2)^5$

3. $\left(\frac{2}{3}\right)^3$

4. $\left(-\frac{3}{4}\right)^2$

5. -4^3

6. $-\left(-\frac{4}{5}\right)^3$

7. $-2\left(\frac{3}{5}\right)^3$

8. $\left(-\frac{2}{3}\right)^2\left(-\frac{3}{4}\right)^3$

9. $2^3 \cdot 2^5$

10. $(-3)^2 \cdot (-3)^3$

11. $(3y)^2(3y)^3$

12. $(-2x)^3(-2x)^2$

En los ejercicios 13-56 realice las operaciones indicadas y simplifique.

13. $(2x + 3) + (4x - 6)$

14. $(-3x + 2) - (4x - 3)$

15. $(7x^2 - 2x + 5) + (2x^2 + 5x - 4)$

16. $(3x^2 + 5xy + 2y) + (4 - 3xy - 2x^2)$

17. $(5y^2 - 2y + 1) - (y^2 - 3y - 7)$

18. $(2x^2 - 3x + 4) - (-x^2 + 2x - 6)$

19. $(2.4x^3 - 3x^2 + 1.7x - 6.2) - (1.2x^3 + 1.2x^2 - 0.8x + 2)$

20. $(1.4x^3 - 1.2x^2 + 3.2) - (-0.8x^3 - 2.1x - 1.8)$

21. $(3x^2)(2x^3)$

22. $(-2rs^2)(4r^2s^2)(2s)$

23. $-2x(x^2 - 2) + 4x^3$

24. $xy(2y - 3x)$

25. $2m(3m - 4) + m(m - 1)$

26. $-3x(2x^2 + 3x - 5) + 2x(x^2 - 3)$

27. $3(2a - b) - 4(b - 2a)$

28. $2(3m - 1) - 3(-4m + 2n)$

29. $(2x + 3)(3x - 2)$

30. $(3r - 1)(2r + 5)$

31. $(2x - 3y)(3x + 2y)$

32. $(5m - 2n)(5m + 3n)$

33. $(3r + 2s)(4r - 3s)$

34. $(2m + 3n)(3m - 2n)$

35. $(0.2x + 1.2y)(0.3x - 2.1y)$

36. $(3.2m - 1.7n)(4.2m + 1.3n)$

37. $(2x - y)(3x^2 + 2y)$

38. $(3m - 2n^2)(2m^2 + 3n)$

39. $(2x + 3y)^2$

40. $(3m - 2n)^2$

41. $(2u - v)(2u + v)$

42. $(3r + 4s)(3r - 4s)$

43. $(2x - 1)^2 + 3x - 2(x^2 + 1) + 3$

44. $(3m + 2)^2 - 2m(1 - m) - 4$

45. $(2x + 3y)^2 - (2y + 1)(3x - 2) + 2(x - y)$

46. $(x - 2y)(y + 3x) - 2xy + 3(x + y - 1)$

47. $(t^2 - 2t + 4)(2t^2 + 1)$

48. $(3m^2 - 1)(2m^2 + 3m - 4)$

49. $2x - \{3x - [x - (2x - 1)]\}$

50. $3m - 2\{m - 3[2m - (m - 5)] + 4\}$

51. $x - \{2x - [-x - (1 - x)]\}$

52. $3x^2 - \{x^2 + 1 - x[x - (2x - 1)]\} + 2$

53. $(2x - 3)^2 - 3(x + 4)(x - 4) + 2(x - 4) + 1$

54. $(x - 2y)^2 + 2(x + y)(x - 3y) + x(2x + 3y + 2)$

55. $2x\{3x[2x - (3 - x)] + (x + 1)(2x - 3)\}$

56. $-3[(x + 2y)^2 - (3x - 2y)^2 + (2x - y)(2x + y)]$

57. **Utilidad de fabricación** El ingreso total obtenido con la venta de x copiadoras LectroCopy es

$$-0.04x^2 + 2000x$$

dólares/semana y el costo total incurrido en la fabricación de x copiadoras es

$$0.000002x^3 - 0.02x^2 + 1000x + 120{,}000$$

dólares/semana ($0 \le x \le 50{,}000$). Encuentre una expresión que dé la utilidad semanal total de la empresa.
Sugerencia: La utilidad es ingreso menos costo.

58. **Utilidad de fabricación** Un fabricante de raquetas de tenis determina que el costo total de fabricar x raquetas/día es

$$0.0001x^2 + 4x + 400$$

dólares. Cada raqueta puede venderse a un precio de p dólares, donde

$$p = -0.0004x + 10$$

Encuentre una expresión que dé la utilidad diaria para el fabricante, suponiendo que todas las raquetas fabricadas pueden venderse.
Sugerencia: El ingreso total está dado por el número total de raquetas vendidas por el precio de cada una. La utilidad está dada por el ingreso menos el costo.

59. SOBREPOBLACIÓN EN LAS PRISIONES La década de 1980 experimentó una tendencia a la disuasión positiva tradicional en oposición a las políticas penitenciarias más liberales y las correcciones basadas en la comunidad de la década de 1960 y principio de 1970. En consecuencia, las prisiones se sobrepoblaron, y la brecha entre el número de reclusos y la capacidad de las prisiones se amplió. Con base en cifras del Departamento de Justicia de Estados Unidos, el número de prisioneros (en miles) en prisiones federales y estatales es de aproximadamente

$$3.5t^2 + 26.7t + 436.2 \qquad (0 \leq t \leq 10)$$

y el número de internos (en miles) para el que las prisiones se diseñaron es

$$24.3t + 365 \qquad (0 \leq t \leq 10)$$

donde t está en años y $t = 0$ corresponde a 1984. Encuentre una expresión que dé la brecha entre el número de prisioneros y el número para el cual se diseñaron las prisiones en cualquier momento t.

Fuente: Departamento de Justicia de Estados Unidos

60. GASTO EN CUIDADO DE LA SALUD El gasto en cuidado de la salud por persona (en dólares) por parte del sector privado incluye pagos realizados por individuos, corporaciones y sus compañías de seguros está representado de forma aproximada por

$$2.5t^2 + 18.5t + 509 \qquad (0 \leq t \leq 6)$$

donde t está en años y $t = 0$ corresponde al inicio de 1994. El gasto gubernamental correspondiente (en dólares), incluidos los gastos de Medicaid y otra asistencia médica pública federal, estatal y local, es

$$-1.1t^2 + 29.1t + 429 \qquad (0 \leq t \leq 6)$$

donde t significa lo mismo que antes. Encuentre una expresión para la diferencia entre los gastos privado y gubernamental por persona en cualquier momento t. ¿Cuál fue la diferencia entre los gastos privado y gubernamental por persona a principios de 1998? ¿A principios de 2000?

Fuente: Administración de Financiamiento de Asistencia Médica

En los ejercicios 61-64 determine si el enunciado es verdadero o falso. Si es verdadero, explique por qué lo es. Si es falso, dé un ejemplo para demostrar por qué lo es.

61. Si m y n son números naturales y a y b son números reales, entonces $a^m \cdot b^n = (ab)^{m+n}$.

62. $a^{16} - b^{16} = (a^8 + b^8)(a^4 + b^4)(a^2 + b^2)(a + b)(a - b)$

63. El grado del producto de un polinomio de grado m y un polinomio de grado n es mn.

64. Suponga que p y q son polinomios de grado n. Entonces $p + q$ es un polinomio de grado n.

65. Suponga que p es un polinomio de grado m y q es un polinomio de grado n, donde $m > n$. ¿Cuál es el grado de $p - q$?

1.2 Soluciones de los ejercicios de autoevaluación

1.
$$\begin{aligned}(2x + 3y)(3x - 2y) &= 2x(3x - 2y) + 3y(3x - 2y)\\ &= 6x^2 - 4xy + 9xy - 6y^2\\ &= 6x^2 + 5xy - 6y^2\end{aligned}$$

2.
$$\begin{aligned}3x - 2\{2x - [x - 2(x - 2)] + 1\} &= 3x - 2\{2x - [x - 2x + 4] + 1\}\\ &= 3x - 2\{2x - [-x + 4] + 1\}\\ &= 3x - 2\{2x + x - 4 + 1\}\\ &= 3x - 2\{3x - 3\}\\ &= 3x - 6x + 6\\ &= -3x + 6\end{aligned}$$

1.3 Factorización de polinomios

Factorización

La factorización de un polinomio es el proceso de expresarlo como un producto de dos o más polinomios. Por ejemplo, si se aplica la propiedad distributiva podemos escribir

$$3x^2 - x = x(3x - 1)$$

y decimos que x y $3x - 1$ son factores de $3x^2 - x$.

¿Cómo saber si un polinomio está completamente factorizado? Recuerde que un entero mayor que 1 es *primo* si sus únicos factores enteros positivos son el mismo y 1. Por ejemplo, el número 3 es primo porque sus únicos factores son 3 y 1. Del mismo modo, se dice que un polinomio es primo dentro del conjunto de coeficientes enteros si no puede expresarse como el producto de dos o más polinomios de grado positivo con coeficientes enteros. Por ejemplo, $x^2 + 2x + 2$ es un polinomio primo con respeto al conjunto de enteros, mientras que $x^2 - 9$ no es un polinomio primo, puesto que $x^2 - 9 = (x + 3)(x - 3)$. Finalmente, se dice que un polinomio está *completamente factorizado* dentro del conjunto de enteros si está expresado como el producto de polinomios primos con coeficientes enteros.

Nota A menos que se mencione lo contrario, en este libro sólo consideraremos la factorización dentro del conjunto de enteros. Por consiguiente, cuando se utilice el término *factor*, entenderemos que la factorización se tiene que completar dentro del conjunto de enteros. ■

Factores comunes

El primer paso al factorizar un polinomio es comprobar si contiene factores comunes. Si los contiene, entonces se obtiene el factor común de mayor grado. El factor común mayor de $2a^2x + 4ax + 6a$ es $2a$ porque

$$\begin{aligned} 2a^2x + 4ax + 6a &= \mathbf{2a} \cdot ax + \mathbf{2a} \cdot 2x + \mathbf{2a} \cdot 3 \\ &= 2a(ax + 2x + 3) \end{aligned}$$

EJEMPLO 1 Determine el factor máximo común.

a. $-3t^2 + 3t$ **b.** $6a^4b^4c - 9a^2b^2$

Solución

a. Como $3t$ es un factor común de cada término, entonces

$$-3t^2 + 3t = 3t(-t + 1) = 3t(1 - t)$$

b. Como $3a^2b^2$ es el factor común de mayor grado, entonces

$$6a^4b^4c - 9a^2b^2 = 3a^2b^2(2a^2b^2c - 3)$$ ■

Algunas fórmulas importantes

Una vez que se buscaron los factores comunes, el siguiente paso al factorizar un polinomio es expresarlo como el producto de una constante y/o uno o más polinomios primos. Se deberán memorizar las fórmulas dadas en la tabla 7 para factorizar polinomios.

TABLA **7**

Fórmulas de factorización

Fórmula	Ilustración
Diferencia de dos cuadrados	
$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$	$x^2 - 36 = (x + 6)(x - 6)$
	$8x^2 - 2y^2 = 2(4x^2 - y^2) = 2[(2x)^2 - y^2]$
	$= 2(2x + y)(2x - y)$
	$9 - a^6 = 3^2 - (a^3)^2 = (3 + a^3)(3 - a^3)$
Trinomio cuadrado perfecto	
$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$	$x^2 + 8x + 16 = (x + 4)^2$
$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$	$4x^2 - 4xy + y^2 = (2x)^2 - 2(2x)(y) + y^2$
	$= (2x - y)^2$
Suma de dos cubos	
$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$	$z^3 + 27 = z^3 + (3)^3$
	$= (z + 3)(z^2 - 3z + 9)$
Diferencia de dos cubos	
$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$	$8x^3 - y^6 = (2x)^3 - (y^2)^3$
	$= (2x - y^2)(4x^2 + 2xy^2 + y^4)$

Nota Observe que se da una fórmula para factorizar la suma de dos cubos, mas no para factorizar la suma de dos cuadrados, puesto que $x^2 + a^2$ es primo dentro del conjunto de enteros. ■

VIDEO

EJEMPLO 2 Factorice:

a. $x^2 - 9$ **b.** $16x^2 - 81y^4$ **c.** $(a - b)^2 - (a^2 + b)^2$

Solución Observe que cada uno de los polinomios en las partes (a)-(c) es la diferencia de dos cuadrados. Utilizando la fórmula dada en la tabla 7 obtenemos

a. $x^2 - 9 = x^2 - 3^2 = (x + 3)(x - 3)$

b. $16x^2 - 81y^4 = (4x)^2 - (9y^2)^2 = (4x + 9y^2)(4x - 9y^2)$

c.
$$\begin{aligned}(a - b)^2 - (a^2 + b)^2 &= [(a - b) + (a^2 + b)][(a - b) - (a^2 + b)]\\ &= [a - b + a^2 + b][a - b - a^2 - b] && \text{Retire los paréntesis.}\\ &= (a + a^2)(-a^2 + a - 2b) && \text{Combine los términos.}\\ &= a(1 + a)(-a^2 + a - 2b)\end{aligned}$$
■

EJEMPLO 3 Factorice:

a. $x^2 + 4xy + 4y^2$ **b.** $4a^2 - 12ab + 9b^2$

Solución Como cada uno de estos polinomios es un trinomio cuadrado perfecto, utilizamos la fórmula dada en la tabla 7 para factorizarlos. Por consiguiente,

a. $x^2 + 4xy + 4y^2 = x^2 + 2x(2y) + (2y)^2 = (x + 2y)(x + 2y) = (x + 2y)^2$

b.
$$\begin{aligned}4a^2 - 12ab + 9b^2 &= (2a)^2 - 2(2a)(3b) + (3b)^2\\ &= (2a - 3b)(2a - 3b) = (2a - 3b)^2\end{aligned}$$
■

EJEMPLO 4 Factorice:

a. $x^3 + 8y^3$ **b.** $27a^3 - 64b^3$

Solución

a. Este polinomio es la suma de dos cubos. Al utilizar la fórmula dada en la tabla 7 se obtiene

$$\begin{aligned}x^3 + 8y^3 = x^3 + (2y)^3 &= (x + 2y)[x^2 - x(2y) + (2y)^2]\\ &= (x + 2y)(x^2 - 2xy + 4y^2)\end{aligned}$$

b. Al utilizar la fórmula para la diferencia de dos cubos obtenemos

$$\begin{aligned}27a^3 - 64b^3 &= [(3a)^3 - (4b)^3]\\ &= (3a - 4b)[(3a)^2 + (3a)(4b) + (4b)^2]\\ &= (3a - 4b)(9a^2 + 12ab + 16b^2)\end{aligned}$$
■

Factorización por ensayo y error

Los factores del polinomio de segundo grado $px^2 + qx + r$, donde p, q y r son enteros, son

$$(ax + b)(cx + d)$$

donde $ac = p$, $ad + bc = q$ y $bd = r$. Como sólo un número limitado de opciones son posibles, utilizamos el método de ensayo y error para factorizar polinomios que tienen esta forma.

Por ejemplo, para factorizar $x^2 - 2x - 3$, primero observamos que los únicos términos de primer grado posibles son

$$(x \qquad)(x \qquad) \qquad \text{Puesto que el coeficiente de } x^2 \text{ es 1}$$

A continuación vemos que el producto de los términos constantes es (-3). Esto genera los siguientes posibles factores:

$$(x - 1)(x + 3)$$
$$(x + 1)(x - 3)$$

Si se examina una vez más el polinomio $x^2 - 2x - 3$, vemos que el coeficiente de x es -2. Comprobando que el conjunto de factores da -2 con el coeficiente de x, vemos que

Coeficientes de los términos internos
Coeficientes de los términos externos

$$(-1)(1) + (1)(3) = 2$$

Factores
Términos externos

$$(x - 1)(x + 3)$$

Términos internos

Coeficientes de los términos internos
Coeficientes de los términos externos

$$(1)(1) + (1)(-3) = -2$$

Términos externos

$$(x + 1)(x - 3)$$

Términos internos

y concluimos que la factorización correcta es

$$x^2 - 2x - 3 = (x + 1)(x - 3)$$

Con práctica, pronto podrá realizar muchos de estos pasos mentalmente, y ya no tendrá que escribir cada uno.

VIDEO

EJEMPLO 5 Factorice:

a. $3x^2 + 4x - 4$ **b.** $3x^2 - 6x - 24$

Solución

a. Mediante ensayo y error, vemos que la factorización correcta es

$$3x^2 + 4x - 4 = (3x - 2)(x + 2)$$

b. Como el factor común de cada término es 3, entonces

$$3x^2 - 6x - 24 = 3(x^2 - 2x - 8)$$

Al utilizar el método de factorización de ensayo y error, obtenemos

$$x^2 - 2x - 8 = (x - 4)(x + 2)$$

Por consiguiente

$$3x^2 - 6x - 24 = 3(x - 4)(x + 2)$$

■

Factorización por reagrupamiento

En ocasiones un polinomio puede ser factorizado al reagrupar y reacomodar los términos de modo que se puede obtener un término como factor común. Esta técnica se ilustra en el ejemplo 6.

EJEMPLO 6 Factorice:

a. $x^3 + x + x^2 + 1$ **b.** $2ax + 2ay + bx + by$

Solución

a. Comenzamos reacomodando los términos en orden de potencias descendentes de x. Por tanto,

$$\begin{aligned} x^3 + x + x^2 + 1 &= x^3 + x^2 + x + 1 \\ &= x^2(x + 1) + x + 1 && \text{Factorice los primeros dos términos.} \\ &= (x + 1)(x^2 + 1) && \text{Factorice el término común } x + 1. \end{aligned}$$

b. Primero, factorice el término común $2a$ de los primeros dos términos y el término común b de los últimos dos términos. Por consiguiente,

$$2ax + 2ay + bx + by = 2a(x + y) + b(x + y)$$

Como $(x + y)$ es común a ambos términos del polinomio de la derecha, podemos extraerlo como factor. Así

$$2a(x + y) + b(x + y) = (x + y)(2a + b)$$ ■

Más ejemplos de factorización

EJEMPLO 7 Factorice:

a. $4x^6 - 4x^2$ **b.** $18x^4 - 3x^3 - 6x^2$

Solución

a. $4x^6 - 4x^2 = 4x^2(x^4 - 1)$ Factor común
$= 4x^2(x^2 - 1)(x^2 + 1)$ Diferencia de dos cuadrados
$= 4x^2(x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)$ Diferencia de dos cuadrados

b. $18x^4 - 3x^3 - 6x^2 = 3x^2(6x^2 - x - 2)$ Factor común
$= 3x^2(3x - 2)(2x + 1)$ Factorización mediante ensayo y error ■

EJEMPLO 8 Factorice:

a. $3x^2y + 9x^2 - 12y - 36$ **b.** $(x - at)^3 - (x + at)^3$

Solución

a. $3x^2y + 9x^2 - 12y - 36 = 3(x^2y + 3x^2 - 4y - 12)$ Factor común
$= 3[x^2(y + 3) - 4(y + 3)]$ Reagrupamiento
$= 3(y + 3)(x^2 - 4)$ Factor común
$= 3(y + 3)(x - 2)(x + 2)$ Diferencia de dos cuadrados

b. $(x - at)^3 - (x + at)^3$
$= [(x - at) - (x + at)]$
$\cdot\, [(x - at)^2 + (x - at)(x + at) + (x + at)^2]$ Diferencia de dos cubos
$= -2at(x^2 - 2atx + a^2t^2 + x^2 - a^2t^2 + x^2 + 2atx + a^2t^2)$
$= -2at(3x^2 + a^2t^2)$ ■

Asegúrese de aprender los métodos de factorización estudiados en este capítulo, porque los utilizaremos a lo largo del libro. Como con muchas otras técnicas algebraicas, cada vez más dominará la factorización a medida que resuelva los ejercicios.

1.3 Ejercicios de autoevaluación

1. Factorice: **a.** $4x^3 - 2x^2$ **b.** $3(a^2 + 2b^2) + 4(a^2 + 2b^2)^2$

2. Factorice: **a.** $6x^2 - x - 12$ **b.** $4x^2 + 10x - 6$

Las soluciones a los ejercicios de autoevaluación 1.3 se encuentran en la página 19.

1.3 Preguntas de concepto

1. ¿Qué significa la expresión “factorizar un polinomio”? Ilustre el proceso con un ejemplo.

2. Sin consultar el libro, complete las siguientes fórmulas:
a. $a^3 + b^3 =$ ______ **b.** $a^3 - b^3 =$ ______

1.3 Ejercicios

En los ejercicios 1-10 determine el máximo factor común.

1. $6m^2 - 2m$

2. $4t^4 - 12t^3$

3. $9ab^2 - 6a^2b$

4. $12x^3y^5 + 16x^2y^3$

5. $10m^2n - 15mn^2 + 20mn$

6. $6x^4y - 4x^2y^2 + 2x^2y^3$

7. $3x(2x + 1) - 5(2x + 1)$

8. $2u(3v^2 + w) + 5v(3v^2 + w)$

9. $(3a + b)(2c - d) + 2a(2c - d)^2$

10. $4uv^2(2u - v) + 6u^2v(v - 2u)$

En los ejercicios 11-54 factorice el polinomio, si éste es primo indíquelo.

11. $2m^2 - 11m - 6$

12. $6x^2 - x - 1$

13. $x^2 - xy - 6y^2$

14. $2u^2 + 5uv - 12v^2$

15. $x^2 - 3x - 1$

16. $m^2 + 2m + 3$

17. $4a^2 - b^2$

18. $12x^2 - 3y^2$

19. $u^2v^2 - w^2$

20. $4a^2b^2 - 25c^2$

21. $z^2 + 4$

22. $u^2 + 25v^2$

23. $x^2 + 6xy + y^2$

24. $4u^2 - 12uv + 9v^2$

25. $x^2 + 3x - 4$

26. $3m^3 + 3m^2 - 18m$

27. $12x^2y - 10xy - 12y$

28. $12x^2y - 2xy - 24y$

29. $35r^2 + r - 12$

30. $6uv^2 + 9uv - 6v$

31. $9x^3y - xy^3$

32. $4u^4v - 9u^2v^3$

33. $x^4 - 16y^2$

34. $16u^4v - 9v^3$

35. $(a - 2b)^2 - (a + 2b)^2$

36. $2x(x + y)^2 - 8x(x + y^2)^2$

37. $8m^3 + 1$

38. $27m^3 - 8$

39. $8r^3 - 27s^3$

40. $x^3 + 64y^3$

41. $u^2v^6 - 8u^2$

42. $r^6s^6 + 8s^3$

43. $2x^3 + 6x + x^2 + 3$

44. $2u^4 - 4u^2 + 2u^2 - 4$

45. $3ax + 6ay + bx + 2by$

46. $6ux - 4uy + 3vx - 2vy$

47. $u^4 - v^4$

48. $u^4 - u^2v^2 - 6v^4$

49. $4x^3 - 9xy^2 + 4x^2y - 9y^3$

50. $4u^4 + 11u^2v^2 - 3v^4$

51. $x^4 + 3x^3 - 2x - 6$

52. $a^2 - b^2 + a + b$

53. $au^2 + (a + c)u + c$

54. $ax^2 - (1 + ab)xy + by^2$

55. **Interés simple** La suma acumulada después de t años cuando se depositan P dólares en un banco y se ganan intereses a una tasa de r/año es $A = P + Prt$. Factorice la expresión del lado derecho de esta ecuación.

56. **Propagación de una epidemia** La incidencia (número de casos nuevos/día) de una enfermedad contagiosa que se propaga en una población de M personas, donde k es una constante positiva y x denota el número de personas ya infectadas, esta dada por $kMx - kx^2$. Factorice esta expresión.

57. **Reacción a un fármaco** La intensidad de la reacción de un cuerpo humano a una dosis D de un cierto fármaco, donde k es una constante positiva, está dada por

$$\frac{kD^2}{2} - \frac{D^3}{3}$$

Factorice esta expresión.

58. **Ingresos** El ingreso total obtenido por la Apollo Company por la venta de x PDAs está dado por $R(x) = -0.1x^2 + 500x$ dólares. Factorice la expresión del lado derecho de esta ecuación.

1.3 Soluciones de los ejercicios de autoevaluación

1. a. El factor común es $2x^2$. Por consiguiente

$$4x^3 - 2x^2 = 2x^2(2x - 1)$$

b. El factor común es $a^2 + 2b^2$. Por consiguiente

$$\begin{aligned} 3(a^2 + 2b^2) + 4(a^2 + 2b^2)^2 &= (a^2 + 2b^2)[3 + 4(a^2 + 2b^2)] \\ &= (a^2 + 2b^2)(3 + 4a^2 + 8b^2) \end{aligned}$$

2. a. Con el método de factorización de ensayo y error se obtiene

$$6x^2 - x - 12 = (3x + 4)(2x - 3)$$

b. Primero se determina el factor común 2. Por consiguiente

$$4x^2 + 10x - 6 = 2(2x^2 + 5x - 3)$$

Con el método de factorización de ensayo y error se obtiene

$$2x^2 + 5x - 3 = (2x - 1)(x + 3)$$

y, por consiguiente,

$$4x^2 + 10x - 6 = 2(2x - 1)(x + 3)$$

1.4 Expresiones racionales

Los cocientes de polinomios se llaman **expresiones racionales**. Ejemplos de expresiones racionales son

$$\frac{6x-1}{2x+3} \quad \text{y} \quad \frac{3x^2y^3-2xy}{4x-y}$$

Como la división por cero no está permitida, el denominador de una expresión racional no debe ser igual a cero. Por tanto, en el primer ejemplo, $x \neq -\frac{3}{2}$, y en el segundo ejemplo $y \neq 4x$.

Como las expresiones racionales son cocientes en los que las variables representan números reales, las propiedades de éstos también se aplican a expresiones racionales. Por eso las operaciones con fracciones racionales se realizan del mismo modo que las operaciones con fracciones aritméticas.

Simplificación de expresiones racionales

Una expresión racional se *simplifica* o reduce a términos de menor grado, si su numerador y denominador no tienen factores comunes diferentes de 1 y -1. Si una expresión racional contiene factores comunes, se utilizan las propiedades del sistema de números reales para escribir

$$\frac{ac}{bc} = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{c} = \frac{a}{b} \cdot 1 = \frac{a}{b} \qquad (a, b, c \text{ son números reales y } bc \neq 0.)$$

Este proceso a menudo se llama "cancelación de factores comunes". Para indicar este proceso con frecuencia escribimos

$$\frac{a}{b}\frac{\cancel{c}}{\cancel{c}} = \frac{a}{b}$$

donde los factores comunes aparecen tachados. Como otro ejemplo, la expresión racional

$$\frac{(x+2)(x-3)}{(x-2)(x-3)} \qquad (x \neq 2, 3)$$

se simplifica al cancelar los factores comunes $(x - 3)$ y escribir

$$\frac{(x+2)\cancel{(x-3)}}{(x-2)\cancel{(x-3)}} = \frac{x+2}{x-2}$$

⚠ $\dfrac{\cancel{3} + 4x}{\cancel{3}} = 1 + 4x$ es un ejemplo de cancelación incorrecta. En su lugar escribimos

$$\frac{3+4x}{3} = \frac{3}{3} + \frac{4x}{3} = 1 + \frac{4x}{3}$$

EJEMPLO 1 Simplifique:

a. $\dfrac{x^2+2x-3}{x^2+4x+3}$ **b.** $\dfrac{3-4x-4x^2}{2x-1}$ **c.** $\dfrac{(k+4)^2(k-1)}{k^2-16}$

Solución

a. $\dfrac{x^2+2x-3}{x^2+4x+3} = \dfrac{(x+3)(x-1)}{(x+3)(x+1)} = \dfrac{x-1}{x+1}$ Factorice numerador y denominador y cancele los factores comunes.

b. $\dfrac{3 - 4x - 4x^2}{2x - 1} = \dfrac{(1 - 2x)(3 + 2x)}{2x - 1}$

$= -\dfrac{(2x - 1)(2x + 3)}{2x - 1}$ Vuelva a escribir el término $1 - 2x$ en la forma equivalente $-(2x - 1)$.

$= -(2x + 3)$ Cancele los factores comunes.

c. $\dfrac{(k + 4)^2(k - 1)}{k^2 - 16} = \dfrac{(k + 4)^2(k - 1)}{(k + 4)(k - 4)} = \dfrac{(k + 4)(k - 1)}{k - 4}$ ■

Multiplicación y división

Las operaciones de multiplicación y división se realizan con expresiones racionales del mismo modo que con las fracciones aritméticas (tabla 8).

TABLA **8**

Multiplicación y división de expresiones racionales

Operación	Ilustración
Si P, Q, R y S son polinomios, entonces	
Multiplicación	
$\dfrac{P}{Q} \cdot \dfrac{R}{S} = \dfrac{PR}{QS} \quad (Q, S \neq 0)$	$\dfrac{2x}{y} \cdot \dfrac{(x + 1)}{(y - 1)} = \dfrac{2x(x + 1)}{y(y - 1)}$
División	
$\dfrac{P}{Q} \div \dfrac{R}{S} = \dfrac{P}{Q} \cdot \dfrac{S}{R} = \dfrac{PS}{QR} \quad (Q, R, S \neq 0)$	$\dfrac{x^2 + 3}{y} \div \dfrac{y^2 + 1}{x} = \dfrac{x^2 + 3}{y} \cdot \dfrac{x}{y^2 + 1} = \dfrac{x(x^2 + 3)}{y(y^2 + 1)}$

Cuando se multiplican y dividen expresiones racionales, las expresiones resultantes deben simplificarse.

VIDEO

EJEMPLO 2 Realice las operaciones indicadas y simplifique.

a. $\dfrac{2x - 8}{x + 2} \cdot \dfrac{x^2 + 4x + 4}{x^2 - 16}$ **b.** $\dfrac{x^2 - 6x + 9}{3x + 12} \div \dfrac{x^2 - 9}{6x^2 + 18x}$

Solución

a. $\dfrac{2x - 8}{x + 2} \cdot \dfrac{x^2 + 4x + 4}{x^2 - 16}$

$= \dfrac{2(x - 4)}{x + 2} \cdot \dfrac{(x + 2)^2}{(x + 4)(x - 4)}$ Factorice numeradores y denominadores.

$= \dfrac{2(x - 4)(x + 2)(x + 2)}{(x + 2)(x + 4)(x - 4)}$

$= \dfrac{2(x + 2)}{x + 4}$ Cancele los factores comunes $(x + 2)(x - 4)$.

b. $\dfrac{x^2 - 6x + 9}{3x + 12} \div \dfrac{x^2 - 9}{6x^2 + 18x} = \dfrac{x^2 - 6x + 9}{3x + 12} \cdot \dfrac{6x^2 - 6x + 18x}{x^2 - 9}$

$$= \frac{(x-3)^2}{3(x+4)} \cdot \frac{6x(x+3)}{(x+3)(x-3)}$$

$$= \frac{(x-3)(x-3)(6x)(x+3)}{3(x+4)(x+3)(x-3)}$$

$$= \frac{2x(x-3)}{x+4}$$

■

Adición y sustracción

Las operaciones de sustracción y adición de expresiones racionales se realizan al encontrar un denominador común de las fracciones y luego sumar o restar las fracciones. La tabla 9 muestra las reglas para fracciones con denominadores comunes.

TABLA **9**

Adición y sustracción de fracciones con denominadores comunes

Operación	Ilustración
Si P, Q y R son polinomios, entonces	
Adición	
$\dfrac{P}{R} + \dfrac{Q}{R} = \dfrac{P+Q}{R} \quad (R \neq 0)$	$\dfrac{2x}{x+2} + \dfrac{6x}{x+2} = \dfrac{2x+6x}{x+2} = \dfrac{8x}{x+2}$
Sustracción	
$\dfrac{P}{R} - \dfrac{Q}{R} = \dfrac{P-Q}{R} \quad (R \neq 0)$	$\dfrac{3y}{y-x} - \dfrac{y}{y-x} = \dfrac{3y-y}{y-x} = \dfrac{2y}{y-x}$

Para sumar o restar fracciones que tienen denominadores diferentes, primero encuentre un denominador común, de preferencia el mínimo común denominador (MCD). Para determinar el MCD de dos o más expresiones racionales siga estos pasos:

1. *Determine los factores primos* de cada denominador.
2. *Forme el producto de los diferentes factores primos* que ocurren en el denominador. Eleve cada factor primo en este producto a la potencia mayor de dicho factor que aparece en los denominadores.

Después de encontrar el MCD, realice las operaciones indicadas siguiendo el procedimiento de sumar y restar fracciones con denominadores comunes.

EJEMPLO 3 Simplifique:

a. $\dfrac{3x+4}{4x} + \dfrac{4y-2}{3y}$ **b.** $\dfrac{2x}{x^2-1} + \dfrac{3x+1}{2x^2-x-1}$ **c.** $\dfrac{1}{x+h} - \dfrac{1}{x}$

Solución

a. $\dfrac{3x+4}{4x} + \dfrac{4y-2}{3y} = \dfrac{3x+4}{4x} \cdot \dfrac{3y}{3y} + \dfrac{4y-2}{3y} \cdot \dfrac{4x}{4x}$ MCD $= (4x)(3y) = 12xy$

$$= \frac{9xy + 12y}{12xy} + \frac{16xy - 8x}{12xy}$$

$$= \frac{25xy - 8x + 12y}{12xy}$$

b. $$\frac{2x}{x^2-1}+\frac{3x+1}{2x^2-x-1}=\frac{2x}{(x+1)(x-1)}+\frac{3x+1}{(2x+1)(x-1)}$$

$$=\frac{2x(2x+1)+(3x+1)(x+1)}{(x+1)(x-1)(2x+1)}$$

MCD = $(2x+1)\cdot(x+1)(x-1)$

$$=\frac{4x^2+2x+3x^2+3x+x+1}{(x+1)(x-1)(2x+1)}$$

$$=\frac{7x^2+6x+1}{(x+1)(x-1)(2x+1)}$$

c. $$\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}=\frac{1}{x+h}\cdot\frac{x}{x}-\frac{1}{x}\cdot\frac{x+h}{x+h}$$

MCD = $x(x+h)$

$$=\frac{x}{x(x+h)}-\frac{x+h}{x(x+h)}$$

$$=\frac{x-x-h}{x(x+h)}$$

$$=\frac{h}{x(x+h)}$$ ■

Fracciones compuestas

Una expresión fraccionaria que contiene fracciones en su numerador y/o denominador se llama **fracción compuesta**. Para simplificar estas expresiones pueden utilizarse las técnicas utilizadas para simplificar expresiones racionales.

EJEMPLO 4 Simplifique:

a. $$\frac{1+\dfrac{1}{x+1}}{x-\dfrac{4}{x}}$$ **b.** $$\frac{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}}{\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{y^2}}$$

Solución

a. Primero expresamos el numerador y denominador de la expresión dada como un solo cociente. Por consiguiente,

$$\frac{1+\dfrac{1}{x+1}}{x-\dfrac{4}{x}}=\frac{1\cdot\dfrac{x+1}{x+1}+\dfrac{1}{x+1}}{x\cdot\dfrac{x}{x}-\dfrac{4}{x}}$$

El MCD de la fracción en el numerador es $x+1$ y el MCD de la fracción en el denominador es x.

$$=\frac{\dfrac{x+1+1}{x+1}}{\dfrac{x^2-4}{x}}$$

$$=\frac{\dfrac{x+2}{x+1}}{\dfrac{x^2-4}{x}}$$

Luego invertimos el denominador y multiplicamos, y se obtiene

$$\frac{x+2}{x+1}\cdot\frac{x}{x^2-4}=\frac{x+2}{x+1}\cdot\frac{x}{(x-2)(x+2)}$$ Factorice el denominador de la segunda fracción.

$$=\frac{x}{(x+1)(x-2)}$$ Cancele los factores comunes.

b. Como antes, primero se escribe el numerador y el denominador de la expresión dada como un solo cociente y luego se simplifica la fracción resultante.

$$\frac{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{y^2}}=\frac{\frac{y+x}{xy}}{\frac{y^2-x^2}{x^2y^2}}$$ El MCD de la fracción en el numerador es xy, y el MCD de la fracción en el denominador es x^2y^2.

$$=\frac{y+x}{xy}\cdot\frac{x^2y^2}{y^2-x^2}$$ Invierta la fracción en el denominador y multiplique.

$$=\frac{y+x}{xy}\cdot\frac{x^2y^2}{(y+x)(y-x)}$$

$$=\frac{xy}{y-x}$$ Cancele los factores comunes. ■

1.4 Ejercicios de autoevaluación

1. Simplifique $\dfrac{3a^2b^3}{2ab^2+4ab}\cdot\dfrac{b^2+4b+4}{6a^2b^5}$.

2. Simplifique $\dfrac{\frac{x}{y}-\frac{y}{x}}{\frac{x^2+2xy+y^2}{x^2-y^2}}$.

Las soluciones a los ejercicios de autoevaluación 1.4 se encuentran en la página 25.

1.4 Preguntas de concepto

1. a. ¿Qué es una expresión racional? Dé un ejemplo.
b. Explique por qué un polinomio es una expresión racional, pero no a la inversa.

2. a. Si P, Q, R y S son polinomios y $Q \neq 0$ y $S \neq 0$, ¿cuál es $\left(\frac{P}{Q}\right)\left(\frac{R}{S}\right)$? ¿Cuál es $\left(\frac{P}{Q}\right)\div\left(\frac{R}{S}\right)$ si $Q \neq 0$, $R \neq 0$ y $S \neq 0$?
b. Si P, Q y R son polinomios con $R \neq 0$, ¿cuál es $\left(\frac{P}{R}\right)+\left(\frac{Q}{R}\right)$ y $\left(\frac{P}{R}\right)-\left(\frac{Q}{R}\right)$?

1.4 Ejercicios

En los ejercicios 1-12 simplifique la expresión.

1. $\dfrac{28x^2}{7x^3}$

2. $\dfrac{3y^4}{18y^2}$

3. $\dfrac{4x+12}{3x+9}$

4. $\dfrac{12m-6}{18m-9}$

5. $\dfrac{6x^2-3x}{6x^2}$

6. $\dfrac{8y^2}{4y^3-4y^2+8y}$

7. $\dfrac{x^2+x-2}{x^2+3x+2}$

8. $\dfrac{2y^2-y-3}{2y^2+y-1}$

9. $\dfrac{x^2-4}{2x^2-x-6}$

10. $\dfrac{6y^2+11y+3}{4y^2-9}$

11. $\dfrac{x^3+y^3}{x^2-xy+y^2}$

12. $\dfrac{8r^3-s^3}{2r^2+rs-s^2}$

En los ejercicios 13-46 realice las operaciones indicadas y simplifique.

13. $\dfrac{6x^3}{32} \cdot \dfrac{8}{3x^2}$

14. $\dfrac{25y^4}{12y} \cdot \dfrac{3y^2}{5y^3}$

15. $\dfrac{3x^3}{8x^2} \div \dfrac{15x^4}{16x^5}$

16. $\dfrac{6x^5}{21x^2} \div \dfrac{4x}{7x^3}$

17. $\dfrac{3x}{x+2y} \cdot \dfrac{5x+10y}{6}$

18. $\dfrac{4y+12}{y+2} \cdot \dfrac{3y+6}{2y-1}$

19. $\dfrac{2m+6}{3} \div \dfrac{3m+9}{6}$

20. $\dfrac{3y-6}{4y+6} \div \dfrac{6y+24}{8y+12}$

21. $\dfrac{6r^2-r-2}{2r+4} \cdot \dfrac{6r+12}{4r+2}$

22. $\dfrac{x^2-x-6}{2x^2+7x+6} \cdot \dfrac{2x^2-x-6}{x^2+x-6}$

23. $\dfrac{k^2-2k-3}{k^2-k-6} \div \dfrac{k^2-6k+8}{k^2-2k-8}$

24. $\dfrac{6y^2-5y-6}{6y^2+13y+6} \div \dfrac{6y^2-13y+6}{9y^2-12y+4}$

25. $\dfrac{2}{2x+3} + \dfrac{3}{2x-1}$

26. $\dfrac{2x-1}{x+2} - \dfrac{x+3}{x-1}$

27. $\dfrac{3}{x^2-x-6} + \dfrac{2}{x^2+x-2}$

28. $\dfrac{4}{x^2-9} - \dfrac{5}{x^2-6x+9}$

29. $\dfrac{2m}{2m^2-2m-1} + \dfrac{3}{2m^2-3m+3}$

30. $\dfrac{t}{t^2+t-2} - \dfrac{2t-1}{2t^2+3t-2}$

31. $\dfrac{x}{1-x} + \dfrac{2x+3}{x^2-1}$

32. $2 + \dfrac{1}{a+2} - \dfrac{2a}{a-2}$

33. $x - \dfrac{x^2}{x+2} + \dfrac{2}{x-2}$

34. $\dfrac{y}{y^2-1} + \dfrac{y-1}{y+1} - \dfrac{2y}{1-y}$

35. $\dfrac{x}{x^2+5x+6} + \dfrac{2}{x^2-4} - \dfrac{3}{x^2+3x+2}$

36. $\dfrac{2x+1}{2x^2-x-1} - \dfrac{x+1}{2x^2+3x+1} + \dfrac{4}{x^2+2x-3}$

37. $\dfrac{x}{ax-ay} + \dfrac{y}{by-bx}$

38. $\dfrac{ax+by}{ax-bx} + \dfrac{ay-bx}{by-ay}$

39. $\dfrac{1+\dfrac{1}{x}}{1-\dfrac{1}{x}}$

40. $\dfrac{2+\dfrac{2}{x}}{x-\dfrac{2}{x}}$

41. $\dfrac{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}}{1-\dfrac{1}{xy}}$

42. $\dfrac{1+\dfrac{x}{y}}{1-\dfrac{x^2}{y^2}}$

43. $\dfrac{\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{y^2}}{x+y}$

44. $\dfrac{\dfrac{1}{x^3}-\dfrac{1}{y^3}}{\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}}$

45. $\dfrac{\dfrac{1}{2(x+h)}-\dfrac{1}{2x}}{h}$

46. $\dfrac{\dfrac{1}{(x+h)^2}-\dfrac{1}{x^2}}{h}$

1.4 Soluciones de los ejercicios de autoevaluación

1. Al factorizar el numerador y el denominador de cada expresión obtenemos

$$\frac{3a^2b^3}{2ab^2+4ab} \cdot \frac{b^2+4b+4}{6a^2b^5} = \frac{3a^2b^3}{2ab(b+2)} \cdot \frac{(b+2)^2}{(3a^2b^3)(2b^2)}$$

$$= \frac{b+2}{2ab(2b^2)} \qquad \text{Cancele los factores comunes.}$$

$$= \frac{b+2}{4ab^3}$$

2. Al escribir el numerador de la expresión dada como un solo cociente obtenemos

$$\frac{\dfrac{x}{y}-\dfrac{y}{x}}{\dfrac{x^2+2xy+y^2}{x^2-y^2}} = \frac{\dfrac{x^2-y^2}{xy}}{\dfrac{x^2+2xy+y^2}{x^2-y^2}} \qquad \text{El MCD de la función en el numerador es } xy.$$

$$= \frac{\dfrac{(x+y)(x-y)}{xy}}{\dfrac{(x+y)(x+y)}{(x+y)(x-y)}} \qquad \text{Factorice.}$$

$$= \frac{(x+y)(x-y)}{xy} \cdot \frac{(x+y)(x-y)}{(x+y)(x+y)} \qquad \text{Invierta la fracción en el denominador y multiplique.}$$

$$= \frac{(x-y)^2}{xy} \qquad \text{Cancele los factores comunes.}$$

1.5 Exponentes enteros

Exponentes

Comenzamos por recordar la definición de la expresión exponencial a^n donde a es un número real y n es un entero positivo.

Expresiones exponenciales

Si a es cualquier número real y n es un número natural, entonces la expresión a^n (léase "a a la potencia n") se define como el número

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{n \text{ factores}}$$

Recuerde que el número a es la *base* y el superíndice n es el *exponente*, o *potencia* a la cual está elevada la base.

EJEMPLO 1 Escriba cada uno de los números siguientes sin utilizar exponentes.

a. 2^5 **b.** $\left(\frac{2}{3}\right)^3$

Solución

a. $2^5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$

b. $\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{8}{27}$ ■

A continuación ampliamos nuestra definición de a^n para incluir $n = 0$; es decir, definimos la expresión a^0. Observe que si a es cualquier número real y m y n son enteros positivos, entonces tenemos la regla

$$a^m a^n = \underbrace{(a \cdot a \cdot \cdots \cdot a)}_{m \text{ factores}}\underbrace{(a \cdot a \cdot \cdots \cdot a)}_{n \text{ factores}} = \underbrace{a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{(m+n) \text{ factores}} = a^{m+n}$$

Ahora, si requerimos que esta regla también sea válida para el exponente cero, entonces debemos tener, después de hacer $m = 0$,

$$a^0 a^n = a^{0+n} = a^n \quad \text{o} \quad a^0 a^n = a^n$$

Por consiguiente, si $a \neq 0$, podemos dividir ambos lados de la última ecuación por a^n para obtener $a^0 = 1$. Esto lleva a la siguiente definición.

Exponente cero

Con cualquier número real no cero, a,

$$a^0 = 1$$

La expresión de 0^0 no está definida.

EJEMPLO 2

a. $2^0 = 1$ **b.** $(-2)^0 = 1$ **c.** $(\pi)^0 = 1$ **d.** $\left(\frac{1}{3}\right)^0 = 1$ ■

A continuación ampliamos nuestra definición para incluir expresiones de la forma a^n, donde el exponente es un entero negativo. Una vez más utilizamos la regla

$$a^m a^n = a^{m+n}$$

donde n es un entero positivo. Ahora, si requerimos que esta regla también sea válida para exponentes enteros negativos, después de hacer $m = -n$, obtenemos

$$a^{-n}a^n = a^{-n+n} = a^0 = 1 \quad \text{o} \quad a^{-n}a^n = 1$$

Por consiguiente, si $a \neq 0$, podemos dividir ambos lados de la última ecuación por a^n para obtener $a^{-n} = 1/a^n$. Esto conduce a la siguiente definición.

Expresiones exponenciales con exponentes negativos

Si a es cualquier número real no cero y n es un entero positivo, entonces

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

VIDEO

EJEMPLO 3 Escriba cada uno de los siguientes números sin exponentes.

a. 4^{-2} **b.** 3^{-1} **c.** -2^{-3} **d.** $\left(\frac{2}{3}\right)^{-1}$ **e.** $\left(\frac{3}{2}\right)^{-3}$

Solución

a. $4^{-2} = \dfrac{1}{4^2} = \dfrac{1}{16}$ **b.** $3^{-1} = \dfrac{1}{3^1} = \dfrac{1}{3}$ **c.** $-2^{-3} = -\dfrac{1}{2^3} = -\dfrac{1}{8}$

d. $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-1} = \dfrac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)^1} = \dfrac{1}{\frac{2}{3}} = \dfrac{3}{2}$ **e.** $\left(\dfrac{3}{2}\right)^{-3} = \dfrac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^3} = \dfrac{2^3}{3^3} = \dfrac{8}{27}$ ■

Nota En los ejemplos 3d y 3e, los pasos intermedios pueden omitirse observando que

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$$

Por ejemplo, $\left(\frac{2}{3}\right)^{-1} = \left(\frac{3}{2}\right)^1$

puesto que

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \frac{1}{\left(\frac{a}{b}\right)^n} = \frac{1}{\frac{a^n}{b^n}} = 1 \cdot \frac{b^n}{a^n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$$ ■

En la tabla 10 se dan cinco propiedades básicas de los exponentes.

TABLA 10

Propiedades de los exponentes

Propiedad	Ilustración
1. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$	$x^2 \cdot x^3 = x^{2+3} = x^5$
2. $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$	$\dfrac{x^7}{x^4} = x^{7-4} = x^3$
3. $(a^m)^n = a^{mn}$	$(x^4)^3 = x^{4\cdot 3} = x^{12}$
4. $(ab)^n = a^n \cdot b^n$	$(2x)^4 = 2^4 \cdot x^4 = 16x^4$
5. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n} \quad (b \neq 0)$	$\left(\dfrac{x}{2}\right)^3 = \dfrac{x^3}{2^3} = \dfrac{x^3}{8}$

Se puede demostrar que estas leyes son válidas para cualesquiera números reales a y b y enteros m y n.

Simplificación de expresiones exponenciales

Los dos ejemplos siguientes ilustran el uso de las leyes de los exponentes.

EJEMPLO 4 Simplifique las expresiones y escriba su respuesta sólo con exponentes positivos.

a. $(2x^3)(3x^5)$ **b.** $\dfrac{2x^5}{3x^4}$ **c.** $(x^{-2})^{-3}$ **d.** $(2u^{-1}v^3)^3$ **e.** $\left(\dfrac{2m^3n^4}{m^5n^3}\right)^{-1}$

Solución

a. $(2x^3)(3x^5) = 6x^{3+5} = 6x^8$ Propiedad 1

b. $\dfrac{2x^5}{3x^4} = \dfrac{2}{3}x^{5-4} = \dfrac{2}{3}x$ Propiedad 2

c. $(x^{-2})^{-3} = x^{(-2)(-3)} = x^6$ Propiedad 3

d. $(2u^{-1}v^3)^3 = 2^3u^{(-1)(3)}v^{3(3)} = 8u^{-3}v^9 = \dfrac{8v^9}{u^3}$ Propiedad 4

e. $\left(\dfrac{2m^3n^4}{m^5n^3}\right)^{-1} = (2m^{3-5}n^{4-3})^{-1}$ Propiedad 2

$= (2m^{-2}n)^{-1}$ Propiedad 1

$= \dfrac{1}{2m^{-2}n} = \dfrac{m^2}{2n}$ ■

EJEMPLO 5 Simplifique la expresión y escriba su resultado sólo con exponentes positivos.

a. $(2^2)^3 - (3^2)^2$ **b.** $(x^{-1} + y^{-1})^{-1}$ **c.** $\dfrac{2^{-4} \cdot (2^{-1})^2}{(2^0 + 1)^{-1}}$

Solución

a. $(2^2)^3 - (3^2)^2 = 2^6 - 3^4 = 64 - 81 = -17$

b. $(x^{-1} + y^{-1})^{-1} = \left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}\right)^{-1} = \left(\dfrac{y + x}{xy}\right)^{-1} = \dfrac{xy}{y + x}$

c. $\dfrac{2^{-4} \cdot (2^{-1})^2}{(2^0 + 1)^{-1}} = \dfrac{2^{-4} \cdot 2^{-2}}{(2)^{-1}} = 2^{-4-2+1} = 2^{-5} = \dfrac{1}{2^5} = \dfrac{1}{32}$ ■

1.5 Ejercicios de autoevaluación

1. Simplifique la expresión y dé su resultado sólo con exponentes positivos.

a. $(3a^4)(4a^3)$ **b.** $\left(\dfrac{u^{-3}}{u^{-5}}\right)^{-2}$

2. Simplifique la expresión y escriba su resultado sólo con exponentes positivos.

a. $(x^2y^3)^3(x^5y)^{-2}$ **b.** $\left(\dfrac{a^2b^{-1}c^3}{a^3b^{-2}}\right)^2$

Las soluciones a los ejercicios de autoevaluación 1.5 se encuentran en la página 29.

1.5 Preguntas de concepto

1. Explique el significado de la expresión a^n. ¿Qué restricciones, si las hay, se imponen a a y n? ¿Cuál es a^0 si a es un número real no cero? ¿Cuál es a^{-n} si n es un entero positivo y $a \neq 0$?

2. Escriba todas las propiedades de los exponentes e ilústrelas con ejemplos.

1.5 Ejercicios

En los ejercicios 1-20 reescriba el número sin exponentes.

1. $(-2)^3$
2. $\left(-\frac{2}{3}\right)^4$
3. 7^{-2}
4. $\left(\frac{3}{4}\right)^{-2}$
5. $-\left(-\frac{1}{4}\right)^{-2}$
6. -4^2
7. $2^{-2} + 3^{-1}$
8. $-3^{-2} - \left(-\frac{2}{3}\right)^2$
9. $(0.02)^2$
10. $(-0.3)^{-2}$
11. 1996^0
12. $(18 + 25)^0$
13. $(ab^2)^0$, donde $a, b \neq 0$
14. $(3x^2y^3)^0$, donde $x, y \neq 0$
15. $\dfrac{2^3 \cdot 2^5}{2^4 \cdot 2^9}$
16. $\dfrac{6 \cdot 10^4}{3 \cdot 10^2}$
17. $\dfrac{2^{-3} \cdot 2^{-4}}{2^{-5} \cdot 2^{-2}}$
18. $\dfrac{4 \cdot 2^{-3}}{2 \cdot 4^{-2}}$
19. $\left(\dfrac{3^4 \cdot 3^{-3}}{3^{-2}}\right)^{-1}$
20. $\left(\dfrac{5^{-2} \cdot 5^{-2}}{5^{-5}}\right)^{-2}$

En los ejercicios 21-54 simplifique la expresión y escriba su respuesta con sólo exponentes positivos.

21. $(2x^3)\left(\frac{1}{4}x^2\right)$
22. $(-2x^2)(3x^{-4})$
23. $\dfrac{3x^3}{2x^4}$
24. $\dfrac{(3x^2)(4x^3)}{2x^4}$
25. $(a^{-2})^3$
26. $(-a^2)^{-3}$
27. $(2x^{-2}y^2)^3$
28. $(3u^{-1}v^{-2})^{-3}$
29. $(4x^2y^{-3})(2x^{-3}y^2)$
30. $\left(\frac{1}{2}u^{-2}v^3\right)(4v^3)$
31. $(-x^2y)^3\left(\dfrac{2y^2}{x^4}\right)$
32. $\left(-\frac{1}{2}x^2y\right)^{-2}$
33. $\left(\dfrac{2u^2v^3}{3uv}\right)^{-1}$
34. $\left(\dfrac{a^{-2}}{2b^2}\right)^{-3}$
35. $(3x^{-2})^3(2x^2)^5$
36. $(2^{-1}r^3)^{-2}(3s^{-1})^2$
37. $\dfrac{3^0 \cdot 4x^{-2}}{16 \cdot (x^2)^3}$
38. $\dfrac{5x^2(3x^{-2})}{(4x^{-1})(x^3)^{-2}}$
39. $\dfrac{2^2u^{-2}(v^{-1})^3}{3^2(u^{-3}v)^2}$
40. $\dfrac{(3a^{-1}b^2)^{-2}}{(2a^2b^{-1})^{-3}}$
41. $(-2x)^{-2}(3y)^{-3}(4z)^{-2}$
42. $(3x^{-1})^2(4y^{-1})^3(2z)^{-2}$
43. $(a^2b^{-3})^2(a^{-2}b^2)^{-3}$
44. $(5u^2v^{-3})^{-1} \cdot 3(2u^2v^2)^{-2}$
45. $\left[\left(\dfrac{a^{-2}b^{-2}}{3a^{-1}b^2}\right)^2\right]^{-1}$
46. $\left[\left(\dfrac{x^2y^{-3}z^{-4}}{x^{-2}y^{-1}z^2}\right)^{-2}\right]^3$
47. $\left(\dfrac{3^2u^{-2}v^2}{2^2u^3v^{-3}}\right)^{-2}\left(\dfrac{3^2v^5}{4^2u}\right)^2$
48. $\left[\left(-\dfrac{2^2x^{-2}y^0}{3^2x^3y^{-2}}\right)^{-2}\right]^{-2}$
49. $\dfrac{x^{-1} - 1}{x^{-1} + 1}$
50. $\dfrac{x^{-1} - y^{-1}}{x^{-1} + y^{-1}}$
51. $\dfrac{u^{-1} - v^{-1}}{v - u}$
52. $\dfrac{(uv)^{-1}}{u^{-1} + v^{-1}}$
53. $\left(\dfrac{a^{-1} - b^{-1}}{a^{-1} + b^{-1}}\right)^{-1}$
54. $[(a^{-1} + b^{-1})(a^{-1} - b^{-1})]^{-2}$

En los ejercicios 55-57 determine si el enunciado es verdadero o falso. Si es verdadero, explique por qué lo es. Si es falso, dé un ejemplo para demostrar por qué lo es.

55. Si a y b son números reales y m y n son números naturales, entonces $a^mb^n = (ab)^{mn}$.
56. Si a y b son números reales ($b \neq 0$) y m y n son números naturales, entonces
$$\frac{a^m}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^{m-n}$$
57. Si a y b son números reales y n es un número natural, entonces $(a + b)^n = a^n + b^n$.

1.5 Soluciones de los ejercicios de autoevaluación

1. a. $(3a^4)(4a^3) = 3 \cdot a^4 \cdot 4 \cdot a^3 = 12a^{4+3} = 12a^7$

b. $\left(\dfrac{u^{-3}}{u^{-5}}\right)^{-2} = \dfrac{u^{(-3)(-2)}}{u^{(-5)(-2)}} = \dfrac{u^6}{u^{10}} = u^{6-10} = u^{-4} = \dfrac{1}{u^4}$

2. a.
$$\begin{aligned}(x^2y^3)^3(x^5y)^{-2} &= x^{2\cdot3}y^{3\cdot3}x^{5(-2)}y^{-2} = x^6y^9x^{-10}y^{-2}\\ &= x^{6-10}y^{9-2} = x^{-4}y^7\\ &= \frac{y^7}{x^4}\end{aligned}$$

b.
$$\begin{aligned}\left(\frac{a^2b^{-1}c^3}{a^3b^{-2}}\right)^2 &= \frac{a^{2\cdot2}b^{(-1)(2)}c^{3\cdot2}}{a^{3\cdot2}b^{(-2)(2)}} = \frac{a^4b^{-2}c^6}{a^6b^{-4}}\\ &= a^{4-6}b^{-2+4}c^6 = a^{-2}b^2c^6\\ &= \frac{b^2c^6}{a^2}\end{aligned}$$

1.6 Solución de ecuaciones

Ecuaciones

Una **ecuación** es una igualdad entre dos expresiones matemáticas.

EJEMPLO 1 Las siguientes expresiones son ejemplos de ecuaciones.

a. $2x + 3 = 7$ **b.** $3(2x + 3) = 4(x - 1) + 4$

c. $\dfrac{y}{y-2} = \dfrac{3y+1}{3y-4}$ **d.** $\sqrt{z-1} = 2$ ■

En el ejemplo 1 las letras x, y y z se llaman variables. Una **variable** es una letra que representa un número perteneciente a un conjunto de números (reales).

La **solución de una ecuación** de una variable es un número que comprueba la igualdad cuando se sustituye en lugar de la variable. Por ejemplo, si reemplazamos la variable x en la ecuación $2x + 3 = 7$ con el número 2 se obtiene

$$\begin{aligned} 2(2) + 3 &= 7 \\ 4 + 3 &= 7 \end{aligned}$$

lo cual es cierto. Esto demuestra que el número 2 es una solución de $2x + 3 = 7$. El conjunto de todas las soluciones de una ecuación se llama **conjunto solución**. *Resolver* una ecuación es sinónimo de encontrar su conjunto solución.

El procedimiento estándar de resolver una ecuación es transformar la ecuación dada mediante una operación apropiada en una ecuación *equivalente,* es decir, una que tenga exactamente la misma o las mismas soluciones que la ecuación original. Las transformaciones se repiten si es necesario hasta que la solución o soluciones sean fáciles de leer. Las siguientes propiedades de los números reales pueden utilizarse para producir ecuaciones equivalentes.

Propiedades de igualdad de los números reales

Sean a, b y c números reales.

1. Si $a = b$, entonces $a + c = b + c$ y $a - c = b - c$. *Propiedades de adición y sustracción*
2. Si $a = b$ y $c \neq 0$, entonces $ca = cb$ y $\dfrac{a}{c} = \dfrac{b}{c}$. *Propiedades de multiplicación y división*

Por consiguiente, si sumamos o restamos el mismo número a ambos lados de una ecuación se obtiene una ecuación equivalente. Asimismo, si multiplicamos o dividimos ambos lados de una ecuación entre un número *no cero* se obtiene una ecuación equivalente. Apliquemos el procedimiento para solucionar algunas ecuaciones lineales.

Ecuaciones lineales

Un **ecuación lineal** en la variable x es una ecuación que puede escribirse en la forma $ax + b = 0$, donde a y b son constantes con $a \neq 0$. Una ecuación lineal en x también se llama **ecuación de primer grado en x** o **ecuación de grado 1 en x**.

EJEMPLO 2 Resuelva la ecuación lineal $8x - 3 = 2x + 9$.

Solución Utilizamos las propiedades de igualdad de los números reales para obtener las siguientes ecuaciones equivalentes en las que el objetivo es despejar x.

$$\begin{aligned}
8x - 3 &= 2x + 9 \\
8x - 3 - 2x &= 2x + 9 - 2x && \text{Reste } 2x \text{ de ambos lados.} \\
6x - 3 &= 9 \\
6x - 3 + 3 &= 9 + 3 && \text{Sume 3 a ambos lados.} \\
6x &= 12 \\
\frac{1}{6}(6x) &= \frac{1}{6}(12) && \text{Multiplique ambos lados por } \frac{1}{6}. \\
x &= 2
\end{aligned}$$

y por tanto la solución requerida es 2. ■

EJEMPLO 3 Resuelva la ecuación lineal $3p + 2(p - 1) = -2p - 4$.

Solución

$$\begin{aligned}
3p + 2(p - 1) &= -2p - 4 \\
3p + 2p - 2 &= -2p - 4 && \text{Utilice la propiedad de distribución.} \\
5p - 2 &= -2p - 4 && \text{Simplifique.} \\
5p - 2 + 2p &= -2p - 4 + 2p && \text{Agregue } 2p \text{ a ambos lados.} \\
7p - 2 &= -4 \\
7p - 2 + 2 &= -4 + 2 && \text{Agregue 2 a ambos lados.} \\
7p &= -2 \\
\frac{1}{7}(7p) &= \frac{1}{7}(-2) && \text{Multiplique ambos lados por } \frac{1}{7}. \\
p &= -\frac{2}{7}
\end{aligned}$$

■

EJEMPLO 4 Resuelva la ecuación lineal $\dfrac{2k + 1}{3} - \dfrac{k - 1}{4} = 1$.

Solución Primero multiplique ambos lados de la ecuación por 12, el MCD. Por tanto

$$\begin{aligned}
12\left(\frac{2k + 1}{3} - \frac{k - 1}{4}\right) &= 12(1) \\
12 \cdot \frac{2k + 1}{3} - 12 \cdot \frac{k - 1}{4} &= 12 && \text{Utilice la propiedad distributiva.} \\
4(2k + 1) - 3(k - 1) &= 12 && \text{Simplifique.} \\
8k + 4 - 3k + 3 &= 12 && \text{Utilice la propiedad distributiva.} \\
5k + 7 &= 12 && \text{Simplifique.} \\
5k &= 5 && \text{Reste 7 de ambos lados.} \\
k &= 1 && \text{Multiplique ambos lados por } \frac{1}{5}.
\end{aligned}$$

■

Algunas ecuaciones no lineales especiales

La solución o soluciones de algunas ecuaciones no lineales se determina al resolver una ecuación lineal relacionada, como se demuestra en los ejemplos siguientes.

EJEMPLO 5 Resuelva $\dfrac{2}{3(x+1)} - \dfrac{x}{2(x+1)} = \dfrac{1}{3}$.

Solución Multiplicamos ambos lados de la ecuación dada por $6(x + 1)$, el MCD. Por tanto

$$6(x+1)\cdot\frac{2}{3(x+1)} - 6(x+1)\cdot\frac{x}{2(x+1)} = 6(x+1)\cdot\frac{1}{3}$$

la que después de simplificarla da

$$\begin{aligned}
4 - 3x &= 2(x+1) \\
4 - 3x &= 2x + 2 \\
4 - 3x - 2x &= 2x + 2 - 2x && \text{Reste } 2x \text{ de ambos lados.} \\
4 - 5x &= 2 \\
4 - 5x - 4 &= 2 - 4 && \text{Reste 4 de ambos lados.} \\
-5x &= -2 \\
x &= \frac{2}{5} && \text{Multiplique ambos lados por } -\tfrac{1}{5}.
\end{aligned}$$

Podemos verificar que $x = \frac{2}{5}$ es una solución de la ecuación original al sustituir $\frac{2}{5}$ en el lado izquierdo de la ecuación. Por tanto

$$\begin{aligned}
\frac{2}{3(\frac{2}{5}+1)} - \frac{\frac{2}{5}}{2(\frac{2}{5}+1)} &= \frac{2}{3(\frac{7}{5})} - \frac{\frac{2}{5}}{2(\frac{7}{5})} \\
&= \frac{10}{21} - \frac{1}{7} = \frac{7}{21} = \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

la cual es igual al lado derecho. ■

Cuando se resuelve una ecuación en x, en ocasiones multiplicamos ambos lados de la ecuación por una expresión en x. La ecuación resultante puede contener una solución o soluciones que no es la solución o soluciones de la ecuación original. Tal solución se llama **solución extraña**. Por ejemplo, la solución de la ecuación $3x = 0$ es desde luego 0. Pero si multiplicamos ambos lados de esta ecuación por la expresión $(x - 2)$, se obtiene la ecuación $3x(x - 2) = 0$, cuyas soluciones son 0 y 2. La solución 2 no es una solución de la ecuación original. Por tanto, siempre que necesite multiplicar ambos lados de una ecuación por una expresión de una variable, es buena idea comprobar si cada solución de la ecuación modificada es una solución de la ecuación dada.

EJEMPLO 6 Resuelva $\dfrac{x+1}{x} - \dfrac{x-1}{x+1} = \dfrac{1}{x^2+x}$.

Solución Al multiplicar ambos lados de la ecuación por el MCD, $x(x + 1)$, obtenemos

$$\begin{aligned}
(x+1)^2 - x(x-1) &= 1 && \text{Nota: } x^2 + x = x(x+1) \\
x^2 + 2x + 1 - x^2 + x &= 1 \\
3x + 1 &= 1 \\
3x &= 0 \\
x &= 0
\end{aligned}$$

Como la ecuación original no está definida para $x = 0$ (la división entre 0 no está permitida), vemos que 0 es una solución extraña de la ecuación dada y concluimos, por consiguiente, que la ecuación dada no tiene solución. ■

EJEMPLO 7 Resuelva $\sqrt{2x + 5} = 3$.

Solución Esta ecuación no es una ecuación lineal. Para resolverla, elevamos al cuadrado ambos lados de la ecuación y se obtiene

$$\begin{aligned}\left(\sqrt{2x + 5}\right)^2 &= 3^2\\ 2x + 5 &= 9\\ 2x &= 4\\ x &= 2\end{aligned}$$

Al sustituir $x = 2$ en el lado izquierdo de la ecuación original se obtiene

$$\sqrt{2(2) + 5} = \sqrt{9} = 3$$

el cual es el mismo número que aparece en el lado derecho de la ecuación. Por consiguiente, la solución requerida es 3. ■

VIDEO

EJEMPLO 8 Resuelva $\sqrt{k^2 - 4} = k - 4$.

Solución Al elevar al cuadrado ambos lados de la ecuación se obtiene

$$\begin{aligned}k^2 - 4 &= (k - 4)^2\\ k^2 - 4 &= k^2 - 8k + 16\\ -4 &= -8k + 16\\ -20 &= -8k\\ \frac{5}{2} &= k\end{aligned}$$

Al sustituir este valor de k en el lado izquierdo de la ecuación original se obtiene

$$\sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 - 4} = \sqrt{\frac{25}{4} - 4} = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}$$

Pero esta solución no es igual a $\frac{5}{2} - 4 = -\frac{3}{2}$, el cual es el resultado obtenido si el valor de k se sustituye en el lado derecho de la ecuación original. Concluimos que la ecuación dada no tiene solución. ■

Solución para una variable específica

Las ecuaciones que implican más de una variable con frecuencia se presentan en aplicaciones prácticas. En estas situaciones pudiera interesarnos resolver para una de las variables en función de las demás. Para obtener dicha solución se consideran todas las variables, excepto para la que estamos resolviendo como constantes. Esta técnica se ilustra en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 9 La ecuación $A = P + Prt$ da la relación entre el valor A de una inversión de P dólares después de t años cuando la inversión gana interés simple a una tasa de r por ciento anual. Resuelva la ecuación para (a) P, (b) t y (c) r.

Solución

a.

$$\begin{aligned}A &= P + Prt\\ A &= P(1 + rt) && \text{Factorice.}\\ \frac{A}{1 + rt} &= P && \text{Multiplique ambos lados por } \frac{1}{1 + rt}.\end{aligned}$$

b. $A = P + Prt$

$A - P = Prt$ Reste P de ambos lados.

$\dfrac{A - P}{Pr} = t$ Multiplique ambos lados por $\dfrac{1}{Pr}$.

c. $A = P + Prt$

$A - P = Prt$

$\dfrac{A - P}{Pt} = r$ ■

1.6 Ejercicios de autoevaluación

1. Resuelva $2\left(\dfrac{x-1}{4}\right) - \dfrac{2x}{3} = \dfrac{4-3x}{12}$.

2. Resuelva $\dfrac{k}{2x+1} = \dfrac{3}{8}$.

Las soluciones a los ejercicios de autoevaluación 1.6 se encuentran en la página 35.

1.6 Preguntas de concepto

1. ¿Qué es una ecuación? ¿Qué es la solución de una ecuación? ¿Qué es el conjunto solución de una ecuación? Dé un ejemplo.

2. Escriba las propiedades de igualdad de los números reales. Ilustre con ejemplos.

3. ¿Qué es una ecuación lineal en x? Dé un ejemplo de una y resuélvala.

1.6 Ejercicios

En los ejercicios 1-38 resuelva la ecuación dada.

1. $3x = 12$

2. $2x = 0$

3. $0.3y = 4$

4. $2x + 5 = 11$

5. $3x + 4 = 2$

6. $2 - 3y = 8$

7. $-2y + 3 = -7$

8. $\dfrac{1}{3}k + 1 = \dfrac{1}{4}k - 2$

9. $\dfrac{1}{5}p - 3 = -\dfrac{1}{3}p + 5$

10. $3.1m + 2 = 3 - 0.2m$

11. $0.4 - 0.3p = 0.1(p + 4)$

12. $\dfrac{1}{3}k + 4 = -2\left(k + \dfrac{1}{3}\right)$

13. $\dfrac{3}{5}(k + 1) = \dfrac{1}{4}(2k + 3)$

14. $3\left(\dfrac{3m}{4} - 1\right) + \dfrac{m}{5} = \dfrac{42 - m}{4}$

15. $\dfrac{2x-1}{3} + \dfrac{3x+4}{4} = \dfrac{7(x+3)}{10}$

16. $\dfrac{w-1}{3} + \dfrac{w+1}{4} = -\dfrac{w+1}{6}$

17. $\dfrac{1}{2}[2x - 3(x - 4)] = \dfrac{2}{3}(x - 5)$

18. $\dfrac{1}{3}[2 - 3(x + 2)] = \dfrac{1}{4}\left[(-3x + 1) + \dfrac{1}{2}x\right]$

19. $(2x + 1)^2 - (3x - 2)^2 = 5x(2 - x)$

20. $x[(2x - 3)^2 + 5x^2] = 3x^2(3x - 4) + 18$

21. $\dfrac{8}{x} = 16$

22. $\dfrac{1}{x} + \dfrac{2}{x} = 6$

23. $\dfrac{2}{y-1} = 4$

24. $\dfrac{1}{x+3} = 0$

25. $\dfrac{2x-3}{x+1} = \dfrac{2}{5}$

26. $\dfrac{r}{3r-1} = 4$

27. $\dfrac{2}{q-1} = \dfrac{3}{q-2}$

28. $\dfrac{y}{3} - \dfrac{2}{y+1} = \dfrac{1}{3}(y - 3)$

29. $\dfrac{3k-2}{4}-\dfrac{3k}{4}=\dfrac{k+3}{k}$ **30.** $\dfrac{2x-1}{3x+2}=\dfrac{2x+1}{3x+1}$

31. $\dfrac{m-2}{m}+\dfrac{2}{m}=\dfrac{m+3}{m-3}$ **32.** $\dfrac{4}{x(x-2)}=\dfrac{2}{x-2}$

33. $\sqrt{3x+1}=2$ **34.** $\sqrt{2x-3}-3=0$

35. $\sqrt{k^2-4}=4-k$ **36.** $\sqrt{4k^2-3}=2k+1$

37. $\sqrt{k+1}+\sqrt{k}=3\sqrt{k}$

38. $\sqrt{x+1}-\sqrt{x}=\sqrt{4x-3}$

En los ejercicios 39-46 resuelva la ecuación para la variable indicada.

39. $I=Prt;\ r$ **40.** $ax+by+c=0;\ y$

41. $p=-3q+1;\ q$ **42.** $w=\dfrac{kuv}{s^2};\ u$

43. $V=\dfrac{ax}{x+b};\ x$ **44.** $V=C\left(1-\dfrac{n}{N}\right);\ n$

45. $r=\dfrac{2mI}{B(n+1)};\ m$ **46.** $r=\dfrac{2mI}{B(n+1)};\ n$

47. **INTERÉS SIMPLE** El interés simples I ganado (en dólares) cuando se invierten P dólares a un plazo de t años está dado por $I = Prt$, donde r es la tasa de interés/año (simple). Resuelva para r en función de I, P y r. Susan invierte \$1,000 en un banco que paga una tasa de interés de 6% anual. ¿Cuánto tiempo debe dejarlo en el banco antes de que gane un interés de \$90?

48. **CONVERSIÓN DE TEMPERATURA** La relación entre la temperatura en grados Fahrenheit (°F) y la temperatura en grados Celsius (°C) es $F=\frac{9}{5}C+32$. Resuelva para C en función de F. Luego utilice el resultado para calcular la temperatura en grados Celsius correspondiente a una temperatura de 70 °F.

49. **DEPRECIACIÓN EN LÍNEA RECTA** Suponga que el valor original de un activo es de \$$C$ y que se deprecia linealmente a lo largo de N años con un valor residual de \$$S$. Entonces el valor en libros V (en dólares) del activo al final de t años es

$$V=C-\left(\frac{C-S}{N}\right)t$$

a. Resuelva para C en función de V, S, N y t.

b. Una lancha de velocidad se deprecia linealmente a lo largo de 5 años. Si su valor residual es de \$40,000 y su valor en libros al cabo de 3 años es de \$70,000, ¿cuál fue su valor original?

50. **MOVIMIENTO DE UN AUTOMÓVIL** La distancia s (en pies) recorrida por un automóvil que viaja por una carretera recta está relacionada con su velocidad inicial u (en pies/s), su velocidad final v (en pies/s) y su aceleración constante a (en pies/s^2) por la ecuación $v^2=u^2+2as$.

a. Resuelva la ecuación para a en función de las demás variables.

b. Un automóvil que parte del reposo y acelera a una tasa constante alcanza una velocidad de 88 pies/s después de recorrer $\frac{1}{4}$ de milla (1,320 pies). ¿Cuál es su aceleración?

51. **REGLA DE COWLING** La regla de Cowling es un método para calcular dosis de medicamentos pediátricos. Si a denota la dosis para adultos (en miligramos) y t es la edad de un niño (en años), entonces la dosis para niños es

$$c=\left(\frac{t+1}{24}\right)a$$

a. Resuelva la ecuación para t en función de a y c.

b. Si la dosis de un medicamento para los adultos es de 500 mg y un niño recibió una dosis de 125 mg, ¿qué edad tenía el niño?

1.6 Soluciones de los ejercicios de autoevaluación

1. $2\left(\dfrac{x-1}{4}\right)-\dfrac{2x}{3}=\dfrac{4-3x}{12}$

$$6(x-1)-8x=4-3x \quad \text{Multiplique ambos lados por 12 el MCD.}$$
$$6x-6-8x=4-3x$$
$$-6-2x=4-3x$$
$$-6+x=4 \quad \text{Agrege 3x a ambos lados.}$$
$$x=10$$

2. $\dfrac{k}{2k+1}=\dfrac{3}{8}$

$$8k=3(2k+1) \quad \text{Multiplique ambos lados por 8(2k + 1) el MCD.}$$
$$8k=6k+3$$
$$2k=3$$
$$k=\frac{2}{3}$$

Si se sustituye este valor de k en la ecuación original, encontramos

$$\frac{\frac{3}{2}}{2\left(\frac{3}{2}\right)+1}=\frac{\frac{3}{2}}{3+1}=\frac{3}{8}$$

la cual es igual al lado derecho. Por tanto $k=\frac{3}{2}$ es la solución de la ecuación dada.

1.7 Exponentes racionales y radicales

Raíces *enésimas* de números reales

Hasta ahora hemos descrito la expresión a^n, donde a es un número real y n es un entero. Ahora dirigimos nuestra atención a un tema estrechamente relacionado: raíces de números reales. Como veremos pronto, las expresiones de la forma a^n para potencias fraccionarias (racionales) de n pueden definirse en función de las raíces de a.

Raíz *enésima* de un número real

Si n es un número natural y a y b son número reales de modo que

$$a^n = b$$

entonces decimos que a es la **raíz *enésima*** de b.

Con $n = 2$ y $n = 3$, las raíces comúnmente se conocen como **raíces cuadradas** y **raíces cúbicas**, respectivamente. A continuación se dan algunos ejemplos de raíces:

- -2 y 2 son raíces cuadradas de 4 porque $(-2)^2 = 4$ y $2^2 = 4$.
- -3 y 3 son raíces cuartas de 81 porque $(-3)^4 = 81$ y $3^4 = 81$.
- -4 es una raíz cúbica de -64 porque $(-4)^3 = -64$.
- $\frac{1}{2}$ es una raíz quinta de $\frac{1}{32}$ porque $\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32}$.

¿Cuántas raíces reales tiene un número real b?

1. *Cuando n es par, el número de raíces enésimas de un número real positivo b debe venir en pares: una positiva y la otra negativa.* Por ejemplo, las raíces cuartas reales de 81 incluyen -3 y 3.
2. *Cuando n es par y b es un número real negativo, hay dos raíces enésimas reales de b.* Por ejemplo, si $b = -9$ y el número real a es una raíz cuadrada de b, entonces por definición $a^2 = -9$. Pero esto es una contradicción, puesto que el cuadrado de un número real no puede ser negativo y concluimos que b no tiene raíces reales en este caso.
3. *Cuando n es impar, entonces hay sólo una raíz enésima real de b.* Por ejemplo, la raíz cúbica de -64 es -4.

Como podemos ver en el primer enunciado, dado un número b, pudiera haber más de una raíz real. Así que, para evitar ambigüedades, definimos la raíz *enésima principal* de un número positivo real, cuando n es par, como la raíz positiva. Por tanto, la raíz cuadrada principal de un número real, donde n es par, es la raíz positiva. Por ejemplo, la raíz cuadrada principal de 4 es 2, y la raíz cuarta principal de 81 es 3. Por supuesto, la raíz *enésima* principal de cualquier número real b, cuando n es impar, es la raíz *enésima* (única) de b. Por ejemplo, la raíz cúbica principal de -64 es -4, y la raíz quinta principal de $\frac{1}{32}$ es $\frac{1}{2}$.

En la tabla 11 se resume el número de raíces de un número real b.

TABLA **11**

Número de raíces de un número real *b*

Índice	***b***	**Número de raíces**
n par	$b > 0$	Dos raíces reales (una raíz principal)
	$b < 0$	Sin raíces reales
	$b = 0$	Una raíz real
n impar	$b > 0$	Una raíz real
	$b < 0$	Una raíz real
	$b = 0$	Una raíz real

Utilizamos la notación $\sqrt[n]{b}$, llamada **radical** para denotar la raíz *enésima* principal de b. El símbolo $\sqrt{\ }$ se llama **signo de radical** y el número b adentro de él se llama **radicando**. El entero positivo n se llama **índice** del radical. Para raíces cuadradas ($n = 2$) y escribimos $\sqrt{b}$ en lugar de $\sqrt[2]{b}$.

Un error común es escribir $\sqrt[4]{16} = \pm 2$. Esto es una equivocación porque $\sqrt[4]{16}$ denota la raíz principal de 16, la cual es la raíz positiva 2. Naturalmente, el negativo de la raíz cuarta de 16 es $-\sqrt[4]{16} = -(2) = -2$.

EJEMPLO 1 Determine el número de raíces de cada número real.

a. $\sqrt{25}$ **b.** $\sqrt[5]{0}$ **c.** $\sqrt[3]{-27}$ **d.** $\sqrt{-27}$

Solución

a. En este caso $b > 0$, n es par y hay una raíz principal. Por tanto $\sqrt{25} = 5$.
b. En este caso $b = 0$, n es impar y hay una raíz. Por tanto $\sqrt[5]{0} = 0$.
c. En este caso $b < 0$, n es impar y hay una raíz. Por tanto $\sqrt[3]{-27} = -3$.
d. En este caso $b < 0$, n es par y no existe alguna raíz real. Por tanto $\sqrt{-27}$ no está definida. ■

Observe que $(-81)^{1/4}$ no existe porque n es impar y $b < 0$, pero $-81^{1/4} = -(81)^{1/4} = -3$. La primera expresión es "la cuarta raíz de -81", en tanto que la segunda es "el negativo de la cuarta raíz de 81".

EJEMPLO 2 Evalúe los siguientes radicales.

a. $\sqrt[6]{64}$ **b.** $\sqrt[5]{-32}$ **c.** $\sqrt[3]{\dfrac{8}{27}}$ **d.** $-\sqrt{\dfrac{4}{25}}$

Solución

a. $\sqrt[6]{64} = 2$ porque $2^6 = 64$.
b. $\sqrt[5]{-32} = -2$ porque $(-2)^5 = -32$.
c. $\sqrt[3]{\dfrac{8}{27}} = \dfrac{2}{3}$ porque $\left(\dfrac{2}{3}\right)^3 = \dfrac{8}{27}$.
d. $-\sqrt{\dfrac{4}{25}} = -\dfrac{2}{5}$ porque $\sqrt{\dfrac{4}{25}} = \dfrac{2}{5}$, por tanto $-\sqrt{\dfrac{4}{25}} = -\dfrac{2}{5}$. ■

Exponentes racionales y radicales

En la sección 1.5 definimos expresiones tales como 2^{-3}, $\left(\frac{1}{2}\right)^2$ y $1/\pi^3$ que implican exponentes enteros. Pero, ¿cómo evaluamos expresiones como $8^{1/3}$, donde el exponente es un número racional? Por la definición de la raíz *enésima* de un número real, sabemos que $\sqrt[3]{8} = 2$. Utilizando exponentes racionales, escribimos este mismo resultado en la forma $8^{1/3} = 2$. De manera más general tenemos las siguientes definiciones.

Exponentes racionales	Ilustración
1. Si n es un número natural y b es un número real, entonces $$b^{1/n} = \sqrt[n]{b}$$ (Si $b < 0$ y n es par, $b^{1/n}$ no está definido.)	$9^{1/2} = \sqrt{9} = 3$ $(-8)^{1/3} = \sqrt[3]{-8} = -2$

(*continúa*)

Exponentes racionales	Ilustración
2. Si m/n es un número racional reducido a términos mínimos, (m, n son números naturales) entonces $b^{m/n} = (b^{1/n})^m$ o, de forma equivalente $b^{m/n} = \sqrt[n]{b^m}$ siempre que exista.	$(27)^{2/3} = (27^{1/3})^2 = 3^2 = 9$ $(27)^{2/3} = [(27^2)]^{1/3} = (729)^{1/3} = 9$ $(-27)^{2/3} = (-27^{1/3})^2 = (-3)^2 = 9$

EJEMPLO 3

a. $(64)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{64} = 4$

b. $(81)^{\frac{3}{4}} = (81^{\frac{1}{4}})^3 = 3^3 = 27$

c. $(-8)^{\frac{5}{3}} = (-8^{\frac{1}{3}})^5 = (-2)^5 = -32$

d. $\left(\dfrac{1}{27}\right)^{\frac{2}{3}} = \left[\left(\dfrac{1}{27}\right)^{\frac{1}{3}}\right]^2 = \left(\dfrac{1}{3}\right)^2 = \dfrac{1}{9}$ ■

Las expresiones que implican exponentes racionales *negativos* se manejan con base en la siguiente definición.

Exponentes negativos

$$a^{-m/n} = \frac{1}{a^{m/n}} \qquad (a \neq 0)$$

EJEMPLO 4

a. $4^{-5/2} = \dfrac{1}{4^{5/2}} = \dfrac{1}{(4^{1/2})^5} = \dfrac{1}{2^5} = \dfrac{1}{32}$ **b.** $(-8)^{-1/3} = \dfrac{1}{(-8)^{1/3}} = \dfrac{1}{-2} = -\dfrac{1}{2}$ ■

Todas las propiedades de exponentes enteros dadas en la tabla 10 (en la página 27) son válidas para exponentes racionales. Los ejemplos 5 y 6 ilustran el uso de estas propiedades.

EJEMPLO 5

a. $\dfrac{16^{5/4}}{16^{1/2}} = 16^{5/4-1/2} = 16^{5/4-2/4} = 16^{3/4} = (16^{1/4})^3 = 2^3 = 8$

b. $(6^{2/3})^3 = 6^{(2/3)\cdot 3} = 6^{6/3} = 6^2 = 36$

c. $\left(\dfrac{16}{81}\right)^{3/4} = \left[\left(\dfrac{16}{81}\right)^{1/4}\right]^3 = \left(\dfrac{16^{1/4}}{81^{1/4}}\right)^3 = \left(\dfrac{2}{3}\right)^3 = \dfrac{8}{27}$ ■

EJEMPLO 6 Evalúe:

a. $2x^{1/2}(x^{2/3} - x^{1/4})$ **b.** $(x^{1/3} - y^{2/3})^2$

Solución

a.
$$\begin{aligned} 2x^{1/2}(x^{2/3} - x^{1/4}) &= 2x^{1/2}(x^{2/3}) - 2x^{1/2}(x^{1/4}) \\ &= 2x^{1/2+2/3} - 2x^{1/2+1/4} = 2x^{3/6+4/6} - 2x^{2/4+1/4} \\ &= 2x^{7/6} - 2x^{3/4} \end{aligned}$$

b.
$$\begin{aligned} (x^{1/3} - y^{2/3})^2 &= (x^{1/3})^2 - 2x^{1/3}y^{2/3} + (y^{2/3})^2 \\ &= x^{2/3} - 2x^{1/3}y^{2/3} + y^{4/3} \end{aligned}$$ ■

Simplificación de radicales

Las propiedades de los radicales dadas en la tabla 12 se derivan directamente de las propiedades de los exponentes previamente estudiadas (tabla 10, página 27).

TABLA **12**

Propiedades de los radicales

Propiedad	**Ilustración**
Si m y n son números naturales y a y b son números reales para los cuales existen las raíces indicadas, entonces	
1. $(\sqrt[n]{a})^n = a$	$(\sqrt[3]{2})^3 = (2^{1/3})^3 = 2^1 = 2$
2. $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$	$\sqrt[3]{216} = \sqrt[3]{27 \cdot 8} = \sqrt[3]{27} \cdot \sqrt[3]{8} = 3 \cdot 2 = 6$
3. $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \qquad (b \neq 0)$	$\sqrt[3]{\dfrac{8}{64}} = \dfrac{\sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{64}} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$
4. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$	$\sqrt[3]{\sqrt{64}} = \sqrt[2\cdot 3]{64} = \sqrt[6]{64} = 2$
5. Si n es par: $\sqrt[n]{a^n} = \lvert a \rvert$.	$\sqrt{(-3)^2} = \lvert -3 \rvert = 3$
Si n es impar: $\sqrt[n]{a^n} = a$.	$\sqrt[3]{-8} = -2$

Un error común es escribir $\sqrt[n]{a^n} = a$. Esto no es cierto si a es negativa (vea la ilustración 5 en la tabla 12). Por tanto, a menos que se sepa que la variable a es no negativa, la propiedad 5 da la ecuación correcta.

Cuando se trabaja con expresiones algebraicas que implican radicales, casi siempre expresamos el radical en forma simplificada.

Simplificación de radicales

Una expresión que implica radicales se simplifica si se satisfacen las siguientes condiciones:

1. Las potencias de todos los factores bajo el radical son menores que el índice del radical.
2. El índice del radical se redujo hasta donde fue posible.
3. No aparece algún radical en el denominador.
4. No aparece alguna fracción dentro del radical.

EJEMPLO 7 Determine si cada radical está en forma simplificada. Si no, mencione cuál condición se violó.

a. $\dfrac{1}{\sqrt[4]{x^5}}$ **b.** $\sqrt[6]{y^2}$ **c.** $\sqrt{\dfrac{5}{4}}$

Solución Ninguno de los tres radicales está en forma simplificada. El radical de la parte (a) viola las condiciones 1 y 3; es decir, la potencia de x es 5, la cual es mayor que 4, el índice del radical y aparece un radical en el denominador. El radical de la parte (b) viola la condición 2 puesto que el índice del radical puede reducirse; es decir

$$\sqrt[6]{y^2} = \sqrt[3\cdot 2]{y^2} = \sqrt[3]{y}$$

El radical de la parte (c) viola la condición 4 puesto que hay una fracción adentro del radical. Si lo reescribimos vemos que

$$\sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{5}$$ ■

EJEMPLO 8 Simplifique:

a. $\sqrt[3]{375}$ **b.** $\sqrt[3]{8x^3y^6z^9}$ **c.** $\sqrt[6]{81x^4y^2}$

Solución

a. $\sqrt[3]{375} = \sqrt[3]{3 \cdot 125} = \sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{5^3} = 5\sqrt[3]{3}$ $\sqrt[3]{5^3} = 5$

b. $\sqrt[3]{8x^3y^6z^9} = \sqrt[3]{2^3 \cdot (xy^2z^3)^3}$

$= \sqrt{2^3} \cdot \sqrt[3]{xy(\,^2z^3)^3}$

$= 2xy^2z^3$ $\sqrt[3]{2^3} = 2, \quad \sqrt[3]{(xy^2z^3)^3} = xy^2z^3$

c. $\sqrt[6]{81x^4y^2} = \sqrt[6]{9^2(x^2y)^2}$

$= \sqrt[3\cdot 2]{9^2} \cdot \sqrt[3\cdot 2]{(x^2y)^2}$

$= \sqrt[3]{9} \cdot \sqrt[3]{x^2y}$ $\sqrt[3\cdot 2]{9^2} = \sqrt[3]{9}, \quad \sqrt[3\cdot 2]{(x^2y)^2} = \sqrt[3]{x^2y}$

$= \sqrt[3]{9x^2y}$ ■

Como se mencionó antes, una expresión de radical simplificado no deberá tener radicales en el denominador. Por ejemplo, $3/\sqrt{5}$ *no* está en forma simplificada, mientras que $3\sqrt{5}/5$ sí lo está, puesto que el denominador de éste no contiene radicales. ¿Cómo nos deshacemos del radical $\sqrt{5}$ en la fracción $3/\sqrt{5}$? Por supuesto, al multiplicar por $\sqrt{5}$ puesto que ¡$(\sqrt{5})(\sqrt{5}) = \sqrt{25} = 5$! Pero no podemos multiplicar el denominador de una fracción por cualquier número diferente de 1 sin que cambie la fracción. Por tanto, la solución es multiplicar *tanto* el numerador *como* el denominador de $3/\sqrt{5}$ por $\sqrt{5}$ De manera equivalente, multiplicamos $3/\sqrt{5}$ por $\sqrt{5}/\sqrt{5}$ (lo cual es igual a 1). Por tanto

$$\frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{3}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{\sqrt{25}} = \frac{3\sqrt{5}}{5}$$

Este proceso de eliminar un radical del denominador de una expresión algebraica se conoce como *racionalización del denominador* y se ilustra en los ejemplos 9 y 10.

EJEMPLO 9 Racionalice el denominador.

a. $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ **b.** $\dfrac{3x}{2\sqrt{x}}$ **c.** $\dfrac{x}{\sqrt[3]{y}}$

Solución

a. $\dfrac{1}{\sqrt{2}} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{1}{2}\sqrt{2}$

b. $\dfrac{3x}{2\sqrt{x}} \cdot \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \dfrac{3x\sqrt{x}}{2x} = \dfrac{3}{2}\sqrt{x}$

c. $\dfrac{x}{\sqrt[3]{y}} \cdot \dfrac{\sqrt[3]{y^2}}{\sqrt[3]{y^2}} = \dfrac{x\sqrt[3]{y^2}}{\sqrt[3]{y^3}} = \dfrac{x\sqrt[3]{y^2}}{y}$ ■

Observe que en el ejemplo 9c multiplicamos el denominador por $\sqrt[3]{y^2}$ para obtener $\sqrt[3]{y^3}$, lo cual es igual a y. En general, para racionalizar un denominador que implica una raíz *enésima*, se multiplica el numerador y el denominador por un factor que dé un producto en el denominador que implique una potencia *enésima*. Por ejemplo,

$$\frac{1}{\sqrt[5]{x^3}} = \frac{1}{\sqrt[5]{x^3}} \cdot \frac{\sqrt[5]{x^2}}{\sqrt[5]{x^2}} = \frac{\sqrt[5]{x^2}}{\sqrt[5]{x^5}} = \frac{\sqrt[5]{x^2}}{x}$$

Puesto que $\sqrt[5]{x^3} \cdot \sqrt[5]{x^2} = x^{3/5} \cdot x^{2/5} = x^{5/5} = x$

EJEMPLO 10 Racionalice el denominador.

a. $\sqrt[3]{\dfrac{8}{3}}$ **b.** $\sqrt[3]{\dfrac{x}{y^2}}$

Solución

a. $\sqrt[3]{\dfrac{8}{3}} = \dfrac{\sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{3}} = \dfrac{2}{\sqrt[3]{3}} \cdot \dfrac{\sqrt[3]{3^2}}{\sqrt[3]{3^2}} = \dfrac{2\sqrt[3]{3^2}}{3} = \dfrac{2}{3}\sqrt[3]{9}$

b. $\sqrt[3]{\dfrac{x}{y^2}} = \dfrac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{y^2}} = \dfrac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{y^2}} \cdot \dfrac{\sqrt[3]{y}}{\sqrt[3]{y}} = \dfrac{\sqrt[3]{xy}}{\sqrt[3]{y^3}} = \dfrac{\sqrt[3]{xy}}{y}$ ■

¿Cómo se racionaliza el denominador de una fracción como $\dfrac{1}{1-\sqrt{3}}$? En lugar de multiplicar por $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$ (lo que no elimina el radical en el denominador), multiplicamos por $\dfrac{1+\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}$, y se obtiene

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-\sqrt{3}} \cdot \frac{1+\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} &= \frac{1+\sqrt{3}}{1-\left(\sqrt{3}\right)^2} \\ &= \frac{1+\sqrt{3}}{1-3} = \frac{1+\sqrt{3}}{-2} \\ &= -\frac{1+\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$

En general, para racionalizar un denominador de la forma $a + \sqrt{b}$, multiplicamos por $\dfrac{a-\sqrt{b}}{a-\sqrt{b}}$. Del mismo modo, para racionalizar un denominador de la forma $a - \sqrt{b}$, multiplicamos por $\dfrac{a+\sqrt{b}}{a+\sqrt{b}}$. Nos referimos a las cantidades $a + \sqrt{b}$ y $a - \sqrt{b}$ como **conjugados** uno de otro.

VIDEO

EJEMPLO 11 Racionalice el denominador en la expresión $\dfrac{3}{2-\sqrt{5}}$.

Solución El conjugado de $2 - \sqrt{5}$ es $2 + \sqrt{5}$. Por consiguiente, multiplicamos la fracción dada por $\dfrac{2+\sqrt{5}}{2+\sqrt{5}}$, y se obtiene

$$\begin{aligned}\frac{3}{2-\sqrt{5}} \cdot \frac{2+\sqrt{5}}{2+\sqrt{5}} &= \frac{3(2+\sqrt{5})}{(2-\sqrt{5})(2+\sqrt{5})} = \frac{3(2+\sqrt{5})}{2^2-(\sqrt{5})^2} \\ &= \frac{3(2+\sqrt{5})}{-1} \\ &= -3(2+\sqrt{5})\end{aligned}$$

■

En ocasiones puede que le sea más fácil convertir una expresión que contiene un radical en una que implica exponentes racionales, antes de evaluar la expresión.

EJEMPLO 12 Evalúe:

a. $\sqrt[3]{3^2} \cdot \sqrt[4]{9^3}$ **b.** $\sqrt[3]{x^2y} \cdot \sqrt{xy}$

Solución

a. $\sqrt[3]{3^2} \cdot \sqrt[4]{9^3} = 3^{2/3} \cdot 9^{3/4} = 3^{2/3} \cdot 3^{6/4} = 3^{2/3+3/2} = 3^{4/6+9/6} = 3^{13/6}$

b. $\sqrt[3]{x^2y} \cdot \sqrt{xy} = x^{2/3}y^{1/3} \cdot x^{1/2}y^{1/2} = x^{2/3+1/2}y^{1/3+1/2} = x^{4/6+3/6}y^{2/6+3/6} = x^{7/6}y^{5/6}$ ■

Observe lo fácil que es trabajar con exponentes racionales en este caso.

1.7 Ejercicios de autoevaluación

1. Simplifique:

a. $\dfrac{8^{2/3} \cdot 8^{4/3}}{8^{3/2}}$ **b.** $\left(\dfrac{3y^{-4}y^4}{z^{-2}}\right)^3$ **c.** $\sqrt{5} \cdot \sqrt{45}$

2. Racionalice el denominador:

a. $\dfrac{1}{\sqrt[3]{xy}}$ **b.** $\dfrac{4}{3 + \sqrt{8}}$

Las soluciones a los ejercicios de autoevaluación 1.7 se encuentran en la página 43.

1.7 Preguntas de concepto

1. ¿Qué es la raíz *enésima* de un número real? Dé un ejemplo.

2. ¿Qué es la raíz *enésima* principal de un número real positivo? Dé un ejemplo.

3. ¿Qué significa la expresión “racionalizar el denominador de una expresión algebraica”? Ilustre el proceso con un ejemplo.

1.7 Ejercicios

En los ejercicios 1-20 reescriba el número sin radicales o exponentes.

1. $\sqrt{81}$ **2.** $\sqrt[3]{-27}$

3. $\sqrt[4]{256}$ **4.** $\sqrt[5]{-32}$

5. $9^{1/2}$ **6.** $625^{1/4}$

7. $8^{2/3}$ **8.** $32^{2/5}$

9. $-25^{1/2}$ **10.** $-16^{3/2}$

11. $(-8)^{2/3}$ **12.** $(-32)^{3/5}$

13. $\left(\dfrac{4}{9}\right)^{1/2}$ **14.** $\left(\dfrac{9}{25}\right)^{3/2}$

15. $\left(\dfrac{27}{8}\right)^{2/3}$ **16.** $\left(-\dfrac{8}{125}\right)^{1/3}$

17. $8^{-2/3}$ **18.** $81^{-1/4}$

19. $-\left(\dfrac{27}{8}\right)^{-1/3}$ **20.** $-\left(-\dfrac{8}{27}\right)^{-2/3}$

En los ejercicios 21-40 realice la operación indicada y escriba su respuesta con sólo exponentes.

21. $3^{1/3} \cdot 3^{5/3}$ **22.** $2^{6/5} \cdot 2^{-1/5}$

23. $\dfrac{4^{1/2}}{4^{5/2}}$ **24.** $\dfrac{3^{-5/4}}{3^{-1/4}}$

25. $\dfrac{2^{-1/2} \cdot 3^{2/3}}{2^{3/2} \cdot 3^{-1/3}}$ **26.** $\dfrac{4^{1/3} \cdot 4^{-2/5}}{4^{2/3}}$

27. $(2^{3/2})^4$ **28.** $[(-3)^{1/3}]^2$

29. $x^{2/5} \cdot x^{-1/5}$ **30.** $y^{-3/8} \cdot y^{1/4}$

31. $\dfrac{x^{3/4}}{x^{-1/4}}$ **32.** $\dfrac{x^{7/3}}{x^{-2}}$

33. $\left(\dfrac{x^3}{-27x^{-6}}\right)^{-2/3}$ **34.** $\left(\dfrac{27x^{-3}y^2}{8x^{-2}y^{-5}}\right)^{1/3}$

35. $\left(\dfrac{x^{-3}}{y^{-2}}\right)^{1/2}\left(\dfrac{y}{x}\right)^{3/2}$ **36.** $\left(\dfrac{r^n}{r^{5-2n}}\right)^4$

37. $x^{2/5}(x^2 - 2x^3)$ **38.** $s^{1/3}(2s - s^{1/4})$

39. $2p^{3/2}(2p^{1/2} - p^{-1/2})$ **40.** $3y^{1/3}(y^{2/3} - 1)^2$

En los ejercicios 41-52 escriba las expresiones en su forma de radical más simple.

41. $\sqrt{32}$ **42.** $\sqrt{45}$

43. $\sqrt[3]{-54}$ **44.** $-\sqrt[4]{48}$

45. $\sqrt{16x^2y^3}$ **46.** $\sqrt{40a^3b^4}$

47. $\sqrt[3]{m^6n^3p^{12}}$ **48.** $\sqrt[3]{-27p^2q^3r^4}$

49. $\sqrt[3]{\sqrt{9}}$ **50.** $\sqrt[5]{\sqrt[3]{9}}$

51. $\sqrt[3]{\sqrt{x}}$ **52.** $\sqrt[3]{-\sqrt[4]{x^3}}$

En los ejercicios 53-68 racionalice el denominador de la expresión.

53. $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ **54.** $\dfrac{3}{\sqrt{5}}$ **55.** $\dfrac{3}{2\sqrt{x}}$

56. $\dfrac{3}{\sqrt{xy}}$ **57.** $\dfrac{2y}{\sqrt{3y}}$ **58.** $\dfrac{5x^2}{\sqrt{3x}}$

59. $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$ **60.** $\sqrt{\dfrac{2x}{y}}$

61. $\dfrac{2}{1 + \sqrt{3}}$ **62.** $\dfrac{3}{1 - \sqrt{2}}$

63. $\dfrac{1 + \sqrt{2}}{1 - \sqrt{2}}$ **64.** $\dfrac{9 + \sqrt{2}}{3 - \sqrt{2}}$

65. $\dfrac{q}{\sqrt{q} - 1}$ **66.** $\dfrac{xy}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}$

67. $\dfrac{y}{\sqrt[3]{x^2z}}$ **68.** $\dfrac{2x}{\sqrt[3]{xy^2}}$

En los ejercicios 69-76 escriba la expresión en su forma de radical más simple.

69. $\sqrt{\dfrac{16}{3}}$ **70.** $-\sqrt{\dfrac{8}{3}}$ **71.** $\sqrt[3]{\dfrac{2}{3}}$ **72.** $\sqrt[3]{\dfrac{81}{4}}$

73. $\sqrt{\dfrac{3}{2x^2}}$ **74.** $\sqrt{\dfrac{x^3y^5}{4}}$ **75.** $\sqrt[3]{\dfrac{2y^2}{3}}$ **76.** $\sqrt[3]{\dfrac{3a^3}{b^2}}$

En los ejercicios 77-84 simplifique la expresión.

77. $\dfrac{1}{\sqrt{a}} + \sqrt{a}$ **78.** $\dfrac{x}{\sqrt{x - y}} - \sqrt{x - y}$

79. $\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} + \dfrac{\sqrt{y}}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}$ **80.** $\dfrac{a}{\sqrt{a^2 - b^2}} - \dfrac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$

81. $(x + 1)^{1/2} + \dfrac{1}{2}x(x + 1)^{-1/2}$

82. $\dfrac{1}{2}x^{-1/2}(x + y)^{1/3} + \dfrac{1}{3}x^{1/2}(x + y)^{-2/3}$

83. $\dfrac{\frac{1}{2}(1 + x^{1/3})x^{-1/2} - \frac{1}{3}x^{1/2} \cdot x^{-2/3}}{(1 + x^{1/3})^2}$

84. $\dfrac{\frac{1}{2}x^{-1/2}(x + y)^{1/2} - \frac{1}{2}x^{1/2}(x + y)^{-1/2}}{x + y}$

En los ejercicios 85-88 determine si el enunciado es verdadero o falso. Si es verdadero, explique por qué lo es. Si es falso, explique o dé un ejemplo para demostrar por qué lo es.

85. Si a es un número real, entonces $\sqrt{a^2} = |a|$.

86. Si a es un número real y a es un número real, entonces $-(a^2)^{1/4}$ no está definido.

87. Si n es un número natural y a es un número real positivo, entonces $(a^{1/n})^n = a$.

88. Si a y b son números reales positivos, entonces $\sqrt{a^2 + b^2} = a + b$.

1.7 Soluciones de los ejercicios de autoevaluación

1. a. $\dfrac{8^{2/3} \cdot 8^{4/3}}{8^{3/2}} = 8^{2/3+4/3-3/2} = 8^{6/3-3/2} = 8^{1/2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

b. $\left(\dfrac{3y^{-4}y^4}{z^{-2}}\right)^3 = \left(\dfrac{3y^{-4+4}}{z^{-2}}\right)^3 = \left(\dfrac{3y^0}{z^{-2}}\right)^3$

$= (3z^2)^3 = 3^3z^{2\cdot 3} = 27z^6$

c. $\sqrt{5} \cdot \sqrt{45} = \sqrt{5 \cdot 45} = \sqrt{225} = 15$

2. a. $\dfrac{1}{\sqrt[3]{xy}} \cdot \dfrac{\sqrt[3]{x^2y^2}}{\sqrt[3]{x^2y^2}} = \dfrac{\sqrt[3]{x^2y^2}}{\sqrt[3]{x^3y^3}} = \dfrac{\sqrt[3]{x^2y^2}}{xy}$

b. $\dfrac{4}{3 + \sqrt{8}} \cdot \dfrac{3 - \sqrt{8}}{3 - \sqrt{8}} = \dfrac{4(3 - \sqrt{8})}{3^2 - (\sqrt{8})^2}$

$= \dfrac{4(3 - \sqrt{8})}{9 - 8} = 4(3 - \sqrt{8})$

1.8 Ecuaciones cuadráticas

La ecuación

$$2x^2 + 3x + 1 = 0$$

es un ejemplo de una ecuación cuadrática. En general, una **ecuación cuadrática** en la variable x es cualquier ecuación que puede escribirse en la forma

$$ax^2 + bx + c = 0$$

donde a, b y c son constantes y $a \neq 0$. Nos referimos a esta forma como *forma estándar*. Las ecuaciones como

$$3x^2 + 4x = 1 \quad \text{y} \quad 2t^2 = t + 1$$

son ecuaciones cuadráticas en forma no estándar, pero es fácil transformarlas en forma estándar. Por ejemplo, si agregamos -1 a ambos lados de la primera ecuación se transforma en $3x^2 + 4x - 1 = 0$, la cual está en forma estándar. Asimismo, si restamos $(t + 1)$ de ambos lados de la segunda ecuación, se obtiene $2t^2 - t - 1 = 0$, la cual también está en forma estándar.

Solución mediante factorización

Para resolver una ecuación cuadrática en x encontramos sus raíces. Las *raíces* de una ecuación cuadrática en x son precisamente los valores de x que la satisfacen. El método de resolver ecuaciones cuadráticas mediante *factorización* se basa en la siguiente propiedad del producto cero de los números reales, la cual se repite aquí.

> **Propiedad del producto cero de los números reales**
> Si a y b son números reales y $ab = 0$, entonces $a = 0$, o $b = 0$, o ambos $a, b = 0$.

Esta propiedad, simplemente formulada, indica que el producto de dos números reales es igual a cero si y sólo si uno (o ambos) factores es igual a cero.

EJEMPLO 1 Resuelva $x^2 - 3x + 2 = 0$ mediante factorización.

Solución Al factorizar la ecuación dada obtenemos

$$x^2 - 3x + 2 = (x - 2)(x - 1) = 0$$

Según la propiedad del producto cero de los números reales, obtenemos

$$x - 2 = 0 \quad \text{o} \quad x - 1 = 0$$

por lo que vemos que $x = 2$ o $x = 1$ son las raíces de la ecuación. ■

Si una ecuación cuadrática no está en forma estándar, primero la volvemos a escribir en forma estándar y luego la factorizamos para determinar sus raíces.

EJEMPLO 2 Resuelva mediante factorización.

a. $2x^2 - 7x = -6$ **b.** $4x^2 = 3x$ **c.** $2x^2 = 6x - 4$

Solución

a. Al reescribir la ecuación en forma estándar, obtenemos

$$2x^2 - 7x + 6 = 0$$

Al factorizar la ecuación obtenemos

$$(2x - 3)(x - 2) = 0$$

Por consiguiente

$$2x - 3 = 0 \quad \text{o} \quad x - 2 = 0$$

$$x = \frac{3}{2} \qquad\qquad x = 2$$

b. Primero escribimos la ecuación en forma estándar:

$$4x^2 - 3x = 0$$

Al factorizar la ecuación obtenemos

$$x(4x - 3) = 0$$

Por consiguiente

$$x = 0 \quad \text{o} \quad 4x - 3 = 0$$

$$x = 0 \qquad\qquad x = \frac{3}{4}$$

(Observe que si hubiéramos dividido $4x^2 - 3x = 0$ entre x antes de factorizar la ecuación original, habríamos perdido la solución $x = 0$.)

c. Al reescribir la ecuación en forma estándar obtenemos

$$2x^2 - 6x + 4 = 0$$

Al factorizarla obtenemos

$$2(x^2 - 3x + 2) = 0 \qquad \text{2 es un factor común.}$$

$$2(x - 2)(x - 1) = 0$$

y

$$x = 2 \quad \text{o} \quad x = 1$$

■

Solución con el método de completar el cuadrado

El método de solución por factorización funciona bien con ecuaciones que son fáciles de factorizar. Pero, ¿qué sucede con ecuaciones como $x^2 - 2x - 2 = 0$ que no es fácil factorizarlas? Las ecuaciones de este tipo pueden resolverse con el método de *completar el cuadrado*.

Método de completar el cuadrado	Ilustración
1. Escriba la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ en la forma $$x^2 + \underbrace{\frac{b}{a}}_{\text{Coeficiente de } x} x = \underbrace{-\frac{c}{a}}_{\text{Término constante}}$$ donde el coeficiente de x^2 es 1 y el término constante está en el lado derecho de la ecuación.	$x^2 - 2x - 2 = 0$ $\underbrace{x^2 - 2x}_{\text{Coeficiente de } x} = \underbrace{2}_{\text{Término constante}}$
2. Eleve al cuadrado la mitad del coeficiente de x.	$\left(-\frac{2}{2}\right)^2 = 1$
3. Agregue el número obtenido en el paso 2 a ambos lados de la ecuación, factorícela y resuélvala para x.	$x^2 - 2x + 1 = 2 + 1$ $(x - 1)^2 = 3$ $x - 1 = \pm\sqrt{3}$ $x = 1 \pm \sqrt{3}$

EJEMPLO 3 Resuelva completando el cuadrado.

a. $4x^2 - 3x - 2 = 0$ **b.** $6x^2 - 27 = 0$

Solución

a. Paso 1 Primero escriba

$$x^2 - \frac{3}{4}x - \frac{1}{2} = 0$$

Divida la ecuación original entre 4, el coeficiente de x^2.

$$x^2 - \frac{3}{4}x = \frac{1}{2}$$

Agregue $\frac{1}{2}$ a ambos lados, de modo que el término constante quede en el lado derecho.

Paso 2 Eleve al cuadrado la mitad del coeficiente de x para obtener

$$\left(\frac{-\frac{3}{4}}{2}\right)^2 = \left(-\frac{3}{8}\right)^2 = \frac{9}{64}$$

Paso 3 Agregue $\frac{9}{64}$ a ambos lados de la ecuación:

$$x^2 - \frac{3}{4}x + \frac{9}{64} = \frac{1}{2} + \frac{9}{64}$$
$$= \frac{41}{64}$$

Al factorizar obtenemos

$$\left(x - \frac{3}{8}\right)^2 = \frac{41}{64}$$
$$x - \frac{3}{8} = \pm\frac{\sqrt{41}}{8}$$
$$x = \frac{3}{8} \pm \frac{\sqrt{41}}{8} = \frac{1}{8}(3 \pm \sqrt{41})$$

b. Es mucho más fácil resolver esta ecuación porque el coeficiente de x es 0. Como antes, escribimos la ecuación en la forma

$$6x^2 = 27 \quad \text{o} \quad x^2 = \frac{9}{2}$$

Al tomar la raíz cuadrada de ambos lados obtenemos

$$x = \pm\sqrt{\frac{9}{2}} = \pm\frac{3}{\sqrt{2}} = \pm\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

■

Uso de la fórmula cuadrática

Al utilizar el método de completar el cuadrado para resolver la ecuación general cuadrática

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad (a \neq 0)$$

obtenemos la fórmula cuadrática (pero no la determinaremos aquí). Esta fórmula puede utilizarse para resolver cualquier ecuación cuadrática.

Fórmula cuadrática

Las soluciones de $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) están dadas por

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

EJEMPLO 4 Utilice la fórmula cuadrática para resolver las siguientes ecuaciones:

a. $2x^2 + 5x - 12 = 0$ **b.** $x^2 + 165x + 6624 = 0$ **c.** $x^2 = -3x + 8$

Solución

a. La ecuación está en forma estándar, con $a = 2$, $b = 5$ y $c = -12$. Al utilizar la fórmula cuadrática encontramos

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4(2)(-12)}}{2(2)}$$
$$= \frac{-5 \pm \sqrt{121}}{4} = \frac{-5 \pm 11}{4}$$
$$= -4 \quad \text{o} \quad \frac{3}{2}$$

Observe que esta ecuación también puede resolverse mediante factorización. Por tanto

$$2x^2 + 5x - 12 = (2x - 3)(x + 4) = 0$$

donde vemos que las raíces deseadas con $x = \frac{3}{2}$ o $x = -4$, como antes se obtuvieron.

b. La ecuación está en forma estándar con $a = 1$, $b = 165$ y $c = 6624$. Al utilizar la forma cuadrática encontramos

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-165 \pm \sqrt{165^2 - 4(1)(6624)}}{2(1)}$$
$$= \frac{-165 \pm \sqrt{729}}{2}$$
$$= \frac{-165 \pm 27}{2} = -96 \quad \text{o} \quad -69$$

En este caso es preferible utilizar la fórmula cuadrática en lugar de factorizar la ecuación cuadrática.

c. Primero reescribimos la ecuación dada en la forma estándar $x^2 + 3x - 8 = 0$, y vemos que $a = 1$, $b = 3$ y $c = -8$. Al utilizar la fórmula cuadrática encontramos

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4(1)(-8)}}{2(1)} = \frac{-3 \pm \sqrt{41}}{2}$$

Es decir, las soluciones son

$$\frac{-3 + \sqrt{41}}{2} \approx 1.7 \quad \text{o} \quad \frac{-3 - \sqrt{41}}{2} \approx -4.7$$

En este caso, ¡la fórmula cuadrática muestra su utilidad! ■

EJEMPLO 5 Utilice la fórmula cuadrática para resolver la ecuación $9x^2 - 12x + 4 = 0$.

Solución Al utilizar la fórmula cuadrática con $a = 9$, $b = -12$ y $c = 4$, vemos que

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-12) \pm \sqrt{(-12)^2 - 4(9)(4)}}{2(9)}$$
$$= \frac{12 \pm \sqrt{144 - 144}}{18} = \frac{12}{18} = \frac{2}{3}$$

En este caso la única solución es $x = \frac{2}{3}$. Nos referimos a $\frac{2}{3}$ como una *doble raíz*. (Esta ecuación también podría resolverse mediante factorización. ¡Inténtelo!) ■

EJEMPLO 6 Resuelva la ecuación $\sqrt{2x-1} - \sqrt{x+3} + 1 = 0$.

Solución Procedemos como sigue:

$$
\begin{aligned}
\sqrt{2x-1} &= \sqrt{x+3} - 1 && \text{Agregue } \sqrt{x+3} - 1 \text{ a ambos lados.}\\
2x - 1 &= (\sqrt{x+3} - 1)^2 && \text{Eleve ambos lados al cuadrado.}\\
2x - 1 &= x + 3 - 2\sqrt{x+3} + 1 &&\\
x - 5 &= -2\sqrt{x+3} && \text{Simplifique.}\\
(x-5)^2 &= (-2\sqrt{x+3})^2 && \text{Eleve ambos lados al cuadrado.}\\
x^2 - 10x + 25 &= 4x + 12 &&\\
x^2 - 14x + 13 &= 0 &&\\
(x-1)(x-13) &= 0 &&\\
x &= 1 \quad \text{o} \quad 13 &&
\end{aligned}
$$

A continuación tenemos que comprobar que estas soluciones de la ecuación cuadrática son en realidad las soluciones de la ecuación original. Recuerde que la elevación al cuadrado de una ecuación podría introducir soluciones extrañas. Ahora, si sustituimos $x = 1$ en la ecuación original se obtiene

$$\sqrt{2x-1} - \sqrt{1+3} + 1 = 1 - 2 + 1 = 0$$

y por tanto $x = 1$ es una solución. Por otra parte, si $x = 13$, obtenemos

$$\sqrt{26-1} - \sqrt{16} + 1 = 5 - 4 + 1 = 2 \neq 0$$

y por tanto $x = 13$ es una solución extraña. Por consiguiente, la solución requerida es $x = 1$. ■

El ejemplo siguiente ilustra una aplicación que implica ecuaciones cuadráticas.

VIDEO

EJEMPLO DE APLICACIÓN 7 **Diseño de un libro** Un editor de producción en una editorial de libros de texto decidió que las páginas de un libro debían tener márgenes superiores e inferiores de 1 pulgada y de $\frac{1}{2}$ pulgada en los lados. Además se estipuló que la longitud de una página debía ser $1\frac{1}{2}$ veces su ancho y tener un área impresa de exactamente 51 pulgadas cuadradas. Determine las dimensiones de una página del libro.

Solución Sea x el ancho de una página del libro (figura 3). Entonces la longitud de la página es $\frac{3}{2}x$. Las dimensiones del área impresa de la página son $(\frac{3}{2}x - 2)$ pulgadas por $(x - 1)$ pulgadas, y por tanto el área es $(\frac{3}{2}x - 2)(x - 1)$ pulgadas cuadradas. Como el área impresa tiene que ser exactamente de 51 pulgadas cuadradas, debemos tener

$$\left(\frac{3}{2}x - 2\right)(x - 1) = 51$$

Al expandir el lado izquierdo de la ecuación se obtiene

$$
\begin{aligned}
\frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{2}x - 2x + 2 &= 51 &&\\
\frac{3}{2}x^2 - \frac{7}{2}x - 49 &= 0 &&\\
3x^2 - 7x - 98 &= 0 && \text{Multiplique ambos lados por 2.}
\end{aligned}
$$

Al factorizar obtenemos

$$(3x + 14)(x - 7) = 0$$

y por consiguiente $x = -\frac{14}{3}$ o $x = 7$. Como x debe ser positiva, se omite la raíz negativa y concluimos que la solución requerida es $x = 7$. Por consiguiente, las dimensiones de la página son 7 pulgadas por $\frac{3}{2}(7)$, o $10\frac{1}{2}$, pulgadas. ■

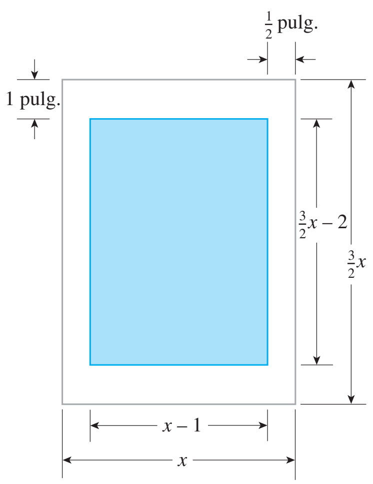


FIGURA 3

TABLA 13

Solución de una ecuación cuadrática

Discriminante $b^2 - 4ac$	Número de soluciones
Positivo	Dos soluciones reales y distintas
Igual a 0	Una solución real
Negativo	Ninguna solución real

La cantidad $b^2 - 4ac$, la cual aparece bajo el signo de radical en la fórmula cuadrática, se llama **discriminante**. Lo utilizamos para determinar el número de soluciones de una ecuación cuadrática. Si es positivo, la ecuación tiene dos raíces reales y distintas (ejemplo 4a-c). Si es igual a 0, la ecuación tiene una doble raíz (ejemplo 5). Por último, si es negativo, la ecuación no tiene raíces reales. Estos resultados se resumen en la tabla 13.

EJEMPLO 8 Utilice el discriminante para determinar el número de soluciones de cada ecuación.

a. $x^2 - 7x + 4 = 0$ **b.** $2x^2 - 3x + 4 = 0$

Solución

a. En este caso $a = 1$, $b = -7$ y $c = 4$. Por consiguiente,

$$\begin{aligned} b^2 - 4ac &= (-7)^2 - 4(1)(4) = 49 - 16 \\ &= 33 \end{aligned}$$

y concluimos que la ecuación tiene dos soluciones reales y distintas.

b. En este caso $a = 2$, $b = -3$ y $c = 4$. Por consiguiente,

$$\begin{aligned} b^2 - 4ac &= (-3)^2 - 4(2)(4) = 9 - 32 \\ &= -23 \end{aligned}$$

Como el discriminante es negativo, concluimos que la ecuación no tiene ninguna solución real. ■

1.8 Ejercicios de autoevaluación

1. Resuelva mediante factorización:
   a. $x^2 - 5x + 6 = 0$
   b. $4t^2 - 4t = 3$

2. Resuelva la ecuación $2x^2 - 4x - 8 = 0$
   a. Completando el cuadrado
   b. Utilizando la fórmula cuadrática

Las soluciones de los ejercicios de autoevaluación 1.8 se encuentran en la página 52.

1.8 Preguntas de concepto

1. ¿Qué es una *ecuación cuadrática* en x? Dé un ejemplo.
2. Explique el método de completar el cuadrado. Ilústrelo con un ejemplo.
3. Formule la ecuación cuadrática e ilustre su uso con un ejemplo.

1.8 Ejercicios

En los ejercicios 1-16 resuelva la ecuación factorizándola, si se requiere.

1. $(x + 3)(x - 2) = 0$
2. $(y - 3)(y - 4) = 0$
3. $x^2 - 4 = 0$
4. $2m^2 - 32 = 0$
5. $x^2 + x - 12 = 0$
6. $3x^2 - x - 4 = 0$
7. $4t^2 + 2t - 2 = 0$
8. $-6x^2 + x + 12 = 0$
9. $\frac{1}{4}x^2 - x + 1 = 0$
10. $\frac{1}{2}a^2 + a - 12 = 0$
11. $2m^2 + m = 6$
12. $6x^2 = -5x + 6$

13. $4x^2 - 9 = 0$

14. $8m^2 + 64m = 0$

15. $z(2z + 1) = 6$

16. $13m = -5 - 6m^2$

En los ejercicios 17-26 resuelva la ecuación completando el cuadrado.

17. $x^2 + 2x - 8 = 0$

18. $x^2 - x - 6 = 0$

19. $6x^2 - 12x = 3$

20. $2x^2 - 6x = 20$

21. $m^2 - 3 = -m$

22. $p^2 - 4 = -2p$

23. $3x - 4 = -2x^2$

24. $10x - 5 = 4x^2$

25. $4x^2 - 13 = 0$

26. $7p^2 - 20 = 0$

En los ejercicios 27-36 resuelva la ecuación con la fórmula cuadrática.

27. $2x^2 - x - 6 = 0$

28. $6x^2 - 7x - 3 = 0$

29. $m^2 = 4m - 1$

30. $2x^2 = 8x - 3$

31. $8x + 3 = 8x^2$

32. $6p - 6 = p^2$

33. $4x = -2x^2 + 3$

34. $15 - 2y^2 = 7y$

35. $2.1x^2 - 4.7x - 6.2 = 0$

36. $0.2m^2 + 1.6m + 1.2 = 0$

En los ejercicios 37-44 resuelva la ecuación.

37. $x^4 - 5x^2 + 6 = 0$
Sugerencia: Sea $m = x^2$. Luego resuelva la ecuación cuadrática en m.

38. $m^4 - 13m^2 + 36 = 0$
Sugerencia: Sea $x = m^2$. Luego resuelva la ecuación cuadrática en x.

39. $y^4 - 5y^2 + 6 = 0$
Sugerencia: Sea $x = y^2$.

40. $4x^4 - 21x^2 + 5 = 0$
Sugerencia: Sea $y = x^2$.

41. $6(x + 2)^2 + 7(x + 2) - 3 = 0$
Sugerencia: Sea $y = x + 2$.

42. $8(2m + 3)^2 + 14(2m + 3) - 15 = 0$
Sugerencia: Sea $x = 2m + 3$.

43. $6w - 13\sqrt{w} + 6 = 0$
Sugerencia: Sea $x = \sqrt{w}$.

44. $\left(\dfrac{t}{t-1}\right)^2 - \dfrac{2t}{t-1} - 3 = 0$

Sugerencia: Sea $x = \dfrac{t}{t-1}$.

En los ejercicios 45-62 resuelva la ecuación.

Sugerencia: Asegúrese de comprobar si hay soluciones extrañas.

45. $\dfrac{2}{x+3} - \dfrac{4}{x} = 4$

46. $\dfrac{3y-1}{4} + \dfrac{4}{y+1} = \dfrac{5}{2}$

47. $x + 2 - \dfrac{3}{2x-1} = 0$

48. $\dfrac{x^2}{x-1} = \dfrac{3-2x}{x-1}$

49. $1 - \dfrac{5}{2y} - \dfrac{6}{y^2} = 0$

50. $6 + \dfrac{1}{k} - \dfrac{2}{k^2} = 0$

51. $\dfrac{3}{x^2-1} + \dfrac{2x}{x+1} = \dfrac{7}{3}$

52. $\dfrac{m}{m-2} - \dfrac{27}{7} = \dfrac{2}{m^2-m-2}$

53. $\dfrac{3x}{x-2} + \dfrac{4}{x+2} = \dfrac{24}{x^2-4}$

54. $\dfrac{3x}{x+1} + \dfrac{2}{x} + 5 = \dfrac{3}{x^2+x}$

55. $\dfrac{2t+1}{t-2} - \dfrac{t}{t+1} = -1$

56. $\dfrac{x}{x+1} - \dfrac{3}{x-2} + \dfrac{2}{x^2-x-2} = 0$

57. $\sqrt{u^2 + u - 5} = 1$

58. $\sqrt{6x^2 - 5x} - 2 = 0$

59. $\sqrt{2r + 3} = r$

60. $\sqrt{3 - 4x} + 2x = 0$

61. $\sqrt{s - 2} - \sqrt{s + 3} + 1 = 0$

62. $\sqrt{x + 1} - \sqrt{2x - 5} + 1 = 0$

En los ejercicios 63-70 utilice el discriminante para determinar el número de soluciones reales de la ecuación.

63. $x^2 - 6x + 5 = 0$

64. $2m^2 + 5m + 3 = 0$

65. $3y^2 - 4y + 5 = 0$

66. $2p^2 + 5p + 6 = 0$

67. $4x^2 + 12x + 9 = 0$

68. $25x^2 - 80x + 64 = 0$

69. $\dfrac{6}{k^2} + \dfrac{1}{k} - 2 = 0$

70. $(2p + 1)^2 - 3(2p + 1) + 4 = 0$

71. **Movimiento de una pelota** Una persona de pie en el balcón de un edificio lanza una pelota directamente hacia arriba. La altura de la pelota medida con respecto al suelo después de t segundos es $h = -16t^2 + 64t + 768$. ¿Cuándo llega al suelo la pelota?

72. **Movimiento de un cohete** Un cohete es lanzado verticalmente hacia arriba, de modo que su altura (medida en pies) t segundos después del lanzamiento es

$$h(t) = -16t^2 + 384t + 4$$

a. Determine el tiempo o tiempos cuando el cohete está a una altura de 1,284 pies.
b. ¿Cuánto tiempo está el cohete en vuelo?

73. **Movimiento de una ciclista** Una ciclista avanza a lo largo de una trayectoria recta a una velocidad de u pies/s cuando pasa por un árbol. Acelerando a a pies/s^2 alcanza una velocidad de v pies/s, donde $v = ut + at^2$. Si la ciclista avanzaba a 10 pies/s y comenzó a desacelerar a razón de 4 pies/s^2 en el momento en que pasó por el árbol, ¿cuánto tardó en alcanzar una velocidad de 22 pies/s?

74. Utilidad de un viñedo Phillip, el propietario de un viñedo, estima que la utilidad por producir y vender $(x + 10{,}000)$ botellas de vino es $P = -0.0002x^2 + 3x + 50{,}000$. Determine el nivel o niveles de producción que le redituará una utilidad de $60,800.

75. Demanda de alarmas contra humo La cantidad demandada (medida en millares) de la alarma contra humo/semana está relacionada con su precio unitario p (en dólares) por la ecuación

$$p = \frac{30}{0.02x^2 + 1} \qquad (0 \le x \le 10)$$

Si el precio unitario es de $10, ¿cuál es la cantidad demandada?

76. Demanda de insumos La cantidad demandada x (medida en millares) de un cierto insumo cuando el precio unitario se fija a $\$p$ está dada por la ecuación

$$p = \sqrt{-x^2 + 100}$$

Si el precio unitario es de $6, ¿cuál es la cantidad demandada?

77. Oferta de radios satelitales La cantidad x de radios satelitales que un fabricante lanzará al mercado está relacionada con el precio unitario p (en dólares) por la ecuación

$$p = \frac{1}{10}\sqrt{x} + 10$$

¿Cuántos radios satelitales lanzará el fabricante al mercado si el precio unitario es de $30?

78. Oferta de lámparas de escritorio El fabricante de la lámpara de escritorio Luminar sacará x miles de unidades al mercado si su precio unitario es de p dólares, donde p y x están relacionadas por la ecuación

$$p = 0.1x^2 + 0.5x + 15$$

Si el precio unitario de la lámpara se fija en $20, ¿cuántas lámparas lanzará al mercado el fabricante?

79. Contenido de oxígeno de un estanque Cuando se vierten desechos orgánicos en un estanque, el proceso de oxidación que ocurre reduce el contenido de oxígeno del estanque. Sin embargo, con el tiempo, la naturaleza restaurará el contenido de oxígeno a su nivel natural. Suponga que el contenido de oxígeno t días después de que se vertieron los desechos orgánicos en el estanque es

$$P = 100\left(\frac{t^2 + 10t + 100}{t^2 + 20t + 100}\right)$$

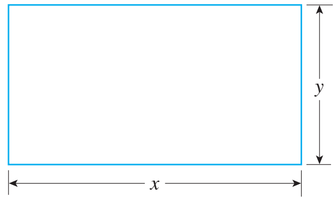
por ciento de su nivel normal. Determine el t correspondiente a un contenido de oxigeno de 80% e interprete sus resultados.

80. Razón dorada Considere un rectángulo de ancho x y altura y (vea la figura adjunta). La relación $r = \frac{x}{y}$ que satisface la ecuación

$$\frac{x}{y} = \frac{x + y}{x}$$

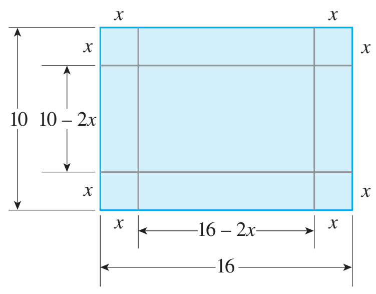
se llama *razón dorada*. Demuestre que

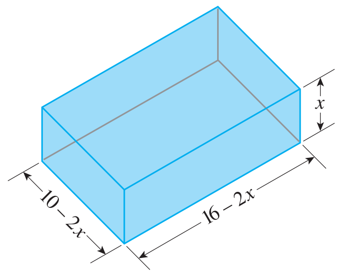
$$r = \left(\frac{1}{2}\right)\left(1 + \sqrt{5}\right) \approx 1.6$$



Nota: Una estructura o imagen con una relación de ancho a altura igual a la razón dorada es especialmente agradable a la vista. En realidad, los antiguos griegos utilizaron dicha razón para diseñar sus hermosos templos y edificios públicos como el Partenón (vea la siguiente fotografía).

81. Construcción de una caja Recortando cuadrados idénticos de cada esquina de un trozo rectangular de cartón y plegando las faldillas resultantes, se puede formar una caja abierta (vea la figura adjunta). Si el cartón es de 16 pulg de largo por 10 pulg de ancho, determine las dimensiones de la caja resultante si se tiene un área de superficie total de 144 pulg^2.



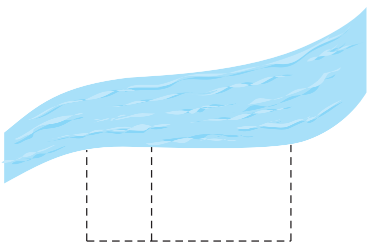


82. **DELIMITACIÓN DE UN ÁREA** Carmen desea erigir una cerca de un jardín rectangular propuesto en su patio trasero. La longitud del jardín tiene que ser dos veces su ancho, y el área del mismo tiene que ser de 200 pies^2. ¿Cuántos pies de cerca necesita?

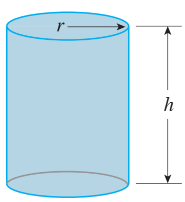
83. **DELIMITACIÓN DE UN ÁREA** George tiene 128 pies de cerca. Desea cortarla en dos tramos, con el propósito de cercar dos regiones cuadradas. Si la suma de las áreas de las regiones cercadas es de 562.5 pies^2, ¿cuán largo debe ser cada tramo de cerca?

84. **ANCHO DE UNA BANQUETA** Un jardín rectangular de 40 pies de largo y de 20 pies de ancho está rodeado por una banqueta de ancho uniforme. Si el área de la banqueta es de 325 pies^2, ¿cuál es su ancho?

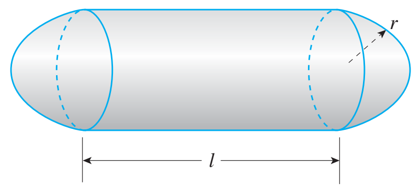
85. **DELIMITACIÓN DE UN ÁREA** El propietario del rancho los Feliz dispone de 3,000 yardas de cerca para delimitar un área rectangular de un terreno de pastura a lo largo de una parte recta de un río. ¿Cuáles son las dimensiones del área más grande que puede cercarse?



86. **RADIO DE UNA LATA CILÍNDRICA** El área de un cilindro circular recto es $S = 2\pi r^2 + 2\pi rh$, donde r es el radio del cilindro y h es su altura. ¿Cuál es el radio de un cilindro de 100 pulg^2 de área y altura de 3 pulg?



87. **DISEÑO DE UN CONTENEDOR DE METAL** Un contenedor de metal consiste en un cilindro circular recto con dos extremos semiesféricos. El área del contenedor es $S = 2\pi rl + 4\pi r^2$, donde l es la longitud del cilindro y r es el radio de la semiesfera. Si la longitud del cilindro es de 4 pies y el área del contenedor es 28π pies^2, ¿cuál es el radio de cada semiesfera?



88. **DERRAMES DE PETRÓLEO** En aguas en calma el derrame de petróleo del casco roto de un buque tanque varado se esparce en todas direcciones. El área contaminada en un cierto instante era circular de 100 pies de radio. Poco tiempo después el área, aún circular, se había incrementado a $4{,}400\pi$ pies^2. ¿Qué tanto se había incrementado el radio?

En los ejercicios 89-92 determine si el enunciado es verdadero o falso. Si es verdadero, explique por qué lo es. Si es falso, explique o dé un ejemplo para demostrar por qué lo es.

89. Si a y b son números reales y $ab \neq 0$, entonces $a \neq 0$, o $b \neq 0$.

90. Si a, b y c son números reales y $abc \neq 0$, entonces $\frac{a+b}{c}$ es un número real, pero $\frac{a}{b+c}$ puede no serlo.

91. Si $b^2 - 4ac > 0$ y $a \neq 0$, entonces las raíces de $ax^2 - bx + c = 0$ son los negativos de las raíces de $ax^2 + bx + c = 0$.

92. Si $b^2 - 4ac \neq 0$ y $a \neq 0$, entonces $ax^2 + bx + c = 0$ tiene dos raíces reales distintas o no tiene ningunas raíces reales.

1.8 Soluciones a los ejercicios de autoevaluación

1. a. Al factorizar la ecuación dada obtenemos

$$x^2 - 5x + 6 = (x - 3)(x - 2) = 0$$

y $x = 3$ o $x = 2$.

b. Al reescribir la ecuación dada obtenemos

$$4t^2 - 4t - 3 = 0$$ Agregue -3 a ambos lados de la ecuación.

Al factorizar esta ecuación se obtiene

$$(2t - 3)(2t + 1) = 0$$

y $t = \frac{3}{2}$ o $t = -\frac{1}{2}$.

2. a. Paso 1 Primero escriba

$$x^2 - 2x - 4 = 0$$ Divida la ecuación original entre 2, el coeficiente de x^2.

$$x^2 - 2x = 4$$ Agregue 4 a ambos lados de modo que el término constante quede del lado derecho.

Paso 2 Eleve al cuadrado la mitad del coeficiente de x para obtener

$$\left(\frac{-2}{2}\right)^2 = 1$$

Paso 3 Agregue 1 a ambos lados de la ecuación:

$$x^2 - 2x + 1 = 5$$

Al factorizar obtenemos

$$(x - 1)^2 = 5$$
$$x - 1 = \pm\sqrt{5}$$
$$x = 1 \pm \sqrt{5}$$

b. Al utilizar la fórmula cuadrática, con $a = 2$, $b = -4$ y $c = -8$, obtenemos

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(2)(-8)}}{2(2)}$$
$$= \frac{4 \pm \sqrt{80}}{4} = \frac{4 \pm 4\sqrt{5}}{4}$$
$$= 1 \pm \sqrt{5}$$

1.9 Desigualdades y valor absoluto

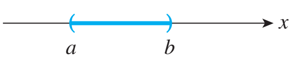
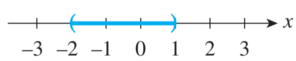
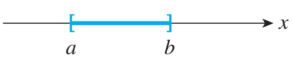
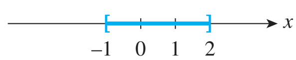
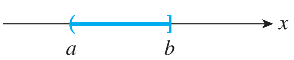
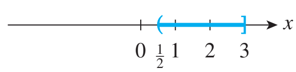
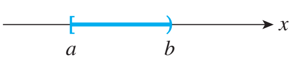
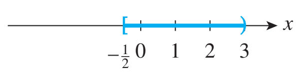
Intervalos

En la sección 1.1 se describe el sistema de números reales y sus propiedades. Con frecuencia concentraremos nuestra atención en ciertos subconjuntos de números reales. Por ejemplo, si x denota el número de automóviles que salen de la línea de ensamble en una planta automotriz, entonces x debe ser no negativa; esto es, $x \geq 0$. Llevando este ejemplo un paso más adelante, suponga que la gerencia decide que la producción diaria no debe exceder de 200 automóviles. Entonces x debe satisfacer la desigualdad $0 \leq x \leq 200$.

Más generalmente nos interesan ciertos subconjuntos de números reales llamados intervalos finitos e intervalos infinitos. Los **intervalos finitos** son abiertos, cerrados o semiabiertos. El conjunto de todos los números reales que quedan *estrictamente* entre dos números fijos a y b se llama **intervalo abierto** (a, b). Se compone de todos los números reales x que satisfacen las desigualdades $a < x < b$; se llama "abierto" porque ninguno de sus puntos extremos está incluido en el intervalo. Un **intervalo cerrado** contiene sus dos puntos extremos. Por tanto, el conjunto de todos los números reales x que satisfacen las desigualdades $a \leq x \leq b$ es el intervalo cerrado $[a, b]$. Observe que se utilizan paréntesis cuadrados para indicar que los puntos extremos están incluidos en este intervalo. Los **intervalos semiabiertos** (también llamados *intervalos semicerrados*) contienen sólo *uno* de sus puntos extremos. El intervalo $[a, b)$ es el conjunto de todos los números x que satisfacen $a < x \leq b$. En la tabla 14 se ilustran ejemplos de estos intervalos finitos.

TABLA **14**

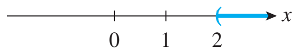
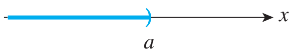
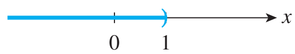
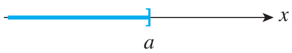
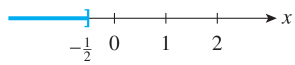
Intervalos finitos

Intervalo		Gráfica	Ejemplo	
Abierto	(a, b)		$(-2, 1)$	
Cerrado	$[a, b]$		$[-1, 2]$	
Semiabierto	$(a, b]$		$(\frac{1}{2}, 3]$	
Semiabierto	$[a, b)$		$[-\frac{1}{2}, 3)$	

Los **intervalos infinitos** incluyen todas las semilíneas (a, ∞), $[a, \infty)$, $(-\infty, a)$ y $(-\infty, a]$, definidas por el conjunto de todos los números reales que satisfacen $x > a$, $x \geq a$, $x < a$ y $x \leq a$, respectivamente. El símbolo ∞ llamado *infinito*, no es un número real. Se utiliza aquí sólo para propósitos de notación junto con la definición de intervalos infinitos. La notación $(-\infty, \infty)$ se utiliza para el conjunto de números reales x, puesto que, por definición, las desigualdades $-\infty < x < \infty$ son válidas para cualquier número real x. Estos intervalos infinitos se ilustran en la tabla 15.

TABLA 15

Intervalos infinitos

Intervalo	Gráfica	Ejemplo	
(a, ∞)		$(2, \infty)$	
$[a, \infty)$		$[-1, \infty)$	
$(-\infty, a)$		$(-\infty, 1)$	
$(-\infty, a]$		$\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right]$	

Desigualdades

En aplicaciones prácticas, a menudo se encuentran intervalos al resolver una o más desigualdades que implican una variable. Para resolverlas utilizamos las propiedades que aparecen en la tabla 16.

TABLA 16

Propiedades de las desigualdades

Propiedad	Ilustración
Sean a, b y c cualesquiera números reales.	
1. Si $a < b$ y $b < c$, entonces $a < c$.	$2 < 3$ y $3 < 8$, por tanto $2 < 8$.
2. Si $a < b$, entonces $a + c < b + c$.	$-5 < -3$, por tanto $-5 + 2 < -3 + 2$; es decir, $-3 < -1$.
3. Si $a < b$ y $c > 0$, entonces $ac < bc$.	$-5 < -3$ y $2 > 0$, por tanto $(-5)(2) < (-3)(2)$; es decir, $-10 < -6$.
4. Si $a < b$ y $c < 0$, entonces $ac > bc$.	$-2 < 4$ y $-3 < 0$, por tanto $(-2)(-3) > (4)(-3)$; es decir, $6 > -12$.

Propiedades similares se mantienen si cada signo de desigualdad, $<$, entre a y b es reemplazado por $\geq$, $>$ o $\leq$.

Un número real es una *solución de una desigualdad* que implica una variable si se obtiene un enunciado verdadero cuando la variable es reemplazada por dicho número. El conjunto de todos los números reales que satisface la desigualdad se llama *conjunto solución*.

EJEMPLO 1 Resuelva $3x - 2 < 7$.

Solución Agregue 2 a cada lado de la desigualdad para obtener

$$3x - 2 + 2 < 7 + 2$$
$$3x < 9$$

A continuación multiplique por $\frac{1}{3}$ cada lado de la desigualdad para obtener

$$\frac{1}{3}(3x) < \frac{1}{3}(9)$$
$$x < 3$$

La solución es el conjunto de todos los valores de x en el intervalo $(-\infty, 3)$. ■

EJEMPLO 2 Resuelva la desigualdad $-1 \leq 2x - 5 < 7$ y grafique el conjunto solución.

Solución Agregue 5 a cada miembro de la doble desigualdad para obtener

$$4 \leq 2x < 12$$

A continuación multiplique cada miembro de la doble desigualdad resultante por $\frac{1}{2}$, lo que da

$$2 \leq x < 6$$

Por tanto, la solución es el conjunto de todos los valores de x que quedan en el intervalo $[2, 6)$. La gráfica del conjunto solución se muestra en la figura 4. ■

FIGURA **4**
Gráfica del conjunto solución de $-1 \leq 2x - 5 < 7$

Solución de desigualdades por factorización

El método de factorización puede utilizarse para resolver desigualdades que implican polinomios de grado 2 o mayor. Este método se basa en el principio de que un polinomio cambia de signo sólo en un punto donde su valor es 0. Para encontrar los valores de x donde el polinomio es igual a 0, lo igualamos a 0 y luego lo resolvemos para x. Los valores obtenidos pueden entonces ser utilizados para resolver la desigualdad dada. En el ejemplo 3 se dan los pasos detallados de esta técnica.

EJEMPLO 3 Resuelva $x^2 - 5x + 6 > 0$.

Solución

Paso 1 *Igualar la desigualdad a* 0*:*

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

Paso 2 *Factorizar el polinomio:*

$$(x - 3)(x - 2) = 0$$

Paso 3 *Construir un diagrama de signos de los factores del polinomio.* Utilizamos un $+$ para indicar que un factor es positivo con un valor dado de x, un $-$ para indicar que es negativo y un 0 para indicar que es igual a 0. Ahora, $x - 3 < 0$ si $x < 3$, $x - 3 > 0$ si $x > 3$ y $x - 3 = 0$ si $x = 3$. Asimismo, $x - 2 < 0$ si $x < 2$, $x - 2 > 0$ si $x > 2$ y $x - 2 = 0$ si $x = 2$. Con esta información construimos el diagrama de signos en la figura 5.

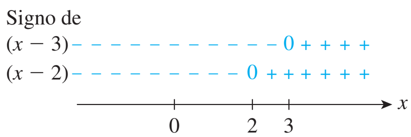


FIGURA **5**

Paso 4 *Determinar los intervalos que satisfacen la desigualdad dada.* Como $x^2 - 5x + 6 > 0$, requerimos que el producto de los dos factores sea positivo, es decir, que ambos tengan el mismo signo. En el diagrama de signos vemos que los dos factores tienen el mismo signo, cuando $x < 2$ o $x > 3$. Por tanto, el conjunto solución es $(-\infty, 2) \cup (3, \infty)$. ■

EJEMPLO 4 Resuelva la desigualdad $x^2 + 2x - 8 < 0$.

Solución

Paso 1 $x^2 + 2x - 8 = 0$

Paso 2 $(x + 4)(x - 2) = 0$, por tanto $x = -4$ o $x = 2$.

Paso 3 $x + 4 > 0$ cuando $x > -4$, $x + 4 < 0$ cuando $x < -4$ y $x + 4 = 0$ cuando $x = -4$. Asimismo, $x - 2 > 0$ cuando $x > 2$, $x - 2 < 0$ cuando $x < 2$ y $x - 2 = 0$ cuando $x = 2$. Con estos resultados construimos el diagrama de signos de los factores de $x^2 + 2x - 8$ (figura 6).

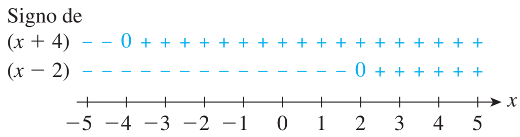


FIGURA **6**

Paso 4 Como $x^2 + 2x - 8 < 0$, el producto de los dos factores debe ser negativo, es decir, los signos de los dos factores deben diferir. En el diagrama de signos, vemos que los dos factores $x + 4$ y $x - 2$ tienen signos opuestos cuando x queda estrictamente entre -4 y 2. Por consiguiente, la solución requerida es el intervalo $(-4, 2)$. ■

Solución de desigualdades que implican un cociente

Los dos ejemplos siguientes muestran cómo se resuelve una desigualdad que implica el cociente de dos expresiones algebraicas.

EJEMPLO 5 Resuelva la desigualdad $\dfrac{x + 1}{x - 1} \geq 0$.

Solución El cociente $(x + 1)/(x - 1)$ es positivo (mayor que 0) cuando el numerador y el denominador tienen el *mismo* signo. Los signos de $x + 1$ y $x - 1$ se muestran en la figura 7.

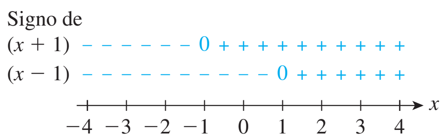


FIGURA **7**

En el diagrama de signos, vemos que $x + 1$ y $x - 1$ tienen el mismo signo cuando $x < -1$ o $x > 1$. El cociente $(x + 1)/(x - 1)$ es igual a 0 cuando $x = -1$. No está definido en $x = 1$, puesto que el denominador es 0 en ese punto. Por consiguiente, la solución requerida es el conjunto de las x en los intervalos $(-\infty, -1]$ y $(1, \infty)$. ■

EJEMPLO 6 Resuelva la desigualdad $\dfrac{2x - 1}{x - 2} \geq 1$.

Solución Reescribimos la desigualdad dada de modo que el lado derecho sea igual a 0:

$$\frac{2x - 1}{x - 2} - 1 \geq 0$$

$$\frac{2x - 1 - (x - 2)}{x - 2} \geq 0$$

$$\frac{2x - 1 - x + 2}{x - 2} \geq 0$$

$$\frac{x + 1}{x - 2} \geq 0$$

A continuación se construye el diagrama de signos de los factores en el numerador y el denominador (figura 8).

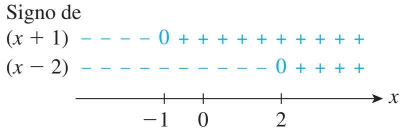


FIGURA **8**

Como el cociente de estos dos factores debe ser positivo o igual a 0, requerimos que el signo de cada factor sea el mismo o que el cociente de los dos sea igual a cero. En el diagrama de signos vemos que el conjunto solución está dado por $(-\infty, -1]$ y $(2, \infty)$. Observe que $x = 2$ no está incluido en el segundo intervalo, puesto que la división entre 0 no está permitida. ■

EJEMPLO DE APLICACIÓN 7 **Producto interno bruto** Se proyecta que el producto interno bruto (PIB) de un cierto país sea $t^2 + 2t + 50{,}000$ millones de dólares dentro de t años a partir de ahora. Determine el tiempo t en que el PIB del país primero será igual o excederá de \$58,000 millones.

Solución El PIB del país será igual o excederá de \$58,000 millones cuando

$$t^2 + 2t + 50 \geq 58$$

Para resolver esta desigualdad para t, primero la escribimos en la forma

$$t^2 + 2t - 8 \geq 0$$
$$(t + 4)(t - 2) \geq 0$$

El diagrama de signos de los factores de $t^2 + 2t - 8$ se muestra en la figura 9.

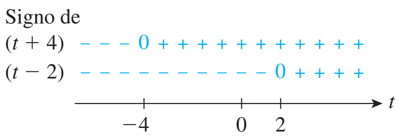


FIGURA **9**

En el diagrama de signos vemos que el conjunto de soluciones requerido es $(-\infty, -4] \cup [2, \infty)$. Como t debe ser no negativo para que el problema tenga sentido, vemos que el PIB del país es mayor que o igual a \$58,000 millones cuando $t \geq 2$; es decir, el PIB primero será igual o excederá de \$58,000 millones cuando $t = 2$ o 2 años a partir de ahora. ■

VIDEO

EJEMPLO DE APLICACIÓN 8 **Compra de acciones** La gerencia de Corbyco, un conglomerado gigantesco, ha estimado que requiere comprar

$$100{,}000(-1 + \sqrt{1 + 0.001x})$$

acciones ordinarias de la Starr Communications Company. Determine cuánto dinero necesita Corbyco para comprar por lo menos 100,000 acciones de Starr.

Solución La suma de efectivo que Corbyco necesita para comprar por lo menos 100,000 acciones se determina al resolver la desigualdad.

$$100{,}000(-1 + \sqrt{1 + 0.001x}) \geq 100{,}000$$

Al continuar encontramos

$$\begin{aligned} -1 + \sqrt{1 + 0.001x} &\geq 1 \\ \sqrt{1 + 0.001x} &\geq 2 \\ 1 + 0.001x &\geq 4 \qquad \text{Eleve al cuadrado ambos lados.} \\ 0.001x &\geq 3 \\ x &\geq 3{,}000 \end{aligned}$$

por tanto Corbyco necesita por lo menos $3,000,000. (Recuerde, x está en miles de dólares.) ■

Valor absoluto

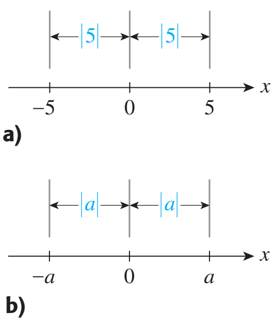


FIGURA 10

Valor absoluto

El **valor absoluto** de un número a está denotado por $|a|$ y definido por

$$|a| = \begin{cases} a & \text{si } a \geq 0 \\ -a & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

Como $-a$ es un número positivo cuando a es negativo, entonces el valor absoluto de un número siempre es no negativo. Por ejemplo, $|5| = 5$ y $|-5| = -(-5) = 5$. Geométricamente, $|a|$ es la distancia entre el origen y el punto sobre la línea que representa el número a (figura 10a y b).

Las propiedades del valor absoluto se dan en el tabla 17. La propiedad 4 se llama **desigualdad del triángulo**.

TABLA **17**

Propiedades del valor absoluto

Propiedad	Ilustración
Si a y b son números reales, entonces	
1. $\lvert -a\rvert = \lvert a\rvert$	$\lvert -3\rvert = -(-3) = 3 = \lvert 3\rvert$
2. $\lvert ab\rvert = \lvert a\rvert\lvert b\rvert$	$\lvert(2)(-3)\rvert = \lvert -6\rvert = 6 = \lvert 2\rvert\lvert -3\rvert$
3. $\left\lvert \dfrac{a}{b}\right\rvert = \dfrac{\lvert a\rvert}{\lvert b\rvert}$	$\left\lvert \dfrac{(-3)}{(-4)}\right\rvert = \left\lvert \dfrac{3}{4}\right\rvert = \dfrac{3}{4} = \dfrac{\lvert -3\rvert}{\lvert -4\rvert}$
4. $\lvert a + b\rvert \leq \lvert a\rvert + \lvert b\rvert$	$\lvert 8 + (-5)\rvert = \lvert 3\rvert = 3 \leq \lvert 8\rvert + \lvert -5\rvert = 13$

EJEMPLO 9 Evalúe:

a. $|\pi - 5| + 3$ **b.** $|\sqrt{3} - 2| + |2 - \sqrt{3}|$

Solución

a. Como $\pi - 5 < 0$, vemos que $|\pi - 5| = -(\pi - 5)$. Por consiguiente,

$$|\pi - 5| + 3 = -(\pi - 5) + 3 = -\pi + 5 + 3 = 8 - \pi$$

b. Como $\sqrt{3} - 2 < 0$, vemos que $|\sqrt{3} - 2| = -(\sqrt{3} - 2)$. A continuación observamos que $2 - \sqrt{3} > 0$, por tanto $|2 - \sqrt{3}| = 2 - \sqrt{3}$. Por consiguiente,

$$\begin{aligned} |\sqrt{3} - 2| + |2 - \sqrt{3}| &= -(\sqrt{3} - 2) + (2 - \sqrt{3}) = -\sqrt{3} + 2 + 2 - \sqrt{3} \\ &= 4 - 2\sqrt{3} = 2(2 - \sqrt{3}) \end{aligned}$$

■

EJEMPLO 10 Resuelva las desigualdades $|x| \leq 5$ y $|x| \geq 5$.

Solución Primero consideramos la desigualdad $|x| \leq 5$. Si $x > 0$, entonces $|x| = x$, por tanto $|x| \leq 5$ implica $x \leq 5$ en este caso. Sin embargo, si $x < 0$, entonces $|x| = -x$, por tanto $|x| \leq 5$ implica $-x \leq 5$, o $x \geq -5$. Por tanto $|x| \leq 5$ significa $-5 \leq x \leq 5$ (figura 11a). Por otra parte, observamos que $|x|$ es la distancia del punto x a 0, así que la desigualdad $|x| \leq 5$ implica de inmediato que $-5 \leq x \leq 5$.

A continuación la desigualdad $|x| \geq 5$ establece que la distancia de x a 0 es mayor que o igual a 5. Esta observación conduce al resultado $x \geq 5$ o $x \leq -5$ (figura 11b).

a) $|x| \leq 5$ **b)** $|x| \geq 5$ ■

FIGURA **11**

Los resultados del ejemplo 10 pueden generalizarse. Por tanto, si $k > 0$, entonces $|x| \leq k$ equivale a $-k \leq x \leq k$ y $|x| \geq k$ equivale a $x \geq k$ o $x \leq -k$.

EJEMPLO 11 Resuelva la desigualdad $|2x - 3| \leq 1$.

Solución La desigualdad $|2x - 3| \leq 1$ es equivalente a las desigualdades $-1 \leq 2x - 3 \leq 1$ (vea el ejemplo 10). Entonces

$$2 \leq 2x \leq 4 \qquad \text{Agregue 3 a cada miembro de la desigualdad.}$$

y

$$1 \leq x \leq 2 \qquad \text{Multiplique cada miembro de la desigualdad por } \tfrac{1}{2}.$$

FIGURA **12**
$|2x - 3| \leq 1$

Por consiguiente, el conjunto de todas las x en el intervalo $[1, 2]$ (figura 12) da la solución. ■

EJEMPLO 12 Resuelva la desigualdad $|5x + 7| \geq 18$.

Solución Si se recurre al ejemplo 10 una vez más, vemos que $|5x + 7| \geq 18$ equivale a

$$5x + 7 \leq -18 \quad \text{o} \quad 5x + 7 \geq 18$$

Es decir,

$$\begin{aligned} 5x &\leq -25 \quad \text{o} \quad 5x \geq 11 \\ x &\leq -5 \qquad\quad\ x \geq \frac{11}{5} \end{aligned}$$

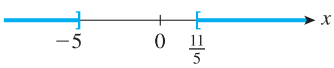


FIGURA **13**
$|5x + 7| \geq 18$

Por consiguiente, el conjunto de todas las x en el intervalo $(-\infty, -5]$ o el intervalo $[\frac{11}{5}, \infty)$ (figura 13) da la solución. ■

1.9 Ejercicios de autoevaluación

1. Resuelva la desigualdad $-1 < 2x - 1 \leq 5$ y grafique el conjunto solución.

2. Resuelva la desigualdad $6x^2 - 5x - 4 \leq 0$.

Las soluciones de los ejercicios de autoevaluacion 1.9 se encuentran en la página 62.

1.9 Preguntas de concepto

1. Mencione las propiedades de las desigualdades. Ilústrelas con ejemplos.

2. ¿Qué es el valor absoluto de un número a? ¿Puede $|a|$ ser negativo? Explique.

3. Mencione las propiedades del valor absoluto. Ilústrelas con ejemplos.

1.9 Ejercicios

En los ejercicios 1-4 determine si el enunciado es verdadero o falso.

1. $-3 < -20$
2. $-5 \leq -5$
3. $\frac{2}{3} > \frac{5}{6}$
4. $-\frac{5}{6} < -\frac{11}{12}$

En los ejercicios 5-10 muestre el intervalo sobre la línea de números.

5. $(3, 6)$
6. $(-2, 5]$
7. $[-1, 4)$
8. $\left[-\frac{6}{5}, -\frac{1}{2}\right]$
9. $(0, \infty)$
10. $(-\infty, 5]$

En los ejercicios 11-28 determine los valores de x que satisfacen las desigualdades.

11. $2x + 4 < 8$
12. $-6 > 4 + 5x$
13. $-4x \geq 20$
14. $-12 \leq -3x$
15. $-6 < x - 2 < 4$
16. $0 \leq x + 1 \leq 4$
17. $x + 1 > 4$ o $x + 2 < -1$
18. $x + 1 > 2$ o $x - 1 < -2$
19. $x + 3 > 1$ y $x - 2 < 1$
20. $x - 4 \leq 1$ y $x + 3 > 2$
21. $(x + 3)(x - 5) \leq 0$
22. $(2x - 4)(x + 2) \geq 0$
23. $(2x - 3)(x - 1) \geq 0$
24. $(3x - 4)(2x + 2) \leq 0$
25. $\dfrac{x + 3}{x - 2} \geq 0$
26. $\dfrac{2x - 3}{x + 1} \geq 4$
27. $\dfrac{x - 2}{x - 1} \leq 2$
28. $\dfrac{2x - 1}{x + 2} \leq 4$

En los ejercicios 29-38 evalúe las expresiones.

29. $|-6 + 2|$
30. $4 + |-4|$
31. $\dfrac{|-12 + 4|}{|16 - 12|}$
32. $\left|\dfrac{0.2 - 1.4}{1.6 - 2.4}\right|$
33. $\sqrt{3}|-2| + 3|-\sqrt{3}|$
34. $|-1| + \sqrt{2}|-2|$
35. $|\pi - 1| + 2$
36. $|\pi - 6| - 3$
37. $|\sqrt{2} - 1| + |3 - \sqrt{2}|$
38. $|2\sqrt{3} - 3| - |\sqrt{3} - 4|$

En los ejercicios 39-44 suponga que a y b son números reales diferentes de 0 y que $a > b$. Diga si la desigualdad es verdadera o falsa.

39. $b - a > 0$
40. $\dfrac{a}{b} > 1$
41. $a^2 > b^2$
42. $\dfrac{1}{a} > \dfrac{1}{b}$
43. $a^3 > b^3$
44. $-a < -b$
45. Escriba la desigualdad $|x - a| < b$ sin usar valores absolutos.
46. Escriba la desigualdad $|x - a| \geq b$ sin usar valores absolutos.

En los ejercicios 47–52, determine si los enunciados son verdaderos para todos los números reales a y b.

47. $|-a| = a$
48. $|b^2| = b^2$
49. $|a - 4| = |4 - a|$
50. $|a + 1| = |a| + 1$
51. $|a + b| = |a| + |b|$
52. $|a - b| = |a| - |b|$
53. Encuentre el costo mínimo C (en dólares) dado que

$$5(C - 25) \geq 1.75 + 2.5C$$

54. Encuentre la utilidad máxima P (en dólares) dado que

$$6(P - 2500) \leq 4(P + 2400)$$

55. **Autonomía de manejo de un automóvil** Un anuncio publicitario de un cierto automóvil afirma que la economía de combustible EPA es de 20 mpg en ciudad y de 27 mpg en carretera y que la capacidad de su tanque de combustible es de 18.1 gal. Suponga condiciones de manejo ideales, determine la autonomía de manejo del automóvil a partir de los datos anteriores.

56. **Temperaturas Celsius y Fahrenheit** La relación entre temperaturas Celsius (°C) y Fahrenheit (°F) es

$$C = \frac{5}{9}(F - 32)$$

a. Si el rango de temperatura en Montreal durante enero es de $-15° < C° < -5°$, determine el rango en grados Fahrenheit durante el mismo periodo.

b. Si el rango de temperatura en Nueva York durante junio es de $63° < F° < 80°$, determine el rango en grados Celsius durante el mismo periodo.

57. Cumplimiento de las metas de ventas La comisión mensual de un vendedor es de 15% sobre todas las ventas mayores de \$12,000. Si su meta es lograr una comisión de por lo menos \$3,000/mes, ¿qué cifras de ventas mensuales mínimas debe alcanzar?

58. Margen de utilidad de un automóvil El margen de utilidad de un automóvil usado fue de por lo menos 30% de su precio actual de venta al mayoreo. Si el automóvil se vendió en \$6,500, ¿cuál fue el precio máximo de venta al mayoreo?

59. Cumplimiento de las metas de utilidad Un fabricante de cierto insumo estimó que su utilidad (en miles de dólares) está dada por la expresión

$$-6x^2 + 30x - 10$$

donde x (en miles) es el número de unidades producidas. ¿Qué intervalo de producción permitirá al fabricante obtener una utilidad de por lo menos \$14,000 sobre el artículo de consumo?

60. Concentración de una droga en el torrente sanguíneo La concentración (en miligramos/centímetro cúbico) de una cierta droga en el torrente sanguíneo de un paciente t horas después de la inyección está dada por

$$\frac{0.2t}{t^2 + 1}$$

Determine el intervalo de tiempo cuando la concentración de la droga es mayor que o igual a 0.08 mg/cc.

61. Costo de eliminar contaminantes tóxicos Recientemente se descubrió que el pozo principal de una ciudad estaba contaminado con tricloroetilino (un químico cancerígeno) a consecuencia de un tiradero de químicos que filtra sustancias tóxicas al agua. Una propuesta presentada al consejo municipal indicaba que el costo, en millones de dólares, de eliminar el x% de los contaminantes tóxicos es

$$\frac{0.5x}{100 - x}$$

Si la ciudad pudiera aportar entre \$25 y \$30 millones para eliminar los contaminantes tóxicos, ¿cuál es la cantidad de contaminantes que podría ser removida?

62. Velocidad promedio de un vehículo La velocidad promedio de un vehículo en millas por hora en un tramo de la ruta 134 entre 6 a.m. y 10 a.m. en un día típico está dada de forma aproximada por la expresión

$$20t - 40\sqrt{t} + 50 \qquad (0 \leq t \leq 4)$$

donde t está en horas, con $t = 0$ correspondiente a las 6 a.m. ¿Durante qué intervalo de tiempo la velocidad promedio de un vehículo es menor que o igual a 35 mph?

63. Efecto de un bactericida La cantidad de bacterias en cierto cultivo t minutos después de que se introduce un bactericida experimental es

$$\frac{10{,}000}{t^2 + 1} + 2{,}000$$

Determine el tiempo cuando la cantidad de bacterias se habrá reducido a menos de 4,000.

64. Contaminación del aire El bióxido de nitrógeno es un gas de color café que impide respirar. La cantidad de bióxido de nitrógeno presente en la atmósfera en un cierto día de mayo en la ciudad de Long Beach, medida en PSI (del inglés *pollutant standard index*) (índice estándar de contaminación) en el instante t, donde t está en horas y $t = 0$ corresponde a la 7 a.m. es aproximadamente

$$\frac{136}{1 + 0.25(t + 4.5)^2} + 28 \qquad (0 \leq t \leq 11)$$

Determine la hora del día cuando la cantidad de bióxido de nitrógeno es mayor o igual a 128 PSI.

Fuente: Los Angeles Times

65. Una pelota es lanzada directamente hacia arriba, de modo que su altura después de t segundos es

$$128t - 16t^2 + 4$$

Determine el lapso de tiempo que la pelota permanece a una altura de más de 196 pies.

66. Distribución del ingreso La distribución del ingreso en una cierta ciudad puede describirse con el modelo matemático $y = (2.8 \cdot 10^{11})(x)^{-1.5}$, donde y es el número de familias con un ingreso de x o más dólares.

a. ¿Cuántas familias en esta ciudad tienen un ingreso de \$20,000 o más?

b. ¿Cuántas familias tienen un ingreso de \$40,000 o más?

c. ¿Cuántas familias tienen un ingreso de \$100,000 o más?

67. Control de calidad PAR Manufacturing Company fabrica varillas de acero. Suponga que las varillas pedidas por un cliente se fabrican conforme a una especificación de 0.5 pulg y son aceptables sólo si están dentro de los *límites de tolerancia* de 0.49 y 0.51 pulg. Si x denota el diámetro de una varilla, escriba una desigualdad utilizando un valor absoluto para expresar un criterio que implique que x debe ser satisfecho para que una varilla sea aceptable.

68. Control de calidad El diámetro de x (en pulgadas) de un lote de cojinetes de bolas fabricados por PAR Manufacturing satisface la desigualdad

$$|x - 0.1| \leq 0.01$$

¿Cuál es el diámetro mínimo que en el lote puede tener un cojinete de bolas? ¿El diámetro máximo?

1.9 Soluciones de los ejercicios de autoevaluación

1.

$$-1 < 2x - 1 \leq 5$$

$$-1 + 1 < 2x - 1 + 1 \leq 5 + 1 \quad \text{Agregue 1 a cada miembro de la desigualdad.}$$

$$0 < 2x \leq 6 \quad \text{Combine los términos similares.}$$

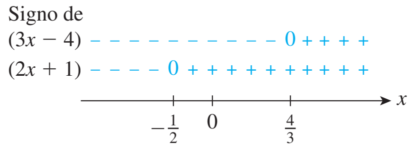
$$0 < x \leq 3 \quad \text{Multiplique cada miembro de la desigualdad por } \tfrac{1}{2}.$$

Concluimos que el conjunto solución es (0, 3]. La gráfica del conjunto de soluciones se muestra en la siguiente figura:

2. Paso 1 $6x^2 - 5x - 4 \leq 0$

Paso 2 $(3x - 4)(2x + 1) \leq 0$

Paso 3 $3x - 4 > 0$ cuando $x > \frac{4}{3}$, $3x - 4 = 0$ cuando $x = \frac{4}{3}$ y $3x - 4 < 0$ cuando $x < \frac{4}{3}$. Asimismo, $2x + 1 > 0$ cuando $x > -\frac{1}{2}$, $2x + 1 = 0$ cuando $x = -\frac{1}{2}$ y $2x + 1 < 0$ cuando $x < -\frac{1}{2}$. Con estos resultados se construye el siguiente diagrama de signos para los factores de $6x^2 - 5x - 4$:



Paso 4 Como $6x^2 - 5x - 4 \leq 0$, los signos de los dos factores deben diferir o ser iguales a 0. En el diagrama de signos vemos que x debe quedar entre $-\frac{1}{2}$ y $\frac{4}{3}$, inclusive. Por consiguiente, la solución requerida es$[-\frac{1}{2}, \frac{4}{3}]$.

CAPÍTULO 1 Resumen de las fórmulas y términos principales

FÓRMULAS

1. Fórmula del producto	$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$
2. Fórmula cuadrática	$x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
3. Diferencia de dos cuadrados	$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$
4. Trinomio cuadrado perfecto	$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$ $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$
5. Suma de dos cubos	$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$
6. Diferencia de dos cubos	$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

TÉRMINOS

base (7)
conjugado (41)
conjunto solución (30)
desigualdad del triángulo (58)
discriminante (49)
ecuación (30)
ecuación cuadrática (44)
ecuación lineal (30)
entero (2)
exponente (7)
expresión racional (20)
fracción compuesta (23)
índice (37)
intervalo abierto (53)
intervalo cerrado (53)
intervalo finito (53)
intervalo infinito (53)
intervalo semiabierto (53)
número entero (2)
número irracional (2)
número natural (2)
número racional (2)
número real (2)
polinomio (9)
radical (37)
radicando (37)
raíz cuadrada (36)
raíz cúbica (36)
raíz *enésima* (36)
signo de radical (37)
solución de una ecuación (30)
solución extraña (32)
valor absoluto (58)
variable (30)

CAPÍTULO 1 Preguntas de revisión de conceptos

Llene los espacios en blanco.

1. a. Un número de la forma $\frac{a}{b}$, donde a y son enteros, con $b \neq 0$ se llama número __________. Un número racional puede representarse con un decimal________ o ________.

b. Un número real que no es racional se llama ________. Cuando dicho número está representado por un decimal ni se _______ni se ______.

2. a. Bajo adición, tenemos $a + b =$ _________, $a + (b + c) =$ _______, $a + 0 =$ _______ y $a + (-a) =$ ________.

b. Bajo multiplicación, tenemos $ab =$ _____, $a(bc) =$ _____, $a \cdot 1 =$ _____ y $a\left(\frac{1}{a}\right) =$ _____ $(a \neq 0)$.

c. Bajo adición y multiplicación, tenemos $a(b + c) =$ _____.

3. a. Si a y b son números, entonces $-(-a) =$ _____, $(-a)b =$ _____, $(-a)(-b) =$ _____, $(-1)a = -a$ y $a \cdot 0 = 0$.

b. Si $ab = 0$, entonces $a =$ _____, o $b =$ _____, o ambos.

4. a. Una expresión de la forma, $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$ se llama _______ en _______; el entero no negativo n es su ________; las expresiones $a_k x^k$ son los _________ del ____________; y a_k es el _________ de x_k.

b. Para sumar o restar dos polinomios, sumamos a restamos ______ términos.

5. Para factorizar un polinomio, lo expresamos como un _______ de dos o más ________. Por ejemplo, $x^3 + x^2 - 2x =$ _____.

6. a. Una expresión racional es un cociente de _________.

b. Una expresión racional se simplifica o reduce a términos menores si el _______ y el ___________ no tienen _______ factores aparte de ____ y _____.

c. Para sumar o restar expresiones racionales, primero encontramos el mínimo común _________ de las expresiones, si es necesario. Luego seguimos el procedimiento de sumar y restar _________ con denominadores comunes.

7. Una expresión racional que contiene fracciones en su numerador o denominador se llama fracción ________. Un ejemplo de una fracción compuesta es _________.

8. a. Si a es cualquier número real y n es un número natural, entonces $a^n =$ _______. El número a es el _________, y el superíndice n es el ________ o _________.

b. Para cualquier número real no cero a, $a^n =$ _______. La expresión 0^0 es _______ __________.

c. Si a es cualquier número no cero y n es un entero positivo entonces $a^{-n} =$ ________.

9. a. Un enunciado de que dos enunciados matemáticos son iguales se llama _______.

b. Una variable es una letra que representa un _______ que pertenece a un conjunto de números reales.

c. Una ecuación lineal en la variable x es una ecuación que puede escribirse en la forma ________; una ecuación lineal en x tiene grado ______ en x.

10. a. Si n es un número natural y a y b son números reales, se dice que a es la raíz *enésima* de b si _______.

b. Si n es par, las raíces *enésimas* reales de un número positivo b deben venir en ________.

c. Si n es par y b es negativo, entonces hay ______ raíces reales.

d. Si n es impar, entonces hay sólo una _____ ______ de b.

11. a. Si n es un número natural y b es un número real, entonces $\sqrt[n]{b}$ se llama _______; asimismo, $\sqrt[n]{b} =$ _______.

b. Racionalizar un denominador de una expresión algebraica significa eliminar un ________ del denominador.

12. a. Una ecuación cuadrática es una ecuación en x que puede escribirse en la forma ______.

b. Una ecuación cuadrática puede resolverse mediante ______, mediante _____ ______ o utilizando la fórmula cuadrática. La fórmula cuadrática es ______.

CAPÍTULO 1 Ejercicios de revisión

En los ejercicios 1-6 clasifique el número por tipo.

1. $\frac{7}{8}$ **2.** $\sqrt{13}$ **3.** -2π

4. 0 **5.** $2.\overline{71}$ **6.** $3.14159\ldots$

En los ejercicios 7-14 evalúe las expresiones.

7. $\left(\frac{9}{4}\right)^{3/2}$ **8.** $\frac{5^6}{5^4}$

9. $(3 \cdot 4)^{-2}$ **10.** $(-8)^{5/3}$

11. $\left(\frac{16}{9}\right)^{3/2}$ **12.** $\frac{(3 \cdot 2^{-3})(4 \cdot 3^5)}{2 \cdot 9^3}$

13. $\sqrt[3]{\frac{27}{125}}$ **14.** $\frac{3\sqrt[3]{54}}{\sqrt[3]{18}}$

En los ejercicios 15-22 simplifique la expresión.

15. $\dfrac{4(x^2+y)^3}{x^2+y}$ **16.** $\dfrac{a^6b^{-5}}{(a^3b^{-2})^{-3}}$

17. $\dfrac{\sqrt[4]{16x^5yz}}{\sqrt[4]{81xyz^5}}$ **18.** $(2x^3)(-3x^{-2})\left(\dfrac{1}{6}x^{-1/2}\right)$

19. $\left(\dfrac{3xy^2}{4x^3y}\right)^{-2}\left(\dfrac{3xy^3}{2x^2}\right)^3$ **20.** $(-3a^2b^3)^2(2a^{-1}b^{-2})^{-1}$

21. $\sqrt[3]{81x^5y^{10}}\sqrt[3]{9xy^2}$ **22.** $\left(\dfrac{-x^{1/2}y^{2/3}}{x^{1/3}y^{3/4}}\right)^6$

En los ejercicios 23-30 realice las operaciones indicadas y simplifique las expresiones.

23. $(3x^4+10x^3+6x^2+10x+3)+(2x^4+10x^3+6x^2+4x)$

24. $(3x-4)(3x^2-2x+3)$

25. $(2x+3y)^2-(3x+1)(2x-3)$

26. $2(3a+b)-3[(2a+3b)-(a+2b)]$

27. $\dfrac{(t+6)(60)-(60t+180)}{(t+6)^2}$

28. $\dfrac{6x}{2(3x^2+2)}+\dfrac{1}{4(x+2)}$

29. $\dfrac{2}{3}\left(\dfrac{4x}{2x^2-1}\right)+3\left(\dfrac{3}{3x-1}\right)$

30. $\dfrac{-2x}{\sqrt{x+1}}+4\sqrt{x+1}$

En los ejercicios 31-40 factorice la expresión.

31. $-2\pi^2r^3+100\pi r^2$ **32.** $2v^3w+2vw^3+2u^2vw$

33. $16-x^2$ **34.** $12t^3-6t^2-18t$

35. $-2x^2-4x+6$ **36.** $12x^2-92x+120$

37. $9a^2-25b^2$ **38.** $8u^6v^3+27u^3$

39. $6a^4b^4c-3a^3b^2c-9a^2b^2$ **40.** $6x^2-xy-y^2$

En los ejercicios 41-46 realice las operaciones indicadas y simplifique la expresión.

41. $\dfrac{2x^2+3x-2}{2x^2+5x-3}$

42. $\dfrac{[(t^2+4)(2t-4)]-(t^2-4t+4)(2t)}{(t^2+4)^2}$

43. $\dfrac{2x-6}{x+3}\cdot\dfrac{x^2+6x+9}{x^2-9}$

44. $\dfrac{3x}{x^2+2}+\dfrac{3x^2}{x^3+1}$ **45.** $\dfrac{1+\dfrac{1}{x+2}}{x-\dfrac{9}{x}}$

46. $\dfrac{x(3x^2+1)}{x-1}\cdot\dfrac{3x^3-5x^2+x}{x(x-1)(3x^2+1)^{1/2}}$

En los ejercicios 47-54 resuelva la ecuación.

47. $8x^2+2x-3=0$ **48.** $-6x^2-10x+4=0$

49. $2x^2-3x-4=0$ **50.** $x^2+5x+3=0$

51. $2y^2-3y+1=0$ **52.** $0.3m^2-2.1m-3.2=0$

53. $-x^3-2x^2+3x=0$ **54.** $2x^4+x^2=1$

En los ejercicios 55-62 resuelva la ecuación.

55. $\dfrac{1}{4}x+2=\dfrac{3}{4}x-5$ **56.** $\dfrac{3p+1}{2}-\dfrac{2p-1}{3}=\dfrac{5p}{12}$

57. $(x+2)^2-3x(1-x)=(x-2)^2$

58. $\dfrac{3(2q+1)}{4q-3}=\dfrac{3q+1}{2q+1}$ **59.** $\sqrt{k-1}=\sqrt{2k-3}$

60. $\sqrt{x}-\sqrt{x-1}=\sqrt{4x-3}$

61. Resuelva $C=\dfrac{20x}{100-x}$ para x.

62. Resuelva $r=\dfrac{2mI}{B(n+1)}$ para I.

En los ejercicios 63-66 determine los valores de *x* que satisfacen las desigualdades.

63. $-x+3\leq 2x+9$ **64.** $-2\leq 3x+1\leq 7$

65. $x-3>2$ o $x+3<-1$

66. $2x^2>50$

En los ejercicios 67-70 evalúe la expresión.

67. $|-5+7|+|-2|$ **68.** $\left|\dfrac{5-12}{-4-3}\right|$

69. $|2\pi-6|-\pi$ **70.** $|\sqrt{3}-4|+|4-2\sqrt{3}|$

En los ejercicios 71-76 determine el valor o valores de *x* que satisfacen la expresión.

71. $2x^2+3x-2\leq 0$ **72.** $x^2+x-12\leq 0$

73. $\dfrac{1}{x+2}>2$ **74.** $|2x-3|<5$

75. $|3x-4|\leq 2$ **76.** $\left|\dfrac{x+1}{x-1}\right|=5$

77. Racionalice el numerador:

$$\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$$

78. Racionalice el numerador:

$$\sqrt[3]{\frac{x^2}{yz^3}}$$

79. Racionalice el numerador:

$$\frac{\sqrt{x} - 1}{2\sqrt{x}}$$

80. Racionalice el numerador:

$$\frac{3}{1 + 2\sqrt{x}}$$

En los ejercicios 81 y 82 utilice la fórmula cuadrática para resolver la ecuación cuadrática.

81. $x^2 - 2x - 5 = 0$ **82.** $2x^2 + 8x + 7 = 0$

83. Determine el costo mínimo C (en dólares) dado que

$$2(1.5C + 80) \leq 2(2.5C - 20)$$

84. Determine el ingreso máximo R (en dólares), dado que

$$12(2R - 320) \leq 4(3R + 240)$$

Las habilidades para resolver problemas aprendidas en cada capítulo son bloques de construcción para el resto del curso. Por consiguiente, es una buena idea asegurarse de que las domina antes de pasar al siguiente capítulo. Los ejercicios "Antes de continuar . . ." siguientes están diseñados para ese propósito. Después de realizar el examen puede darse cuenta de sus debilidades, si es que las hay. Luego entre a http//latinoamerica.cengage.com/tan. Aquí puede hacer clic en el botón Before Moving On, el cual lo conducirá a otras versiones de estos exámenes. Allí puede volver a resolver los ejercicios que manejó incorrectamente (también puede autoevaluarse en relación con estas habilidades básicas antes de resolver cuestionarios y exámenes del curso).

Si piensa que necesita ayuda adicional con estos ejercicios, en este sitio web también puede utilizar los tutoriales *CengageNOW* y obtener ayuda en vivo en línea con *PersonalTutor*.

CAPÍTULO 1 Antes de continuar . . .

1. Realice las operaciones indicadas y simplifique:

$$2(3x - 2)^2 - 3x(x + 1) + 4$$

2. Factorice:
a. $x^4 - x^3 - 6x^2$
b. $(a - b)^2 - (a^2 + b)^2$

3. Realice la operación indicada y simplifique:

$$\frac{2x}{3x^2 - 5x - 2} + \frac{x - 1}{x^2 - x - 2}$$

4. Simplifique $\left(\frac{8x^2y^{-3}}{9x^{-3}y^2}\right)^{-1}\left(\frac{2x^2}{3y^3}\right)^2$.

5. Resuelva $2s = \frac{r}{s + r}$ para r.

6. Racionalice el denominador de la expresión

$$\frac{2 - \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}}$$

7. **a.** Resuelva $2x^2 + 5x - 12 = 0$ mediante factorización.
b. Resuelva $m^2 - 3m - 2 = 0$.

8. Resuelva $\sqrt{x + 4} - \sqrt{x - 5} - 1 = 0$.

9. Determine los valores de x que satisfacen $(3x + 2)(2x - 3) \leq 0$.

10. Determine los valores de x que satisfacen $|2x + 3| \leq 1$.

FUNCIONES Y SUS GRÁFICAS

2

ESTE CAPÍTULO PRESENTA el sistema de coordenadas cartesiano, el cual permite representar puntos en el plano en términos de pares ordenados de números reales. Esto a su vez permite estudiar geometría por medio de métodos algebraicos. En específico, veremos cómo pueden representarse líneas rectas en el plano mediante ecuaciones algebraicas. A continuación se estudian funciones, las cuales son relaciones especiales entre dos cantidades. Estas relaciones, o modelos matemáticos, pueden hallarse en campos de estudio tan diversos como los negocios, la economía, las ciencias sociales, la física y la medicina. Estudiamos en detalle dos clases especiales de funciones: lineales y cuadráticas. Las funciones más generales requieren el uso de la herramienta del cálculo y se estudiarán en capítulos posteriores. Por último, nos ocupamos del proceso de resolver problemas reales utilizando matemáticas, un proceso llamado modelado matemático.

A menos que se hagan cambios, ¿cuándo se espera que el actual sistema de Seguridad Social quiebre? En el ejemplo 2 de la página 136 se utiliza un modelo matemático construido con datos de la Social Security Administration para predecir el año en que los activos del sistema actual se agotarán.

2.1 Sistema de coordenadas cartesiano y líneas rectas

En la sección 1.1 vimos cómo la correspondencia uno a uno entre el conjunto de números reales y los puntos sobre una línea recta nos lleva a un sistema de coordenadas sobre una línea (un espacio unidimensional).

Una representación similar de puntos en un plano (un espacio bidimensional) se realiza mediante el **sistema de coordenadas cartesiano**, el cual se construye como sigue: tome dos líneas perpendiculares, una de las cuales normalmente se escoge que sea horizontal. Estas líneas se cortan en un punto O, llamado **origen** (figura 1). La línea horizontal se llama **eje *x*** y la vertical **eje y**. Se dispone una escala numérica a lo largo del eje x, con los números positivos a la derecha del origen y los negativos a la izquierda de él. Asimismo, se dispone una escala numérica a lo largo del eje y, con los números positivos arriba del origen y los negativos debajo de él.

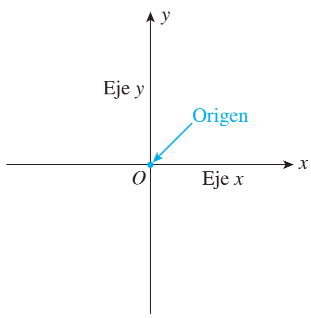


FIGURA 1
Sistema de coordenadas cartesiano.

Nota Las escalas numéricas sobre los dos ejes no tienen que ser las mismas. En realidad, en muchas aplicaciones x y y representan cantidades diferentes. Por ejemplo, x puede representar el número de teléfonos celulares vendidos y y el ingreso total obtenido con las ventas. Es casos como esos a menudo es deseable elegir escalas numéricas distintas para representar las diferentes cantidades. Observe, sin embargo, que los ceros de ambas escalas numéricas coinciden en el origen del sistema de coordenadas bidimensional. ■

Podemos representar un punto en plano de forma única en este sistema de coordenadas mediante un **par ordenado** de números, es decir, un par (x, y), donde x es el primer número y y el segundo. Para ver esto, sea P cualquier punto en el plano (figura 2). Trace perpendiculares de P a los ejes x y y, respectivamente. Entonces el número x es precisamente el número que corresponde al punto sobre el eje x donde la perpendicular que pasa por P se encuentra con el eje x. Del mismo modo, y es el número que corresponde al punto sobre el eje y donde la perpendicular que pasa por P cruza el eje y.

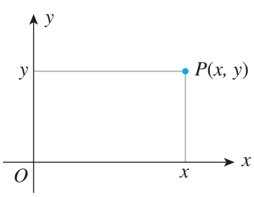


FIGURA 2
Un par ordenado en el plano de coordenadas.

A la inversa, dado un par ordenado (x, y) con x como primer número y y el segundo, un punto P en el plano queda determinado de forma única como sigue: localice el punto sobre el eje x representado por el número x y trace una línea por dicho punto perpendicular al eje x. A continuación, localice el punto sobre el eje y representado por el número y y trace una línea a través de dicho punto, perpendicular al eje y. El punto de intersección de estas dos líneas es el punto P (figura 2).

En el par ordenado (x, y), x se llama la **abscisa**, o **coordenada *x***, y se llama la **ordenada**, o **coordenada *y***, y x y y juntas son referidas como las **coordenadas** del punto P. El punto P con la coordenada x es igual a a y la coordenada y es igual a b, y a menudo se escribe $P(a, b)$.

Los puntos $A(2, 3)$, $B(-2, -3)$, $D(2, -3)$, $E(3, 2)$, $F(4, 0)$, y $G(0, -5)$ se trazan en la figura 3.

Nota En general, $(x, y) \neq (y, x)$. Los puntos A y E ilustran esto en la figura 3.

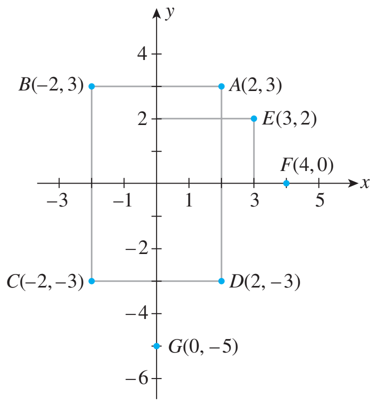


FIGURA 3
Varios puntos en el plano coordenado.

Los ejes dividen el plano en cuatro cuadrantes. El cuadrante I se compone de los puntos P con coordenadas x y y, denotadas por $P(x, y)$, que satisfacen $x > 0$ y $y > 0$; cuadrante II, los puntos $P(x, y)$ donde $x < 0$ y $y > 0$; cuadrante III, los puntos $P(x, y)$ donde $x < 0$ y $y < 0$, y cuadrante IV, los puntos $P(x, y)$ donde $x > 0$ y $y < 0$ (figura 4).

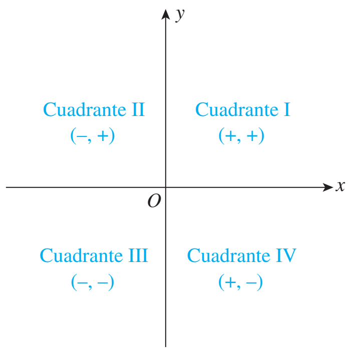


FIGURA 4
Los cuatro cuadrantes en el plano coordenado.

Líneas rectas

Al calcular el impuesto al ingreso o impuesto sobre la renta, a las empresas comerciales se les permite por ley depreciar ciertos activos como edificios, máquinas, muebles, automóviles, etc., a lo largo de un lapso de tiempo. La *depreciación lineal* o *método de línea recta*, a menudo se utiliza para este propósito. La gráfica de la línea recta mostrada en la figura 5 describe el valor en libros V de un servidor web que tiene un valor inicial de \$10,000 y que está siendo depreciado linealmente a lo largo de 5 años con un valor de recuperación de \$3,000. Observe que sólo la parte continua de la línea recta es de interés en este caso.

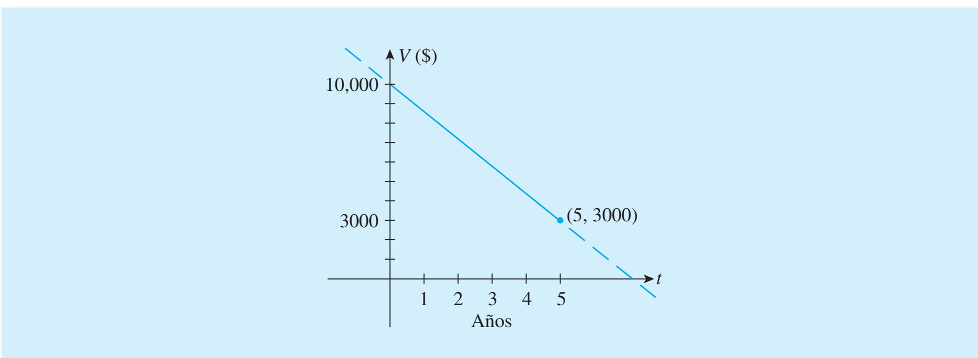


FIGURA 5
Depreciación lineal de un activo.

El valor del servidor a finales del año t, donde t queda entre 0 y 5, puede leerse directamente en la gráfica. Pero existe una desventaja en este método. El resultado depende de la precisión con la que dibuje y lea la gráfica. Un método mejor y más preciso se basa en determinar una representación *algebraica* de la línea de depreciación. (Continuamos nuestra discusión del problema de depreciación lineal en la sección 2.5).

Para ver cómo puede describirse una línea recta en el plano xy, primero tenemos que recordar ciertas propiedades de las líneas rectas.

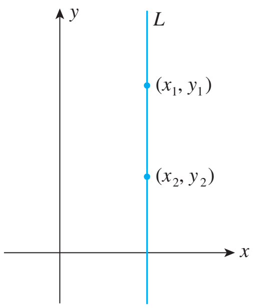


FIGURA **6**
La pendiente no está definida si $x_1 = x_2$.

Pendiente de una línea recta

Sea L la línea recta única que pasa por los dos puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2). Si $x_1 = x_2$, en ese caso L es una línea vertical, y la pendiente es indefinida (figura 6). Si $x_1 \neq x_2$, entonces definimos la pendiente de L como sigue.

Pendiente de una línea recta no vertical

Si (x_1, y_1) y (x_2, y_2) son dos puntos distintos cualesquiera sobre una línea no vertical L, entonces la pendiente m de L es

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \tag{1}$$

(Figura 7).

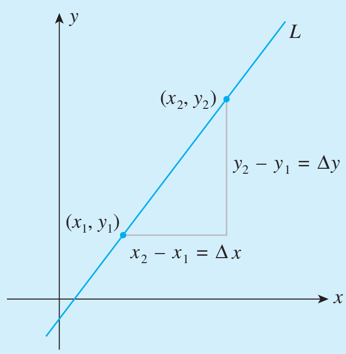


FIGURA **7**

Observe que la pendiente de una línea recta es una constante siempre que esté definida.

El número $\Delta y = y_2 - y_1$ (Δy se lee "delta y") mide el cambio vertical en y, y $\Delta x = x_2 - x_1$ mide el cambio horizontal en x como se muestra en la figura 7. En ésta podemos ver que la pendiente m de una línea recta L mide la *tasa de cambio de y con respecto a x*. Además, la pendiente de una línea recta no vertical es constante, y esto indica que su tasa de cambio es constante.

La figura 8a muestra una línea recta L_1, con pendiente 2. Observe que L_1, tiene la propiedad de que un incremento de 1 unidad en x produce un incremento de 2 unidades

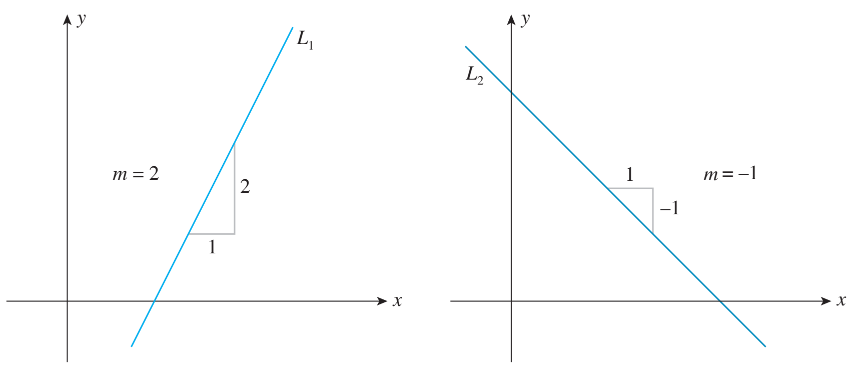


FIGURA **8**

(a) La línea sube ($m > 0$).

(b) La línea baja ($m < 0$).

en y. Para ver esto, sea $\Delta x = 1$ en la ecuación (1) de modo que $m = \Delta y$. Como $m = 2$, concluimos que $\Delta y = 2$. Asimismo, la figura 8b muestra una línea L_2, con pendiente -1. Observe que una línea recta con pendiente positiva se inclina hacia arriba de izquierda a derecha (y se incrementa a medida que x lo hace), mientras que una línea con pendiente negativa se inclina hacia abajo de izquierda a derecha (y decrece a medida que x se incrementa). Por último, la figura 9 muestra una familia de líneas rectas que pasan por el origen con las pendientes indicadas.

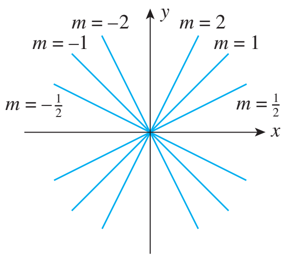


FIGURA **9**
Una familia de líneas rectas.

Explore y analice

Demuestre que la pendiente de una línea no vertical es independiente de los dos puntos distintos utilizados para calcularla.
Sugerencia: Suponga que escogemos otros dos puntos distintos $P_3(x_3, y_3)$ y $P_4(x_4, y_4)$ situados en L. Trace una figura y utilice triángulos similares para demostrar que con P_3 y P_4 se obtiene el mismo valor que se obtuvo con P_1 y P_2.

VIDEO

EJEMPLO 1 Trace la línea recta que pasa por el punto $(-2, 5)$ con pendiente $-\frac{4}{3}$

Solución Primero marque el punto $(-2, 5)$ en la gráfica (figura 10). A continuación recuerde que una pendiente de $-\frac{4}{3}$ indica que un incremento de una unidad en la dirección x produce un *decremento* de $\frac{4}{3}$ unidades en la dirección y, o de forma equivalente, una incremento de 3 unidades en la dirección x produce un decremento de $3(\frac{4}{3})$, o de 4 unidades, en la dirección y. Con esta información marcamos el punto (1, 1) y trazamos la línea a través de los puntos.

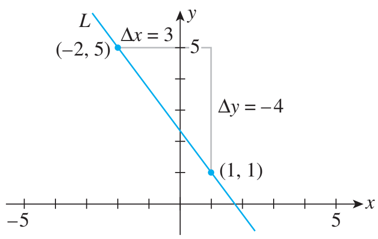


FIGURA **10**
L tiene una pendiente de $-\frac{4}{3}$ y pasa por $(-2, 5)$.

■

EJEMPLO 2 Determine la pendiente de la línea m que pasa por los puntos $(-1, 1)$ y (5, 3).

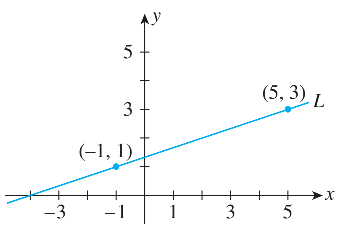


FIGURA **11**
L pasa por (5, 3) y $(-1, 1)$.

Solución Que (x_1, y_1) sea el punto $(-1, 1)$ y (x_2, y_2) el punto (5, 3). Entonces, con $x_1 = -1$, $y_1 = 1$, $x_2 = 5$ y $y_2 = 3$, encontramos, con la ecuación (1),

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{3 - 1}{5 - (-1)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

(figura 11). Puede comprobar que el resultado obtenido sería el mismo de haber escogido el punto $(-1, 1)$ como el (x_2, y_2) y el punto (5, 3) como el (x_1, y_1). ■

EJEMPLO 3 Determine la pendiente de la línea que pasa por los puntos $(-2, 5)$ y (3, 5).

Solución La pendiente de la línea requerida es

$$m = \frac{5 - 5}{3 - (-2)} = \frac{0}{5} = 0$$

(Figura 12).

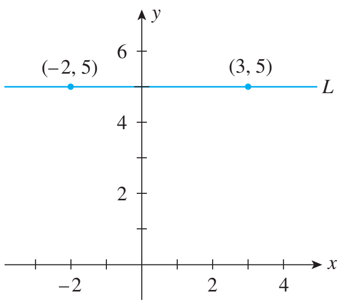


FIGURA 12
La pendiente de la línea horizontal L es cero.

Nota La pendiente de una línea horizontal es cero.

Podemos utilizar la pendiente de una línea recta para determinar si una línea es paralela a otra.

Rectas paralelas

Dos líneas rectas distintas son **paralelas** si y sólo si sus pendientes son iguales o indefinidas.

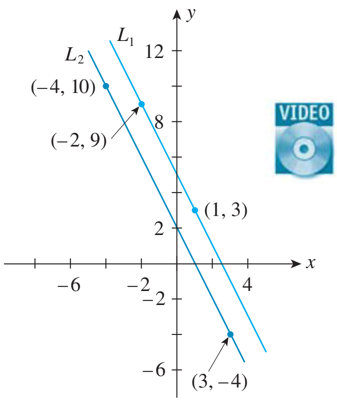


FIGURA 13
L_1 y L_2 tienen la misma pendiente y por consiguiente son paralelas.

EJEMPLO 4 Sea L_1 una línea que pasa por los puntos $(-2, 9)$ y $(1, 3)$ y sea L_2 la línea que pasa por los puntos $(-4, 10)$ y $(3, -4)$. Determine si L_1 y L_2 son paralelas.

Solución La pendiente m_1 de L_1 es

$$m_1 = \frac{3 - 9}{1 - (-2)} = -2$$

La pendiente m_2 de L_2 es

$$m_2 = \frac{-4 - 10}{3 - (-4)} = -2$$

Como $m_1 = m_2$, las líneas L_1 y L_2 son en realidad paralelas (figura 13).

2.1 Ejercicios de autoevaluación

Determine el número a de modo que la línea que pasa por los puntos $(a, 2)$ y $(3, 6)$ sea paralela a una línea con pendiente 4.

La solución al ejercicio de autoevaluación 2.1 se encuentra en la página 74.

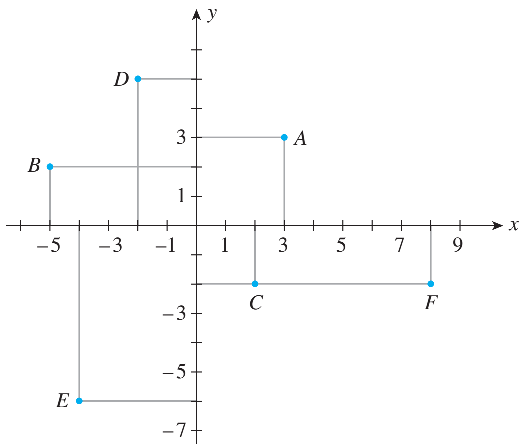
2.1 Preguntas de concepto

1. ¿Qué puede decir sobre los signos de a y b si el punto $P(a, b)$ queda en (a) el segundo cuadrante? (b) ¿El tercer cuadrante? (c) ¿El cuarto cuadrante?

2. ¿Qué es la pendiente de una línea recta no vertical? ¿Qué puede decir sobre la pendiente de una línea vertical?

2.1 Ejercicios

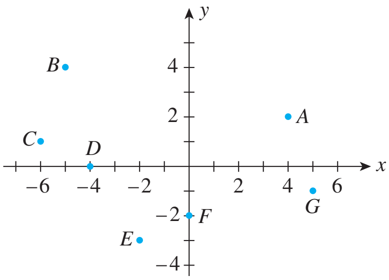
En los ejercicios 1-6, recurra a la figura adjunta y determine las coordenadas del punto y el cuadrante en el cual está localizado.



1. *A* **2.** *B* **3.** *C*

4. *D* **5.** *E* **6.** *F*

En los ejercicios 7-12 recurra a la figura adjunta.



7. ¿Qué punto tiene las coordenadas (4, 2)?

8. ¿Cuáles son las coordenadas del punto *B*?

9. ¿Qué puntos tienen coordenadas *y* negativas?

10. ¿Qué punto tiene una coordenada *x* negativa y una coordenada *y* negativa?

11. ¿Qué punto tiene una coordenada *x* que es igual a cero?

12. ¿Qué punto tiene una coordenada *y* que es igual a cero?

En los ejercicios 13-20 trace un sistema de ejes coordenados y luego marque el punto.

13. $(-2, 5)$ **14.** $(1, 3)$

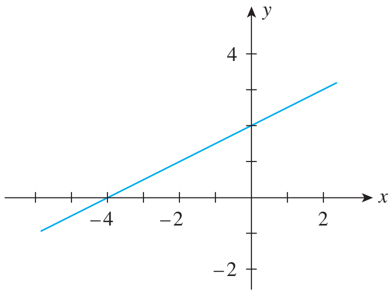
15. $(3, -1)$ **16.** $(3, -4)$

17. $(8, -\frac{7}{2})$ **18.** $(-\frac{5}{2}, \frac{3}{2})$

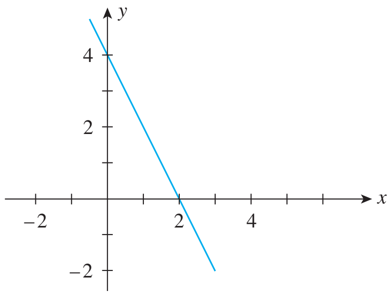
19. $(4.5, -4.5)$ **20.** $(1.2, -3.4)$

En los ejercicios 21-24, determine la pendiente de la línea mostrada en cada figura.

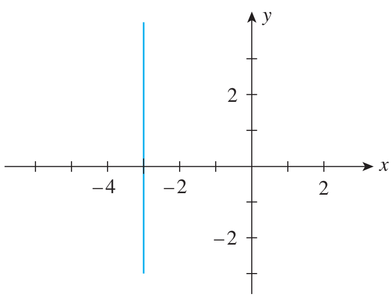
21.



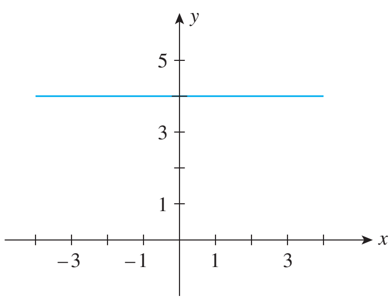
22.



23.



24.



En los ejercicios 25-30, determine la pendiente de la recta que pasa por el par de puntos dado.

25. (4, 3) y (5, 8) **26.** (4, 5) y (3, 8)

27. $(-2, 3)$ y (4, 8) **28.** $(-2, -2)$ y $(4, -4)$

29. (a, b) y (c, d)

30. $(-a + 1, b - 1)$ y $(a + 1, -b)$

31. Dada la ecuación $y = 4x - 3$, responda las siguientes preguntas.
- **a.** Si x se incrementa en 1 unidad, ¿cuál es el cambio correspondiente de y?
- **b.** Si x se reduce en 2 unidades, ¿cuál es el cambio correspondiente de y?

32. Dada la ecuación $2x + 3y = 4$, responda las siguientes preguntas.
- **a.** ¿Es la pendiente de la línea descrita por esta ecuación positiva o negativa?
- **b.** Conforme x incrementa su valor, ¿se incrementa o reduce y?
- **c.** Si x se reduce en 2 unidades, ¿cuál es el cambio correspondiente de y?

En los ejercicios 33 y 34, determine si las rectas que pasan por el par de puntos son paralelas.

33. $A(1, -2)$, $B(-3, -10)$ y $C(1, 5)$, $D(-1, 1)$

34. $A(2, 3)$, $B(2, -2)$ y $C(-2, 4)$, $D(-2, 5)$

35. Si la línea que pasa por los puntos $(1, a)$ y $(4, -2)$ es paralela a la línea que pasa por los puntos $(2, 8)$ y $(-7, a + 4)$, ¿cuál es el valor de a?

36. Si la línea que pasa por los puntos $(a, 1)$ y $(5, 8)$ es paralela a la línea que pasa por los puntos $(4, 9)$ y $(a + 2, 1)$, ¿cuál es el valor de a?

37. ¿Hay alguna diferencia entre los enunciados “La pendiente de una línea recta es cero” y “La pendiente de una línea recta no existe (no está definida)”? Explique su respuesta.

2.1 Ejercicios de autoevaluación

La pendiente de la línea que pasa por los puntos $(a, 2)$ y $(3, 6)$ es

$$m = \frac{6 - 2}{3 - a} = \frac{4}{3 - a}$$

Como esta línea es paralela a una línea con pendiente 4, m debe ser igual a 4; es decir,

$$\frac{4}{3 - a} = 4$$

o, al multiplicar ambos lados de la ecuación por $3 - a$,

$$\begin{aligned} 4 &= 4(3 - a) \\ 4 &= 12 - 4a \\ 4a &= 8 \\ a &= 2 \end{aligned}$$

2.2 Ecuaciones de la recta

Forma punto-pendiente

Ahora demostramos que toda línea recta situada en el plano xy puede ser representada por una ecuación que incluye las variables x y y. Un beneficio inmediato de esto es que los problemas que implican líneas rectas pueden ser resueltos algebraicamente.

Sea L una línea recta paralela al eje y (perpendicular al eje x) (figura 14). Por tanto L cruza el eje x en algún punto $(a, 0)$ con la coordenada x dada por $x = a$, donde a es algún número real. Cualquier otro punto sobre L tiene la forma $(a, \bar{y})$ donde $\bar{y}$ es un número apropiado. Por consiguiente, la línea vertical L está descrita por la única condición.

$$x = a$$

y ésta es por consiguiente una ecuación de L. Por ejemplo, la ecuación $x = -2$ representa una línea vertical situada a 2 unidades a la izquierda del eje y, y la ecuación $x = 3$ representa una línea vertical situada a 3 unidades del eje y (figura 15).

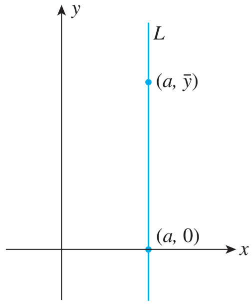


FIGURA **14**
La línea vertical $x = a$.

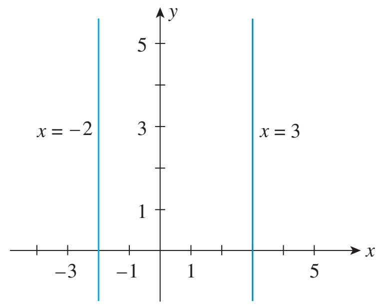


FIGURA **15**
Las líneas verticales $x = -2$ y $x = 3$.

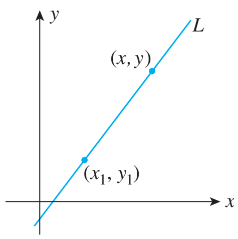


FIGURA **16**
L pasa por (x_1, y_1) y su pendiente es m.

A continuación suponga que L es una línea recta no vertical, de modo que tiene una pendiente m bien definida. Suponga que (x_1, y_1) es un punto fijo situado sobre L y que (x, y) es un punto variable sobre L distinto de (x_1, y_1) (figura 16). Utilizando la ecuación (1) con el punto $(x_2, y_2) = (x, y)$, vemos que la pendiente de L es

$$m = \frac{y - y_1}{x - x_1}$$

Al multiplicar ambos lados de la ecuación por $x - x_1$, se obtiene la ecuación (2).

Forma punto-pendiente

Una ecuación de la línea cuya pendiente es m y que pasa por el punto (x_1, y_1) es

$$y - y_1 = m(x - x_1) \qquad \textbf{(2)}$$

La ecuación (2) se conoce como *forma punto-pendiente* de una ecuación de una recta porque utiliza un punto dado (x_1, y_1) sobre una recta y la pendiente m de ésta.

VIDEO

EJEMPLO 1 Determine una ecuación de la recta que pasa por el punto (1, 3) y cuya pendiente es 2.

Solución Utilizando la forma punto-pendiente de la ecuación de la recta con el punto (1, 3) y $m = 2$ se obtiene

$$y - 3 = 2(x - 1) \qquad y - y_1 = m(x - x_1)$$

la que simplificada se escribe

$$2x - y + 1 = 0$$

(Figura 17).

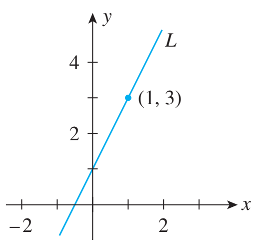


FIGURA **17**
L pasa por (1, 3) y su pendiente es 2.

EJEMPLO 2 Encuentre una ecuación de la recta que pasa por los puntos $(-3, 2)$ y $(4, -1)$.

Solución La pendiente de la recta es

$$m = \frac{-1 - 2}{4 - (-3)} = -\frac{3}{7}$$

Utilizando la forma punto-pendiente de la ecuación de una recta con el punto $(4, -1)$ y la pendiente $m = -\frac{3}{7}$ obtenemos

$$\begin{aligned} y + 1 &= -\frac{3}{7}(x - 4) \qquad y - y_1 = m(x - x_1) \\ 7y + 7 &= -3x + 12 \\ 3x + 7y - 5 &= 0 \end{aligned}$$

(Figura 18).

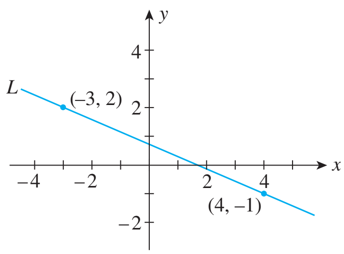


FIGURA **18**
L pasa por $(-3, 2)$ y $(4, 1)$.

■

Podemos utilizar la pendiente de una línea recta para determinar si una recta es perpendicular a otra.

Líneas perpendiculares

Si L_1 y L_2 son dos líneas rectas no verticales distintas con pendientes m_1 y m_2, respectivamente, entonces L_1 es **perpendicular** a L_2 (escrito $L_1 \perp L_2$) si y sólo si

$$m_1 = -\frac{1}{m_2}$$

Si la recta L_1 es vertical (de modo que su pendiente no está definida), entonces L_1 es perpendicular a otra línea L_2, si y sólo si L_2 es horizontal (de modo que su pendiente es cero). Para una comprobación de estos resultados, vea el ejercicio 74, página 83.

EJEMPLO 3 Encuentre una ecuación de la recta que pasa por el punto $(3, 1)$ y es perpendicular a la recta del ejemplo 1.

Solución Como la pendiente de la recta del ejemplo 1 es 2, se deduce que la pendiente de la línea requerida es $m = -\frac{1}{2}$, el recíproco negativo de 2. Utilizando la forma punto-pendiente de la ecuación de una recta obtenemos

$$\begin{aligned} y - 1 &= -\frac{1}{2}(x - 3) \qquad y - y_1 = m(x - x_1) \\ 2y - 2 &= -x + 3 \\ x + 2y - 5 &= 0 \end{aligned}$$

(Figura 19).

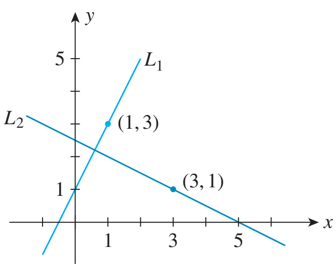


FIGURA **19**
L_2 es perpendicular a L_1 y pasa por $(3, 1)$.

Exploración con TECNOLOGÍA

1. Utilice una calculadora graficadora para trazar las líneas rectas L_1 y L_2 con ecuaciones $2x + y - 5 = 0$ y $41x + 20y - 11 = 0$ en el mismo sistema de ejes, utilizando una ventana de visualización estándar.
   a. ¿Puede decir si las líneas L_1 y L_2 son paralelas entre sí?
   b. Compruebe sus observaciones calculando algebraicamente las pendientes de L_1 y L_2.
2. Utilice una calculadora graficadora para trazar las líneas rectas L_1 y L_2 con ecuaciones $x + 2y - 5 = 0$ y $5x - y + 5 = 0$ en el mismo sistema de ejes, utilizando la pantalla de visualización estándar.
   a. ¿Puede decir si las líneas L_1 y L_2 son perpendiculares entre sí?
   b. Compruebe su observación calculando algebraicamente las pendientes L_1 y L_2.

Forma pendiente-ordenada al origen

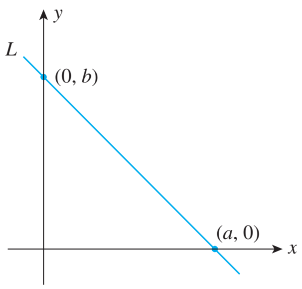


FIGURA **20**
La línea L tiene intersección con x a e intersección con y b.

Una línea recta L que no es horizontal ni vertical corta el eje x y el eje y en, por ejemplo, los puntos $(a, 0)$ y $(0, b)$, respectivamente (figura 20). Los números a y b se llaman **intersección con *x*** y **ordenada al origen** o **intersección con *y***, respectivamente, de L.

Ahora sea L una recta con pendiente m e intersección con y b. Utilizando la ecuación (2), la forma punt-pendiente de una recta, con el punto dado por $(0, b)$ y la pendiente m se obtiene

$$y - b = m(x - 0)$$
$$y = mx + b$$

Ésta es la llamada *forma de pendiente-ordenada al origen* de una ecuación de una recta.

Forma pendiente-ordenada al origen

La ecuación de la recta con pendiente m y que corta el eje y en el punto $(0, b)$ es

$$y = mx + b \tag{3}$$

EJEMPLO 4 Encuentre la ecuación de la recta de pendiente 3 e intersección con y -4.

Solución Utilizando la ecuación (3) con $m = 3$ y $b = -4$ se obtiene la ecuación requerida:

$$y = 3x - 4$$

■

EJEMPLO 5 Determine la pendiente-ordenada al origen con y de la recta cuya ecuación es $3x - 4y = 8$.

Solución Vuelva a escribir la ecuación dada en la forma pendiente-ordenada al origen y obtenga

$$y = \frac{3}{4}x - 2$$

Al comparar este resultado con la ecuación (3), $m = \frac{3}{4}$ y $b = -2$ y concluimos que la pendiente-ordenada al origen con y de la recta dada son $\frac{3}{4}$ y -2, respectivamente. ■

Exploración con TECNOLOGÍA

1. Utilice una calculadora graficadora para trazar las líneas rectas con ecuaciones $y = -2x + 3$, $y = -x + 3$, $y = x + 3$ y $y = 2.5x + 3$ en el mismo sistema de ejes, utilizando la ventana de visualización estándar. ¿Qué efecto tiene el cambio del coeficiente m de x en la ecuación $y = mx + b$ en su gráfica?
2. Utilice una calculadora graficadora para trazar las líneas rectas con ecuaciones $y = 2x - 2$, $y = 2x - 1$, $y = 2x$, $y = 2x + 1$ y $y = 2x + 4$ en el mismo sistema de ejes, usando la ventana de visualización estándar. ¿Qué efecto tiene el cambio del coeficiente de la constante b en la ecuación $y = mx + b$ en su gráfica?
3. Describa en palabras el efecto de cambiar tanto m como b en la ecuación $y = mx + b$.

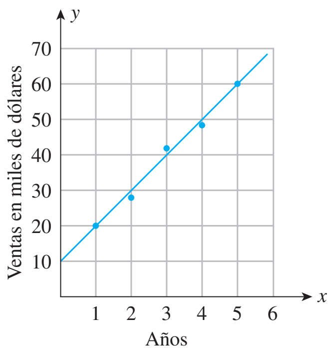


FIGURA 21
Ventas de una tienda de artículos deportivos.

EJEMPLO DE APLICACIÓN 6 Ventas de una tienda de artículos deportivos El gerente de ventas de una tienda local de artículos deportivos trazó las ventas contra el tiempo durante los últimos 5 años y encontró puntos situados aproximadamente a lo largo de una línea recta (figura 21). Utilizando los puntos correspondientes al primero y quinto años, encuentre una ecuación de la *línea recta de tendencia*. ¿Qué cifras de ventas puede predecirse para el sexto año?

Solución Utilizando la ecuación (1) con los puntos (1, 20) y (5, 60), la pendiente de la línea recta requerida es

$$m = \frac{60 - 20}{5 - 1} = 10$$

A continuación, utilizando la forma punto – pendiente de la ecuación de la recta con el punto (1, 20) y $m = 10$, obtenemos

$$\begin{aligned} y - 20 &= 10(x - 1) \\ y &= 10x + 10 \end{aligned}$$

como la ecuación requerida.

La cifra de ventas del sexto año se obtiene con $x = 6$ en la última ecuación, se obtiene

$$y = 10(6) + 10 = 70$$

o $70,000. ■

VIDEO

EJEMPLO DE APLICACIÓN 7 Predicción del valor de una obra de arte Suponga que se espera que una obra de arte adquirida en $50,000 incremente su valor a una tasa constante de $5000 por año durante los siguientes 5 años. Utilice la ecuación (3) para escribir una ecuación que pronostique el valor de la obra de arte en los siguientes años. ¿Cuál será su valor 3 años después de la fecha de compra?

Solución Sea x el tiempo (en años) transcurrido desde la fecha de compra y y el valor de la obra (en dólares). Entonces, $y = 50{,}000$ cuando $x = 0$. Además, la pendiente de la ecuación requerida es $m = 5000$, puesto que cada incremento unitario de x (1 año) implica un incremento de 5000 unidades (dólares) de y. Utilizando la ecuación (3) con $m = 5000$ y $b = 50{,}000$ obtenemos

$$y = 5000x + 50{,}000$$

Tres años después de la fecha de compra, el valor de la obra será

$$y = 5000(3) + 50{,}000$$

o $65,000. ■

Explore y analice

Recurra al ejemplo 7. ¿Puede utilizarse la ecuación que predice el valor de la obra de arte para predecir el aumento a largo plazo?

Forma general de la ecuación de una línea recta

Hemos considerado varias formas de la ecuación de una línea recta en el plano. Estas formas diferentes de la ecuación son equivalentes entre sí. En realidad, cada una es un caso especial de la siguiente ecuación.

Forma general de una ecuación lineal

La ecuación

$$Ax + By + C = 0 \tag{4}$$

donde A, B y C son constantes y A y B no son cero, se llama forma general de una ecuación lineal en las variables x y y.

Ahora exponemos (sin comprobarlo) un importante resultado con respecto a la representación algebraica de líneas rectas en el plano.

> Una ecuación de una línea recta es una ecuación lineal, a la inversa, cada ecuación lineal representa una línea recta.

El resultado justifica el uso del adjetivo *lineal* al describir la ecuación (4).

EJEMPLO 8 Trace la línea recta representada por la ecuación

$$3x - 4y - 12 = 0$$

Solución Como dos puntos distintos determinan de forma única cada línea recta, sólo debemos encontrar dos puntos por los que pase la línea para trazarla. Por conveniencia, calculemos los puntos por donde la línea cruza los ejes x y y. Con $y = 0$, encontramos $x = 4$, la intersección con x, así que la línea cruza el eje x en el punto $(4, 0)$. Con $x = 0$ se obtiene $y = -3$, la intersección con y, así que la línea cruza el eje y en el punto $(0, -3)$. En la figura 22 aparece el trazo de la línea.

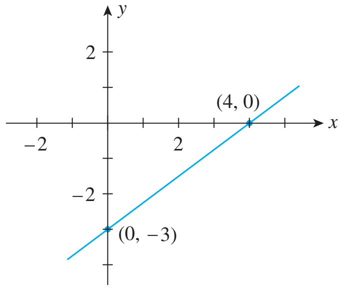


FIGURA **22**
La línea recta $3x - 4y = 12$.

■

He aquí un resumen de las formas comunes de las ecuaciones de líneas rectas estudiadas en esta sección.

Ecuaciones de líneas rectas

Línea vertical:	$x = a$
Línea horizontal:	$y = b$
Forma punto-pendiente:	$y - y_1 = m(x - x_1)$
Forma pendiente-ordenada al origen:	$y = mx + b$
Forma general:	$Ax + By + C = 0$

2.2 Ejercicios de autoevaluación

1. Encuentre una ecuación de la recta que pasa por el punto $(3, -1)$ y que es perpendicular a la recta con pendiente $-\frac{1}{2}$.

2. ¿El punto $(3, -3)$ está sobre la línea con ecuación $2x - 3y - 12 = 0$? Trace la gráfica de la recta.

3. **Suscriptores de televisión satelital** La tabla siguiente da el número de suscriptores de televisión satelital en Estados Unidos (en millones) de 1998 a 2005 ($x = 0$ corresponde a 1998):

x, año	0	1	2	3	4	5	6	7
y, número	8.5	11.1	15.0	17.0	18.9	21.5	24.8	27.4

   a. Trace el número de suscriptores de televisión satelital en Estados Unidos (y) contra el año (x).
   b. Trace la línea L que pasa por los puntos $(0, 8.5)$ y $(7, 27.4)$.
   c. Encuentre la ecuación de la línea L.
   d. Suponga que esta tendencia continúa, estime el número de suscriptores de televisión satelital en Estados Unidos en 2006.

Fuente: National Cable & Telecommunications Association y la Federal Communication Commission.

Las soluciones a los ejercicios de autoevaluación 2.2 se encuentran en la página 84.

2.2 Preguntas de concepto

1. Dé (a) la forma punto-pendiente, (b) la forma pendiente-ordenada al origen y (c) la forma general de la ecuación de una recta.

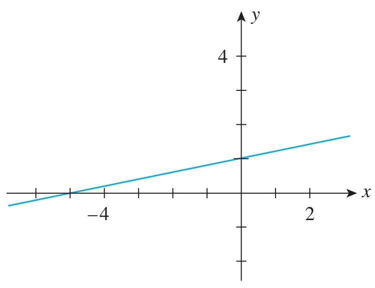
2. Sean m_1 y m_2 las pendientes de L_1 y L_2, respectivamente. Indique las condiciones en relación con m_1 y m_2 si (a) L_1 es paralela a L_2 y (b) L_1 es perpendicular a L_2.

2.2 Ejercicios

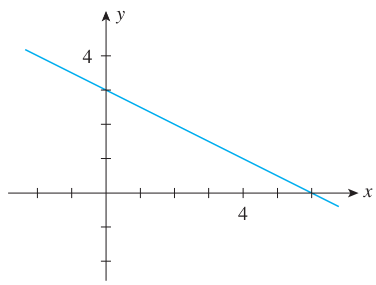
En los ejercicios 1-6, equipare el enunciado con una de las gráficas (a)-(f).

1. La pendiente de la recta es cero.
2. La pendiente de la recta no está definida.
3. La pendiente de la recta es positiva, y su intersección con y es positiva.
4. La pendiente de la recta es positiva, y su intersección con y es negativa.
5. La pendiente de la recta es negativa, y su intersección con x es negativa.
6. La pendiente de la recta es negativa, y su intersección con x es positiva.

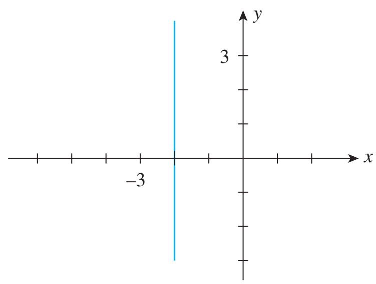
(a)



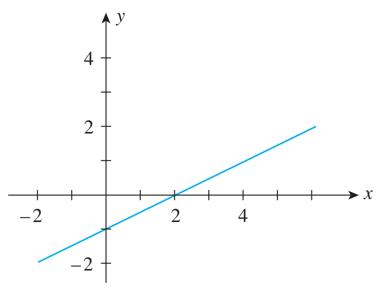
(b)



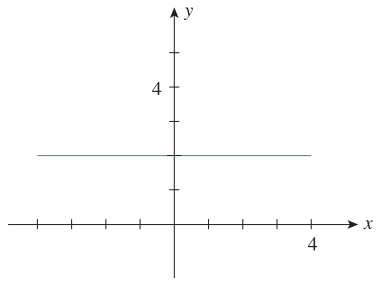
(c)



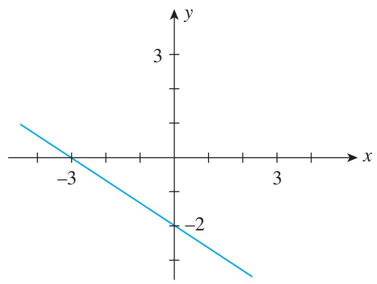
(d)



(e)



(f)



En los ejercicios 7 y 8, determine si las líneas que pasan por los pares de puntos son perpendiculares.

7. $A(-2, 5)$, $B(4, 2)$ y $C(-1, -2)$, $D(3, 6)$

8. $A(2, 0)$, $B(1, -2)$ y $C(4, 2)$, $D(-8, 4)$

9. Encuentre una ecuación de la línea horizontal que pasa por $(-4, -3)$.

10. Encuentre una ecuación de la línea vertical que pasa por $(0, 5)$.

En los ejercicios 11-14 encuentre una ecuación de la recta que pasa por el punto y que tiene la pendiente indicada *m*.

11. $(3, -4)$; $m = 2$ **12.** $(2, 4)$; $m = -1$

13. $(-3, 2)$; $m = 0$ **14.** $(1, 2)$; $m = -\frac{1}{2}$

En los ejercicios 15-18 encuentre una ecuación de la recta que pasa por los puntos dados.

15. $(2, 4)$ y $(3, 7)$ **16.** $(2, 1)$ y $(2, 5)$

17. $(1, 2)$ y $(-3, -2)$ **18.** $(-1, -2)$ y $(3, -4)$

En los ejercicios 19-22 encuentre una ecuación de la recta con pendiente *m* e intersección y *b*.

19. $m = 3$; $b = 4$ **20.** $m = -2$; $b = -1$

21. $m = 0$; $b = 5$ **22.** $m = -\frac{1}{2}$; $b = \frac{3}{4}$

En los ejercicios 23-28 escriba la ecuación en la forma de pendiente-ordenada y luego determine la pendiente e intersección con *y* de la línea correspondiente.

23. $x - 2y = 0$ **24.** $y - 2 = 0$

25. $2x - 3y - 9 = 0$ **26.** $3x - 4y + 8 = 0$

27. $2x + 4y = 14$ **28.** $5x + 8y - 24 = 0$

29. Encuentre una ecuación de la recta que pasa por el punto $(-2, 2)$ y que es paralela a la recta $2x - 4y - 8 = 0$.

31. Encuentre una ecuación de la recta que pasa por el punto $(-1, 3)$ y que es paralela a la recta que pasa por los puntos $(-2, -3)$ y $(2, 5)$.

32. Encuentre una ecuación de la recta que pasa por el punto $(2, 4)$ y que es perpendicular a la recta $3x + 4y - 22 = 0$.

33. Encuentre una ecuación de la recta que pasa por el punto $(1, -2)$ y que es perpendicular a la recta que pasa por los puntos $(-2, -1)$ y $(4, 3)$.

En los ejercicios 33-38 encuentre una ecuación de la recta que satisface la condición dada.

33. La recta paralela al eje x y a 6 unidades por debajo de él.

34. La recta que pasa por el origen y paralela a la recta que pasa por los puntos $(2, 4)$ y $(4, 7)$.

35. La recta que pasa por el punto (a, b) con pendiente igual a cero.

36. La recta que pasa por $(-3, 4)$ y paralela al eje x.

37. La recta que pasa por $(-5, -4)$ y paralela a la recta que pasa por $(-3, 2)$ y $(6, 8)$.

38. La recta que pasa por (a, b) con pendiente indefinida.

39. Dado que el punto $P(-3, 5)$ queda sobre la recta $kx + 3y + 9 = 0$, encuentre k.

40. Dado que el punto $P(2, -3)$ queda sobre la recta $-2x + ky + 10 = 0$, encuentre k.

En los ejercicios 41-46 trace la línea recta definida por la ecuación lineal encontrando las intersecciones con *x* y *y*.

Sugerencia: Vea el ejemplo 8.

41. $3x - 2y + 6 = 0$ **42.** $2x - 5y + 10 = 0$

43. $x + 2y - 4 = 0$ **44.** $2x + 3y - 15 = 0$

45. $y + 5 = 0$ **46.** $-2x - 8y + 24 = 0$

47. Demuestre que la ecuación de una recta que pasa por los puntos $(a, 0)$ y $(0, b)$ con $a \neq 0$ y $b \neq 0$ puede escribirse como

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

(Recuerde que los números a y b son las intersecciones con x y y, respectivamente, de la línea. Esta forma de la ecuación de una línea se llama **forma de intersección** o **forma simétrica**).

En los ejercicios 48-51 utilice los resultados del ejercicio 47 para encontrar la ecuación de una recta con las intersecciones con *x* y *y*.

48. intersección con x 3; intersección con y 4

49. intersección con x -2; intersección con y -4

50. intersección con x $-\frac{1}{2}$; intersección con y $\frac{3}{4}$

51. intersección con x 4; intersección con y $-\frac{1}{2}$

En los ejercicios 52 y 53 determine si los puntos están situados sobre una línea recta.

52. $A(-1, 7)$, $B(2, -2)$ y $C(5, -9)$

53. $A(-2, 1)$, $B(1, 7)$ y $C(4, 13)$

54. **Conversión de temperatura** La relación entre la temperatura en grados Fahrenheit (°F) y la temperatura en grados Celsius (°C) es

$$F = \frac{9}{5}C + 32$$

a. Trace la recta con la ecuación dada.
b. ¿Cuál es la pendiente de la recta? ¿Qué representa?
c. ¿Cuál es la intersección con F de la recta? ¿Qué representa?

55. **Utilización de una planta nuclear** Estados Unidos no está construyendo muchas plantas nucleares, pero las que tiene funcionan casi a capacidad total. El rendimiento (como porcentaje de la capacidad total) de las plantas nucleares está descrito por la ecuación

$$y = 1.9467t + 70.082$$

donde t está en años, con $t = 0$ correspondiente al inicio de 1990.
a. Trace la recta con la ecuación dada.
b. ¿Cuáles son la pendiente y la intersección con y de la recta encontrada en la parte (a)?
c. Dé una interpretación de la pendiente y la intersección con y de la recta encontrada en la parte (a).
d. Si el uso de energía continúa creciendo al mismo ritmo y la capacidad total de las plantas nucleares de Estados Unidos permanece constante, ¿en qué año se puede esperar que las plantas generen energía a máxima capacidad?

Fuente: Nuclear Energy Institute

56. **Contribuciones a la Seguridad Social** Para salarios menores que el salario base máximo gravable, las contribuciones al Seguro Social por parte de los empleados son de 7.65% de sus salarios
a. Encuentre una ecuación que exprese la relación entre los salarios devengados (x) y los impuestos pagados de Seguro Social (y) por un empleado que gana menos que el salario base máximo gravable.
b. Por cada dólar adicional que un empleado gana, ¿qué tanto se incrementa su contribución al Seguro Social? (Suponga que los salarios de los empleados son menores que el salario base máximo gravable.)
c. ¿Qué contribuciones al Seguro Social se requerirá que haga un empleado que gana $65,000 (el cual es menor que el salario base máximo gravable)?

Fuente: Social Security Administration

57. **Admisiones a la universidad** Con los datos compilados por la Oficina de Admisiones en Faber University, los oficiales de admisiones estiman que 55% de los estudiantes que solicitan admisión al primer año en la universidad serán aceptados realmente.
a. Encuentre una ecuación que exprese la relación entre el número de estudiantes que en realidad son aceptados (y) y el número de estudiantes que solicitan admisión a la universidad (x).
b. Si el tamaño deseado de la clase de primer año para el año académico próximo es de 1100 estudiantes, ¿cuántos deberán solicitar admisión?

58. **Peso de las ballenas** La ecuación $W = 3.51L - 192$, que expresa la relación entre la longitud L (en pies) y el peso esperado W (en toneladas británicas) de ballenas azules adultas, fue adoptada a finales de la década de 1960 por la International Whaling Commission.
a. ¿Cuál es el peso esperado de una ballena azul de 80 pies?
b. Trace la línea recta que representa la ecuación.

59. **Reducción de la brecha generacional** Desde la fundación de la Equal Employment Opportunity Commission y la aprobación de las leyes de igualdad salarial, el abismo entre los ingresos de hombres y mujeres ha continuado reduciéndose gradualmente. A principios de 1990 ($t = 0$), los salarios de las mujeres eran 68% de los de los hombres y a principios de 2000 ($t = 10$), los salarios de las mujeres eran 80% el de los hombres. Si esta brecha entre los salarios de las mujeres y los hombres continúa acortándose *linealmente*, entonces ¿qué porcentaje de los salarios de los hombres serán los salarios de las mujeres a principios de 2004?

Fuente: Journal of Economic Perspectives

60. **Ventas de sistemas de navegación** El número proyectado de sistemas de navegación (en millones) instalados en vehículos en Norteamérica, Europa y Japón de 2002 a 2006 se muestran en siguiente tabla ($x = 0$ corresponde a 2002):

Año, x	0	1	2	3	4
Sistemas instalados, y	3.9	4.7	5.8	6.8	7.8

a. Grafique las ventas anuales (y) contra el año (x).
b. Trace una línea recta L por los puntos correspondientes a 2002 y 2006.
c. Derive una ecuación de la línea L.
d. Utilice la ecuación encontrada en la parte (c) para estimar el número de sistemas de navegación instalados en 2005. Compare esta cifra con las ventas de ese año.

Fuente: ABJ Research

61. **Ventas de equipo GPS** Las ventas anuales (en miles de millones de dólares) de sistemas de posicionamiento global (GPS) de 2000 a 2006 se muestran en la siguiente tabla ($x = 0$ corresponde a 2000):

Año, x	0	1	2	3	4	5	6
Ventanas anuales, y	7.9	9.6	11.5	13.3	15.2	17	18.8

a. Trace las ventas anuales (y) contra el año (x).
b. Trace una línea recta L a través de los puntos correspondientes a 2000 y 2006.
c. Derive la ecuación de la línea L.
d. Utilice la ecuación encontrada en la parte (c) para estimar las ventas anuales de equipo GPS en 2005. Compare esta cifra con las ventas proyectadas para ese año.

Fuente: ABJ Research

62. **Estatura y peso ideales para las mujeres** El Venus Health Club para mujeres proporciona a sus miembros la tabla siguiente, la cual da el peso promedio deseable (en libras) para mujeres de una estatura dada (en pulgadas):

Estatura, x	60	63	66	69	72
Peso, y	108	118	129	140	152

a. Trace el peso (y) contra la estatura (x).
b. Trace una línea recta L a través de los puntos correspondientes a las estaturas de 5 y 6 pies.
c. Derive la ecuación de la línea L.
d. Con la ecuación de la parte (c), calcule el peso promedio deseable para una mujer de 5 pies 5 pulg de estatura.

63. **Costo de un commodity** Un fabricante obtuvo los datos siguientes que relaciona el costo y (en dólares) con el número de unidades (x) de un commodity producido:

Unidades producidas, x	0	20	40	60	80	100
Costo en dólares, y	200	208	222	230	242	250

a. Trace el costo (y) contra la cantidad producida (x).
b. Trace una línea recta por los puntos (0, 200) y (100, 250).
c. Derive una ecuación de la línea recta de la parte (b).
d. Considerando esta ecuación como una aproximación de la relación entre el costo y el nivel de producción, calcule el costo de producir 54 unidades del artículo.

64. **Servicios de televisión digital** El porcentaje de casas con servicios de televisión digital se mantuvo a 5% a principios de 1999 ($t = 0$) y se proyectó que creciera linealmente de modo que a principios de 2003 ($t = 4$), el porcentaje de tales casas fue de 25%.
a. Derive una ecuación de la recta que pasa por los puntos $A(0, 5)$ y $B(4, 25)$.
b. Trace la línea con la ecuación encontrada en la parte (a).
c. Utilizando la ecuación encontrada en la parte (a), determine el porcentaje de casas con servicios TV digital a principios de 2001.

Fuente: Paul Kagan Associates

65. **Incremento de las ventas** Las ventas anuales de la Metro Department Store (en millones de dólares) durante los 5 años pasados fueron

Ventas anuales, y	5.8	6.2	7.2	8.4	9.0
Año, x	1	2	3	4	5

a. Trace las ventas anuales (y) contra el año (x).
b. Trace una línea recta L por los puntos correspondientes al primero y quinto años.
c. Derive una ecuación de la línea L.
d. Utilizando la ecuación encontrada en la parte (c), calcule las ventas anuales de la Metro después de 4 años a partir de ahora ($x = 9$).

En los ejercicios 66-72 determine si el enunciado es verdadero o falso. Si es verdadero, explique por qué lo es, si es falso, dé un ejemplo para demostrar por qué lo es.

66. Suponga que la pendiente de una línea L es $-\frac{1}{2}$ y P es un punto dado sobre L. Si Q es el punto sobre L situado a 4 unidades a la izquierda de P entonces Q está a 2 unidades por encima de P.

67. El punto $(-1, 1)$ está situado sobre la línea con ecuación $3x + 7y = 5$.

68. El punto $(1, k)$ está situado sobre la línea con ecuación $3x + 4y = 12$ si y sólo si $k = \frac{9}{4}$.

69. La línea con ecuación $Ax + By + C = 0$ $(B \neq 0)$ y la línea con ecuación $ax + by + c = 0$ $(b \neq 0)$ son paralelas si $Ab - aB = 0$.

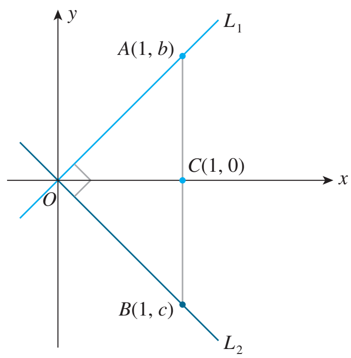
70. Si la pendiente de la línea L_1 es positiva, entonces la pendiente de una línea L_2 perpendicular a L_1 puede ser positiva o negativa.

71. Las líneas con ecuaciones $ax + by + c_1 = 0$ y $bx - ay + c_2 = 0$, donde $a \neq 0$ y $b \neq 0$ son perpendiculares entre sí.

72. Si L es la línea con ecuación $Ax + By + C = 0$, donde $A \neq 0$, entonces L cruza el eje x en el punto $(-C/A, 0)$.

73. Demuestre que dos líneas distintas con ecuaciones $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ y $a_2x + b_2y + c_2 = 0$, respectivamente, son paralelas si y sólo si $a_1b_2 - b_1a_2 = 0$.
Sugerencia: Escriba cada ecuación en la forma de pendiente e intersección y compare.

74. Demuestre que si una línea L_1 con pendiente m_1 es perpendicular a una línea L_2 con pendiente m_2, entonces $m_1m_2 = -1$
Sugerencia: Recurra a la figura adjunta. Demuestre que $m_1 = b$ y $m_2 = c$. A continuación aplique el teorema de Pitágoras y la fórmula de la distancia a los triángulos OAC, OCB y OBA para demostrar que $1 = -bc$.



2.2 Soluciones de los ejercicios de autoevaluación

1. Como la línea requerida L es perpendicular a una línea con pendiente $-\frac{1}{2}$, la pendiente de L es

$$m = \frac{1}{-\frac{1}{2}} = 2$$

A continuación, utilizando la forma punto-pendiente de la ecuación de la recta se obtiene

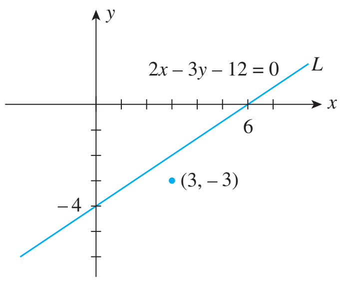
$$\begin{aligned} y - (-1) &= 2(x - 3) \\ y + 1 &= 2x - 6 \\ y &= 2x - 7 \end{aligned}$$

2. Al sustituir $x = 3$ y $y = -3$ en el lado izquierdo de la ecuación dada

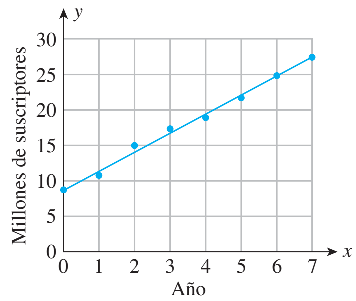
$$2(3) - 3(-3) - 12 = 3$$

la cual no es igual a cero (el lado derecho). Por consiguiente, $(3, -3)$ no está sobre la línea con ecuación $2x - 3y - 12 = 0$.

Con $x = 0$, $y = -4$, la intersección con y. A continuación, con $y = 0$, $x = 6$, la intersección con x. Ahora trazamos la línea que pasa por los puntos $(0, -4)$ y $(6, 0)$, como se muestra en la siguiente figura.



3. **a** y **b**. Vea la siguiente figura.



c. La pendiente de L es

$$m = \frac{27.4 - 8.5}{7 - 0} = 2.7$$

Utilizando la forma punto-pendiente de la ecuación de una recta con el punto $(0, 8.5)$, encontramos

$$\begin{aligned} y - 8.5 &= 2.7(x - 0) \\ y &= 2.7x + 8.5 \end{aligned}$$

d. El número estimado de suscriptores de TV satelital en Estados Unidos en 2006 es

$$y = 2.7(8) + 8.5 = 30.1$$

o 30.1 millones.

USO DE LA TECNOLOGÍA

Trazo de la gráfica de una línea recta

Calculadora graficadora

El primer paso para trazar una línea recta con una calculadora graficadora es seleccionar una ventana de visualización adecuada. En general esto se hace mediante la experimentación. Por ejemplo, podría trazar primero la línea recta con la **ventana de visualización estándar** $[-10, 10] \times [-10, 10]$. Si es necesario, luego podría ajustarla agrandándola o reduciéndola para obtener una vista suficientemente completa de la línea, o al menos, de la parte de interés de la línea.

EJEMPLO 1 Trace la línea recta $2x + 3y - 6 = 0$ en la ventana de visualización estándar.

Solución La línea recta en la ventana de visualización estándar se muestra en la figura T1.

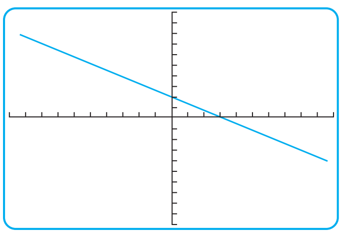


FIGURA **T1**
La línea recta $2x + 3y - 6 = 0$ en la ventana de visualización estándar.

■

EJEMPLO 2 Trace la línea recta $2x + 3y - 30 = 0$ en (a) la pantalla de visualización estándar y (b) la pantalla de visualización $[-5, 20] \times [-5, 20]$.

Solución

a. La línea recta en la pantalla de visualización estándar se muestra en la figura T2a.

b. La línea recta en la pantalla de visualización $[-5, 20] \times [-5, 20]$ se muestra en la figura T2b. Esta figura ciertamente da una vista más completa de la línea recta.

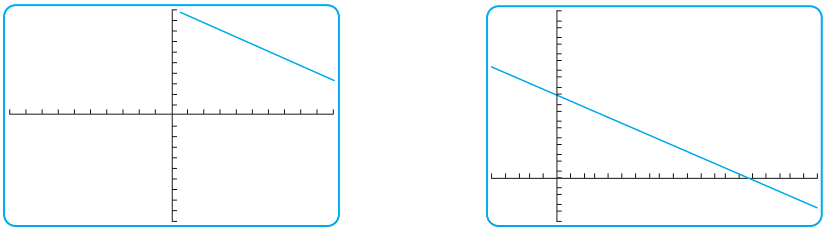


FIGURA **T2**

(a) La gráfica $2x + 3y - 30 = 0$ en la pantalla de visualización estándar

(b) La gráfica $2x + 3y - 30 = 0$ en la pantalla de visualización $[-5, 20] \times [-5, 20]$ ■

Excel

En los ejemplos y ejercicios siguientes, suponemos que conoce las funciones básicas de Microsoft Excel. Consulte su manual o utilice las funciones de Ayuda (Help) de Excel para responder preguntas con respecto a los comandos estándar e instrucciones de operación de Excel.*

EJEMPLO 3 Trace la gráfica de la línea recta $2x + 3y - 6 = 0$ en el intervalo $[-10, 10]$.

Solución

1. *Escriba la ecuación en la forma pendiente-ordenada al origen:*

$$y = -\frac{2}{3}x + 2$$

2. *Elabore una tabla de valores.* Ingrese primero los valores de entrada: ingrese los valores de los puntos extremos del intervalo dentro del cual trazará la línea recta. (Recuerde que sólo necesitamos dos puntos distintos para trazar una línea recta. En general, se seleccionan los puntos extremos del intervalo dentro del cual se marcarán nuestros puntos.) En este caso ingresamos `–10` en la celda A2 y `10` en la celda A3.

Luego ingresamos la fórmula para calcular los valores de y: en este caso ingresamos

```
= –(2/3)*A2+2
```

en la celda B2 y luego oprimimos **Enter**.

En tercer lugar evaluamos la función con el otro valor de entrada. Para ampliar la fórmula a la celda B3, movemos el puntero hasta el pequeño cuadro negro en la esquina inferior derecha de la celda B2 (la celda que contiene la fórmula). Observe que el puntero ahora aparece como black + (plus sign). Arrastramos el puntero hasta la celda B3 y luego lo soltamos. El valor de y, – 4.66667, correspondiente al valor de x en la celda A3(10) aparecerá en la celda B3 (figura T3).

	A	B
1	x	y
2	–10	8.666667
3	10	–4.66667

FIGURA **T3**
Tabla de valores para x y y.

*Las instrucciones para resolver estos ejemplos y ejercicios con Microsoft Excel 2007 se dan en el sitio web del libro.

Nota: Las palabras o caracteres encerrados en un cuadro (por ejemplo **Enter**) indica que se requiere una acción (hacer clic, seleccionar u oprimir). Las palabras o caracteres impresos en tonos de gris (por ejemplo, Chart Type) indican que palabras o caracteres que aparecen en la pantalla. Las palabras o caracteres impresos en una fuente de máquina de escribir (por ejemplo, `=(–2/3)*A2+2)` indican palabras o caracteres que tienen que ser tecleados e ingresados.

3. *Trace la línea recta determinada por estos puntos.* Primero resalte los valores numéricos que aparecen en la tabla. En este caso resaltamos las celdas A2:A3 y B2:B3. A continuación, oprimimos el botón **Chart Wizard** de la barra de herramientas.

Paso 1 En el cuadro de diálogo Chart Type que aparece seleccionamos **XY(Scatter)**. En seguida, seleccionamos la segunda gráfica en la primera columna bajo Chart sub-type. Luego oprimimos **Next** en la parte inferior del cuadro de diálogo.

Paso 2 Haga clic en **Columns** al lado de Series in: Luego haga clic en **Next** en la parte inferior del cuadro de diálogo.

Paso 3 Haga clic en la pestaña **Titles** en el cuadro Chart title: ingrese `y = −(2/3) x + 2`. En el cuadro Value (X) axis: teclee *x*. En el cuadro Value (Y) axis: teclee `y`. Haga clic en la pestaña **Legend**. En seguida, haga clic en el cuadro **Show Legend** para quitar la marca de verificación. Haga clic en **Finish** en la parte inferior del cuadro de diálogo.

Aparecerá la gráfica mostrada en la figura T4.

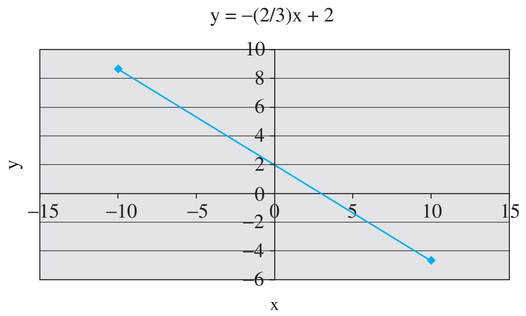
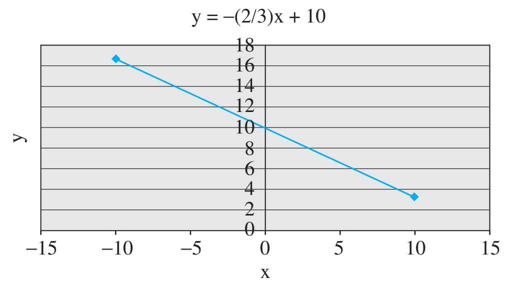


FIGURA **T4**
La gráfica de $y = -\frac{2}{3}x + 2$ en el intervalo $[-10, 10]$.

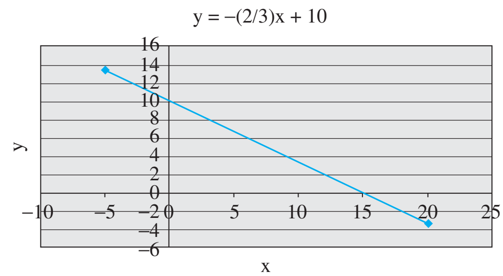
Si el intervalo dentro del cual se trazará la línea recta no está especificado, entonces puede que tenga que experimentar para determinar una intervalo apropiado para los valores *x* en su gráfica. Por ejemplo, podría trazar primero la línea recta dentro del intervalo $[-10, 10]$. Si es necesario, podría ajustarlo luego, agrandándolo o reduciéndolo, para obtener una vista suficientemente completa de la línea, o al menos de la parte de interés de ella.

EJEMPLO 4 Trace la línea recta $2x + 3y - 30 = 0$ dentro de los intervalos (a) $[-10, 10]$ y (b) $[-5, 20]$.

Solución **a** y **b**. Escribimos primero la ecuación en la forma pendiente-ordenada, y se obtiene $y = -\frac{2}{3}x + 10$. Siguiendo el procedimiento dado en el ejemplo 3 se obtienen las gráficas mostradas en la figura T5.



(a)



(b)

FIGURA **T5**
Gráfica de $y = -\frac{2}{3}x + 10$ dentro de los intervalos (a) $[-10, 10]$ y (b) $[-5, 20]$

Observe que la gráfica de la figura T5b incluye las intersecciones con *x* y *y*. Esta figura ciertamente da una vista más completa de la línea recta.

EJERCICIOS CON TECNOLOGÍA

Calculadora graficadora

En los ejercicios 1-4 trace la línea recta con la ecuación en la ventana de visualización estándar.

1. $3.2x + 2.1y - 6.72 = 0$ **2.** $2.3x - 4.1y - 9.43 = 0$

3. $1.6x + 5.1y = 8.16$ **4.** $-3.2x + 2.1y = 6.72$

En los ejercicios 5-8 trace la línea recta con la ecuación en (a), la ventana de visualización estándar y (b), la ventana de visualización indicada.

5. $12.1x + 4.1y - 49.61 = 0$; $[-10, 10] \times [-10, 20]$

6. $4.1x - 15.2y - 62.32 = 0$; $[-10, 20] \times [-10, 10]$

7. $20x + 16y = 300$; $[-10, 20] \times [-10, 30]$

8. $32.2x + 21y = 676.2$; $[-10, 30] \times [-10, 40]$

En los ejercicios 9-12 trace la línea recta con la ecuación en una ventana de visualización apropiada. (*Nota:* La respuesta *no* es única.)

9. $20x + 30y = 600$

10. $30x - 20y = 600$

11. $22.4x + 16.1y - 352 = 0$

12. $18.2x - 15.1y = 274.8$

Excel

En los ejercicios 1-4 trace la línea recta con la ecuación dentro del intervalo $[-10, 10]$.

1. $3.2x + 2.1y - 6.72 = 0$ **2.** $2.3x - 4.1y - 9.43 = 0$

3. $1.6x + 5.1y = 8.16$ **4.** $-3.2x + 2.1y = 6.72$

En los ejercicios 5-8 trace la línea recta con la ecuación dentro del intervalo dado.

5. $12.1x + 4.1y - 49.61 = 0$; $[-10, 10]$

6. $4.1x - 15.2y - 62.32 = 0$; $[-10, 20]$

7. $20x + 16y = 300$; $[-10, 20]$

8. $32.2x + 21y = 676.2$; $[-10, 30]$

En los ejercicios 9-12 trace la línea recta con la ecuación. (*Nota:* La respuesta *no* es única.)

9. $20x + 30y = 600$ **10.** $30x - 20y = 600$

11. $22.4x + 16.1y - 352 = 0$

12. $18.2x - 15.1y = 274.8$

2.3 Funciones y sus gráficas

Funciones

A un fabricante le gustaría conocer la relación que la utilidad de la empresa mantiene con su nivel de producción; a un biólogo le gustaría conocer cómo cambia el tamaño de la población de un cierto cultivo en el tiempo; a un psicólogo le gustaría conocer la relación entre el tiempo de aprendizaje de un individuo y la longitud de una lista de vocabulario, y a un químico le gustaría conocer cómo se relaciona la velocidad inicial de una reacción química con la cantidad de sustrato empleada. En cada caso nos interesa la misma pregunta. ¿Cómo depende una cantidad de otra? La relación entre dos cantidades se describe convenientemente en matemáticas utilizando el concepto de función.

Función

Una **función** es una regla que asigna a cada elemento de un conjunto A sólo un elemento de un conjunto B.

El conjunto A se llama **dominio** de la función. Se acostumbra denotar una función con una letra del alfabeto, tal como la letra f. Si x es un elemento en el dominio de una función f, entonces el elemento y en B con el que f se asocia se escribe $f(x)$ (leído "*f de x*") y se llama valor de f en x. El conjunto que comprende todos los valores asumidos por $y = f(x)$ cuando x adopta todos los valores posibles en su dominio se llama **rango** de la función f.

Pensemos en una función f como una máquina. El dominio es el conjunto de insumos (materia prima) de la máquina, la regla describe cómo se procesará el insumo, y el valor o los valores de la función son los resultados de la máquina (figura 23).

También podemos pensar en una función f como un mapa en el cual un elemento x en dominio de f se proyecta sobre un elemento único $f(x)$ en B (figura 24).

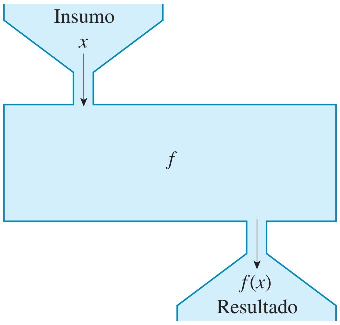


FIGURA **23**
Una máquina función.

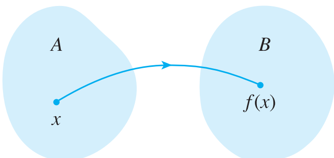


FIGURA **24**
La función *f* vista como mapa.

Notas

1. El resultado $f(x)$ está asociado con un insumo x único. Para apreciar la importancia de está propiedad de unicidad, considere una regla que asocia con cada elemento x en una tienda departamental su precio de venta y. Entonces, cada x debe corresponder a *una y sólo a una* y. Observe, sin embargo, que diferentes x pueden asociarse con la misma y. En el contexto de este ejemplo, esto significa que diferentes elementos pueden tener el mismo precio.
2. Aun cuando los conjuntos A y B que aparecen en la definición de una función pueden ser bastante arbitrarios, en este libro se denotarán como conjuntos de números reales. ■

Un ejemplo de una función es la conocida relación entre el área de un círculo y su radio. Sean x y y el radio y el área de un círculo, respectivamente, por geometría elemental

$$y = \pi x^2 \tag{5}$$

La ecuación (5) define y como una función de x puesto que cada valor admisible de x (es decir, por cada número no negativo que representa el radio de un cierto círculo) existe precisamente un número $y = \pi x^2$ que da el área del círculo. La regla que define esta "función de área" puede escribirse como

$$f(x) = \pi x^2 \tag{6}$$

Para calcular el área de un círculo de 5 pulgadas de radio, simplemente reemplazamos x en la ecuación (6) con el número 5. Por tanto, el área del círculo es

$$f(5) = \pi 5^2 = 25\pi$$

o 25π pulgadas cuadradas.

En general, para evaluar una función con un valor específico de x, reemplazamos x con dicho valor, como se ilustra en los ejemplos 1 y 2.

EJEMPLO 1 Sea la función f definida por la regla $f(x) = 2x^2 - x + 1$. Encuentre:

a. $f(1)$ **b.** $f(-2)$ **c.** $f(a)$ **d.** $f(a + h)$

Solución

a. $f(1) = 2(1)^2 - (1) + 1 = 2 - 1 + 1 = 2$
b. $f(-2) = 2(-2)^2 - (-2) + 1 = 8 + 2 + 1 = 11$
c. $f(a) = 2(a)^2 - (a) + 1 = 2a^2 - a + 1$
d. $f(a + h) = 2(a + h)^2 - (a + h) + 1 = 2a^2 + 4ah + 2h^2 - a - h + 1$ ■

EJEMPLO DE APLICACIÓN 2 Funciones de utilidad ThermoMaster fabrica un termómetro para interiores y exteriores en su subsidiaria mexicana. La gerencia estima que la utilidad (en dólares) obtenible por ThermoMaster por la fabricación y venta de x termómetros por semana es

$$P(x) = -0.001x^2 + 8x - 5000$$

Encuentre la utilidad semanal de ThermoMaster si su nivel de producción es (a) 1000 termómetros por semana y (b) 2000 termómetros por semana.

Solución

a. La utilidad semanal cuando el nivel de producción es de 1000 unidades por semana se encuentra al evaluar la función de utilidad P con $x = 1000$. Por tanto,

$$P(1000) = -0.001(1000)^2 + 8(1000) - 5000 = 2000$$

o $2000.

b. Cuando el nivel de producción es de 2000 unidades por semana, la utilidad semanal está dada por

$$P(2000) = -0.001(2000)^2 + 8(2000) - 5000 = 7000$$

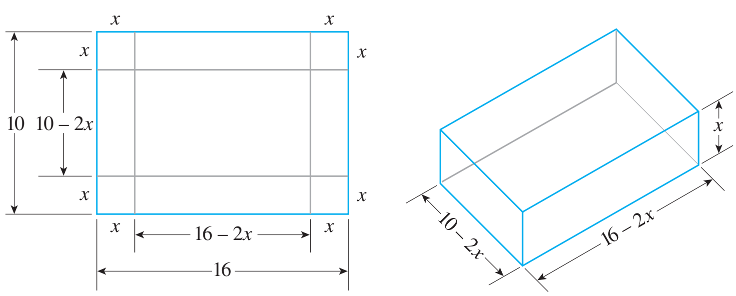
o $7000. ■

Determinación del dominio de una función

Suponga que se nos da la función $y = f(x)$.* Entonces, la variable x se llama **variable independiente**. La variable y, cuyo valor depende de x, se llama **variable dependiente**.

Para determinar el dominio de una función, tenemos que determinar qué restricciones, si las hay, se tienen que imponer en la variable independiente x. En muchas aplicaciones prácticas, la naturaleza del problema dicta el dominio de una función, como se ilustra en el ejemplo 3.

EJEMPLO DE APLICACIÓN 3 **Empaque** Se tiene que hacer una caja abierta con un trozo de cartón rectangular de 16 pulgadas de largo por 10 de ancho, recortando cuadrados idénticos (de x por x pulgadas) de cada esquina y plegando las pestañas resultantes (figura 25). Encuentre una expresión que dé el volumen V de la caja en función de x. ¿Cuál es el dominio de la función?



(a) La caja se construye recortando cuadrados de x" por x" de cada esquina.

(b) Las dimensiones de la caja resultante son $(10 - 2x)$" por $(16 - 2x)$" por x".

FIGURA **25**

Solución Las dimensiones de la caja son $(16 - 2x)$ pulgadas por $(10 - 2x)$ pulgadas por x pulgadas, por lo que el volumen (en pulgadas cúbicas) es

$$\begin{aligned} V = f(x) &= (16 - 2x)(10 - 2x)x \qquad \text{Longitud} \cdot \text{ancho} \cdot \text{altura} \\ &= (160 - 52x + 4x^2)x \\ &= 4x^3 - 52x^2 + 160x \end{aligned}$$

* Se acostumbra referirse a una función f como $f(x)$ o mediante la ecuación $y = f(x)$ que la define.

Como la longitud de cada lado de la caja debe ser mayor que o igual a cero, entonces

$$16 - 2x \geq 0 \qquad 10 - 2x \geq 0 \qquad x \geq 0$$

simultáneamente, es decir

$$x \leq 8 \qquad x \leq 5 \qquad x \geq 0$$

Las tres desigualdades se satisfacen al mismo tiempo, siempre que $0 \leq x \leq 5$. Por tanto, del dominio de la función f es el intervalo $[0, 5]$. ■

En general, si una función está definida por una regla que relaciona x con $f(x)$ sin mencionar específicamente su dominio, se entiende que éste se compondrá de todos los valores de x con los cuales $f(x)$ es un número real. En esta conexión deberá tener en cuenta que 1) la división entre cero no está permitida y 2) la raíz par de un número negativo no es un número real.

EJEMPLO 4 Determine el dominio de cada función.

a. $f(x) = \sqrt{x - 1}$ **b.** $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 4}$ **c.** $f(x) = x^2 + 3$

Solución

a. Como la raíz cuadrada de un número negativo no es un número real, es necesario que $x - 1 \geq 0$. El conjunto de números reales $x \geq 1$ satisface la desigualdad. Por tanto, el dominio de f es el intervalo $[1, \infty)$.

b. La única restricción en x es que $x^2 - 4$ sea diferente de cero, puesto que la división entre cero no está permitida. Pero $(x^2 - 4) = (x + 2)(x - 2) = 0$ si $x = -2$ o $x = 2$. Por tanto, el dominio de f en este caso se compone de los intervalos $(-\infty, -2)$, $(-2, 2)$ y $(2, \infty)$.

c. En este caso, cualquier número real satisface la ecuación, por lo que el dominio de f es el conjunto de todos los números reales.

Gráficas de funciones

Si f es una función con dominio A, luego correspondiente a cada número real x en A debe haber precisamente un número real $f(x)$. También podemos expresar este hecho utilizando **pares ordenados** de números reales. Escriba cada número x en A como el primer miembro de un par ordenado y cada número $f(x)$ correspondiente a x como el segundo miembro del par ordenado. Esto da precisamente un par ordenado $(x, f(x))$ por cada x en A. Esta observación conduce a una **definición alterna de una función** f:

Función (definición alterna)

Una función f con dominio A es el conjunto de todos los pares ordenados $(x, f(x))$ donde x pertenece a A.

Observe que la condición de que haya uno y sólo un número $f(x)$ correspondiente a cada número en A se transforma en el requerimiento de que *dos pares ordenados cualesquiera no tengan el mismo primer miembro.*

Como los pares ordenados de números reales corresponden a puntos en el plano, encontramos una forma de mostrar gráficamente una función.

Gráfica de una función de una variable

La **gráfica de una función** f es el conjunto de todos los puntos (x, y) en el plano xy de modo que x esté en el dominio de f y $y = f(x)$.

La figura 26 muestra la gráfica de una función f. Observe que la coordenada y del punto (x, y) en la gráfica de f da la altura de dicho punto (la distancia sobre el eje x, si $f(x)$ es positiva. Si $f(x)$ es negativa, entonces $-f(x)$ da la profundidad del punto (x, y) (la distancia por debajo del eje x). También, observe que el dominio de f es un conjunto de números reales situados sobre el eje x, mientras que el rango de f queda sobre el eje y.

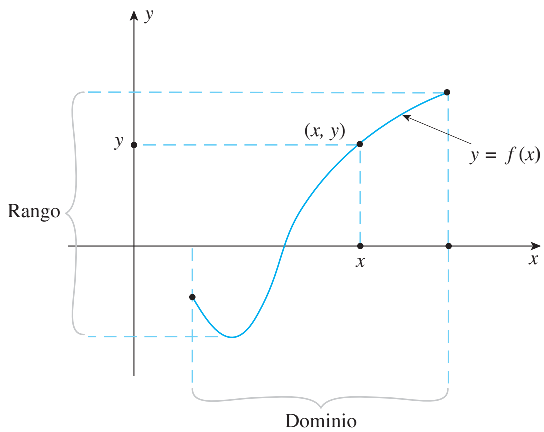


FIGURA 26
Gráfica de f.

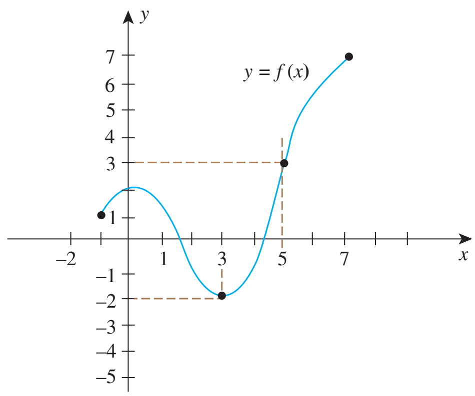


FIGURA 27
Gráfica de f.

EJEMPLO 5 La gráfica de una función f se muestra en la figura 27.

a. ¿Cuál es el valor de $f(3)$? ¿El valor de $f(5)$?
b. ¿Cuál es la altura o profundidad del punto $(3, f(3))$ con respecto al eje x? ¿Del punto $(5, f(5))$ con respecto al eje x?
c. ¿Cuál es el dominio de f? ¿El rango de f?

Solución

a. En la gráfica de f, $y = -2$ cuando $x = 3$ y concluimos que $f(3) = -2$. Asimismo, $f(5) = 3$.
b. Como el punto $(3, -2)$ queda debajo del eje x, la profundidad del punto $(3, f(3))$ es $-f(3) = -(-2) = 2$ unidades por debajo del eje x. El punto $(5, f(5))$ queda sobre el eje x a una altura de $f(5)$, o 3 unidades sobre el eje x.
c. Observe que x puede adoptar todos los valores entre $x = -1$ y $x = 7$, inclusive y por tanto el dominio de f es $[-1, 7]$. A continuación observamos que a medida que x adopta todos los valores en el dominio de f, $f(x)$ adopta todos los valores entre -2 y 7, inclusive. (Esto puede verlo con facilidad si mueve su dedo índice a lo largo del eje x desde $x = -1$ hasta $x = 7$ y observa los valores correspondientes asumidos por la coordenada y de cada punto de la gráfica de f.) Por consiguiente el rango de f es $[-2, 7]$. ■

Se puede obtener mucha información sobre la gráfica de una función si se marcan algunos puntos en su gráfica. Más adelante se desarrolla una técnica más sistemática y compleja para trazar gráficas de funciones.

EJEMPLO 6 Trace la gráfica de la función definida por la ecuación $y = x^2 + 1$. ¿Cuál es el rango de f?

Solución El dominio de la función es el conjunto de todos los números reales. Si asignamos varios valores a la variable x y calculamos los valores correspondientes de y, se obtienen las siguientes soluciones de la ecuación $y = x^2 + 1$:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	10	5	2	1	2	5	10

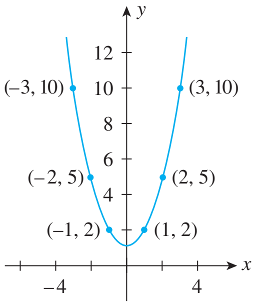


FIGURA 28
La gráfica de $y = x^2 + 1$ es una parábola.

Si marcamos estos puntos y luego los conectamos con una curva, se obtiene la gráfica de $y = f(x)$, la cual es una parábola (figura 28). Para determinar el rango de f, observamos que $x^2 \geq 0$ si x es cualquier número real, y por tanto $x^2 + 1 \geq 1$ con todos los números reales x. Concluimos que el rango de f es $[1, \infty)$. La gráfica de f confirma visualmente este resultado. ■

Exploración con TECNOLOGÍA

Sea $f(x) = x^2$.

1. Trace las gráficas de $F(x) = x^2 + c$ en el mismo sistema de ejes con $c = -2, -1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1, 2$.
2. Trace las gráficas de $G(x) = (x + c)^2$ en el mismo sistema de ejes con $c = -2, -1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1, 2$.
3. Trace las gráficas de $H(x) = cx^2$ en el mismo sistema de ejes con $c = -2, -1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, 2$.
4. Estudie las familia de gráficas en las partes 1-3 y describa la relación entre la gráfica de una función f y las gráficas de las funciones definidas por (a) $y = f(x) + c$, (b) $y = f(x + c)$ y (c) $y = cf(x)$, donde c es una constante.

Una función definida por más de una regla se llama **función definida por partes**.

EJEMPLO 7 Trace la gráfica de la función f definida por

$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ \sqrt{x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Solución La función f está definida por parte en el conjunto de todos los números reales. En el subdominio $(-\infty, 0)$, la regla para f es $f(x) = -x$. La ecuación $y = -x$ es una ecuación lineal en la forma de pendiente-ordenada (con pendiente -1 y ordenada 0). Por consiguiente, la gráfica de f correspondiente al subdominio $(-\infty, 0)$ en la semilínea mostrada en la figura 29. A continuación, en el subdominio $[0, \infty)$ la regla para f es $f(x) = \sqrt{x}$. Los valores de $f(x)$ correspondientes a $x = 0, 1, 2, 3, 4, 9$ y 16 se muestran en la tabla siguiente:

x	0	1	2	3	4	9	16
$f(x)$	0	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	2	3	4

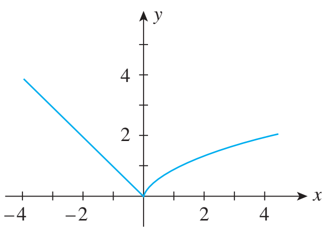


FIGURA 29
La gráfica de $y = f(x)$ se obtiene al trazar la gráfica de $y = -x$ en el intervalo $(-\infty, 0)$ y $y = \sqrt{x}$ en el intervalo $[0, \infty)$.

Con estos valores, trazamos la gráfica de la función f como se muestra en la figura 29. ■

VIDEO

EJEMPLO DE APLICACIÓN 8 Depósitos bancarios Madison Finance Company planea abrir dos sucursales dentro de dos años en dos zonas distintas: un complejo industrial y un centro comercial recién desarrollado en la ciudad. Como resultado de estos planes de expansión, se espera que los depósitos totales de Madison durante los siguientes 5 años se incrementen con base en la regla siguiente

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{2x} + 20 & \text{si } 0 \le x \le 2 \\ \dfrac{1}{2}x^2 + 20 & \text{si } 2 < x \le 5 \end{cases}$$

donde $y = f(x)$ da la suma total de dinero (en millones de dólares) depositados en Madison en el año x ($x = 0$ corresponde al presente). Trace la gráfica de la función.

Solución La función f está definida por partes en el intervalo [0, 5]. En el subdominio [0, 2], la regla para f es $f(x) = \sqrt{2x} + 20$. Los valores de $f(x)$ correspondientes a $x = 0$, 1 y 2 se tabulan como sigue:

x	0	1	2
$f(x)$	20	21.4	22

A continuación, en el subdominio (2, 5], la regla para f es $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 20$. Los valores de $f(x)$ correspondientes a $x = 3$, 4 y 5 se muestran en la tabla siguiente:

x	3	4	5
$f(x)$	24.5	28	32.5

Con los valores de $f(x)$ que aparecen en esta tabla, trazamos la gráfica de la función f como se muestra en la figura 30. ■

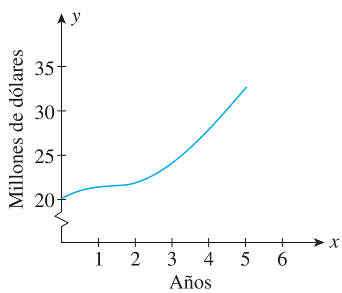


FIGURA **30**
Obtenemos la gráfica de la función $y = f(x)$ trazando la gráfica de $y = \sqrt{2x} + 20$ en el intervalo [0, 2] y $y = \frac{1}{2}x^2 + 20$ en el intervalo (2, 5].

Prueba de la línea vertical

Si bien es cierto que toda función f de una variable x tiene una gráfica en el plano xy, no es cierto que toda curva en el plano xy es la gráfica de una función. Por ejemplo, considere la curva mostrada en la figura 31. Es la gráfica de la ecuación $y^2 = x$. En general, la **gráfica de una ecuación** es el conjunto de todos los pares ordenados (x, y) que satisfacen la ecuación dada. Observe que los puntos $(9, -3)$ y $(9, 3)$ están situados en la curva. Esto implica que el número 9 está asociado con *dos* números: $y = -3$ y $y = 3$. Pero esto claramente viola la propiedad de unicidad de una función. Por tanto, concluimos que la curva considerada no puede ser la gráfica de una función.

Este ejemplo sugiere la siguiente **prueba de la línea vertical** para determinar si una curva es la gráfica de una función.

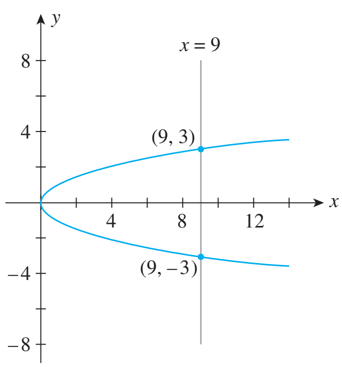


FIGURA **31**
Como una línea vertical corta la curva en más de un punto, deducimos que no es la gráfica de una función.

Prueba de la línea vertical

Una curva en el plano xy es la gráfica de una función $y = f(x)$ si y sólo si cada línea vertical la corta en máximo un punto.

EJEMPLO 9 Determine cuales de las curvas mostradas en la figura 32 son gráficas de funciones de x.

Solución Las curvas ilustradas en las figuras 32a, c y d son gráficas de funciones, porque cada curva satisface el requerimiento de que cada línea vertical la corte en máximo un punto. Observe que la línea vertical mostrada en la figura 32c *no* corta la gráfica, porque el punto sobre el eje x a través del cual pasa esta línea no está en el dominio de la función. La curva ilustrada en la figura 32b *no* es la gráfica de una función porque la línea vertical mostrada allí corta la gráfica en tres puntos.

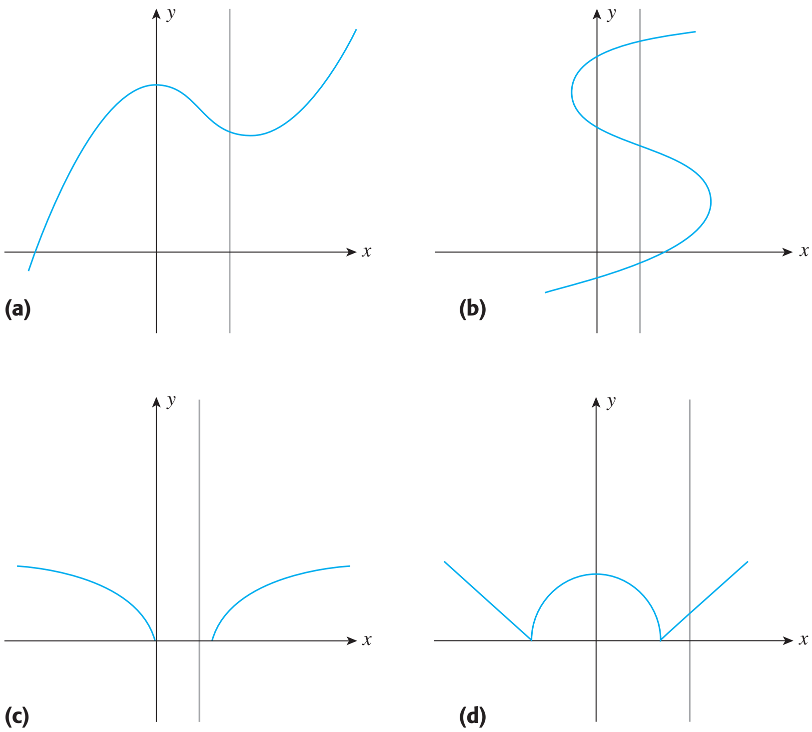


FIGURA **32**
Para determinar cuáles de estas curvas son gráficas de funciones, puede utilizarse la prueba de la línea vertical.

2.3 Ejercicios de autoevaluación

1. Sea f la función definida por

$$f(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{x}$$

   a. Determine el dominio de f. b. Calcule $f(3)$.
   c. Calcule $f(a + b)$.

2. Las estadísticas muestran que cada vez más automovilistas cargan ellos mismos la gasolina de su automóvil. La siguiente función da las ventas de autoservicio como porcentaje de todas las ventas de gasolina en Estados Unidos:

$$f(t) = \begin{cases} 6t + 17 & \text{si } 0 \leq t \leq 6 \\ 15.98(t - 6)^{1/4} + 53 & \text{si } 6 < t \leq 20 \end{cases}$$

   En este caso t está en años, con $t = 0$ correspondiente al inicio de 1974.
   a. Trace la gráfica de la función f.
   b. ¿Qué porcentaje de todas las ventas de gasolina a principios de 1978 fue de autoservicio? ¿A principios de 1994?

   Fuente: Amoco Corporation

3. Sea $f(x) = \sqrt{2x + 1} + 2$. Determine si el punto (4, 6) pertenece a la gráfica de f.

Las soluciones a los ejercicios de autoevaluación 2.3 se encuentran en la página 99.

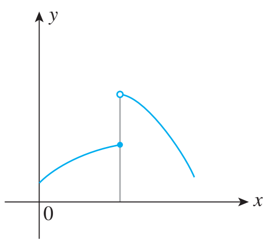
2.3 Preguntas de concepto

1. **a.** ¿Qué es una función?
   b. ¿Qué es el dominio de una función? ¿El rango de una función?
   c. ¿Qué es una variable independiente? ¿Una variable dependiente?

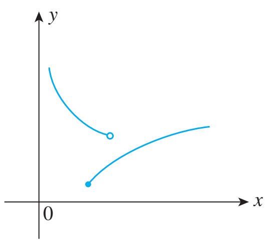
2. **a.** ¿Qué es la gráfica de una función? Utilice un dibujo para ilustrar la gráfica, el dominio y el rango de una función.
   b. Si le dan una función en el plano xy, ¿cómo puede decir si la gráfica es la de una función f definida por $y = f(x)$?

3. ¿Las siguientes son gráficas de funciones? Explique.

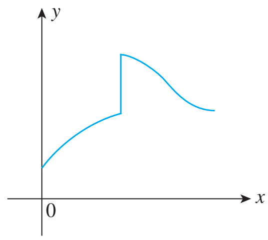
a.



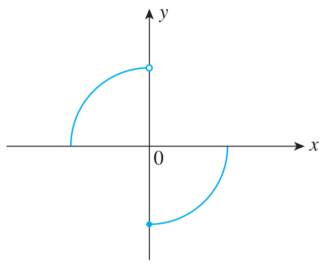
b.



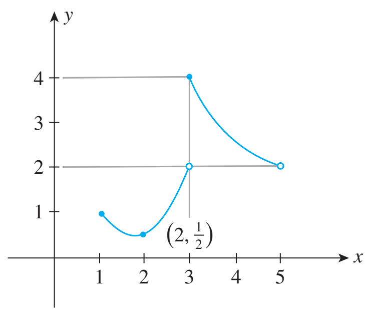
c.



d.



4. ¿Cuáles son el dominio y el rango de la función f con la gráfica siguiente?



2.3 Ejercicios

1. Sea f la función definida por $f(x) = 5x + 6$. Determine $f(3)$, $f(-3)$, $f(a)$, $f(-a)$ y $f(a + 3)$.

2. Sea f la función definida por $f(x) = 4x - 3$. Determine $f(4)$, $f\left(\frac{1}{4}\right)$, $f(0)$, $f(a)$ y $f(a + 1)$.

3. Sea g la función definida por $g(x) = 3x^2 - 6x - 3$. Determine $g(0)$, $g(-1)$, $g(a)$, $g(-a)$ y $g(x + 1)$.

4. Sea h la función definida por $h(x) = x^3 - x^2 + x + 1$. Determine $h(-5)$, $h(0)$, $h(a)$ y $h(-a)$.

5. Sea f la función definida por $f(x) = 2x + 5$. Determine, $f(a + h)$, $f(-a)$, $f(a^2)$ y $f(a-2h)$ y $f(2a - h)$.

6. Sea g la función definida por $g(x) = -x^2 + 2x$. Determine $g(a + h)$, $g(-a)$, $g(\sqrt{a})$, $a + g(a)$ y $\dfrac{1}{g(a)}$.

7. Sea s la función definida por $s(t) = \dfrac{2t}{t^2 - 1}$.
   Determine $s(4)$, $s(0)$, $s(a)$, $s(2 + a)$ y $s(t + 1)$.

8. Sea g la función definida por $g(u) = (3u - 2)^{3/2}$. Determine $g(1)$, $g(6)$, $g\left(\frac{11}{3}\right)$ y $g(u + 1)$.

9. Sea f la función definida por $f(t) = \dfrac{2t^2}{\sqrt{t - 1}}$. Determine $f(2)$, $f(a)$, $f(x + 1)$ y $f(x - 1)$.

10. Sea f la función definida por $f(x) = 2 + 2\sqrt{5 - x}$. Determine $f(-4)$, $f(1)$, $f\left(\frac{11}{4}\right)$ y $f(x + 5)$.

11. Sea f la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{si } x \le 0 \\ \sqrt{x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Determine $f(-2)$, $f(0)$ y $f(1)$.

12. Sea g la función definida por

$$g(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x + 1 & \text{si } x < 2 \\ \sqrt{x - 2} & \text{si } x \ge 2 \end{cases}$$

Determine $g(-2)$, $g(0)$, $g(2)$ y $g(4)$.

13. Sea f la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x^2 + 3 & \text{si } x < 1 \\ 2x^2 + 1 & \text{si } x \ge 1 \end{cases}$$

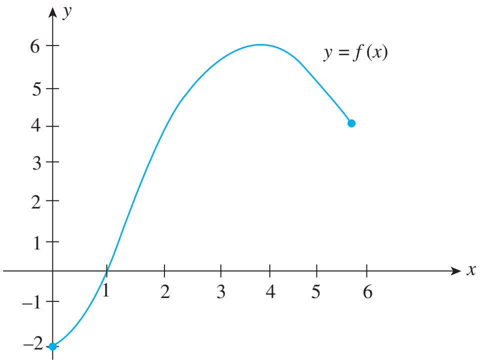
Determine $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$ y $f(2)$.

14. Sea f la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} 2 + \sqrt{1 - x} & \text{si } x \leq 1 \\ \dfrac{1}{1 - x} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

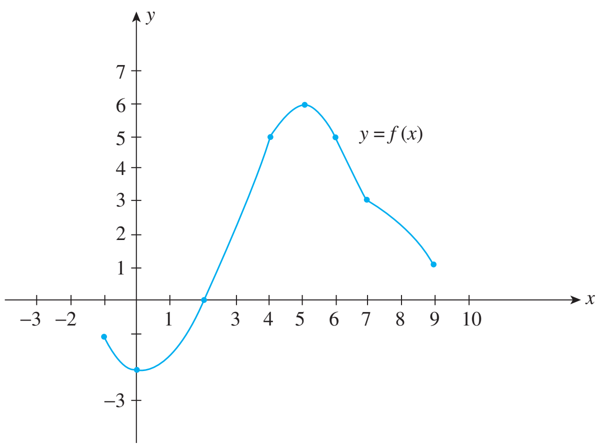
Determine $f(0)$, $f(1)$ y $f(2)$.

15. Recurra a la gráfica de la función f en la siguiente figura.



a. Determine el valor de $f(0)$.
b. Determine el valor de x con el cual (i) $f(x) = 3$ y (ii) $f(x) = 0$.
c. Determine el dominio de f.
d. Determine el rango de f.

16. Recurra a la gráfica de la función en la siguiente figura.



a. Determine el valor de $f(7)$.
b. Determine los valores de x correspondientes a los puntos en la gráfica de f, localizados a una altura de 5 unidades del eje x.
c. Determine el punto sobre el eje x donde la gráfica de f lo cruza. ¿Cuál es el valor de $f(x)$ en este punto?
d. Determine el dominio y rango de f.

En los ejercicios 17-20 determine si el punto está situado en la gráfica de la función.

17. $(2, \sqrt{3});\ g(x) = \sqrt{x^2 - 1}$

18. $(3, 3);\ f(x) = \dfrac{x + 1}{\sqrt{x^2 + 7}} + 2$

19. $(-2, -3);\ f(t) = \dfrac{|t - 1|}{t + 1}$

20. $\left(-3, -\dfrac{1}{13}\right);\ h(t) = \dfrac{|t + 1|}{t^3 + 1}$

En los ejercicios 21 y 22 determine el valor de *c*, de modo que el punto *P*(*a, b*) quede en la gráfica de la función *f*.

21. $f(x) = 2x^2 - 4x + c;\ P(1, 5)$

22. $f(x) = x\sqrt{9 - x^2} + c;\ P(2, 4)$

En los ejercicios 23-36 determine el dominio de la función.

23. $f(x) = x^2 + 3$

24. $f(x) = 7 - x^2$

25. $f(x) = \dfrac{3x + 1}{x^2}$

26. $g(x) = \dfrac{2x + 1}{x - 1}$

27. $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$

28. $f(x) = \sqrt{x - 5}$

29. $f(x) = \sqrt{5 - x}$

30. $g(x) = \sqrt{2x^2 + 3}$

31. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 1}$

32. $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + x - 2}$

33. $f(x) = (x + 3)^{3/2}$

34. $g(x) = 2(x - 1)^{5/2}$

35. $f(x) = \dfrac{\sqrt{1 - x}}{x^2 - 4}$

36. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x - 1}}{(x + 2)(x - 3)}$

37. Sea f una función definida por la regla $f(x) = x^2 - x - 6$.
a. Determine el dominio de f.
b. Calcule $f(x)$ con $x = -3, -2, -1, 0, \frac{1}{2}, 1, 2, 3$.
c. Utilice los resultados obtenidos en las partes (a) y (b) para trazar la gráfica de f.

38. Sea f una función definida por la regla $f(x) = 2x^2 + x - 3$.
a. Determine el dominio de f.
b. Calcule $f(x)$ con $x = -3, -2, -1, -\frac{1}{2}, 0, 1, 2, 3$.
c. Utilice los resultados obtenidos en las partes (a) y (b) para trazar la gráfica de f.

En los ejercicios 39-50 trace la gráfica de la función con la regla dada. Determine el dominio y el rango de la función.

39. $f(x) = 2x^2 + 1$

40. $f(x) = 9 - x^2$

41. $f(x) = 2 + \sqrt{x}$

42. $g(x) = 4 - \sqrt{x}$

43. $f(x) = \sqrt{1 - x}$

44. $f(x) = \sqrt{x - 1}$

45. $f(x) = |x| - 1$

46. $f(x) = |x| + 1$

47. $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x < 0 \\ 2x + 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

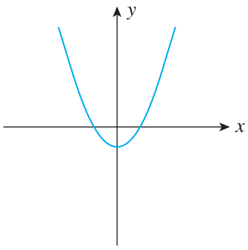
48. $f(x) = \begin{cases} 4 - x & \text{si } x < 2 \\ 2x - 2 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

49. $f(x) = \begin{cases} -x + 1 & \text{si } x \leq 1 \\ x^2 - 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

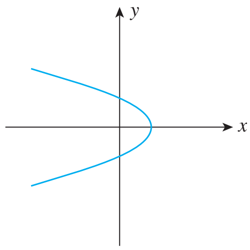
50. $f(x) = \begin{cases} -x - 1 & \text{si } x < -1 \\ 0 & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ x + 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

En los ejercicios 51-58 utilice la prueba de la línea vertical para determinar lo que representa la gráfica *y* como una función de *x*.

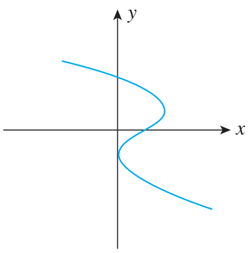
51.



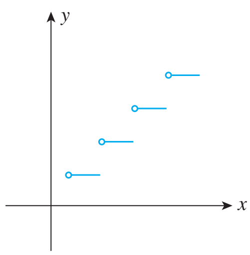
52.



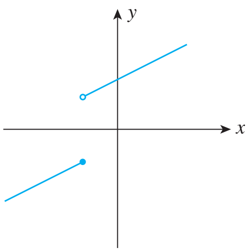
53.



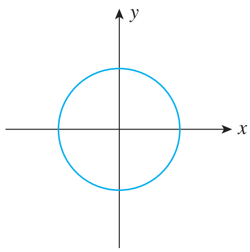
54.



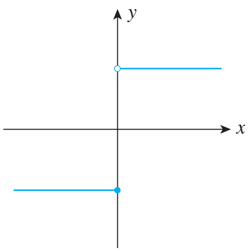
55.



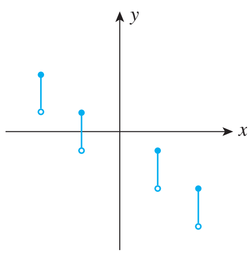
56.



57.



58.



59. La circunferencia de un círculo está dada por $C(r) = 2\pi r$, donde r es el radio del círculo. ¿Cuál es la circunferencia de un círculo con radio de 5 pulg?

60. El volumen de una esfera de radio r es $V(r) = 4/3\pi r^3$. Calcule $V(2.1)$ y $V(2)$. ¿Qué mide la cantidad $V(2.1) - V(2)$?

61. **Crecimiento de un tumor canceroso** El volumen de un tumor canceroso esférico está dado por la función

$$V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$$

donde r es el radio del tumor en centímetros. ¿Por qué factor se incrementó el volumen del tumo si su radio se duplicó?

62. **Expectativa de vida después de los 65 años** La expectativa de vida promedio después de los 65 años de edad está a la alza, lo que implica presión en los recursos de la Administración del Seguro Social. De acuerdo con el Consejo del Seguro Social, la expectativa de vida después de los 65 años es

$$L(t) = 0.056t + 18.1 \qquad (0 \leq t \leq 7)$$

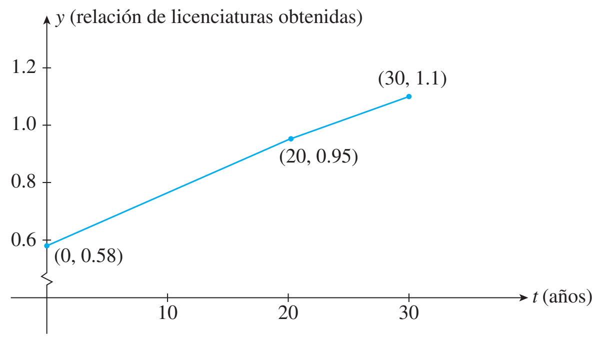
donde t está en años, con $t = 0$ correspondiente a 2003.

a. ¿Qué tan rápido cambia la expectativa de vida promedio después de los 65 años en cualquier momento durante el periodo considerado?

b. ¿Cuál será la expectativa de vida promedio después de los 65 años en 2010?

Fuente: Social Security Trustees

63. **Cierre de la brecha de género en la educación** La gráfica siguiente muestra la relación del número de licenciaturas obtenidas por mujeres con respecto a los hombres de 1960 a 1990.



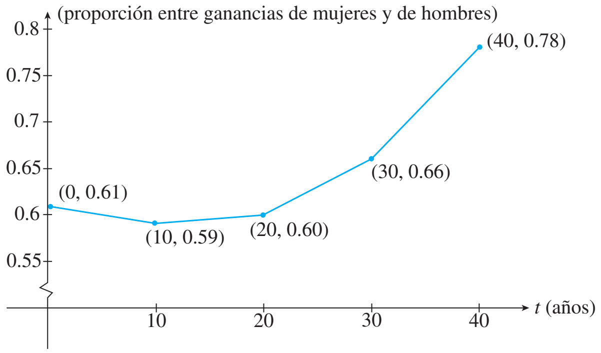
a. Escriba la regla para la función f que dé la relación del número de licenciaturas obtenidas por mujeres al de los hombres en el año t, con t correspondiente a 1960.
Sugerencia: La función f está definida por partes y es lineal dentro de cada de los dos subintervalos.

b. ¿Qué tan rápido cambió la relación en el periodo de 1960 a 1980? ¿De 1980 a 1990?

c. ¿En qué año (aproximadamente) fue igual el número de licenciaturas obtenidas por mujeres por primera vez al obtenido por hombres?

Fuente: Department of Education

64. Brecha de género La siguiente gráfica muestra la proporción entre ganancias de mujeres y de hombres entre 1960 y 2000.



a. Escriba la regla de la función f dando la proporción entre ganancias de mujeres y de hombres en el año $t = 0$ que corresponde a 1960.

Sugerencia: Se define la función f por partes y es lineal para cada uno de los cuatro subintervalos.

b. ¿En cuál(es) década(s) se amplió la brecha de género? ¿En cuál(es) se estrechó?

c. Remítase al inciso b. ¿Qué tan rápido se amplió o se estrechó la brecha de género (proporción/año) en cada una de esas décadas?

Fuente: U. S. Bureau of Labor Statistics

65. Eficiencia de los trabajadores En un estudio elaborado por Elektra Electronics se encontró que el número promedio de radiocomunicadores "Space Commander" ensamblados por un trabajador t horas después de haber empezado a trabajar a las 8 a.m. se encuentra con

$$N(t) = -t^3 + 6t^2 + 15t \qquad (0 \leq t \leq 4)$$

¿Cuántos radiocomunicadores se espera que pueda ensamblar un trabajador promedio entre las 8 y 9 a.m.? ¿Y entre 9 y 10 a.m.?

66. Política Los estudiosos de la política descubrieron la siguiente regla empírica, conocida como "regla del cubo", la cual proporciona la relación entre la proporción de escaños en la Cámara de Representantes que ganan los candidatos demócratas $s(x)$ y la proporción de votos populares x que recibe el candidato presidencial demócrata:

$$s(x) = \frac{x^3}{x^3 + (1 - x)^3} \qquad 0 \leq x \leq 1$$

Calcule $s(0.6)$ e interprete su resultado.

67. Gasto en tecnología de información (TI) para el cuidado de la salud en Estados Unidos A medida que se incrementa el costo del cuidado de la salud, los usuarios de este servicio están optando por la tecnología y los servicios de outsourcing para mantener a raya los gastos. Se proyecta que la cantidad de TI para el cuidado de la salud que gasta cada usuario será

$$S(t) = -0.03t^3 + 0.2t^2 + 0.23t + 5.6 \qquad (0 \leq t \leq 4)$$

donde $S(t)$ se mide en miles de millones de dólares y t se mide en años, con $t = 0$ que corresponde a 2004. ¿Cuál fue la cantidad que gastaron los usuarios en TI para el cuidado de la salud en 2004? Suponiendo que la proyección sea verdadera, ¿qué cantidad gastaron los usuarios en 2008?

Fuente: U. S. Department of Commerce

68. Tarifas hoteleras La tarifa diaria promedio de los hoteles en Estados Unidos de 2001 a 2006 se calcula con la función

$$f(t) = \begin{cases} 82.95 & \text{si } 1 \leq t \leq 3 \\ 0.95t^2 - 3.95t + 86.25 & \text{si } 3 < t \leq 6 \end{cases}$$

donde $f(t)$ se mide en dólares, con $t = 1$ que corresponde a 2001.

a. ¿Cuál fue la tarifa diaria promedio de los hoteles en Estados Unidos de 2001 a 2003?

b. ¿Cuál fue la tarifa diaria promedio de los hoteles en Estados Unidos en 2004? ¿En 2005? ¿En 2006?

c. Trace la gráfica de f.

Fuente: Smith Travel Research

69. Inversiones en fondos de cobertura Las inversiones en fondos de cobertura se han incrementado junto con su popularidad. Los activos en fondos de cobertura (en billones de dólares) de 2002 a 2007 se modelan con la función

$$f(t) = \begin{cases} 0.6 & \text{si } 0 \leq t < 1 \\ 0.6t^{0.43} & \text{si } 1 \leq t \leq 5 \end{cases}$$

donde t se mide en años, con $t = 0$ que corresponde al principio de 2002.

a. ¿A cuánto ascendieron los activos en fondos de cobertura al principio de 2003?

b. ¿A cuánto ascendieron los activos en fondos de cobertura al principio de 2005? ¿Al principio de 2007?

Fuente: Hennesse Group

70. Incremento de la edad Promedio El aumento de la longevidad y el envejecimiento de la generación de los baby boomers (los nacidos entre 1964 y 1965) son las principales razones del incremento de la edad promedio. La edad promedio (en años) de la población estadunidense de 1900 a 2000 se calcula con la función

$$f(t) = \begin{cases} 1.3t + 22.9 & \text{si } 0 \leq t \leq 3 \\ -0.7t^2 + 7.2t + 11.5 & \text{si } 3 < t \leq 7 \\ 2.6t + 9.4 & \text{si } 7 < t \leq 10 \end{cases}$$

donde t se mide en décadas, con $t = 0$ que corresponde al principio de 1900.

a. ¿Cuál era la edad promedio de la población estadunidense al principio de 1900? ¿Al principio de 1950? ¿Al principio de 1990?

b. Trace la gráfica de f.

Fuente: U. S. Census Bureau

71. Limpieza de la bahía La cantidad de sólidos que se descargan en Dear Island (cerca de la bahía de Boston) desde la planta de tratamiento de aguas residuales de la MWRA (Massachusets Water Resources Authority) está dada por la función

$$f(t) = \begin{cases} 130 & \text{if } 0 \le t \le 1 \\ -30t + 160 & \text{if } 1 < t \le 2 \\ 100 & \text{if } 2 < t \le 4 \\ -5t^2 + 25t + 80 & \text{if } 4 < t \le 6 \\ 1.25t^2 - 26.25t + 162.5 & \text{if } 6 < t \le 10 \end{cases}$$

donde $f(t)$ se mide en toneladas/día y t se mide en años, con $t = 0$ correspondiente a 1989.

a. ¿Qué cantidad de sólidos se descargaron por día en 1989? ¿En 1992? ¿En 1996?

b. Trace la gráfica de f.

Fuente: Metropolitan District Commission

En los ejercicios 72 a 76, determine si la afirmación es verdadera o falsa. Si es verdadera, explique por qué lo es. Si es falsa, dé un ejemplo para demostrarlo.

72. Si $a = b$, entonces $f(a) = f(b)$.

73. Si $f(a) = f(b)$, entonces $a = b$.

74. Si f es una función, entonces $f(a + b) = f(a) + f(b)$.

75. Una línea vertical debe intersecar la gráfica de $y = f(x)$ exactamente en un punto.

76. El dominio de $f(x) = \sqrt{x + 2} + \sqrt{2 - x}$ es $[-2, 2]$.

2.3 Soluciones de los ejercicios de autoevaluación

1. a. La expresión bajo el radical debe ser no negativa, así $x + 1 \ge 0$ o $x \ge -1$. También, $x \ne 0$ porque no se permite dividir entre cero. Por lo tanto, el dominio de f es $[-1, 0) \cup (0, \infty)$.

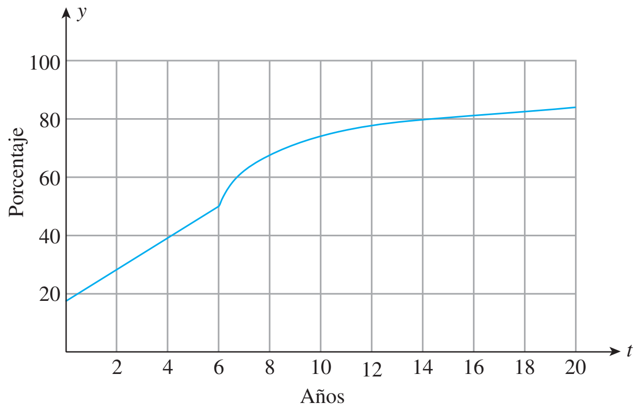
b. $f(3) = \dfrac{\sqrt{3+1}}{3} = \dfrac{\sqrt{4}}{3} = \dfrac{2}{3}$

c. $f(a + h) = \dfrac{\sqrt{(a+h)+1}}{a+h} = \dfrac{a + h + 1}{a + h}$

2. a. Para t en el subdominio $[0, 6]$, la regla para f está dada por $f(t) = 6t + 17$. La ecuación $y = 6t + 17$ es una ecuación lineal, así que parte de la gráfica de f es el segmento de línea que une los puntos $(0, 17)$ y $(6, 53)$. Luego, en el subdominio $[6, 20]$, la regla para f está dada por $f(t) = 15.98(t - 6)^{1/4} + 53$. Usando una calculadora, se construye la siguiente tabla de valores de $f(t)$ para valores específicos de t.

t	6	8	10	12	14	16	18	20
$f(t)$	53	72	75.6	78	79.9	81.4	82.7	83.9

Se ha incluido $t = 6$ en la tabla, aunque no se encuentra en el subdominio de la función analizada, a fin de ayudar a obtener un mejor trazo de la parte de la gráfica de f en el subdominio $[6, 20]$. La gráfica de f es:



b. El porcentaje de todas las ventas de gasolina por autoservicio al principio de 1978 se encuentra evaluando f en $t = 4$. Puesto que este punto se encuentra en el intervalo $[0, 6]$, se utiliza la regla $f(t) = 6t + 17$ y se encuentra

$$f(4) = 6(4) + 17 = 41$$

lo que da 41% como la cifra buscada. El porcentaje de todas las ventas de gasolina por autoservicio al principio de 1994 está dado por

$$f(20) = 15.98(20 - 6)^{1/4} + 53 \approx 83.9$$

o aproximadamente 83.9%.

3. Un punto (x, y) se encuentra en la gráfica de la función f si y sólo si las coordenadas satisfacen la ecuación $y = f(x)$. Ahora,

$$f(4) = \sqrt{2(4) + 1} + 2 = \sqrt{9} + 2 = 5 \ne 9$$

y se concluye que el punto dado *no* se encuentra en la gráfica de f.

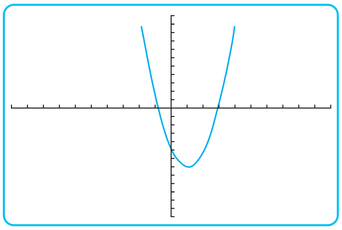
USO DE LA TECNOLOGÍA

Trazo de la gráfica de una función

La mayoría de las gráficas de funciones que aparecen en este libro pueden trazarse con la ayuda de una calculadora graficadora. Además, éste puede utilizarse para analizar la naturaleza de una función. Sin embargo, el grado de precisión de la información obtenida con dicha calculadora depende de la experiencia y pericia del usuario. Conforme avance en el libro, verá que mientras más conocimiento de cálculo obtenga, más efectiva demostrará ser la calculadora graficadora como herramienta de solución de problemas.

EJEMPLO 1 Trace la gráfica de $f(x) = 2x^2 - 4x - 5$ en la ventana de visualización estándar.

Solución La gráfica de f mostrada en la figura T1a es una parábola. Por nuestro trabajo previo (ejemplo 6, sección 2.3), sabemos que la figura es una buena representación de la gráfica.



(a)

VENTANA
$X_{mín} = -10$
$X_{máx} = 10$
$X_{scl} = 1$
$Y_{mín} = -10$
$Y_{máx} = 10$
$Y_{scl} = 1$
$X_{res} = 1$

(b)

Curva1 Curva2 Curva3
\Y1 = 2X^2 – 4X – 5
\Y2 =
\Y3 =
\Y4 =
\Y5 =
\Y6 =
\Y7 =

(c)

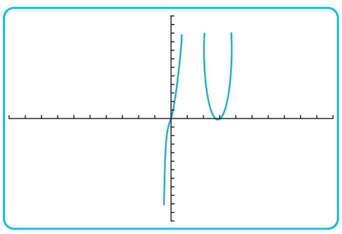
FIGURA **T1**
(a) Gráfica de $f(x) = 2x^2 - 4x - 5$ en $[-10, 10] \times [-10, 10]$; (b) pantalla de la ventaja T1-83/84 de (a); (c) pantalla de la ecuación T1-83/84.

EJEMPLO 2 Sea $f(x) = x^3(x - 3)^4$.

a. Trace la gráfica de f en la ventana de visualización estándar.
b. Trace la gráfica de f en la ventana $[-1, 5] \times [-40, 40]$.

Solución

a. La gráfica de f en la pantalla de visualización estándar se muestra en la figura T2a. Como la gráfica aparece incompleta, tenemos que ajustar la ventana de visualización.



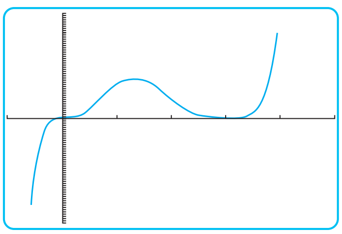
(a)

Curva1 Curva2 Curva3
\Y1 = X^3(X – 3)^4
\Y2 =
\Y3 =
\Y4 =
\Y5 =
\Y6 =
\Y7 =

(b)

FIGURA **T2**
(a) Trazo incompleto de $f(x) = x^3(x - 3)^4$ en $[-10, 10] \times [-10, 10]$; (b) pantalla de ecuación T1-83/84.

b. La gráfica de f en la ventana $[-1, 5] \times [-40, 40]$, mostrada en la figura T3a es una mejora sobre la gráfica previa. (Más adelante podremos demostrar que la figura sí da una vista bastante completa de la gráfica de f.)



(a)

VENTANA
$X_{mín} = -1$
$X_{máx} = 5$
$X_{scl} = 1$
$Y_{mín} = -40$
$Y_{máx} = 40$
$Y_{scl} = 1$
$X_{res} = 1$

(b)

FIGURA **T3**
(a) Un trazo completo de $f(x) = x^3(x - 3)^4$ se muestra utilizando la ventana $[-1, 5] \times [-40, 40]$; (b) pantalla de la ventana T1-83/84.

Evaluación de una función

Una calculadora graficadora puede utilizarse para determinar el valor de una función con esfuerzo mínimo, como lo demuestra en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 3 Sea $f(x) = x^3 - 4x^2 + 4x + 2$.

a. Trace la gráfica de f en la pantalla de visualización estándar.
b. Determine $f(3)$ y verifique su resultado por medio de un cálculo directo.
c. Determine $f(4.215)$.

Solución

a. La gráfica de f se muestra en la figura T4a.

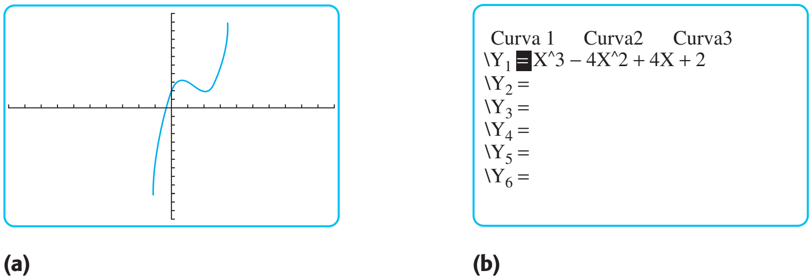


FIGURA **T4**
(a) Gráfica de $f(x) = x^3 - 4x^2 + 4x + 2$ en la ventana de visualización estándar; (b) pantalla de la ecuación T1-83/84.

b. Con la función de evaluación del programa graficador y el valor 3 de x, determinamos $y = 5$. Este resultado se comprueba al calcular

$$f(3) = 3^3 - 4(3^2) + 4(3) + 2 = 27 - 36 + 12 + 2 = 5$$

c. Con la función de evaluación de la calculadora graficadora y el valor 4.215 de x, determinamos $y = 22.679738375$. Por tanto, $f(4.215) = 22.679738375$. ¡La eficacia de dicha calculadora se demuestra con toda claridad en este ejemplo! ■

EJEMPLO DE APLICACIÓN 4 Número de pacientes con Alzheimer El número de pacientes con Alzheimer en Estados Unidos está representado aproximadamente por

$$f(t) = -0.0277t^4 + 0.3346t^3 - 1.1261t^2 + 1.7575t + 3.7745 \qquad (0 \le t \le 6)$$

donde $f(t)$ está en millones y t en décadas, con $t = 0$ correspondiente al inicio de 1990.

a. Utilice una calculadora graficadora para trazar la gráfica de f en la pantalla de visualización $[0, 7] \times [0, 12]$.
b. ¿Cuál es el número anticipado de pacientes con Alzheimer en Estados Unidos a principios de 2010 ($t = 2$)? A principios de 2030 ($t = 4$)?

Fuente: Alzheimer's Association

Solución

a. La gráfica de f en la ventana de visualización $[0, 7] \times [0, 12]$ se muestra en la figura T5a.

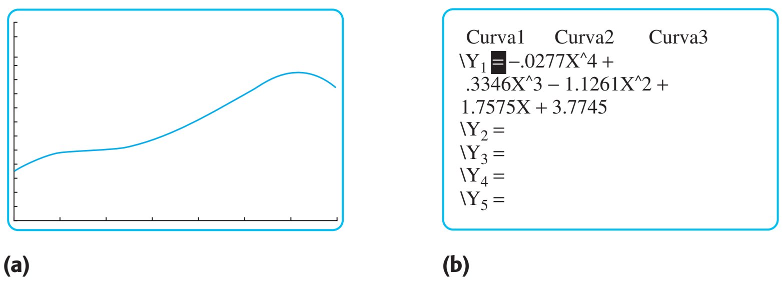


FIGURA **T5**
(a) Gráfica de f en la pantalla de visualización $[0, 7] \times [0, 12]$; (b) pantalla de la ecuación T1-83/84.

(*continúa*)

b. Con la función de evaluación de la calculadora graficadora y el valor 2 de x, el número anticipado de pacientes con Alzheimer a principios de 2010 es $f(2) = 5.0187$, o aproximadamente 5 millones. El número anticipado de pacientes con Alzheimer a principios de 2030 es $f(4) = 7.1101$, o aproximadamente 7.1 millones.

EJERCICIOS CON TECNOLOGÍA

En los ejercicios 1-4 trace la gráfica de la función *f* en a) la ventana de visualización estándar y b) la ventana indicada.

1. $f(x) = x^4 - 2x^2 + 8; [-2, 2] \times [6, 10]$
2. $f(x) = x^3 - 20x^2 + 8x - 10; [-20, 20] \times [-1200, 100]$
3. $f(x) = x\sqrt{4 - x^2}; [-3, 3] \times [-2, 2]$
4. $f(x) = \dfrac{4}{x^2 - 8}; [-5, 5] \times [-5, 5]$

En los ejercicios 5-8 trace la gráfica de la función *f* en una ventana de visualización apropiada. (*Nota:* la respuesta *no* es única.)

5. $f(x) = 2x^4 - 3x^3 + 5x^2 - 20x + 40$
6. $f(x) = -2x^4 + 5x^2 - 4$
7. $f(x) = \dfrac{x^3}{x^3 + 1}$
8. $f(x) = \dfrac{2x^4 - 3x}{x^2 - 1}$

En los ejercicios 9-12 utilice la función de evaluación de su calculadora graficadora para determinar el valor de *f* con el valor indicado de *x*. Exprese su respuesta con una precisión de cuatro decimales.

9. $f(x) = 3x^3 - 2x^2 + x - 4; x = 2.145$
10. $f(x) = 5x^4 - 2x^2 + 8x - 3; x = 1.28$
11. $f(x) = \dfrac{2x^3 - 3x + 1}{3x - 2}; x = 2.41$
12. $f(x) = \sqrt{2x^2 + 1} + \sqrt{3x^2 - 1}; x = 0.62$

13. **Contratación de cabilderos** Numerosas entidades públicas como ciudades, condados, estados, empresas de servicios y tribus indias contratan firmas para cabildear en el Congreso. Una meta de dicha actividad es colocar algunas asignaciones (dinero dirigido a un proyecto específico) en proyectos de ley. La suma (en millones de dólares) gastados por entidades públicas en la actividad de cabildeo de 1998 a 2004, donde $t = 0$ corresponde a 1998, es

$$f(t) = -0.425t^3 + 3.6571t^2 + 4.018t + 43.7 \qquad (0 \leq t \leq 6)$$

   a. Trace la gráfica de f en la ventana de visualización $[0, 6] \times [0, 110]$.
   b. ¿Qué suma gastaron las entidades públicas en la actividad de cabildeo en 2000? ¿En 2004?

   Fuente: Center for Public Integrity

14. **Cámaras de vigilancia** Informes de investigación indican que las cámaras de vigilancia en cruceros importantes reducen drásticamente el número de conductores que se pasan la luz de alto. Las cámaras automáticamente toman fotografías de los vehículos que ignoran la luz roja en los cruceros. A los propietarios de los vehículos se les envían citatorios para indicarles que paguen una multa o que firmen una declaración bajo juramento de que no manejaban en ese momento. La función

$$N(t) = 6.08t^3 - 26.79t^2 + 53.06t + 69.5 \qquad (0 \leq t \leq 4)$$

da el número $N(t)$ de comunidades estadounidenses que utiliza cámaras de vigilancia en cruceros en el año t, con $t =$ correspondiente a 2003.

   a. Trace la gráfica de N en la ventana de visualización $[0, 4] \times [0, 250]$.
   b. ¿Cuántas comunidades utilizaban cámaras de vigilancia en cruceros en 2004? ¿En 2006?

   Fuente: Insurance Institute for Highway Safety

15. **Manejo a la par del flujo de tráfico** Manejando a una velocidad a la par de la velocidad del tráfico prevaleciente, usted disminuye las probabilidades de un accidente. Con base en datos obtenidos en un estudio realizado por una universidad, el número de accidentes/100 millones de millas vehículo, y, está relacionado con la desviación de la velocidad media, x, en mph por

$$y = 1.05x^3 - 21.95x^2 + 155.9x - 327.3 \qquad (6 \leq x \leq 11)$$

   a. Trace la gráfica de y en la ventana de visualización $[6, 11] \times [20, 150]$.
   b. ¿Cuál es el número de accidentes/100 millones de millas vehículo si la desviación de la velocidad media es de 6 mph, 8 mph y 11 mph?

   Fuente: University of Virginia School of Engineering and Applied Science

16. **Conductores seguros** La tasa de mortalidad en Estados Unidos (por cada 100 millones de millas recorridas) por edad del conductor (en años) está dada por la función

$$f(x) = 0.00000304x^4 - 0.0005764x^3 + 0.04105x^2 - 1.30366x + 16.579 \qquad (18 \leq x \leq 82)$$

   a. Trace la gráfica de f en la ventana de visualización $[18, 82] \times [0, 8]$.
   b. ¿Cuál es la tasa de mortalidad para conductores de 18 años de edad? ¿Para conductores de 50 años de edad? ¿Para conductores de 80 años de edad?

   Fuente: National Highway Traffic Safety Administration

2.4 El álgebra de funciones

Suma, diferencia, producto y cociente de funciones

Sean $S(t)$ y $R(t)$, respectivamente, los gastos e ingresos del gobierno federal en cualquier momento t, medidos en miles de millones de dólares. Las gráficas de estas funciones durante el periodo entre 1990 y 2000 se muestran en la figura 33.

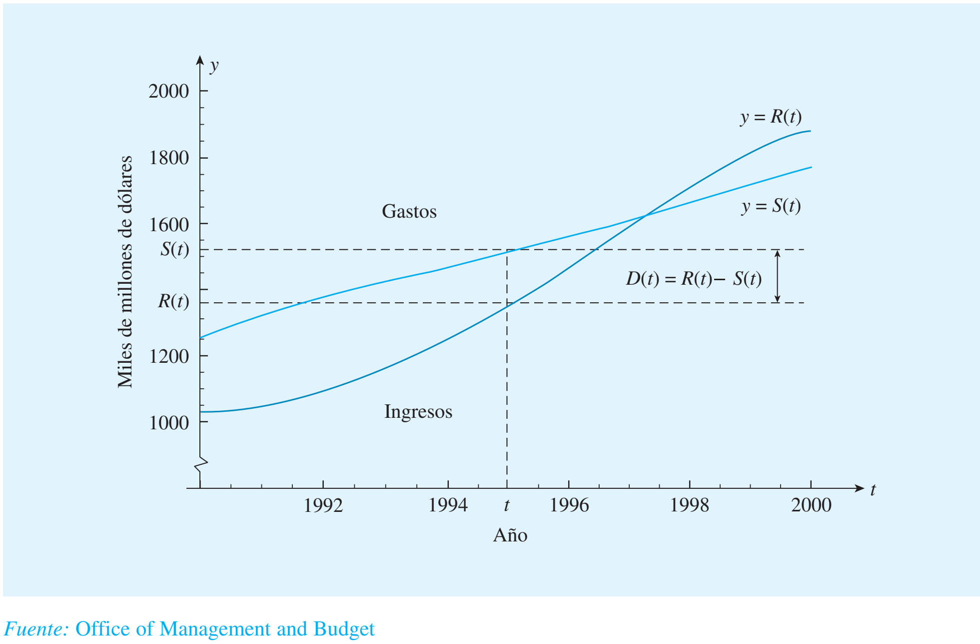


FIGURA 33
$R(t) - S(t)$ da el déficit (superávit) del presupuesto federal en cualquier momento t.

La diferencia $R(t) - S(t)$ da el déficit (superávit) en miles de millones de dólares en cualquier momento t si $R(t) - S(t)$ es negativa (positiva). Esta observación sugiere que podemos definir una función D cuyo valor en cualquier momento esté dado por $R(t) - S(t)$. La función D, la *diferencia* de las dos funciones R y S se escribe $D = R - S$ puede llamarse "función déficit (superávit)" puesto que da el déficit o el superávit del presupuesto en cualquier momento t. Tiene el mismo dominio que las funciones S y R. La gráfica de la función D se muestra en la figura 34.

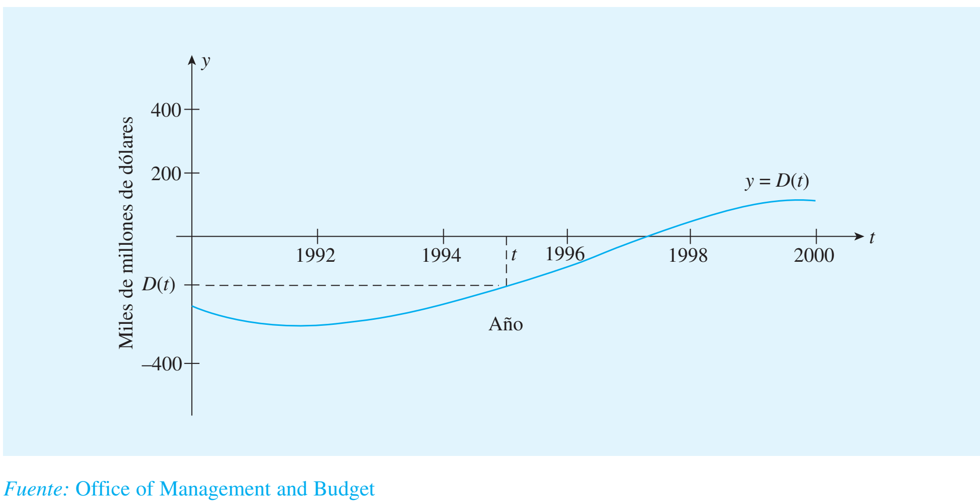


FIGURA 34
Gráfica de $D(t)$.

La mayoría de las funciones se forma a partir de otras funciones, por lo general más simples. Por ejemplo, podemos ver la función $f(x) = 2x + 4$ como la suma de las dos funciones $g(x) = 2x$ y $h(x) = 4$. La función $g(x) = 2x$ puede a su vez ser vista como el producto de las funciones $p(x) = 2$ y $q(x) = x$.

En general, dadas las funciones f y g, definimos la suma $f + g$, la diferencia $f - g$, el producto fg y el cociente f/g de f y g como sigue.

Suma, diferencia, producto y cociente de funciones

Sean f y g funciones con dominios A y B, respectivamente. Entonces la suma $f + g$, la **diferencia** $f - g$ y el **producto** fg de f y g son funciones con dominio $A \cap B$* y regla dada por

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \qquad \text{Suma}$$

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x) \qquad \text{Diferencia}$$

$$(fg)(x) = f(x)g(x) \qquad \text{Producto}$$

El **cociente** f/g de f y g tiene dominio $A \cap B$ excluidos todos los miembros x de modo que $g(x) = 0$ y regla dada por

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \qquad \text{Cociente}$$

*$A \cap B$ se lee "A intersección B" y denota el conjunto de todos los puntos comunes a A y B.

EJEMPLO 1 Sean $f(x) = \sqrt{x + 1}$ y $g(x) = 2x + 1$. Determine la suma x, la diferencia d, el producto p y el cociente q de las funciones f y g.

Solución Como el dominio de f es $A = [-1, \infty)$ y el dominio de g es $B = (-\infty, \infty)$, el dominio de s, d y p es $A \cap B = [-1, \infty)$. Las reglas son las siguientes.

$$s(x) = (f + g)(x) = f(x) + g(x) = \sqrt{x + 1} + 2x + 1$$

$$d(x) = (f - g)(x) = f(x) - g(x) = \sqrt{x + 1} - (2x + 1) = \sqrt{x + 1} - 2x - 1$$

$$p(x) = (fg)(x) = f(x)g(x) = \sqrt{x + 1}(2x + 1) = (2x + 1)\sqrt{x + 1}$$

La regla de la función cociente es

$$q(x) = \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\sqrt{x + 1}}{2x + 1}$$

Su dominio es $[-1, \infty)$ junto con la restricción $x \neq -\frac{1}{2}$. Esto se denota como $[-1, -\frac{1}{2}) \cup (-\frac{1}{2}, \infty)$. ■

La formulación matemática es de un problema que surge de una situación práctica a menudo conduce a una expresión que implica la combinación de funciones. Considere, por ejemplo, los costos de operación de un negocio. Los costos que permanecen más o menos constantes independientemente del nivel de actividad de la empresa se llaman **costos fijos**. Ejemplos de costos fijos son las rentas y los sueldos de los ejecutivos. Por otra parte, los costos que varían con la producción o las ventas se llaman **costos variables**. Ejemplos de costos variables son los salarios y los costos de materia prima. El **costo total** de operación de un negocio es, por tanto, la *suma* de los costos variables y los costos fijos, como se ilustra en el siguiente ejemplo.

VIDEO

EJEMPLO DE APLICACIÓN 2 Funciones de costos Suponga que Puritron, un fabricante de filtros de agua, tiene un costo fijo mensual de \$10,000 y en un costo variable de

$$-0.0001x^2 + 10x \qquad (0 \leq x \leq 40{,}000)$$

dólares, donde x denota el número de filtros fabricados por mes. Encuentre una función C que dé el costo mensual total que tiene Puritron en la fabricación de x filtros.

Solución El costo fijo mensual de Puritron es siempre de \$10,000, independientemente del nivel de producción y la función constante $F(x) = 10{,}000$ lo describe. A continuación, la función $V(x) = -0.0001x^2 + 10x$ describe el costo variable. Como el costo total que tiene Puritron a cualquier nivel de producción es la suma del costo variable y el costo fijo, la función de costo total requerida es

$$\begin{aligned} C(x) &= V(x) + F(x) \\ &= -0.0001x^2 + 10x + 10{,}000 \qquad (0 \le x \le 40{,}000) \end{aligned}$$

■

A continuación, la **utilidad total** obtenida por una empresa que opera un negocio es la *diferencia* entre el ingreso total y el costo total; es decir,

$$P(x) = R(x) - C(x)$$

EJEMPLO DE APLICACIÓN 3 Funciones de utilidad Remítase al ejemplo 2. Suponga que el ingreso total obtenido por Puritron con la venta de x filtros de agua está dado por la función de ingreso total

$$R(x) = -0.0005x^2 + 20x \qquad (0 \le x \le 40{,}000)$$

a. Determine la función de utilidad total, es decir, la función que describe la utilidad total que Puritron realiza al fabricar y vender x filtros de agua por mes.
b. ¿Cuál es la utilidad cuando el nivel de producción es de 10,000 filtros por mes?

Solución

a. La utilidad total obtenida por Puritron al fabricar y vender x filtros de agua por mes es la diferencia entre el ingreso total obtenido y el costo total. Por tanto, la función de utilidad total requerida es

$$\begin{aligned} P(x) &= R(x) - C(x) \\ &= (-0.0005x^2 + 20x) - (-0.0001x^2 + 10x + 10{,}000) \\ &= -0.0004x^2 + 10x - 10{,}000 \end{aligned}$$

b. La utilidad obtenida por Puritron cuando el nivel de producción es 10,000 filtros por mes es

$$P(10{,}000) = -0.0004(10{,}000)^2 + 10(10{,}000) - 10{,}000 = 50{,}000$$

o \$50,000 por mes. ■

Composición de funciones

Otra manera de formar una función a partir de otras funciones es por medio de un proceso conocido como *composición de funciones*. Considere, por ejemplo, la función h, cuya regla está dada por $h(x) = \sqrt{x^2 - 1}$. Sean f y g funciones definidas por las reglas $f(x) = x^2 - 1$ y $g(x) = \sqrt{x}$. Al evaluar la función g en el punto $f(x)$ [recuerde que por cada número real x en el dominio de f, $f(x)$ es simplemente un número real],

$$g(f(x)) = \sqrt{f(x)} = \sqrt{x^2 - 1}$$

¡la cual es justo la regla que define la función h!

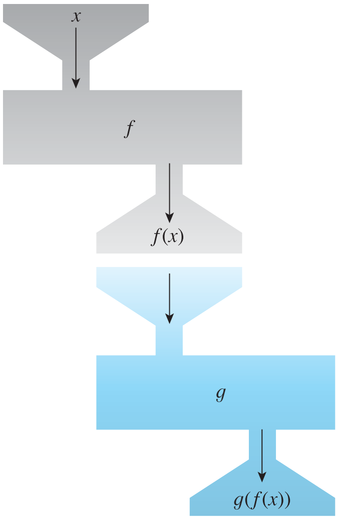


FIGURA 35
Función compuesta $h = g \circ f$ vista como una máquina.

En general, la composición de una función g con una función f se define como sigue.

Composición de dos funciones

Sean f y g funciones. Entonces la composición de g y f es la función $g \circ f$ definida por

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

El dominio de $g \circ f$ es el conjunto de todas las x en el dominio de f de modo que $f(x)$ quede en el dominio de g.

La función $g \circ f$ (leída "g composición f") también se llama **función compuesta**. La interpretación de la función $h = g \circ f$ como una máquina como se ilustra en las figura 35 y su interpretación como mapa se muestra en la figura 36.

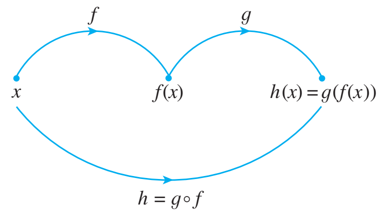


FIGURA 36
Función $h = g \circ f$ vista como mapa.

EJEMPLO 4 Sean $f(x) = x^2 + 1$ y $g(x) = \sqrt{x} + 1$. Determine:

a. La regla para la función compuesta $g \circ f$.
b. La regla para la función compuesta $f \circ g$.

Solución

a. Para determinar la regla para la función compuesta $g \circ f$, evalúe la función g con $f(x)$. Obtenemos

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \sqrt{f(x)} + 1 = \sqrt{x^2 - 1} + 1$$

b. Para determinar la regla para la función compuesta $f \circ g$, evalúe la función con $g(x)$. Por tanto,

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= f(g(x)) = (g(x))^2 - 1 = (\sqrt{x} + 1)^2 - 1\\ &= x + 2\sqrt{x} + 1 - 1 = x + 2\sqrt{x}\end{aligned}$$

■

El ejemplo 4 nos recuerda que en general $g \circ f$ es diferente de $f \circ g$, por lo que se debe tener cuidado cuando se determine la regla para una función compuesta.

Explore y analice

Sea $f(x) = \sqrt{x} + 1$ con $x \geq 0$ y sea $g(x) = (x - 1)^2$ con $x \geq 1$.

1. Demuestre que $(g \circ f)(x)$ y $(f \circ g)(x) = x$. (*Nota*: se dice que la función g es la *inversa* de f y viceversa.)
2. Trace las gráficas de f y g juntas con la línea recta $y = x$. Describa la relación entre las gráficas de f y g.

VIDEO

EJEMPLO DE APLICACIÓN 5 Contaminación automotriz Un estudio de impacto ambiental realizado para la ciudad de Oxnard indica que, conforme a las reglas de protección ambiental, el nivel de monóxido de carbono (CO) presente en el aire debido a la contaminación producida por los escapes de los automóviles será de $0.01x^{2/3}$ partes por millón cuando el número de vehículos de motor es de x miles. Un estudio aparte realizado por una agencia de gobierno estatal estima dentro de t años el número de vehículos de motor en Oxnard será de $0.2t^2 + 4t + 64$ miles.

a. Determine una expresión para la concentración de CO en el aire debido a los escapes de los automóviles dentro de t años.
b. ¿Cuál será el nivel de concentración dentro de 5 años?

Solución

a. El nivel de CO presente en el aire debido a la contaminación producida por los escapes de los automóviles está descrito por la función $g(x) = 0.01x^{2/3}$, donde x es el número (en miles) de vehículos de motor. Pero el número de vehículos de motor x (en miles) dentro de t años puede ser estimado por la regla $f(t) = 0.2t^2 + 4t + 64$. Por consiguiente, la concentración de CO debido los escapes de los automóviles dentro de t años es

$$C(t) = (g \circ f)(t) = g(f(t)) = 0.01(0.2t^2 + 4t + 64)^{2/3}$$

partes por millón.

b. El nivel de concentración dentro de 5 años será

$$\begin{aligned} C(5) &= 0.01[0.2(5)^2 + 4(5) + 64]^{2/3} \\ &= (0.01)89^{2/3} \approx 0.20 \end{aligned}$$

o aproximadamente 0.20 partes por millón. ■

2.4 Ejercicios de autoevaluación

1. Sean f y g funciones definidas por las reglas

$$f(x) = \sqrt{x} + 1 \quad \text{y} \quad g(x) = \frac{x}{1+x}$$

respectivamente. Determine las reglas para

a. La suma s, la diferencia d, el producto p y el cociente q de f y g.
b. La función compuesta de $f \circ g$ y $g \circ f$.

2. El gasto en asistencia médica por persona realizado por el sector privado incluye pagos de individuos, corporaciones y sus compañías de seguros es aproximadamente

$$f(t) = 2.48t^2 + 18.47t + 509 \qquad (0 \leq t \leq 6)$$

donde $f(t)$ está en dólares y t en años, con $t = 0$ correspondiente al inicio de 1994. El gasto del gobierno correspondiente, incluidos gastos de Medicaid, Medicare y otra asistencia médica pública federal, estatal y local es

$$g(t) = -1.12t^2 + 29.09t + 429 \qquad (0 \leq t \leq 6)$$

donde el significado de t es el mismo de antes.

a. Encuentre una función que dé la diferencia entre el gasto en asistencia médica realizado por el gobierno y el sector privado por persona en cualquier momento t.
b. ¿Cuál fue la diferencia entre los gastos del gobierno y el sector privado por persona a principios de 1995? ¿A principios de 2000?

Fuente: Health Care Financind Administration

Las soluciones de los ejercicios de autoevaluación 2.4 se encuentran en la página 110.

2.4 Preguntas de concepto

1. a. Explique qué es la suma, diferencia, producto y cociente de las funciones f y g con dominios A y B, respectivamente.
b. Si $f(2) = 3$ y $g(2) = -2$, ¿qué es $(f + g)(2)$? ¿$(f - g)(2)$? ¿$(fg)(2)$? ¿$(f/g)(2)$?

2. Sean f y g funciones y suponga que (x, y) es un punto en la gráfica de h. ¿Cuál es el valor de y con $h = f + g$? ¿$h = f - g$? ¿$h = fg$? ¿$h = f/g$?

3. a. ¿Cuál es la composición de las funciones f y g? ¿Las funciones g y f?
b. Si $f(2) = 3$ y $g(3) = 8$, ¿cuál es $(g \circ f)(2)$? ¿Puede concluir con la información dada cuál es $(f \circ g)$? Explique.

4. Sea f una función con dominio A y sea g una función cuyo dominio contiene el rango de f. Si a es un número cualquiera en A, ¿puede definirse $(g \circ f)(a)$? Explique con un ejemplo.

2.4 Ejercicios

En los ejercicios 1-8, sean $f(x) = x^3 + 5$, $g(x) = x^2 - 2$ y $h(x) = 2x + 4$. Encuentre la regla para cada función.

1. $f + g$
2. $f - g$
3. fg
4. gf
5. $\dfrac{f}{g}$
6. $\dfrac{f - g}{h}$
7. $\dfrac{fg}{h}$
8. fgh

En los ejercicios 9-18, sean $f(x) = x - 1$, $g(x) = \sqrt{x + 1}$ y $h(x) = 2x^3 - 1$. Encuentre la regla para cada función.

9. $f + g$
10. $g - f$
11. fg
12. gf
13. $\dfrac{g}{h}$
14. $\dfrac{h}{g}$
15. $\dfrac{fg}{h}$
16. $\dfrac{fh}{g}$
17. $\dfrac{f - h}{g}$
18. $\dfrac{gh}{g - f}$

En los ejercicios 19-24 encuentre las funciones $f + g$, $f - g$, fg y f/g.

19. $f(x) = x^2 + 5$; $g(x) = \sqrt{x} - 2$
20. $f(x) = \sqrt{x - 1}$; $g(x) = x^3 + 1$
21. $f(x) = \sqrt{x + 3}$; $g(x) = \dfrac{1}{x - 1}$
22. $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 1}$; $g(x) = \dfrac{1}{x^2 - 1}$
23. $f(x) = \dfrac{x + 1}{x - 1}$; $g(x) = \dfrac{x + 2}{x - 2}$
24. $f(x) = x^2 + 1$; $g(x) = \sqrt{x + 1}$

En los ejercicios 25-30 encuentre las reglas para las funciones compuestas $f \circ g$ y $g \circ f$.

25. $f(x) = x^2 + x + 1$; $g(x) = x^2$
26. $f(x) = 3x^2 + 2x + 1$; $g(x) = x + 3$
27. $f(x) = \sqrt{x} + 1$; $g(x) = x^2 - 1$
28. $f(x) = 2\sqrt{x} + 3$; $g(x) = x^2 + 1$
29. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 1}$; $g(x) = \dfrac{1}{x}$
30. $f(x) = \sqrt{x + 1}$; $g(x) = \dfrac{1}{x - 1}$

En los ejercicios 31-34 evalúe $h(2)$, donde $h = g \circ f$.

31. $f(x) = x^2 + x + 1$; $g(x) = x^2$
32. $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 1}$; $g(x) = 3x^3 + 1$
33. $f(x) = \dfrac{1}{2x + 1}$; $g(x) = \sqrt{x}$
34. $f(x) = \dfrac{1}{x - 1}$; $g(x) = x^2 + 1$

En los ejercicios 35-42 encuentre las funciones f y g de modo que $h = g \circ f$. (*Nota:* la respuesta *no* es única).

35. $h(x) = (2x^3 + x^2 + 1)^5$
36. $h(x) = (3x^2 - 4)^{-3}$
37. $h(x) = \sqrt{x^2 - 1}$
38. $h(x) = (2x - 3)^{3/2}$
39. $h(x) = \dfrac{1}{x^2 - 1}$
40. $h(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 4}}$
41. $h(x) = \dfrac{1}{(3x^2 + 2)^{3/2}}$
42. $h(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2x + 1}} + \sqrt{2x + 1}$

En los ejercicios 43-46 encuentre $f(a + h) - f(a)$ con cada función. Simplifique su respuesta.

43. $f(x) = 3x + 4$
44. $f(x) = -\frac{1}{2}x + 3$
45. $f(x) = 4 - x^2$
46. $f(x) = x^2 - 2x + 1$

En los ejercicios 47-52 determine y simplifique

$$\frac{f(a + h) - f(a)}{h} \qquad (h \neq 0)$$

con cada función.

47. $f(x) = x^2 + 1$
48. $f(x) = 2x^2 - x + 1$
49. $f(x) = x^3 - x$
50. $f(x) = 2x^3 - x^2 + 1$
51. $f(x) = \dfrac{1}{x}$
52. $f(x) = \sqrt{x}$

53. **Ingresos de un restaurante** Nicole posee y opera dos restaurantes. El ingreso del primero en el momento t es $f(t)$ dólares y el del segundo en el instante t es $g(t)$ dólares. ¿Qué representa la función $F(t) = f(t) + g(t)$?

54. **Tasa de natalidad de especies en peligro** La tasa de natalidad de una especie de ballenas en peligro en el año t es $f(t)$ ballenas/año. La tasa de mortalidad de esta especie de ballenas es de $g(t)$ ballenas/año en el año t. ¿Qué representa la función $F(t) = f(t) - g(t)$?

55. **Valor de una inversión** El número de acciones de IBM que Nancy posee es $f(t)$. El precio por acción de IBM en el momento t es $g(t)$ dólares. ¿Qué representa la función $f(t)g(t)$?

56. **Costos de producción** El costo total en el momento t en la producción de un cierto artículo de consumo es $f(t)$ dólares. La cantidad de productos generada en el momento t es $g(t)$ unidades. ¿Qué representa la función $f(t)/g(t)$?

57. **Contaminación de monóxido de carbono** El número de automóviles que circula en la zona de negocios de una ciudad en el momento t es $f(t)$. La contaminación de monóxido de carbono proveniente de estos automóviles es de $g(x)$ partes por millón, donde x es el número de automóviles que operan en el distrito. ¿Qué representa la función $g \circ f$?

58. Efecto de la publicidad en el ingreso El ingreso de Leisure Travel es $f(x)$ dólares, donde x es la suma gastada por la empresa en publicidad. La suma gastada por Leisure en el momento t en publicidad es $g(t)$ dólares. ¿Qué representa la función $f \circ g$?

59. Costos de fabricación TMI, un fabricante de cintas de audio vírgenes, tiene un costo mensual fijo de \$12,100 y un costo variable de \$.60/cinta. Encuentre una función C que dé el costo total incurrido por TMI en la fabricación de x cintas/mes.

60. Mensajes spam El número total de mensajes de correo electrónico por día (en miles de millones) entre 2003 y 2007 es aproximadamente

$$f(t) = 1.54t^2 + 7.1t + 31.4 \qquad (0 \leq t \leq 4)$$

donde t está en años, con $t = 0$ correspondiente a 2003. Durante el mismo periodo, el número total de mensajes spam por día (en miles de millones) es aproximadamente

$$g(t) = 1.21t^2 + 6t + 14.5 \qquad (0 \leq t \leq 4)$$

a. Encuentre la regla para la función $D = f - g$. Calcule $D(4)$ y explique qué mide.
b. Encuentre la regla para la función $P = f/g$. Calcule $P(4)$ y explique su significado.

Fuente: Technology Review

61. Existencias globales de plutonio Las reservas globales de plutonio para aplicaciones militares entre 1990 ($t = 0$) y 2003 ($t = 13$) permanecieron constantes en 267 toneladas. Por otra parte, las reservas globales de plutonio para uso civil fue de

$$2t^2 + 46t + 733$$

toneladas en el año t durante el mismo periodo.
a. Encuentre la función f que dé las reservas globales de plutonio para uso militar de 1990 a 2003 y la función g que dé las existencias de plutonio para uso civil durante el mismo periodo.
b. Encuentre la función h que dé las reservas globales totales de plutonio entre 1990 y 2003.
c. ¿Cuáles fueron las reservas totales de plutonio en 2003?

Fuente: Institute for Science and International Security

62. Muertes de motociclistas Suponga que la tasa de fatalidad (muertes/100 millones de millas recorridas) de motociclistas es $g(x)$, donde x es el porcentaje de motociclistas que usan casco. A continuación suponga que el porcentaje de motociclistas que usan casco en el momento t (t en años) es $f(t)$, con $t = 0$ correspondiente al año 2000.
a. Si $f(0) = 0.64$ y $g(0.64) = 26$ encuentre $(g \circ f)(0)$ e interprete el resultado.
b. Si $f(6) = 0.51$ y $g(0.51) = 42$ encuentre $(g \circ f)(6)$ e interprete su resultado.
c. Comente los resultados de las partes (a) y (b).

Fuente: National Highway Traffic Safety Administration

63. Combate contra el crimen Suponga que los crímenes graves reportados (crímenes que incluyen homicidios, violaciones, atracos a bancos, asalto agravado, robos con allanamiento de morada y de autos) que terminan en arrestos o en la identificación de los sospechosos es de $g(x)$ por ciento, donde x denota el número total de detectives. A continuación, suponga que el número total de detectives en el año t es $f(t)$, con $t = 0$ correspondiente a 2001.
a. Si $f(1) = 406$ y $g(406) = 23$, encuentre $(g \circ f)(1)$ e interprete su resultado.
b. Si $f(6) = 326$ y $g(326) = 18$, determine $(g \circ f)(6)$ e interprete su resultado.
c. Comente los resultados de las partes (a) y (b).

Fuente: Boston Police Department

64. Costo de fabricar *Personal Digital Assistant* (PDA) Apolo fabrica PDA a un costo variable de

$$V(x) = 0.000003x^3 - 0.03x^2 + 200x$$

dólares donde x denota el número de unidades fabricadas por mes. El costo fijo mensual atribuible a la división que produce estas PDA es de \$100,000. Encuentre una función C que dé el costo total incurrido por la fabricación de x PDA. ¿Cuál es el costo total incurrido al producir 2000 unidades/mes?

65. Utilidad por la venta de PDA Remítase al ejercicio 64. Suponga que el ingreso total obtenido por Apolo por la venta de x PDA está dado por la función de ingreso total

$$R(x) = -0.1x^2 + 500x \qquad (0 \leq x \leq 5000)$$

donde $R(x)$ está en dólares.
a. Encuentre la función de utilidad total.
b. ¿Cuál es la utilidad cuando se fabrican y venden 1500 unidades cada mes?

66. Utilidad por la venta de localizadores Una división de Chapman Corporation fabrica un localizador. El costo fijo mensual para la división es de \$20,000 y el costo variable por la fabricación de x localizadores es

$$V(x) = 0.000001x^3 - 0.01x^2 + 50x$$

dólares. La empresa obtiene un ingreso de

$$R(x) = -0.02x^2 + 150x \qquad (0 \leq x \leq 7500)$$

dólares por la venta de x localizadores/semana.
a. Encuentre la función de costo total.
b. Encuentre la función de utilidad total.
c. ¿Cuál es la utilidad de la empresa si cada semana se fabrican y venden 2000 unidades?

67. Sobrepoblación en las prisiones La década de 1980 contempló una tendencia hacia el castigo del delito tradicional, en comparación con las políticas más liberales y correcciones basadas en la comunidad, populares en la década de 1960 y principios de la de 1970. En consecuencia, las prisiones se sobrepoblaron, y la brecha entre el número de internos y la capacidad de las prisiones aumentó. El número de internos (en miles) en prisiones federales y estatales es aproximadamente

$$N(t) = 3.5t^2 + 26.7t + 436.2 \qquad (0 \leq t \leq 10)$$

donde t está en años, con $t = 0$ correspondiente a 1983. El número de internos para el cual las prisiones fueron diseñadas es

$$C(t) = 24.3t + 365 \qquad (0 \leq t \leq 10)$$

donde $C(t)$ está en miles y t en años.
a. Encuentre una expresión que muestre la brecha entre el número de prisioneros y el número de internos para el cual las prisiones fueron diseñadas en cualquier momento t.
b. Calcule la brecha a principios de 1983 y a principios de 1986.

Fuente: U.S. Department of Justice

68. Efecto de las tasas hipotecarias en las acciones de vivienda Un estudio preparado para la National Association of Realtors (Asociación Nacional de Agentes Inmobiliarios) estimó que el número de acciones de vivienda por año durante los siguientes 5 años será

$$N(r) = \frac{7}{1 + 0.02r^2}$$

millones de unidades, donde r (porcentaje) es la tasa hipotecaria. Suponga que la tasa hipotecaria durante los siguientes t meses es

$$r(t) = \frac{10t + 150}{t + 10} \qquad (0 \leq t \leq 24)$$

por ciento anual.

a. Encuentre una expresión para el número de acciones de vivienda por año en función de t, t meses a partir de ahora.

b. Utilizando el resultado de la parte (a), determine el número de acciones de vivienda al presente, 12 meses a partir de ahora, 18 meses a partir de ahora.

69. Tasa de ocupación de un hotel La tasa de ocupación del Hotel Wonderland, localizado cerca de un parque de diversiones, está dada por la función

$$r(t) = \frac{10}{81}t^3 - \frac{10}{3}t^2 + \frac{200}{9}t + 55 \qquad (0 \leq t \leq 11)$$

donde t está en meses y $t =$ corresponde al inicio de enero. La gerencia ha estimado que el ingreso mensual (en miles de dólares) es aproximadamente

$$R(r) = -\frac{3}{5000}r^3 + \frac{9}{50}r^2 \qquad (0 \leq r \leq 100)$$

donde r (por ciento) es la tasa de ocupación.

a. ¿Cuál es la tasa de ocupación del hotel a principios de enero? ¿A principios de junio?

b. ¿Cuál es el ingreso mensual del hotel a principios de enero? ¿A principios de junio?

Sugerencia: Calcule $R(r(0))$ y $R(r(5))$.

70. Acciones de vivienda y empleos de construcción El presidente de una importante compañía constructora de vivienda reporta que el número de empleos de construcción (en millones) creados es

$$N(x) = 1.42x$$

donde x denota el número de acciones de vivienda. Suponga que se espera que el número de acciones de vivienda en los siguientes t meses sea

$$x(t) = \frac{7(t + 10)^2}{(t + 10)^2 + 2(t + 15)^2}$$

millones de unidades/año. Encuentre una expresión para el número de empleos creados por mes en los siguientes t meses. ¿Cuántos empleos se habrán creado dentro de 6 y 12 meses?

71. a. Sean f, g y h funciones. ¿Cómo definiría la "suma" de f, g y h?

b. Dé un ejemplo real que implique la suma de tres funciones. (*Nota*: la respuesta no es única.)

72. a. Sean f, g y h funciones. ¿Cómo definiría la "composición" de h, g y f en ese orden?

b. Dé un ejemplo real que implique la composición de estas funciones. (*Nota:* la respuesta no es única.)

En los ejercicios 73-76 determine si el enunciado es verdadero o falso. Si es verdadero, explique por qué lo es. Si es falso, dé un ejemplo para demostrar por qué lo es.

73. Si f y g son funciones con dominio D, entonces $f + g = g + f$.

74. Si $g \circ f$ está definida con $x = a$, entonces $f \circ g$ también debe definirse con $x = a$.

75. Si f y g son funciones, entonces $f \circ g = g \circ f$.

76. Si f es una función entonces $f \circ f = f^2$.

2.4 Soluciones de los ejercicios de autoevaluación

1. a. $s(x) = f(x) + g(x) = \sqrt{x} + 1 + \dfrac{x}{1 + x}$

$$d(x) = f(x) - g(x) = \sqrt{x} + 1 - \frac{x}{1 + x}$$

$$p(x) = f(x)g(x) = (\sqrt{x} + 1)\cdot\frac{x}{1 + x} = \frac{x(\sqrt{x} + 1)}{1 + x}$$

$$q(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\sqrt{x} + 1}{\dfrac{x}{1 + x}} = \frac{(\sqrt{x} + 1)(1 + x)}{x}$$

b. $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \sqrt{\dfrac{x}{1 + x}} + 1$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \frac{\sqrt{x} + 1}{1 + (\sqrt{x} + 1)} = \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} + 2}$$

2. a. La diferencia entre los gastos en atención médica por persona realizados por el sector privado y el gobierno, en cualquier momento t, está dada por la función d con la regla

$$\begin{aligned} d(t) = f(t) - g(t) &= (2.48t^2 + 18.47t + 509) \\ &\quad - (-1.12t^2 + 29.09t + 429) \\ &= 3.6t^2 - 10.62t + 80 \end{aligned}$$

b. La diferencia entre los gastos en atención médica por persona realizados por el sector privado y el gobierno a principios de 1995 está dada por

$$d(1) = 3.6(1)^2 - 10.62(1) + 80$$

o \$72.98/persona.

La diferencia entre los gastos realizados por el sector privado y el gobierno por persona a principios de 2000 está dada por

$$d(6) = 3.6(6)^2 - 10.62(6) + 80$$

o \$145.88/persona.

2.5 Funciones lineales

Ahora enfocamos nuestra atención en una importante clase de funciones conocidas como funciones lineales. Recuerde que una ecuación lineal en x y y tienen la forma $Ax + By + C = 0$, donde A, B y C son constantes y A y B no son cero. Si $B \neq 0$, la ecuación siempre puede resolverse para y en función de x; en realidad, como se vio en la sección 2.2, la ecuación puede escribirse en la forma de pendiente-ordenada:

$$y = mx + b \qquad (m, b \text{ constantes}) \tag{7}$$

La ecuación (7) define y como una función de x. El dominio y el rango de esta función es el conjunto de todos los números reales. Además, la gráfica de esta función, como se vio en la sección 2.2, es una línea recta en el plano. Por esta razón $f(x) = mx + b$ se llama función lineal.

Función lineal

La función definida por

$$f(x) = mx + b$$

donde m y b son constantes, se llama **función lineal**.

Las funciones lineales desempeñan un rol importante en el análisis cuantitativo de problemas de negocios y económicos. En primer lugar, muchos problemas que surgen en estos y otros campos son de naturaleza lineal o son lineales en los intervalos de interés y por tanto pueden formularse con base en funciones lineales. En segundo lugar, como es relativamente fácil trabajar con las funciones lineales, a menudo se hacen suposiciones que implican linealidad en la formulación de problemas. En muchos casos estos supuestos se justifican, y se obtienen modelos matemáticos aceptables que representan de forma aproximada situaciones de la vida real.

En el resto de esta sección examinamos varias aplicaciones que pueden ser modeladas con funciones lineales.

Depreciación simple

En primer lugar nos ocupamos de la depreciación lineal en la sección 2.1 como una aplicación real de las líneas rectas. El siguiente ejemplo ilustra cómo se obtiene una ecuación que describe el valor en libros de un activo que se deprecia linealmente.

EJEMPLO DE APLICACIÓN 1 Depreciación en línea recta

Un servidor web tiene un valor original de \$10,000 y debe depreciarse en línea recta durante 5 años con un valor de recuperación de \$3000. Encuentre una expresión que dé el valor en libros al final del año t. ¿Cuál será el valor en libros del servidor al final del segundo año? ¿Cuál es la tasa de depreciación del servidor?

Solución Sea $V(t)$ el valor en libros del servidor web al final del año t. Puesto que la depreciación es lineal, V es una función lineal de t. Del mismo modo, la gráfica de la función es una línea recta. Ahora, para determinar una ecuación de la línea recta observe que $V = 10{,}000$ cuando $t = 0$; esto indica que la línea pasa por el punto $(0, 10{,}000)$. Asimismo, la condición de que $V = 3000$ cuando $t = 5$ indica que la línea también pasa por el punto $(5, 3000)$. La pendiente de la línea es

$$m = \frac{10{,}000 - 3000}{0 - 5} = -\frac{7000}{5} = -1400$$

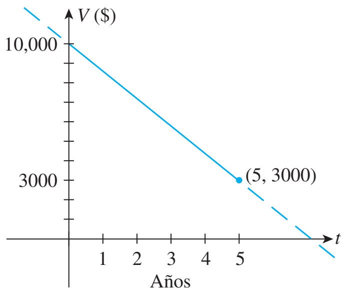


FIGURA 37
Depreciación lineal de un activo.

Utilizando la forma punto-pendiente de la ecuación de una línea con el punto (0, 10,000) y la pendiente $m = -1400$, obtenemos

$$V - 10{,}000 = -1400(t - 0)$$
$$V = -1400t + 10{,}000$$

la expresión requerida. El valor en libros al final del segundo año es

$$V(2) = -1400(2) + 10{,}000 = 7200$$

o \$7200. La tasa de depreciación del servidor es el negativo de la pendiente de la línea de depreciación. Como la pendiente de la línea es $m = -1400$, la tasa de depreciación es de \$1400 por año. La gráfica de $V = -1400t + 10{,}000$ se muestra en la figura 37.

Funciones lineales de costo, ingreso y utilidad

Ya sea una pequeña empresa de propiedad individual o una gran corporación, el propietario o el ejecutivo en jefe constantemente deben rastrear los costos de operación, el ingreso resultante por la venta de productos y servicios y, tal vez aún más importante, las utilidades obtenidas. Tres funciones permiten a la gerencia medir estas cantidades: la función de costo total, la función de ingreso y la función de utilidad.

Funciones de costo, ingreso y utilidad

Sea x el número de unidades de un producto fabricado o vendido. Entonces, la **función de costo total** es

$$C(x) = \text{Costo total de fabricación de } x \text{ unidades del producto}$$

La **función de ingreso** es

$$R(x) = \text{Ingreso total realizado por la venta de } x \text{ unidades del producto}$$

La **función de utilidad** es

$$P(x) = \text{Utilidad total realizada por la fabricación y venta de } x \text{ unidades del producto}$$

En términos generales, las funciones de costo total, ingreso y utilidad asociadas con una empresa quizá serán no lineales (estas funciones se estudian mejor con las herramientas de cálculo). Pero las funciones *lineales* de costo, ingreso y utilidad no surgen en la práctica, y las consideraremos en esta sección. Antes de determinar formas explícitas de estas funciones, debemos recordar alguna terminología común.

Los costos incurridos al operar un negocio en general se clasifican en dos categorías. Los costos que permanecen más o menos constantes independientemente del nivel de actividad de la empresa se llaman **costos fijos**. Ejemplos de costos fijos son las tarifas de renta y los sueldos de ejecutivos. Los costos que varían con la producción o ventas se llaman **costos variables**. Ejemplos de costos variables son los salarios y los costos de materia prima.

Suponga que una empresa tiene un costo fijo de F dólares, un costo de producción de c dólares por unidad y un precio de venta de s dólares por unidad. Entonces, la *función de costo* $C(x)$, la *función de ingreso* $R(x)$ y la *función de utilidad* $P(x)$ son de la forma

$$\begin{aligned} C(x) &= cx + F \\ R(x) &= sx \\ P(x) &= R(x) - C(x) \qquad \text{Ingresos} - \text{costo} \\ &= (s - c)x - F \end{aligned}$$

donde x denota el número de unidades del producto fabricado o vendido. Las funciones C, R y P son funciones lineales de x.

VIDEO

EJEMPLO DE APLICACIÓN 2 Funciones de utilidad Puritron, un fabricante de filtros de agua, tiene un costo fijo mensual de \$20,000, un costo de producción de \$20 por unidad y un precio de venta de \$30 por unidad. Determine la función de costo, la función de ingreso y la función de utilidad de Puritron.

Solución Sea x el número de unidades producidas y vendidas. Entonces

$$\begin{aligned} C(x) &= 20x + 20{,}000 \\ R(x) &= 30x \\ P(x) &= R(x) - C(x) \\ &= 30x - (20x + 20{,}000) \\ &= 10x - 20{,}000 \end{aligned}$$

■

Intersección de líneas rectas

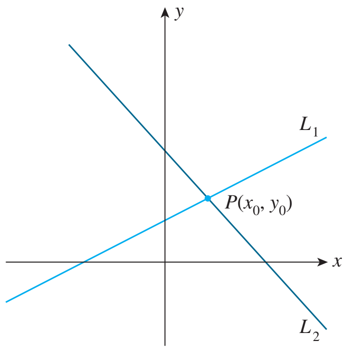


FIGURA 38
L_1 y L_2 se intersecan en el punto $P(x_0, y_0)$.

La solución de ciertos problemas prácticos implica determinar el punto de intersección de dos líneas rectas. Para ver cómo pueden resolverse algebraicamente, suponga que nos dan líneas rectas, L_1 y L_2 con ecuaciones

$$y = m_1x + b_1 \qquad \text{y} \qquad y = m_2x + b_2$$

(donde m_1, b_1, m_2 y b_2 son constantes que se cortan en el punto $P(x_0, y_0)$ (figura 38).

El punto $P(x_0, y_0)$ queda sobre la línea L_1 y por tanto satisface la ecuación $y = m_1x + b_1$. También queda sobre la línea L_2 y, por tanto, satisface la ecuación $y = m_2x + b_2$. Por consiguiente, para encontrar el punto de intersección $P(x_0, y_0)$ de las líneas L_1 y L_2, resolvemos el sistema compuesto de las dos ecuaciones

$$y = m_1x + b_1 \qquad \text{y} \qquad y = m_2x + b_2$$

para x y y.

EJEMPLO 3 Determine el punto de intersección de las líneas rectas cuyas ecuaciones son $y = x + 1$ y $y = -2x + 4$.

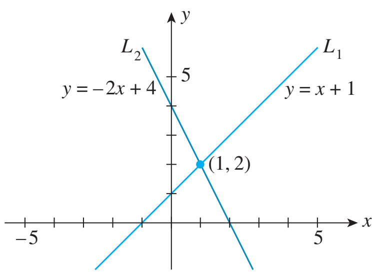


FIGURA 39
El punto de intersección de L_1 y L_2 es (1, 2).

Solución Resolvemos las ecuaciones simultáneas dadas. Al sustituir el valor y dado en la primera ecuación en la segunda, obtenemos

$$\begin{aligned} x + 1 &= -2x + 4 \\ 3x &= 3 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

Al sustituir este valor de x en cualquiera de las ecuaciones dadas obtenemos $y = 2$. Por consiguiente, el punto de intersección requerido es (1, 2) (figura 39). ■

Exploración con TECNOLOGÍA

1. Utilice una calculadora graficadora para trazar las líneas rectas L_1 y L_2 con ecuaciones $y = 3x - 2$ y $y = -2x + 3$, respectivamente, en el mismo sistema de ejes en la ventana de visualización estándar. Luego utilice TRACE y ZOOM para localizar el punto de intersección de L_1 y L_2. Repita utilizando la función de "intersección" de su calculadora graficadora.
2. Determine algebraicamente el punto de intersección de L_1 y L_2.
3. Comente sobre la efectividad de cada método.

Ahora nos ocupamos de algunas aplicaciones que implican las intersecciones de pares de líneas rectas.

Análisis de equilibrio

Considere una empresa con función de costos (lineal) $C(x)$, función de ingresos $R(x)$ y función de utilidad $P(x)$ dadas por

$$\begin{aligned} C(x) &= cx + F \\ R(x) &= sx \\ P(x) &= R(x) - C(x) = (s - c)x - F \end{aligned}$$

donde c denota el costo unitario de producción, s el precio de venta por unidad, F el costo fijo incurrido por la empresa y x el nivel de producción y ventas. El nivel de producción al cual la empresa no realiza una utilidad ni sufre una pérdida se llama **nivel de operación de equilibrio** y puede determinarse al resolver de forma simultánea las ecuaciones $y = C(x)$ y $y = R(x)$. Al nivel de producción x_0, la utilidad es cero y por tanto

$$\begin{aligned} P(x_0) &= R(x_0) - C(x_0) = 0 \\ R(x_0) &= C(x_0) \end{aligned}$$

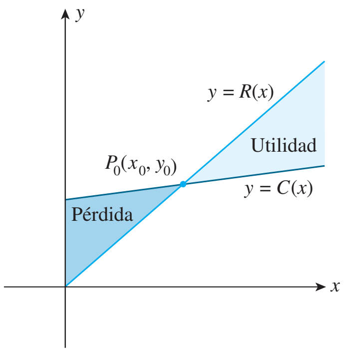


FIGURA **40**
P_0 es el punto de equilibrio.

El punto $P_0(x_0, y_0)$, la solución de las ecuaciones simultáneas $y = R(x)$ y $y = C(x)$ se conoce como **punto de equilibrio**; el número x_0 y el número y_0 se llaman **cantidad de equilibrio** e **ingreso de equilibrio**, respectivamente.

En términos geométricos, el punto de equilibrio $P_0(x_0, y_0)$ es justo el punto de intersección de las líneas rectas que representan las funciones de costo e ingreso, respectivamente. Esto se desprende porque como $P_0(x_0, y_0)$ es la solución de las ecuaciones simultáneas $y = R(x)$ y $y = C(x)$, debe quedar en ambas líneas al mismo tiempo (figura 40).

Observe que si $x < x_0$, entonces $R(x) < C(x)$ de modo que $P(x) = R(x) - C(x) < 0$ y por tanto la empresa experimenta una pérdida a este nivel de producción. Por otra parte, si $x > x_0$, entonces $P(x) > 0$ y la empresa opera a un nivel rentable.

VIDEO

EJEMPLO DE APLICACIÓN 4 Nivel de equilibrio Prescott fabrica sus productos a un costo de \$4 por unidad y los vende a \$10 por unidad. Si el costo fijo de la empresa es de \$12,000 por mes, determine el punto de equilibrio de la empresa.

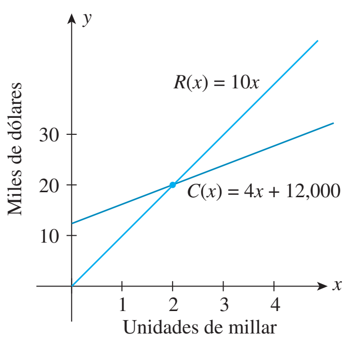


FIGURA **41**
El punto donde $R(x) = C(x)$ es el punto de equilibrio.

Solución La función de costo C y la función de ingreso R son $C(x) = 4x + 12{,}000$ y $R(x) = 10x$, respectivamente (figura 41).

Con $R(x) = C(x)$ se obtiene

$$\begin{aligned} 10x &= 4x + 12{,}000 \\ 6x &= 12{,}000 \\ x &= 2000 \end{aligned}$$

Al sustituir este valor de x en $R(x) = 10x$ obtenemos

$$R(2000) = (10)(2000) = 20{,}000$$

Así que, para una operación de equilibrio, la empresa deberá fabricar 2000 unidades de su producto, lo cual da un ingreso de equilibrio de \$20,000 por mes. ■

EJEMPLO DE APLICACIÓN 5 Análisis de punto de equilibrio Con los datos dados en el ejemplo 4, responda las siguientes preguntas:

a. ¿Cuál es la pérdida sufrida por la empresa si se producen y venden sólo 1500 unidades cada mes?
b. ¿Cuál es la utilidad si se producen y venden 3000 unidades cada mes?
c. ¿Cuántas unidades deberá producir la empresa para obtener una utilidad mensual mínima de \$9000?

PORTAFOLIO Esteban Silva

PUESTO Propietario
INSTITUCIÓN Regimen

Regimen es una tienda minorista y un comercializador en línea de productos de belleza de alto nivel para caballero, una pequeña empresa desarrollada por mí. Concebí este concepto para satisfacer la creciente demanda de productos de belleza para caballero, desde los que ya peinan canas que desean mantenerse competitivos, hasta los jóvenes que cada vez más aceptan la idea de que es esencial estar a la moda y bien acicalado. El mercado de productos de belleza para caballero, actualmente de $3500 millones al año, cada vez se expande más y existe una tremenda oportunidad de aprovechar este potencial sin explotar.

En las etapas iniciales de esta empresa me he fiado de las matemáticas para calcular la suma de capital necesaria para poner en marcha y sostener el negocio hasta que se vuelva rentable. Con ayuda de hojas de cálculo ingreso las cifras de ventas proyectadas y los gastos mensuales estimados para alcanzar, si es posible, las metas y el punto de equilibrio de forma oportuna. Con la ayuda de un diseñador de interiores profesional, tracé planes que incluyen los costos de adquisición, contratación y construcción de espacio para presupuestar los gastos.

Hice equipo con Yahoo! Small Business Solutions y concebí una estrategia de publicidad en línea, la cual me permite llegar al nicho de clientes para los que están pensados los productos de mi empresa. Utilizando un método de publicidad de búsqueda patrocinado, determino de antemano cuánto estoy dispuesto a gastar por cada combinación de palabras clave que canalizan el tráfico hacia mi sitio web vía Yahoo! Todos los días puedo rastrear el número de concordancias que recibe cada combinación de palabras clave y, por consiguiente, determinar si cualquiera de ellas tiene que ser modificada. Es muy importante que analice estas cifras con frecuencia para que pueda redirigir los limitados recursos de marketing de esta incipiente empresa hacia los canales más efectivos disponibles. Por fortuna, las técnicas de matemáticas aplicadas que aprendí en la universidad me han ayudado a cristalizar el sueño de poseer mi negocio y de ser mi propio jefe.

Solución La regla siguiente da la función de utilidad P

$$\begin{aligned} P(x) &= R(x) - C(x) \\ &= 10x - (4x + 12{,}000) \\ &= 6x - 12{,}000 \end{aligned}$$

a. Si se producen y venden 1500 unidades cada mes obtenemos

$$P(1500) = 6(1500) - 12{,}000 = -3000$$

así que la empresa sufrirá una pérdida de $3000 por mes.

b. Si se producen y venden 3000 unidades cada mes obtenemos

$$P(3000) = 6(3000) - 12{,}000 = 6000$$

o una utilidad mensual de $6000.

c. Al sustituir 9000 en lugar de $P(x)$ en la ecuación $P(x) = 6x - 12{,}000$ obtenemos

$$\begin{aligned} 9000 &= 6x - 12{,}000 \\ 6x &= 21{,}000 \\ x &= 3500 \end{aligned}$$

Por tanto, la empresa deberá producir por lo menos 3500 unidades para obtener una utilidad mínima mensual de $9000. ■

EJEMPLO DE APLICACIÓN 6 Análisis de decisiones La gerencia de Robertson Controls debe decidir entre dos procesos de manufactura para su termostato electrónico modelo C. El costo mensual del primer proceso es $C_1(x) = 20x + 10{,}000$ dólares, donde x es el número de termostatos fabricados; el costo mensual del segundo proceso es $C_2(x) = 10x + 30{,}000$ dólares. Si las ventas mensuales proyectadas son 800 termostatos a un precio unitario de \$40, ¿cuál proceso deberá escoger la gerencia para maximizar la utilidad de la empresa?

Solución El nivel de operación de equilibrio utilizando el primer proceso se obtiene al resolver la ecuación

$$\begin{aligned} 40x &= 20x + 10{,}000 \\ 20x &= 10{,}000 \\ x &= 500 \end{aligned}$$

que da una producción de 500 unidades. A continuación resolvemos la ecuación

$$\begin{aligned} 40x &= 10x + 30{,}000 \\ 30x &= 30{,}000 \\ x &= 1000 \end{aligned}$$

que da una producción de 1000 unidades para una operación de equilibrio con el segundo proceso. Como las ventas proyectadas son 800 unidades, concluimos que la gerencia debe escoger el primer proceso, el cual permitirá a la empresa obtener utilidades. ■

EJEMPLO DE APLICACIÓN 7 **Análisis de decisiones** Remitiéndose al ejemplo 6, decida cuál proceso debe escoger la gerencia de Robertson si las ventas mensuales proyectadas son a) 1500 unidades y b) 3000 unidades.

Solución En ambos casos la producción rebasa el nivel de equilibrio. Como el ingreso es el mismo, independientemente de cuál proceso se emplee, la decisión se basará en cuánto cuesta cada proceso.

a. Si $x = 1500$ entonces

$$\begin{aligned} C_1(x) &= (20)(1500) + 10{,}000 = 40{,}000 \\ C_2(x) &= (10)(1500) + 30{,}000 = 45{,}000 \end{aligned}$$

Por consiguiente, la gerencia deberá escoger el primer proceso.

b. Si $x = 3000$, entonces

$$\begin{aligned} C_1(x) &= (20)(3000) + 10{,}000 = 70{,}000 \\ C_2(x) &= (10)(3000) + 30{,}000 = 60{,}000 \end{aligned}$$

En este caso, la gerencia deberá escoger el segundo proceso. ■

Exploración con TECNOLOGÍA

1. Utilice una calculadora graficadora para trazar las líneas rectas L_1 y L_2 con ecuaciones $y = 2x - 1$ y $y = 2.1x + 3$, respectivamente, en el mismo sistema de ejes, utilizando la ventana de visualización estándar. ¿Parece que las líneas se cortan?
2. Trace las líneas rectas L_1 y L_2, utilizando la ventana de visualización $[-100, 100] \times [-100, 100]$. ¿Parece que las líneas se cortan? ¿Puede localizar el punto de intersección con TRACE y ZOOM? Utilizando la función "intersection" de su calculadora graficadora?
3. Encuentre algebraicamente el punto de intersección de L_1 y L_2.
4. Comente sobre la efectividad de los métodos de solución en las partes 2 y 3.

2.5 Soluciones de los ejercicios de autoevaluación

Un fabricante tiene un costo fijo mensual de \$60,000 y un costo de producción de \$10 por unidad producida. El producto se vende a \$15 por unidad.

1. ¿Cuál es la función de costo?
2. ¿Cuál es la función de ingreso?
3. ¿Cuál es la función de utilidad?
4. Calcule la utilidad (pérdida) correspondiente a niveles de producción de 10,000 y 14,000 unidades/mes.

Las soluciones de los ejercicios de autoevaluacón se encuentran en la página 120.

2.5 Preguntas de concepto

1. **a.** ¿Qué es una *función lineal*? Dé un ejemplo.
   b. ¿Cuál es el dominio de una función lineal? ¿El rango?
   c. ¿Cuál es la gráfica de una función lineal?
2. ¿Cuál es la forma general de una función lineal de costo? ¿Una función lineal de ingreso? Una función lineal de utilidad?
3. Explique el significado de cada término:
   a. Punto de equilibrio
   b. Cantidad de equilibrio
   c. Ingreso de equilibrio

2.5 Ejercicios

En los ejercicios 1-10 determine si la ecuación define *y* como una función lineal de *x*. De ser así, escríbala en la forma $y = mx + b$.

1. $2x + 3y = 6$
2. $-2x + 4y = 7$
3. $x = 2y - 4$
4. $2x = 3y + 8$
5. $2x - 4y + 9 = 0$
6. $3x - 6y + 7 = 0$
7. $2x^2 - 8y + 4 = 0$
8. $3\sqrt{x} + 4y = 0$
9. $2x - 3y^2 + 8 = 0$
10. $2x + \sqrt{y} - 4 = 0$
11. Un fabricante tiene un costo fijo mensual de \$40,000 y un costo de producción de \$8 por cada unidad producida. El producto se vende a \$12 por unidad.
    a. ¿Cuál es la función de costo?
    b. ¿Cuál es la función de ingreso?
    c. ¿Cuál es la función de utilidad?
    d. Calcule la utilidad (o pérdida) correspondiente a niveles de producción de 8000 y 12,000 unidades.
12. Un fabricante tiene un costo fijo mensual de \$100,000 y un costo de producción de \$14 por cada unidad producida. El producto se vende a \$20 por unidad.
    a. ¿Cuál es la función de costo?
    b. ¿Cuál es la función de ingreso?
    c. ¿Cuál es la función de utilidad?
    d. Calcule la utilidad (o pérdida) correspondiente a niveles de producción de 12,000 y 20,000 unidades.
13. Determine las constantes m y b en la función lineal $f(x) = mx + b$ de modo que $f(0) = 2$ y $f(3) = -1$.
14. Determine las constantes m y b en la función lineal $f(x) = mx + b$ de modo que $f(2) = 4$ y la línea recta representada por f tenga una pendiente de -1.

En los ejercicios 15-20 determine el punto de intersección de cada par de líneas rectas.

15. $y = 3x + 4$
    $y = -2x + 14$
16. $y = -4x - 7$
    $-y = 5x + 10$
17. $2x - 3y = 6$
    $3x + 6y = 16$
18. $2x + 4y = 11$
    $-5x + 3y = 5$
19. $y = \frac{1}{4}x - 5$
    $2x - \frac{3}{2}y = 1$
20. $y = \frac{2}{3}x - 4$
    $x + 3y + 3 = 0$

En los ejercicios 21-24 determine el punto de equilibrio para la empresa cuya función de costo *C* y función de ingreso *R* son

21. $C(x) = 5x + 10{,}000;\ R(x) = 15x$
22. $C(x) = 15x + 12{,}000;\ R(x) = 21x$
23. $C(x) = 0.2x + 120;\ R(x) = 0.4x$
24. $C(x) = 150x + 20{,}000;\ R(x) = 270x$
25. **Depreciación en línea recta** Un edificio de oficinas que valía \$1 millón cuando se completó en 2005 se deprecia linealmente durante 50 años. ¿Cuál será el valor en libros del edificio en 2010? ¿En 2015? (Suponga que el valor de recuperación es de \$0.)
26. **Depreciación en línea recta** Un automóvil adquirido para ser usado por el gerente de una empresa a un precio de \$24,000 se tiene que depreciar utilizando el método de línea recta durante 5 años. ¿Cuál será el valor en libros del automóvil al cabo de 3 años? (Suponga que el valor de recuperación es de \$0.)

27. BENEFICIOS DE SEGURIDAD SOCIAL Los beneficiarios de Seguridad Social reciben un ajuste por costo de vida automático (COLA, del inglés *cost of living adjustment*) una vez cada año. Su beneficio mensual se incrementa en el mismo porcentaje que los precios al consumidor se incrementaron durante el año anterior. Suponga que dichos precios aumentaron 5.3% durante el año precedente.

a. Exprese el beneficio mensual ajustado de un beneficiario de Seguridad Social como una función de su beneficio mensual actual.

b. Si el beneficio de Seguridad Social mensual de Carlos García es ahora de \$1020, ¿cuál será su beneficio mensual ajustado?

28. FUNCIONES DE UTILIDAD AutoTime, un fabricante de temporizadores variables de 24 horas, tiene un costo fijo mensual de \$48,000 y un costo de producción de \$8 por cada temporizador fabricado. Los temporizadores se venden a \$14 cada uno.

a. ¿Cuál es la función de costo?

b. ¿Cuál es la función de ingreso?

c. ¿Cuál es la función de utilidad?

d. Calcule la utilidad (o pérdida) correspondiente a niveles de producción de 4000, 6000 y 10,000 temporizadores, respectivamente.

29. FUNCIONES DE UTILIDAD La gerencia de TMI determinó que los costos fijos mensuales atribuibles a la producción de sus focos de 100 watts es de \$12,100.00. Si el costo de producir cada paquete de dos focos es de \$0.60 y cada paquete se vende a \$1.15, determine las funciones de costo, ingreso y utilidad de la empresa.

30. DEPRECIACIÓN EN LÍNEA RECTA En 2005, National Textile instaló una nueva máquina en una de sus fábricas a un costo de \$250,000. La máquina se deprecia en línea recta durante 10 años con un valor de recuperación de \$10,000.

a. Encuentre una expresión para el valor en libros de la máquina en el año t-ésimo de uso ($0 \leq t \leq 10$).

b. Trace la gráfica de la función de la parte (a).

c. Determine el valor en libros de la máquina en 2009.

d. Determine la tasa a la cual la máquina se deprecia.

31. DEPRECIACIÓN EN LÍNEA RECTA Un sistema de centro de trabajo adquirido a un costo de \$60,000 en 2007 tiene un valor de recuperación de \$12,000 al cabo de 4 años. Si se utiliza el método de depreciación en línea recta.

a. Determine la tasa de depreciación.

b. Determine la ecuación lineal que expresa el valor en libros del sistema al final de t años.

c. Trace la gráfica de la función de la parte (b).

d. Determine el valor en libros del sistema al final del tercer año.

32. DEPRECIACIÓN EN LÍNEA RECTA Suponga que un activo tiene un valor original de \$$C$ y que se deprecia en línea recta durante N años con un valor de recuperación de \$$S$. Demuestre que la siguiente función describe el valor en libros del activo al final del año r-ésimo

$$V(t) = C - \left(\frac{C - S}{N}\right)t$$

Sugerencia: Encuentre una ecuación de la recta que pasa por los puntos $(0, C)$ y (N, S). (¿Por qué?)

33. Vuelva a resolver el ejercicio 25 con la fórmula obtenida en el ejercicio 32.

34. Vuelva a resolver el ejercicio 26 con la fórmula obtenida en el ejercicio 32.

35. DOSIS DE FÁRMACOS Un método en ocasiones utilizado por pediatras para calcular la dosis de un medicamento para niños se basa en su área superficial. Si a denota la dosis para adulto (en miligramos) y si S es el área superficial del niño (en metros cuadrados), entonces la dosis para niños es

$$D(S) = \frac{Sa}{1.7}$$

a. Demuestre que D es una función lineal de S.
Sugerencia: Piense que $D(t)$ tiene la forma $D(S) = mS + b$. ¿Cuál es la pendiente m y la intersección y con b?

b. Si la dosis para adulto de un medicamento es 500 mg ¿Cuánto se le debe suministrar a un niño de 0.4 m^2 de área superficial?

36. DOSIS DE MEDICAMENTOS La regla de Cowling es un método para calcular las dosis de medicamentos pediátricos. Si a denota la dosis para adultos (en miligramos) y si t es la edad del niño (en años), entonces la dosis infantil está dada por

$$D(t) = \left(\frac{t + 1}{24}\right)a$$

a. Demuestre que D es una función líneal de t.
Sugerencia: Considere que la forma de $D(t)$ es $D(t) = mt + b$ ¿Cuál es la pendiente m y la intersección con y b?

b. Si la dosis para adulto de un fármaco es de 500 mg, ¿Cuánto deberá recibir un niño de 4 años?

37. HOGARES CON INTERNET DE BANDA ANCHA El número de hogares con Internet de banda ancha en Estados Unidos era de 20 millones a principios de 2002 y se anticipaba que creciera a un ritmo de 6.5 millones de hogares por año durante los 8 años siguientes.

a. Encuentre una función lineal $f(t)$ que dé el número proyectado de hogares con Internet en Estados Unidos (en millones) en el año t donde $t = 0$ corresponde al inicio de 2002.

b. ¿Cuál es el número proyectado de hogares con Internet de banda ancha a principios de 2010?

Fuente: Júpiter Research

38. HOGARES CON INTERNET DE LÍNEA DE MARCACIÓN El número de hogares con Internet de línea de marcación era de 42.5 millones a principios de 2004 y se proyectaba que declinara a un ritmo de 3.9 millones de hogares por año durante los siguientes 6 años.

a. Encuentre una función lineal f que dé el número proyectado de hogares con Internet de línea de marcación en Estados Unidos (en millones) en el año t, donde $t = 0$ corresponde al inicio de 2004?

b. ¿Cuál es el número proyectado de hogares con Internet de línea de marcación a principios de 2010?

Fuente: Strategy Analytics Inc.

39. TEMPERATURAS CELSIUS Y FAHRENHEIT La relación entre la temperatura medida en las escalas Celsius y Fahrenheit es lineal. El punto de congelación es 0°C y 32°F y el punto de ebullición es 100°C y 212°F.

a. Encuentre una ecuación que dé la relación entre la temperatura F medida en la escala Fahrenheit y la temperatura C medida en la escala Celsius.
b. Encuentre F como una función de C y utilícela para determinar la temperatura en Fahrenheit correspondiente a una temperatura de 20°C.
c. Encuentre C como una función de F y utilícela para determinar la temperatura en Celsius correspondiente a una temperatura de 70°F.

40. Canto de los grillos y temperatura Los entomólogos descubrieron que existe una relación lineal entre el número de sonidos de grillos de una cierta especie y la temperatura. Cuando la temperatura es de 70°F, los grillos cantan a razón de 120 sonidos/min, y cuando es de 80°F, lo hacen a 160 sonidos/min.
a. Encuentre una ecuación que establezca la relación entre la temperatura del aire T y el número de sonidos/min N de los grillos.
b. Encuentre N como una función de T y utilice esta fórmula para determinar el número de sonidos cuando la temperatura es de 120°F.

41. Análisis del punto de equilibrio AutoTime, un fabricante de temporizadores variables de 24 horas, tiene un costo mensual fijo y un costo de producción de \$48,000 y \$8, respectivamente, por cada temporizador fabricado. Los temporizadores se venden a \$14 cada uno.
a. Trace las gráficas de la función de costo y la función de ingreso y encuentre con ellas el punto de equilibrio.
b. Encuentre algebraicamente el punto de equilibrio.
c. Trace la gráfica de la función de utilidad.
d. ¿En qué punto la gráfica de la función de utilidad cruza el eje x? Interprete su resultado.

42. Análisis del punto de equilibrio Una división de Carter Enterprises produce diarios de "Impuesto al ingreso personal". Cada diario se vende en \$8. Los costos mensuales fijos de la división son \$25,000 y el costo variable de producir cada diario es \$3.
a. Calcule el punto de equilibrio de la división.
b. ¿Cuál deberá ser el nivel de ventas para que la división obtenga una utilidad de 15% sobre el costo de fabricar los diarios?

43. Análisis del punto de equilibrio Una división de Gibson Corporation fabrica bombas de bicicleta. Cada bomba se vende a \$9 y el costo variable de fabricar cada unidad es de 40% del precio de venta. Los costos mensuales fijos de la división son \$50,000. ¿Cuál es el punto de equilibrio de la división?

44. Arrendamiento Ace Truck Leasing Company arrienda un cierto tipo de camión por \$30/día y \$.15/mi, mientras que Acme Truck Leasing Company arrienda el mismo tipo de camión por \$25/día y \$.20/mi.
a. Encuentre las funciones que describen el costo diario de arrendamiento de cada empresa.
b. Trace las gráficas de las dos funciones en el mismo sistema de ejes.
c. Si un cliente planea manejar como máximo 70 mi, ¿de cuál empresa deberá rentar un camión durante sólo un día?

45. Análisis de decisiones Un producto puede fabricarse con la máquina I o la máquina II. El fabricante estima que los costos mensuales fijos de usar la máquina I son \$18,000, mientras que los de usar la máquina II son \$15,000. Los costos variables de fabricación de una unidad con la máquina I y la máquina II son \$15 y \$20, respectivamente. El producto se vende a \$50 cada uno.
a. Encuentre las funciones de costo asociadas con el uso de cada máquina.
b. Trace las gráficas de las funciones de costo de la parte (a) y las funciones de ingreso en el mismo sistema de ejes.
c. ¿Cuál máquina deberá escoger la gerencia para incrementar al máximo su utilidad si las ventas proyectadas son de 450 unidades? ¿550 unidades? ¿650 unidades?
d. ¿Cuál es la utilidad en cada caso de la parte (c)?

46. Ventas anuales Se espera que las ventas anuales de Crimson Drug Store sean de $S = 2.3 + 0.4t$ millones de dólares dentro de t años, mientras que se espera que las ventas anuales de Cambridge Drug Store sean de $S = 1.2 + 0.6t$ millones de dólares dentro de t años. ¿Cuándo rebasarán por primera vez las ventas anuales de Cambridge a las ventas anuales de Crimson?

47. LCD contra CRT Los embarques globales de monitores de tubo de rayos catódicos (CRT) son aproximadamente

$$y = -12t + 88 \qquad (0 \leq t \leq 3)$$

donde y está en millones y t en años, con $t = 0$ correspondiente al inicio de 2001. La ecuación

$$y = 18t + 13.4 \qquad (0 \leq t \leq 3)$$

da el número aproximado (en millones) de pantallas de cristal líquido (LCD) durante el mismo periodo. ¿Cuándo los envíos globales de LCD rebasaron por primera vez los embarques globales de CRT?

Fuente: International Data Corporation

48. Cámaras digitales contra cámaras de película Las ventas de cámaras digitales (en millones de unidades) en el año t son

$$f(t) = 3.05t + 6.85 \qquad (0 \leq t \leq 3)$$

donde t corresponde a 2001. Durante ese mismo periodo, las ventas de cámaras de película (en millones de unidades) es

$$g(t) = -1.85t + 16.58 \qquad (0 \leq t \leq 3)$$

a. Demuestre que se vendieron más cámaras de película que digitales en 2001.
b. ¿Cuándo rebasaron las ventas de cámaras digitales por primera vez a las de cámaras de película?

Fuente: Popular Science

49. Transacciones financieras en Estados Unidos El porcentaje de transacciones con cheque en Estados Unidos entre principios de 2001 ($t = 0$) y principios de 2010 ($t = 9$) se proyecta que sea

$$f(t) = -\frac{11}{9}t + 43 \qquad (0 \leq t \leq 9)$$

mientras que el porcentaje de transacciones realizadas electrónicamente se proyecta que sea

$$g(t) = \frac{11}{3}t + 23 \qquad (0 \le t \le 9)$$

a. Trace las gráficas de f y g en los mismos ejes.
b. Determine el tiempo cuando las transacciones realizadas electrónicamente sobrepasaron por primera vez a las realizadas con cheque.

Fuente: Foreign Policy

50. Banda ancha contra línea de marcación El número de hogares con Internet de banda ancha en Estados Unidos (en millones) entre principios de 2004 ($t = 0$) y principios de 2008 ($t = 4$) se estimaba que era

$$f(t) = 6.5t + 33 \qquad (0 \le t \le 4)$$

Durante el mismo periodo, el número de hogares con Internet de línea de marcación (en millones) se estimaba que era

$$g(t) = -3.9t + 42.5 \qquad (0 \le t \le 4)$$

a. Trace las gráficas de f y g en el mismo sistema de ejes.
b. Resuelva la ecuación $f(t) = g(t)$ e interprete su resultado.

Fuente: Strategic Analytics Inc.

En los ejercicios 51 y 52 determine si el enunciado es verdadero o falso. Si es verdadero, explique por qué. Si es falso, dé un ejemplo para demostrar por qué lo es.

51. Si el valor en libros V al final del año t de un activo que se deprecia en línea recta es $V = -at + b$ donde a y b son constantes positivas, entonces la tasa de depreciación del activo es de a unidades por año.

52. Suponga que $C(x) = cx + F$ y $R(x) = sx$ son las funciones de costo e ingreso de una cierta empresa. Entonces, la empresa opera a un nivel de producción de equilibrio si su nivel de producción es $F(s - c)$.

2.5 Soluciones de los ejercicios de autoevaluación

Sea x el número de unidades producidas y vendidas. Entonces

1. $C(x) = 10x + 60{,}000$

2. $R(x) = 15x$

3. $P(x) = R(x) - C(x) = 15x - (10x + 60{,}000)$
$= 5x - 60{,}000$

4. $P(10{,}000) = 5(10{,}000) - 60{,}000$
$= -10{,}000$
o una pérdida de \$10,000.

$P(14{,}000) = 5(14{,}000) - 60{,}000$
$= 10{,}000$
o una utilidad de \$10,000.

USO DE LA TECNOLOGÍA

Funciones lineales

Calculadora graficadora

Se puede utilizar una calculadora graficadora para determinar el valor de una función f en un punto dado con esfuerzo mínimo. Sin embargo, para determinar el valor de y con un valor dado de x en una ecuación lineal como $Ax + By + C = 0$, la ecuación debe escribirse primero en la forma pendiente-ordenada $y = mx + b$, y de ese modo aparece la regla deseada $f(x) = mx + b$ para y en función de x.

EJEMPLO 1 Considere la ecuación $2x + 5y = 7$.

a. Trace la línea recta con la ecuación dada en la ventana de visualización estándar.
b. Determine el valor de y cuando $x = 2$ y compruebe su resultado mediante cálculo directo.
c. Determine el valor de y cuando $x = 1.732$.

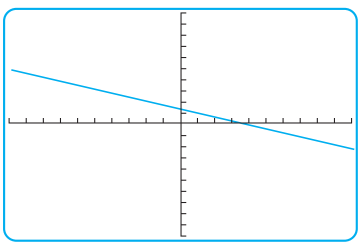


FIGURA **T1**
La línea recta $2x + 5y = 7$ en la ventana de visualización estándar.

Solución

a. La línea recta con ecuación $2x + 5y = 7$ o, su equivalente $y = -\frac{2}{5}x + \frac{7}{5}$ en la ventana de visualización estándar se muestra en la figura T1.

b. Con la función evaluation de la calculadora graficadora y el valor de 2 para x, encontramos $y = 0.6$. Este resultado se comprueba al calcular

$$y = -\frac{2}{5}(2) + \frac{7}{5} = -\frac{4}{5} + \frac{7}{5} = \frac{3}{5} = 0.6$$

cuando $x = 2$.

c. Una vez más con la función evaluation de la calculadora graficadora, en esta ocasión con el valor 1.732 para x, encontramos $y = 0.7072$.

Cuando se evalúa $f(x)$ con $x = a$, recuerde que el número a debe quedar entre xMin y xMax.

EJEMPLO DE APLICACIÓN 2 Mercado de los medicamentos reductores del colesterol En un estudio realizado a principios de 2000, los expertos anticiparon un mejoramiento del mercado de los medicamentos reductores del colesterol. El mercado estadounidense (en miles de millones de dólares) de tales medicamentos de 1999 a 2004 es aproximadamente

$$M(t) = 1.95t + 12.19$$

donde t está en años, con t correspondiente a 1999.

a. Trace la gráfica de la función M en la ventana de visualización $[0, 5] \times [0, 25]$.
b. Suponga que la proyección se mantiene y la tendencia continúa, ¿cuál era el mercado de los medicamentos reductores del colesterol en 2005 ($t = 6$)?
c. ¿Cuál fue la tasa de incremento del mercado de los medicamentos reductores del colesterol durante el periodo en cuestión?

Fuente: S. G. Cowen

Solución

a. La gráfica de M se muestra en la figura T2.

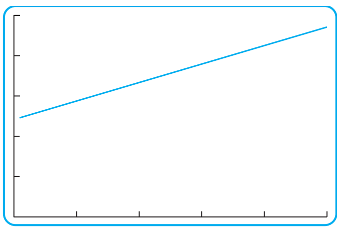


FIGURA **T2**
La gráfica de M en la ventana de visualización $[0, 5] \times [0, 25]$.

b. El mercado proyectado en 2005 para los medicamentos reductores del colesterol era aproximadamente

$$M(6) = 1.95(6) + 12.19 = 23.89$$

o \$23,890 millones.

c. La función M es lineal; por consiguiente, la tasa de incremento del mercado de los medicamentos reductores del colesterol está dado por la pendiente de la línea recta representada por M, la cual es aproximadamente de \$1950 millones por año. ■

Excel

Se puede utilizar Excel para determinar el valor de una función con un valor dado con el mínimo esfuerzo. Sin embargo, para determinar el valor de y con un valor dado de x en una ecuación lineal tal como $Ax + By + C = 0$, la ecuación debe escribirse primero en la forma pendiente-ordenada $y = mx + b$, la cual revela la regla deseada $f(x) = mx + b$ para y en función de x.

(continúa)

EJEMPLO 3 Considere la ecuación $2x + 5y = 7$.

a. Determine el valor de y con $x = 0$, 5 y 10.
b. Trace la línea recta con la ecuación dada dentro del intervalo [0, 10].

Solución

	A	B
1	x	y
2	0	1.4
3	5	–0.6
4	10	–2.6

FIGURA **T3**
Tablas de valores de x y y.

a. Como la ecuación es lineal, primero la escribimos en la forma pendiente-ordenada.

$$y = -\frac{2}{5}x + \frac{7}{5}$$

A continuación se crea una tabla de valores (figura T3), siguiendo el mismo procedimiento descrito en el ejemplo 3, páginas 85-86. En este caso se utiliza la fórmula `=(−2/5)*A2+7/5` para los valores de y.

b. Siguiendo el procedimiento descrito en el ejemplo 3, obtenemos la gráfica mostrada en la figura T4.

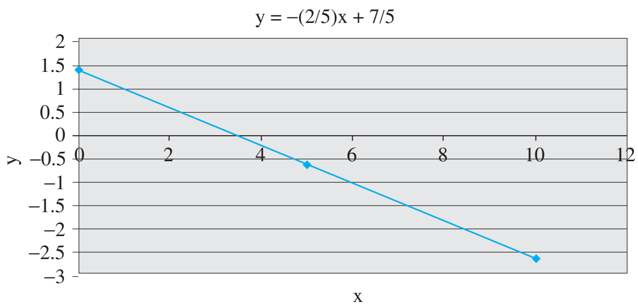


FIGURA **T4**
La gráfica de $= -\frac{2}{5}x + \frac{2}{5}$ dentro del intervalo [0, 10].

EJEMPLO DE APLICACIÓN 4 Mercado de los medicamentos reductores del colesterol En un estudio realizado a principios de 2000, los expertos anticiparon un mejoramiento del mercado de los medicamentos reductores del colesterol. El mercado estadounidense (en miles de millones de dólares) de tales medicamentos de 1999 a 2004 es aproximadamente

$$M(t) = 1.95t + 12.19$$

donde t está en años, con $t = 0$ correspondiente a 1999.

a. Trace la gráfica de la función M dentro del intervalo [0, 6].
b. Suponiendo que la proyección se mantuvo y la tendencia continuó, ¿cuál fue el mercado de los medicamentos reductores del colesterol durante el periodo en cuestión?

Fuente: S. G. Cowen

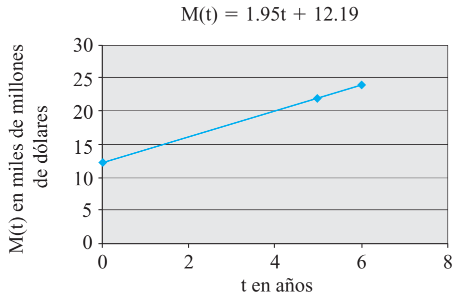
Solución

a. Siguiendo las instrucciones dadas en el ejemplo 3, páginas 85-86, se obtiene la hoja de cálculo y la gráfica que aparecen en la figura T5. [*Nota:* Ingresamos el título y etiquetas apropiadas para los ejes x y y.]

Nota: Los caracteres o palabras impresas en un tipo de letra de máquina de escribir (por ejemplo `=(−2/3)*A2+2)` indican palabras o caracteres que tienen que teclearse e ingresarse.

	A	B
1	t	M(t)
2	0	12.19
3	5	21.94
4	6	23.89

(a)



(b)

FIGURA **T5**
(a) Tabla de valores de t y $M(t)$ y (b) gráfica que muestra la demanda de los medicamentos reductores del colesterol.

b. En la tabla de valores vemos que

$$M(6) = 1.95(6) + 12.19 = 23.89$$

o \$23,890 millones.

c. La función M es lineal; por consiguiente, la tasa de incremento del mercado de los medicamentos reductores del colesterol está dada por la pendiente de la línea recta representada por M, la cual es aproximadamente de \$1950 millones por año. ■

EJERCICIOS CON TECNOLOGÍA

Determine el valor de y correspondiente al valor dado de x.

1. $3.1x + 2.4y - 12 = 0$; $x = 2.1$

2. $1.2x - 3.2y + 8.2 = 0$; $x = 1.2$

3. $2.8x + 4.2y = 16.3$; $x = 1.5$

4. $-1.8x + 3.2y - 6.3 = 0$; $x = -2.1$

5. $22.1x + 18.2y - 400 = 0$; $x = 12.1$

6. $17.1x - 24.31y - 512 = 0$; $x = -8.2$

7. $2.8x = 1.41y - 2.64$; $x = 0.3$

8. $0.8x = 3.2y - 4.3$; $x = -0.4$

2.6 Funciones cuadráticas

Funciones cuadráticas

Una **función cuadrática** es una de la forma

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

donde a, b y c son constantes y $a \neq 0$. Por ejemplo, la función $f(x) = 2x^2 - 3x + 4$ es cuadrática (en este caso $a = 2$, $b = -3$ y $c = 4$). Asimismo, la función $f(x) = x^2 + 1$ del ejemplo 6, sección 2.3 es cuadrática (en este caso $a = 1$, $b = 0$ y $c = 1$). Su gráfica ilustra la forma general de la gráfica de una función cuadrática, la cual se llama *parábola* (figura 42).

En general, la gráfica de una función cuadrática es una parábola abierta hacia arriba o hacia abajo (figura 43). Además, la parábola es simétrica con respecto a una línea vertical llamada *eje de simetría* (línea punteada en la figura 43). La línea también pasa por el punto más bajo o el más alto de la parábola. El punto de intersección de la parábola con el eje de simetría se llama *vértice* de la parábola.

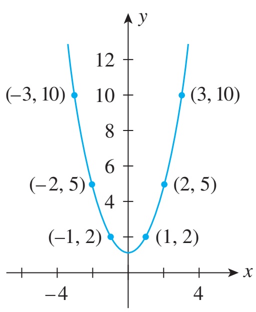


FIGURA **42**
La gráfica de $f(x) = x^2 + 1$ es una parábola.

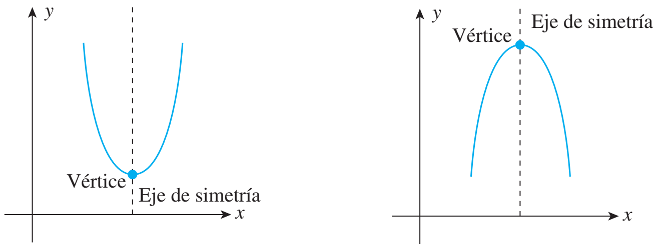


FIGURA 43
Las gráficas de funciones cuadráticas son parábolas.

Podemos utilizar estas propiedades para trazar la gráfica de una función cuadrática.

Por ejemplo, suponga que deseamos trazar la gráfica de

$$f(x) = 2x^2 - 4x + 1$$

Si completamos el cuadrado en x obtenemos

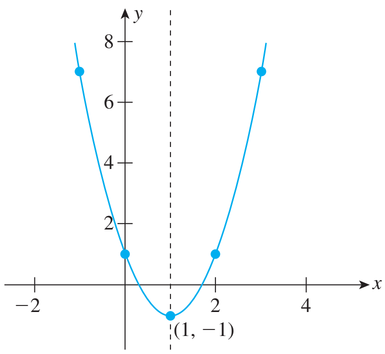
$$f(x) = 2(x^2 - 2x) + 1$$ Obtenga como factor el coeficiente de x^2 de los primeros dos términos.

Sumar y restar 2

$$= 2[x^2 - 2x + (-1)^2] + 1 - 2$$ Debido a los dos paréntesis angulares externos, se agrega 2(1) y, por consiguiente, debemos restar 2.

$$= 2(x - 1)^2 - 1$$ Factorice los términos entre paréntesis.

Observe que el primer término $2(x - 1)^2$ es no negativo. En realidad, es igual a cero cuando $x = 1$ y es mayor que cero si $x \neq 1$. Por consiguiente, $f(x) \geq -1$ con todos los valores de x. Esto indica que el vértice (en este caso, el punto más bajo) de la parábola es el punto $(1, -1)$. El eje de simetría de la parábola es la línea vertical $x = 1$. Por último, si marcamos el vértice y unos puntos más a ambos lados de los ejes de simetría de la parábola, obtenemos la gráfica mostrada en la figura 44.



x	y
-1	7
0	1
2	1
3	7

FIGURA 44
Gráfica de $f(x) = 2x^2 - 4x + 1$.

Las inserciones con x de f, las coordenadas x de los puntos donde la parábola corta el eje x, se encuentra al resolver la ecuación $f(x) = 0$. En este caso se utiliza la fórmula cuadrática con $a = 2$, $b = -4$ y $c = 1$ para determinar que

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(2)(1)}}{2(2)} = \frac{4 \pm \sqrt{8}}{4} = \frac{4 \pm 2\sqrt{2}}{4} = 1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Por consiguiente, las intersecciones con x son $1 + \sqrt{2}/2 \approx 1.71$ y $1 - \sqrt{2}/2 \approx 0.29$. La intersección con y de f (obtenida con $x = 0$) es $f(0) = 1$.

La técnica que utilizamos para analizar $f(x) = 2x^2 - 4x + 1$ puede emplearse para estudiar la función cuadrática general

$$f(x) = ax^2 + bx + c \qquad (a \neq 0)$$

Si completamos el cuadrado en x, encontramos

$$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$$ Vea el ejemplo 56.

De esta ecuación se obtienen las siguientes propiedades de la función cuadrática f.

Propiedades de la función cuadrática

$$f(x) = ax^2 + bx + c \qquad (a \neq 0)$$

1. El dominio de f es el conjunto de todos los números reales y su gráfica es una parábola.
2. Si $a > 0$, la parábola se abre hacia arriba, y si $a < 0$, se abre hacia abajo.
3. El vértice de la parábola es $\left(-\dfrac{b}{2a}, f\left(-\dfrac{b}{2a}\right)\right)$.
4. El eje de simetría de la parábola es $x = -\dfrac{b}{2a}$.
5. Las intersecciones con x (si las hay) se determinan al resolver $f(x) = 0$. La intersección con y es $f(0) = c$.

EJEMPLO 1 Dada la función cuadrática

$$f(x) = -2x^2 + 5x - 2$$

a. Encuentre el vértice de la parábola.
b. Encuentre las intersecciones con x (si las hay) de la parábola.
c. Trace la parábola.

Solución

a. Al comparar $f(x) = -2x^2 + 5x - 2$ con la forma general de la ecuación cuadrática, vemos que $a = -2$, $b = 5$ y $c = -2$. Por consiguiente, la coordenada x del vértice la parábola es

$$-\frac{b}{2a} = -\frac{5}{2(-2)} = \frac{5}{4}$$

A continuación, encontramos la coordenada y del vértice, evaluamos f con $x = \frac{5}{4}$, y encontramos

$$\begin{aligned} f\left(\frac{5}{4}\right) &= -2\left(\frac{5}{4}\right)^2 + 5\left(\frac{5}{4}\right) - 2 \\ &= -\frac{25}{8} + \frac{25}{4} - 2 \\ &= \frac{9}{8} \end{aligned}$$

$-2\left(\frac{25}{16}\right) = -\frac{25}{8}$

$-\frac{25}{8} + \frac{50}{8} - \frac{16}{8} = \frac{9}{8}$

b. Para encontrar las intersecciones con x de la parábola, resolvemos la ecuación

$$-2x^2 + 5x - 2 = 0$$

utilizando la fórmula cuadrática con $a = -2$, $b = 5$ y $c = -2$. Encontramos

$$\begin{aligned} x &= \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 4(-2)(-2)}}{2(-2)} \\ &= \frac{-5 \pm \sqrt{9}}{-4} \\ &= \frac{-5 \pm 3}{-4} \\ &= \frac{1}{2} \text{ o } 2 \end{aligned}$$

Por tanto, las intersecciones con x de la parábola son $\frac{1}{2}$ y 2.

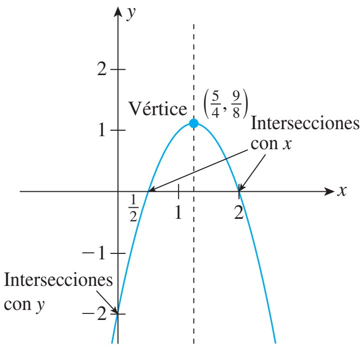


FIGURA 45
Gráfica de $f(x) = -2x^2 + 5x - 2$.

c. Como $a = -2 < 0$, la parábola se abre hacia abajo. Su vértice $\left(\frac{5}{4}, \frac{9}{8}\right)$ es, por consiguiente, el punto más alto de la curva. La parábola cruza el eje x por los puntos $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ y $(2, 0)$. Con $x = 0$ se obtiene -2 como la intersección con y de la curva. Por último, con esta información, trazamos la parábola mostrada en la figura 45. ■

EJEMPLO DE APLICACIÓN 2 Efecto de la publicidad en las utilidades La utilidad trimestral (en miles de dólares) de Cunningham Realty es

$$P(x) = -\frac{1}{3}x^2 + 7x + 30 \qquad (0 \le x \le 50)$$

donde x (en miles de dólares) es la cantidad de dinero que Cunningham gasta en publicidad por trimestre. Determine la cantidad de dinero que Cunningham debe gastar en publicidad para que obtenga una utilidad trimestral máxima. ¿Cuál es la utilidad trimestral máxima realizable por Cunningham?

Solución La función de utilidad P es una función cuadrática y, por tanto, su gráfica es una parábola. Además, el coeficiente de x^2 es $a = -\frac{1}{3} < 0$, y por consiguiente la parábola se abre hacia abajo. La coordenada x de su vértice es

$$-\frac{b}{2a} = -\frac{7}{2\left(-\frac{1}{3}\right)} = \frac{21}{2} = 10.5$$

La coordenada y correspondiente es

$$f\left(\frac{21}{2}\right) = -\frac{1}{3}\left(\frac{21}{2}\right)^2 + 7\left(\frac{21}{2}\right) + 30 = \frac{267}{4} = 66.75$$

Por consiguiente, el vértice de la parábola es $\left(\frac{21}{2}, \frac{267}{4}\right)$. Como la parábola se abre hacia abajo, su vértice es su punto más alto. Por tanto, la coordenada y del vértice da el valor máximo de P. Esto implica que la utilidad trimestral máxima es de $66,750 [recuerde que $P(x)$ está en miles de dólares] si Cunningham gasta $10,500 por trimestre en publicidad. La gráfica de P se muestra en la figura 46.

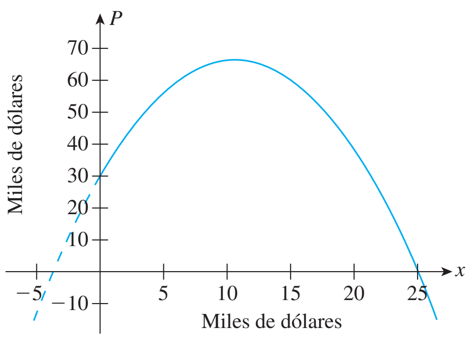


FIGURA 46
Gráfica de la función de utilidad $P(x) = -\frac{1}{3}x^2 + 7x + 30$.

■

Curvas de demanda y oferta

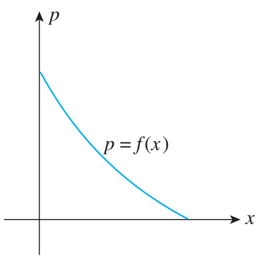


FIGURA 47
Curva de demanda.

En una economía de mercado libre, la demanda del consumidor de un producto particular depende del precio unitario de éste. Una *ecuación de demanda* expresa la relación entre el precio unitario y la cantidad demandada. La gráfica de una ecuación de demanda se llama *curva de demanda*. En general, la cantidad demandada de un producto se reduce a medida que su precio unitario se incrementa, y viceversa. Por consiguiente, una **función de demanda**, definida por $p = f(x)$, donde p mide el precio unitario y x mide el número de unidades del producto en cuestión, por lo general se caracteriza como una función decreciente de x; es decir, $p = f(x)$ disminuye a medida que x aumenta. Como tanto x como p asumen sólo valores no negativos, la curva de demanda es la parte de la gráfica de $f(x)$ situada en el primer cuadrante (figura 47).

EJEMPLO DE APLICACIÓN 3 Demanda de auriculares de diadema bluetooth La función de demanda de una cierta marca de auriculares inalámbricos de diadema bluetooth es

$$p = d(x) = -0.025x^2 - 0.5x + 60$$

donde p es el precio unitario de venta al mayoreo en dólares y x la cantidad demandada cada mes, medida en millares. Trace la curva de demanda correspondiente. ¿Por encima de qué precio ya no habrá demanda? ¿Cuál es la cantidad mensual máxima demandada?

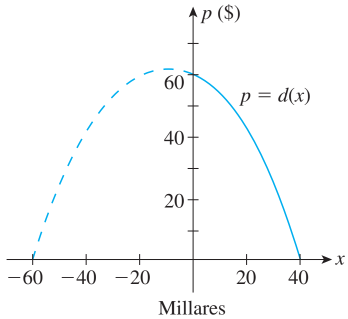


FIGURA 48
Curva de demanda $p = d(x)$.

Solución La función dada es cuadrática, y su gráfica puede trazarse con los métodos que se acaban de desarrollar (figura 48). La intersección con p, 60, da el precio unitario de mayoreo por encima del cual no habrá demanda. Para obtener la cantidad máxima demandada, haga $p = 0$, y se obtiene

$$-0.025x^2 - 0.5x + 60 = 0$$

$$x^2 + 20x - 2400 = 0 \quad \text{Después de multiplicar ambos lados de la ecuación por } -40$$

$$(x + 60)(x - 40) = 0$$

Es decir, $x = -60$ o $x = 40$. Como x debe ser no negativa, descartamos la raíz $x = -60$. Por tanto, el número máximo de auriculares de diadema demandada por mes es 40,000. ■

En un mercado competitivo, también existe una relación entre el precio unitario de un producto y la disponibilidad de éste en el mercado. En general, un incremento del precio unitario del producto induce al productor a incrementar la oferta del producto. En cambio, una reducción del precio unitario en general provoca una reducción de la oferta. La ecuación que expresa la relación entre el precio unitario y la cantidad ofrecida se llama *ecuación de oferta*, y su gráfica se llama *curva de oferta*. Una **función de oferta** definida por $p = f(x)$, en general se caracteriza como una función creciente de x; es decir, $p = f(x)$ se incrementa a medida que x también lo hace. Como tanto x como y asumen sólo valores no negativos, la curva de oferta es la parte de la gráfica de $f(x)$ situada en el primer cuadrante (figura 49).

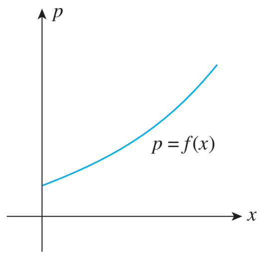


FIGURA 49
Curva de oferta.

EJEMPLO DE APLICACIÓN 4 Oferta de auriculares de diadema bluetooth La función de oferta de una cierta marca de auriculares de diadema inalámbricos bluetooth es

$$p = s(x) = 0.02x^2 + 0.6x + 20$$

donde p es el precio unitario de mayoreo en dólares y x representa la cantidad (en millares) que introducirá al mercado el fabricante. Trace la curva de oferta correspondiente. ¿Cuál es el precio más bajo al cual el proveedor introducirá los auriculares en el mercado?

Solución En la figura 50 aparece la curva de oferta. La intersección con p, 20, da el precio más bajo al cual el proveedor introducirá los auriculares en el mercado.

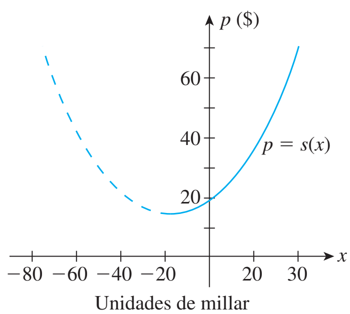


FIGURA 50
Curva de oferta.

■

PORTAFOLIO Deb Farace

PUESTO Gerente senior de cuentas nacionales
INSTITUCIÓN PepsiCo Beverages & Foods

Mi trabajo en la división de cuentas nacionales de PepsiCo Beverages & Foods exige que entienda las matemáticas aplicadas para controlar las variables asociadas con la realización de utilidades, manufactura, producción y aún más importante la venta de nuestros productos a canales de clubes masivos. Ejemplos de estas grandes tiendas de "productos de calidad a un gran precio" son Wal*Mart, Costco y Target. Los tipos de productos que manejo incluyen Gatorade, Tropicana y Quaker.

Nuestros estudios muestran que las ventas a través de las tiendas de abarrotes se están nivelando o disminuyendo en su totalidad en vez de que suceda en las grandes tiendas como las mencionadas. Así que para incrementar al máximo el crecimiento en este segmento de nuestro negocio, me entrevisto con las oficinas regionales de compras de estas cadenas y discuto varias opciones de empaque, fijación de precios, promoción de productos y envío para que podamos competir con éxito en el mercado.

Varios factores deben tomarse en cuenta para satisfacer las predicciones financieras de mi empresa. La precisión al utilizar modelos matemáticos es clave en este caso, puesto que muchas variables pueden impactar la toma de decisiones de último minuto. Variables ampliadas de la oferta y la demanda incluyen la época del año, el panorama competitivo, la distribución especial de cupones y otras promociones, los ciclos de ventas y los días festivos, el tamaño de las tiendas y sí, incluso el clima.

Por ejemplo, es natural suponer que cuando hace calor las personas comprarán más productos que mitigan la sed como Gatorade. Pero como nuestro negocio es tan preciso, tenemos que entender matemáticamente cómo el clima afecta las ventas. Un modelo matemático desarrollado por Gatorade analiza datos a largo plazo que impactan las ventas por mercado geográfico debido al clima. Sus hallazgos incluyen ventas exponencialmente incrementadas de Gatorade por cada grado por encima de 90 grados. Comparto nuestro análisis matemático, como este estudio con los compradores, y negocio grandes pedidos con base en pronósticos del clima de último minuto. El resultado: ventas de producto incrementadas con base en las matemáticas.

Equilibrio del mercado

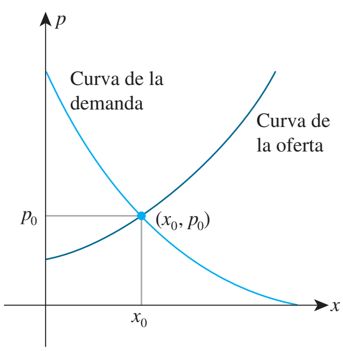


FIGURA 51
El equilibrio del mercado corresponde a (x_0, p_0), el punto en el cual las curvas de la oferta y la demanda se intersecan.

En situaciones de competencia pura, el precio de un producto con el tiempo se estabilizará a un precio dictado por la siguiente condición: la oferta del producto será igual a la demanda de él. Si el precio es demasiado alto, el consumidor no comprará, y si el precio es demasiado bajo, el fabricante no producirá. El **equilibrio del mercado** prevalece cuando la cantidad producida es igual a la cantidad demandada. La cantidad producida en la condición de equilibrio del mercado se llama *cantidad de equilibrio*, y el precio correspondiente se llama *precio de equilibrio*.

El equilibrio del mercado corresponde al punto donde la curva de la demanda y la de la oferta se cortan. En la figura 51, x_0 representa la cantidad de equilibrio y p_0 el precio de equilibrio. El punto (x_0, p_0) queda en la curva de la oferta y por consiguiente satisface la ecuación de la demanda. Por tanto, para localizar el punto (x_0, p_0), y por consiguiente la cantidad y el precio de equilibrio, se resuelven las ecuaciones de la demanda y la oferta de forma simultánea para x y p. Para soluciones significativas, x y p deben ser positivas.

EJEMPLO DE APLICACIÓN 5 Equilibrio del mercado Remítase a los ejemplos 3 y 4. La función de demanda de una cierta marca de auriculares de diadema inalámbricos bluetooth es

$$p = d(x) = -0.025x^2 - 0.5x + 60$$

y la función de demanda correspondiente es

$$p = s(x) = 0.02x^2 + 0.6x + 20$$

donde p está en dólares y x en millares. Determine la cantidad y el precio de equilibrio.

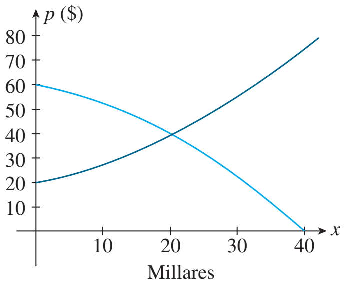


FIGURA 52
La curva de la oferta y la curva de la demanda se intersecan en el punto (20, 40).

Solución Resolvemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$p = -0.025x^2 - 0.5x + 60$$
$$p = 0.02x^2 + 0.6x + 20$$

Al sustituir la primera ecuación en la segunda se obtiene

$$-0.025x^2 - 0.5x + 60 = 0.02x^2 + 0.6x + 20$$

lo cual es equivalente a

$$0.045x^2 + 1.1x - 40 = 0$$
$$45x^2 + 1100x - 40{,}000 = 0 \quad \text{Multiplique por 1000.}$$
$$9x^2 + 220x - 8000 = 0 \quad \text{Divida entre 5.}$$
$$(9x + 400)(x - 20) = 0$$

Por tanto, $x = -\frac{400}{9}$ o $x = 20$. Puesto que x debe ser no negativa, se descarta la raíz $x = -\frac{400}{9}$. Por consiguiente, la cantidad de equilibrio es 20,000 auriculares de diadema. El precio de equilibrio es

$$p = 0.02(20)^2 + 0.6(20) + 20 = 40$$

o $40 por auricular (figura 52).

2.6 Ejercicios de autoevaluación

Dada la función cuadrática

$$f(x) = 2x^2 - 3x - 3$$

1. Determine el vértice de la parábola.
2. Determine las intersecciones con x (si las hay) de la parábola.
3. Trace la parábola.

Las soluciones de los ejercicios de autoevaluación 2.6 se encuentran en la página 132.

2.6 Preguntas de concepto

1. Considere la función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$.
   a. ¿Cuál es el dominio de f?
   b. ¿Qué puede decir sobre la parábola si $a > 0$?
   c. ¿Cuál es el vértice de la parábola en función de a y b?
   d. ¿Cuál es el eje de simetría de la parábola?
2. a. ¿Qué es una función de demanda? ¿Una función de oferta?
   b. ¿Qué es el equilibrio del mercado?
   c. ¿Qué son la cantidad de equilibrio y el precio de equilibrio? ¿Cómo determina estas cantidades?

2.6 Ejercicios

En los ejercicios 1-18 determine el vértice, las intersecciones con *x* (si las hay) y trace la parábola.

1. $f(x) = x^2 + x - 6$
2. $f(x) = 3x^2 - 5x - 2$
3. $f(x) = x^2 - 4x + 4$
4. $f(x) = x^2 + 6x + 9$
5. $f(x) = -x^2 + 5x - 6$
6. $f(x) = -4x^2 + 4x + 3$
7. $f(x) = 3x^2 - 5x + 1$
8. $f(x) = -2x^2 + 6x - 3$
9. $f(x) = 2x^2 - 3x + 3$
10. $f(x) = 3x^2 - 4x + 2$
11. $f(x) = x^2 - 4$
12. $f(x) = 2x^2 + 3$
13. $f(x) = 16 - x^2$
14. $f(x) = 5 - x^2$
15. $f(x) = \frac{3}{8}x^2 - 2x + 2$
16. $f(x) = \frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{2}x + 1$
17. $f(x) = 1.2x^2 + 3.2x - 1.2$
18. $f(x) = 2.3x^2 - 4.1x + 3$

En los ejercicios 19-24 determine los puntos de intersección de las gráficas de las funciones.

19. $f(x) = -x^2 + 4$; $g(x) = x + 2$

20. $f(x) = x^2 - 5x + 6$; $g(x) = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$

21. $f(x) = -x^2 + 2x + 6$; $g(x) = x^2 - 6$

22. $f(x) = x^2 - 2x - 2$; $g(x) = -x^2 - x + 1$

23. $f(x) = 2x^2 - 5x - 8$; $g(x) = -3x^2 + x + 5$

24. $f(x) = 0.2x^2 - 1.2x - 4$; $g(x) = -0.3x^2 + 0.7x + 8.2$

Con las ecuaciones de la demanda en los ejercicios 25 y 26, donde *x* representa la cantidad demandada en millares y *p* es el precio unitario en dólares, a) trace la curva de la demanda y b) determine la cantidad demandada cuando el precio unitario es $*p*.

25. $p = -x^2 + 36$; $p = 11$ **26.** $p = -x^2 + 16$; $p = 7$

Con las ecuaciones de la oferta en los ejercicios 27 y 28, donde *x* es la cantidad ofertada en millares y *p* es el precio unitario en dólares, a) trace la curva de la demanda y b) determine el precio al cual el fabricante introducirá al mercado 2000 unidades.

27. $p = 2x^2 + 18$ **28.** $p = x^2 + 16x + 40$

En los ejercicios 29-32 con cada par de ecuaciones de la oferta y la demanda, donde *x* representa la cantidad demandada en millares y *p* el precio unitario en dólares, determine la cantidad de equilibrio y el precio de equilibrio.

29. $p = -2x^2 + 80$ y $p = 15x + 30$

30. $p = -x^2 - 2x + 100$ y $p = 8x + 25$

31. $11p + 3x - 66 = 0$ y $2p^2 + p - x = 10$

32. $p = 60 - 2x^2$ y $p = x^2 + 9x + 30$

33. SOBREVIVIENTES AL CÁNCER El número de estadounidenses vivos que había tenido un diagnóstico de cáncer se ha incrementado drásticamente desde 1971. En parte, esto se debe a que se realizan más exámenes y a mejores tratamientos para algunos tipos de cáncer. Asimismo se debe a que la población es más anciana, y el cáncer en gran medida es una enfermedad de la senectud. El número de sobrevivientes al cáncer (en millones) entre 1975 ($t = 0$) y 2000 ($t = 25$) es aproximadamente

$$N(t) = 0.0031t^2 + 0.16t + 3.6 \qquad (0 \le t \le 25)$$

a. ¿Cuántos estadounidenses vivos tuvieron un diagnóstico de cáncer en 1975? ¿En 2000?

b. Suponga que la tendencia continuó, ¿cuántos sobrevivientes al cáncer había en 2005?

Fuente: National Cancer Institute

34. PREVALENCIA DE PACIENTES CON ALZHEIMER Con base en un estudio realizado en 1997, el porcentaje de la población estadounidense por edad afectada por la enfermedad de Alzheimer, está dado por la función

$$P(x) = 0.0726x^2 + 0.7902x + 4.9623 \qquad (0 \le x \le 25)$$

donde x está en años, con $x = 0$ correspondiente a la edad de 65 años. ¿Qué porcentaje de la población estadounidense de 65 años de edad se espera que tenga la enfermedad de Alzheimer? ¿A la edad de 90?

Fuente: Alzheimer's Association

35. MOVIMIENTO DE UNA PIEDRA Una piedra se lanza directamente hacia arriba desde la azotea de un edificio de 80 pies. La distancia de la piedra con respecto al suelo en cualquier momento (en segundos) es

$$h(t) = -16t^2 + 64t + 80$$

a. Trace la gráfica de h.

b. ¿En qué momento la piedra alcanza el punto más alto? ¿Cuál es la máxima altura de la piedra desde el suelo?

36. MAXIMIZACIÓN DE LA UTILIDAD Lynbrook West, un complejo de departamentos, se compone de 100 departamentos de dos recámaras. La utilidad mensual por la renta de x departamentos es

$$P(x) = -10x^2 + 1760x - 50{,}000$$

dólares. ¿Cuántos departamentos se deben rentar para maximizar la utilidad mensual? ¿Cuál es la máxima utilidad mensual?

37. MAXIMIZACIÓN DE LA UTILIDAD La utilidad mensual estimada por la Cannon Precision Instruments Corporation en la fabricación y venta de x unidades de sus cámaras modelo M1 es

$$P(x) = -0.04x^2 + 240x - 10{,}000$$

dólares. Determine cuantas cámaras debe fabricar Cannon para maximizar sus utilidades.

38. EFECTO DE LA PUBLICIDAD EN LAS UTILIDADES La relación entre la utilidad trimestral de Cunningham Realty, $P(x)$ y la suma de dinero x gastada en publicidad por trimestre está descrita por la función

$$P(x) = -\frac{1}{8}x^2 + 7x + 30 \qquad (0 \le x \le 50)$$

donde tanto $P(x)$ como x están en miles de dólares.

a. Trace la gráfica de P.

b. Determine la suma de dinero que la empresa debe gastar en publicidad por trimestre para maximizar sus utilidades trimestrales.

39. MAXIMIZACIÓN DE LOS INGRESOS El ingreso mensual R (en cientos de dólares) realizado en la venta de rasuradoras eléctricas Royal está relacionado con el precio unitario p (en dólares) por la ecuación

$$R(p) = -\frac{1}{2}p^2 + 30p$$

a. Trace la gráfica de R.

b. ¿Con qué precio unitario se maximiza el ingreso?

40. CUENTAS DE MENSAJERÍA INSTANTÁNEA Se espera que el número de cuentas de mensajería instantánea (MI) de una empresa crezca con base en la función

$$N(t) = 2.96t^2 + 11.37t + 59.7 \qquad (0 \le t \le 5)$$

donde $N(t)$ está en millones y t en años, con $t = 0$ correspondiente al inicio de 2006.

a. ¿Cuántas cuentas de mensajería instantánea había a principios de 2006?

b. ¿Qué cantidad de cuentas de mensajería instantánea se espera a principios de 2010?

Fuente: The Radical Group

41. **ENERGÍA SOLAR** Más y más empresas y propietarios de casas instalan paneles solares en sus azoteas para extraer energía de los rayos solares. Según el Departamento de Energía de Estados Unidos, se espera que el consumo de kilowatts-hora de celda solar en dicho país (en millones) sea

$$S(t) = 0.73t^2 + 15.8t + 2.7 \qquad (0 \le t \le 8)$$

en el año t, con $t = 0$ correspondiente al inicio de 2000. ¿Cuál será el consumo de kilowatt-hora de celda solar proyectado en Estados Unidos a principios de 2006? ¿A principios de 2008?

Fuente: U.S. Department of Energy

42. **IMPUESTO PREDIAL UNIFAMILIAR PROMEDIO** Con base en datos de 298 de 351 ciudades y comunidades en Massachusetts, el impuesto predial unifamiliar promedio de 1997 a 2007 es aproximadamente

$$T(t) = 7.26t^2 + 91.7t + 2360 \qquad (0 \le t \le 10)$$

donde $T(t)$ está en dólares y t en años, con $t = 0$ correspondiente a 1997.

a. ¿Cuál fue el impuesto predial sobre una casa unifamiliar en Massachusetts en 1997?

b. Si la tendencia continua, ¿cuál será el impuesto predial en 2010?

Fuente: Massachusetts Department of Revenue

43. **INGRESOS DE POLO RALPH LAUREN** Citando las fuertes ventas y beneficios de una nueva división que diseñará marcas de estilo de vida para tiendas departamentales y especializadas, la empresa proyecta que el ingreso sea (en miles de millones de dólares)

$$R(t) = -0.06t^2 + 0.69t + 3.25 \qquad (0 \le t \le 3)$$

en el año t, donde $t = 0$ corresponde a 2005.

a. ¿Cuál fue el ingreso de la empresa en 2005?

b. Determine $R(1)$, $R(2)$ y $R(3)$ e interprete sus resultados.

Fuente: Reportes de la empresa

44. **FUNCIONES DE OFERTA** La función de oferta de la lámpara de escritorio Luminar es

$$p = 0.1x^2 + 0.5x + 15$$

donde x es la cantidad ofrecida (en miles) y p es el precio unitario en dólares. Trace la gráfica de la función de oferta. ¿Qué precio unitario inducirá al fabricante a introducir 5000 lámparas al mercado?

45. **EQUILIBRIO DEL MERCADO** Las funciones de demanda y oferta semanales de tiendas de 5 × 7 Sportsman son

$$p = -0.1x^2 - x + 40$$
$$p = 0.1x^2 + 2x + 20$$

respectivamente, donde p está en dólares y x en cientos. Determine la cantidad y el precio de equilibrio.

46. **EQUILIBRIO DEL MERCADO** La gerencia de Titan Tire Company determinó que las funciones de demanda y oferta semanales de sus llantas Super Titan son

$$p = 144 - x^2$$
$$p = 48 + \frac{1}{2}x^2$$

respectivamente, donde p está en dólares y x en millares. Determine la cantidad y el precio de equilibrio.

47. **LEY DE POISEUILLE** De acuerdo con la ley descubierta por el físico Poiseuille del siglo XIX, la velocidad (en centímetros/segundo) de la sangre a r cm del eje central de una arteria es

$$v(r) = k(R^2 - r^2)$$

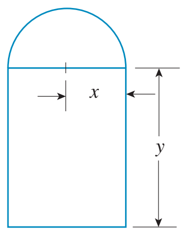
donde k es una constante y R es el radio de la arteria. Suponga que para una cierta arteria, $k = 1000$ y $R = 0.2$ de modo que $v(r) = 1000(0.04 - r^2)$.

a. Trace la gráfica de v.

b. ¿Con qué valor de r es $v(r)$ máxima? ¿Mínima? Interprete sus resultados.

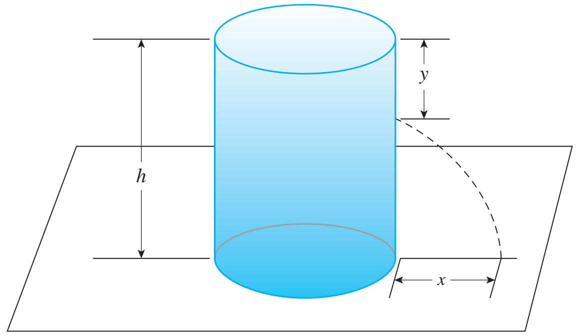
48. **MOVIMIENTO DE UNA PELOTA** Una pelota es lanzada directamente hacia arriba desde el suelo y alcanza una altura de $s(t)$ $-16t^2 + 128t + 4$ pies sobre el suelo después de t segundos. ¿Cuándo la pelota alcanza su altura máxima? ¿Cuál es la altura máxima?

49. **DISEÑO DE UNA VENTANA NORMAN** Una ventana Norman tiene la forma de un rectángulo rematado por un semicírculo (vea la figura adjunta). Si una ventana Norman tiene que tener un perímetro de 28 pies, ¿cuáles deberán ser sus dimensiones para que deje pasar la máxima cantidad de luz?



50. **DISTANCIA DEL FLUJO DE AGUA** Un tanque cilíndrico de h pies de altura se llena de agua hasta el borde. Si se perfora un agujero en el costado del tanque, la corriente de agua que sale llegará al suelo a una distancia de x pies de la base del tanque donde $x = 2\sqrt{y(h - y)}$ (vea la figura adjunta). Localice el agujero de modo que x sea máxima. ¿Cuál es el valor máximo de x?

Sugerencia: Es suficiente maximizar la expresión para x^2. (¿Por qué?)



En los ejercicios 51-55 determine si el enunciado es verdadero o falso. Si es verdadero, explique por qué lo es. Si es falso, explique o dé un ejemplo para demostrar por qué lo es

51. Si $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$, entonces

$$f\left(\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right) = 0$$

52. La función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ no tiene intersecciones con x si $b^2 - 4ac > 0$.

53. Si a y c tienen signos opuestos, entonces la parábola con ecuación $y = ax^2 + bx + c$ corta el eje x en dos puntos distintos.

54. Si $b^2 = 4ac$, entonces la gráfica de la función $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ toca el eje x en exactamente un punto.

55. Si la función de utilidad es $P(x) = ax^2 + bx + c$, donde x es el número de unidades producidas y vendidas, entonces el nivel de producción que rinde la utilidad mínima es $-\frac{b}{2a}$ unidades.

56. Sea $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$. Completando el cuadrado en x, demuestre que

$$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$$

2.6 Soluciones de los ejercicios de autoevaluación

1. En este caso, $a = 2$, $b = -3$ y $c = -3$. La coordenada x del vértice es

$$-\frac{b}{2a} = -\frac{(-3)}{2(2)} = \frac{3}{4}$$

La coordenada y correspondiente es

$$f\left(\frac{3}{4}\right) = 2\left(\frac{3}{4}\right)^2 - 3\left(\frac{3}{4}\right) - 3 = \frac{9}{8} - \frac{9}{4} - 3 = -\frac{33}{8}$$

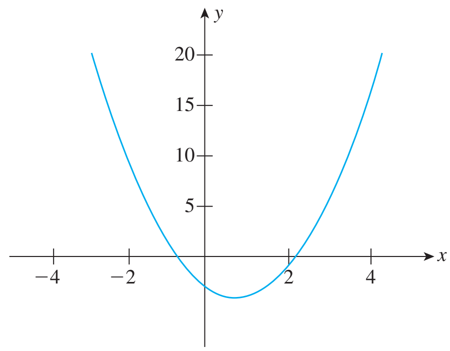
Por consiguiente, el vértice de la parábola es $\left(\frac{3}{4}, -\frac{33}{8}\right)$.

2. Al resolver la ecuación $2x^2 - 3x - 3 = 0$, encontramos

$$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4(2)(-3)}}{2(2)} = \frac{3 \pm \sqrt{33}}{4}$$

Puesto que las intersecciones con x son $\frac{3}{4} - \frac{\sqrt{33}}{4} \approx -0.7$ y $\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{33}}{4} \approx 2.2$.

3. Como $a = 2 > 0$, la parábola se abre hacia arriba. La intersección con y es -3. La gráfica de la parábola se muestra en la figura adjunta.



La gráfica de $f(x) = 2x^2 - 3x - 3$

USO DE LA TECNOLOGÍA

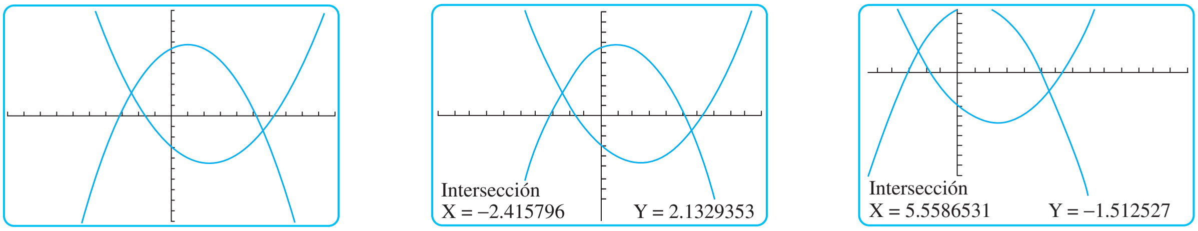
Localización de los puntos de intersección de dos gráficas

Se puede utilizar una calculadora graficadora para localizar el punto o puntos de intersección de las gráficas de dos funciones.

EJEMPLO 1 Localice los puntos de intersección de las gráficas de

$$f(x) = 0.3x^2 - 1.4x - 3 \quad \text{y} \quad g(x) = -0.4x^2 + 0.8x + 6.4$$

Solución Las gráficas tanto de f como g en la ventana de visualización estándar se muestran en la figura T1a. Con TRACE y ZOOM o la función para determinar los puntos de intersección de dos gráficas de su calculadora graficadora encontramos los puntos de intersección, con una precisión de cuatro decimales, son $(-2.4158, 2.1329)$ (figura T1b) y $(5.5587, -1.5125)$ (figura T1c).



(a) (b) (c)

FIGURA **T1**

(a) Gráficas de *f* y *g* en la ventana de visualización estándar; (b) y (c) pantallas de intersección T1-83/84. ■

EJEMPLO 2 Considere las funciones de demanda y oferta.

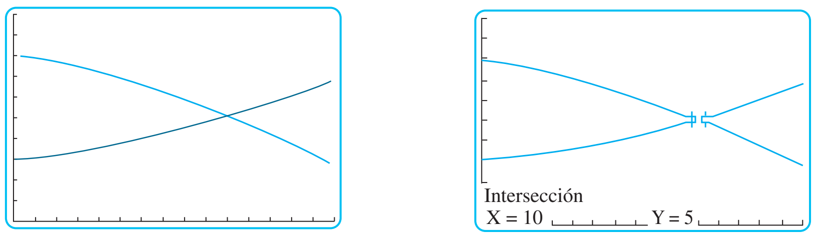
$$p = d(x) = -0.01x^2 - 0.2x + 8 \quad \text{y} \quad p = s(x) = 0.01x^2 + 0.1x + 3$$

a. Trace las gráficas de d y s en la pantalla de visualización $[0, 15] \times [0, 10]$.

b. Compruebe que el punto de equilibrio es (10, 5).

Solución

a. Las gráficas de d y s se muestran en la figura T2a.



(a) (b)

FIGURA **T2**

(a) Gráficas de *d* y *s* en la pantalla $[0, 15] \times [0, 10]$; (b) pantalla de intersección T1-83/84.

b. Con TRACE y ZOOM o la función para determinar el punto de intersección de dos gráficas, $x = 10$ y $y = 5$ (figura T2b), así que el punto de equilibrio es (10, 5), como se obtuvo con anterioridad. ■

EJERCICIOS CON TECNOLOGÍA

En los ejercicios 1-6 determine los puntos de intersección de las gráficas de las funciones. Exprese su respuesta con una precisión de cuatro decimales.

1. $f(x) = 1.2x + 3.8$; $g(x) = -0.4x^2 + 1.2x + 7.5$
2. $f(x) = 0.2x^2 - 1.3x - 3$; $g(x) = -1.3x + 2.8$
3. $f(x) = 0.3x^2 - 1.7x - 3.2$; $g(x) = -0.4x^2 + 0.9x + 6.7$
4. $f(x) = -0.3x^2 + 0.6x + 3.2$; $g(x) = 0.2x^2 - 1.2x - 4.8$
5. $f(x) = -1.8x^2 + 2.1x - 2$; $g(x) = 2.1x - 4.2$
6. $f(x) = 1.2x^2 - 1.2x + 2$; $g(x) = -0.2x^2 + 0.8x + 2.1$

7. **EQUILIBRIO DEL MERCADO** Las funciones de demanda y oferta mensuales de una cierta marca de reloj de pared son

$$p = -0.2x^2 - 1.2x + 50$$
$$p = 0.1x^2 + 3.2x + 25$$

respectivamente, donde p está en dólares y x en cientos.

a. Trace las gráficas de ambas funciones en una pantalla de visualización apropiada.

b. Determine la cantidad y el precio de equilibrio.

8. **EQUILIBRIO DEL MERCADO** La cantidad demandada x (en cientos) de cámaras miniatura Mikado/semana está relacionada con el precio unitario p (en dólares) por

$$p = -0.2x^2 + 80$$

La cantidad x (en cientos) que el fabricante desear introducir en el mercado está relacionada con el precio unitario p (en dólares) por

$$p = 0.1x^2 + x + 40$$

a. Trace las gráficas de ambas funciones en una ventana de visualización apropiada.

b. Determine la cantidad y el precio de equilibrio.

2.7 Funciones y modelos matemáticos

Modelos matemáticos

Uno de los objetivos fundamentales en este libro es mostrar cómo las matemáticas y, en particular el cálculo, pueden utilizarse para resolver problemas reales como los que se presentan en el mundo de los negocios y en las ciencias sociales, físicas y de la vida. Ya vio algunos de estos problemas. He aquí más ejemplos de fenómenos reales que analizaremos en éste y en capítulos subsiguientes.

- El calentamiento global (pág. 135)
- La solvencia del fondo de Seguridad Social de Estados Unidos (pág. 136)
- El número de usuarios de Internet en China (pág. 159)
- El crecimiento del número de cuentas de mensajería instantánea móvil (pág. 597)
- Inversiones en fondos de cobertura (pág. 602)
- El consumo de gasolina proyectado en Estados Unidos (pág. 793)

Sin importar el campo del cual provenga el problema real, éste se analiza con un proceso llamado **modelado matemático**. Los cuatro pasos en este proceso, como se ilustra en la figura 53, son los siguientes.

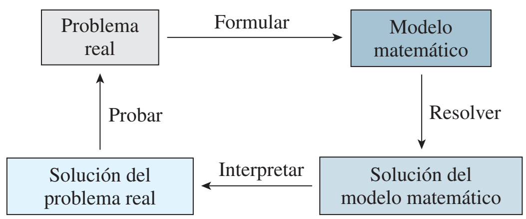


FIGURA **53**

1. **Formular** Dado un problema real, nuestra primera tarea es formular el problema con un lenguaje matemático. Las numerosas técnicas utilizadas en la construcción de modelos matemáticos van desde la consideración teórica del problema hasta la interpretación de los datos asociados con el problema. Por ejemplo, el modelo matemático que produce la cantidad acumulada en cualquier momento, cuando se deposita cierta suma de dinero en un banco, puede derivarse teóricamente (capítulo 4). Por otra parte, muchos de los modelos matemáticos en este libro se construyen estudiando los datos asociados con el problema (vea Uso de la tecnología, páginas 144-148). En el cálculo nos interesa sobre todo cómo una variable (dependiente) depende de una o más variables (independientes). Por consiguiente, la mayoría de los modelos matemáticos implicará funciones de una o más variables o ecuaciones que las definan (implícitamente).
2. **Resolver** Una vez que se construye el modelo matemático, podemos utilizar técnicas matemáticas apropiadas, las cuales se desarrollarán a lo largo del libro, para resolver el problema.
3. **Interpretar** Teniendo en cuenta que la solución obtenida en el paso 2 es justo la solución del modelo matemático, tenemos que interpretar los resultados en el contexto del problema real original.
4. **Probar** Algunos modelos matemáticos de aplicaciones reales describen situaciones con una precisión completa. Por ejemplo, el modelo que describe un depósito en una cuenta bancaria da la cantidad exacta acumulada en la cuenta en cualquier momento. Pero otros modelos matemáticos dan, en el mejor de los casos, una descripción aproximada del problema real. En este caso tener que probar la precisión del modelo observando qué tan bien describe el problema real y predice el comportamiento pasado o futuro. Si estos resultados no son satisfactorios, entonces puede que tengamos que volver a considerar los supuestos hechos en la construcción del modelo o, en el peor de los casos, volver al paso 1.

Numerosos fenómenos reales, incluidos los que se mencionaron al principio de esta sección, se modelan por medio de una función apropiada.

En lo que sigue, recordaremos algunas funciones conocidas y daremos ejemplos de fenómenos reales que se modelan con estas funciones.

Funciones polinomiales

Una **función polinomial** de grado n es una función de la forma

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0 \qquad (a_n \neq 0)$$

donde n es un entero no negativo y los números $a_0, a_1, \ldots, a_n$ son constantes llamadas **coeficientes** de la función polinomial. Por ejemplo, las funciones

$$f(x) = 2x^5 - 3x^4 + \frac{1}{2}x^3 + \sqrt{2}x^2 - 6$$

$$g(x) = 0.001x^3 - 0.2x^2 + 10x + 200$$

son funciones polinomiales de grado 5 y 3, respectivamente. Observe que una función polinomial se define por cada valor de x y, por tanto, su dominio es $(-\infty, \infty)$.

Una función polinomial de grado 1 ($n = 1$) tiene la forma

$$y = f(x) = a_1x + a_0 \qquad (a_1 \neq 0)$$

y es la ecuación de una recta en la forma pendiente-ordenada con pendiente $m = a_1$ e intersección y, $b = a_0$ (vea la sección 2.2). Por eso, una función polinomial de grado 1 se llama función lineal.

Las funciones lineales se utilizan ampliamente en el modelado matemático por dos razones importantes. Primera, algunos modelos son de naturaleza *lineal*. Por ejemplo, la fórmula para convertir temperatura de Celsius (°C) a Fahrenheit (°F) es $F = \frac{9}{5}C + 32$ y F es una función lineal de C. Segunda, algunos fenómenos naturales exhiben características lineales dentro de un pequeño rango de valores y, por consiguiente, pueden modelarse por medio de una función lineal restringida a un pequeño intervalo.

Una función polinomial de grado 2 tiene la forma

$$y = f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0 \qquad (a_2 \neq 0)$$

o más simplemente, $y = ax^2 + bx + c$, y se llama función cuadrática.

Las funciones cuadráticas sirven como modelos matemáticos de muchos fenómenos, como lo muestra el siguiente ejemplo.

EJEMPLO DE APLICACIÓN 1 Calentamiento global El incremento del bióxido de carbono (CO_2) en la atmósfera es una importante causa del calentamiento global. La curva de Keeling, nombrada en honor a Charles David Keeling, profesor de la Scripps Institution of Oceanography, da la cantidad promedio de CO_2, medida en volumen de partes por millón (ppmv), en la atmósfera desde principios de 1958 a 2007. Aun cuando los datos estuvieron disponibles en cada año de este intervalo de tiempo, construiremos la curva con base sólo en los siguientes datos seleccionados al azar.

Año	1958	1970	1974	1978	1985	1991	1998	2003	2007
Cantidad	315	325	330	335	345	355	365	375	380

La **curva de dispersión** asociada con estos datos se muestra en la figura 54a. Un modelo matemático que da la cantidad aproximada de CO_2 en la atmósfera durante este periodo es

$$A(t) = 0.010716t^2 + 0.8212t + 313.4 \qquad (1 \leq t \leq 50)$$

donde t está en años, con $t = 1$ correspondiente al inicio de 1958. La gráfica de A se muestra en la figura 54b.

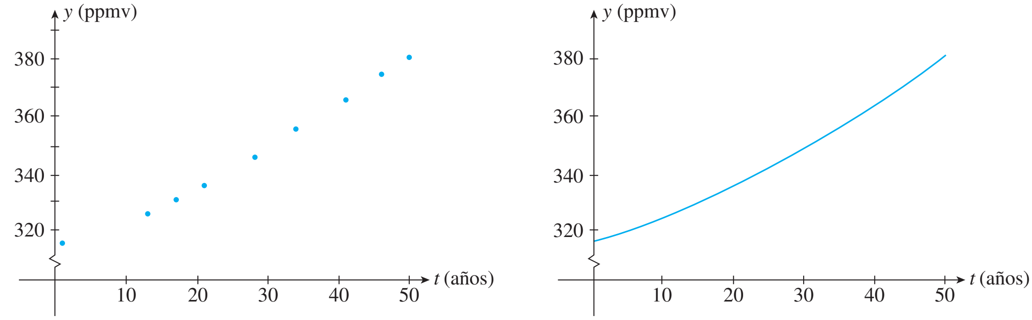


FIGURA **54** **(a)** Gráfica de dispersión **(b)** Gráfica de *A*

a. Utilice el modelo para estimar la cantidad promedio de CO_2 atmosférico a principios de 1980 ($t = 23$).

b. Suponga que la tendencia continuó y utilice el modelo para predecir la cantidad promedio de CO_2 atmosférico a principios de 2010.

Fuente: Scripps Insitution of Oceanography

Solución

a. La cantidad promedio de bióxido de carbono atmosférico a principios de 1980 es

$$A(23) = 0.010716(23)^2 + 0.8212(23) + 313.4 \approx 337.96$$

o aproximadamente 338 ppmv.

b. Suponiendo que la tendencia continúa, la cantidad promedio de CO_2 a principios de 2010 será

$$A(53) = 0.010716(53)^2 + 0.8212(53) + 313.4 \approx 387.02$$

o aproximadamente 387 ppmv.

El siguiente ejemplo utiliza un polinomio de grado 4 para ayudarnos a construir un modelo que describe los activos proyectados del fondo de Seguridad Social.

EJEMPLO DE APLICACIÓN 2 Activos del fondo de Seguridad Social Los activos proyectados del fondo de Seguridad Social (en billones de dólares) de 2008 a 2040 se dan en la tabla siguiente:

Año	2008	2011	2014	2017	2020	2023	2026	2029	2032	2035	2038	2040
Activos	2.4	3.2	4.0	4.7	5.3	5.7	5.9	5.6	4.9	3.6	1.7	0

La gráfica de dispersión asociada con estos datos se muestra en la figura 55a, donde $t = 0$ corresponde a 2008. Un modelo matemático que dé el valor aproximado de los activos del fondo $A(t)$, (billones de dólares) en el año t es

$$A(t) = -0.00000268t^4 - 0.000356t^3 + 0.00393t^2 + 0.2514t + 2.4094 \qquad (0 \le t \le 32)$$

La gráfica de $A(t)$ se muestra en la figura 55b. (Se le pedirá que construya este modelo en el ejercicio 22, Ejercicios 2.7 de Uso de la tecnología).

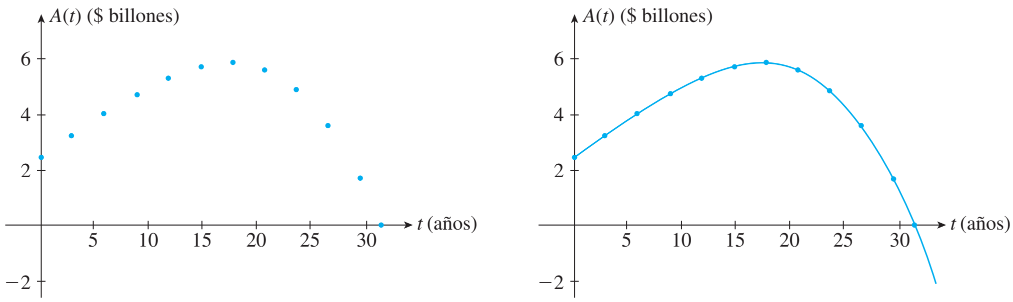


FIGURA **55** **(a)** Gráfica de dispersión **(b)** Gráfica de *A*

a. Los primeros nacidos durante la posguerra cumplirán 65 años en 2011. ¿Cuáles serán los activos del fondo del sistema de Seguridad Social en ese año? El último de los nacidos durante la posguerra cumplirá 65 años en 2029. ¿Cuáles serán los activos del fondo en ese año?

b. A menos que los impuestos sobre nómina se incrementen de forma significativa y/o los beneficios se reduzcan drásticamente, es cuestión de tiempo antes de que los activos del sistema actual se agoten. Utilice la gráfica de la función $A(t)$ para estimar el año en el cual se espera que el sistema actual de Seguridad Social quiebre.

Fuente: Social Security Administration

Solución

a. Los activos del fondo de Seguridad Social en 2011 ($t = 3$) serán

$$A(3) = -0.00000268(3)^4 - 0.000356(3)^3 + 0.00393(3)^2 + 0.2514(3) + 2.4094 \approx 3.19$$

o aproximadamente de \$3.19 billones. Los activos del fondo en 2029 ($t = 21$) serán

$$A(21) = -0.00000268(21)^4 - 0.000356(21)^3 + 0.00393(21)^2 + 0.2514(21) + 2.4094 \approx 5.60$$

o aproximadamente \$5.60 billones.

b. En la figura 55b, la gráfica de A cruza el eje t en aproximadamente $t = 32$. Así que a menos que el sistema actual cambie, se espera que quiebre en 2040. (En este momento el primero de los nacidos durante la posguerra tendría 94 años y el último 76). ■

Funciones racionales y elevadas a una potencia

Otra clase importante de funciones es las funciones racionales. Una **función racional** es simplemente el cociente de dos polinomios. Ejemplos de funciones racionales son

$$F(x) = \frac{3x^3 + x^2 - x + 1}{x - 2}$$

$$G(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$$

En general, una función racional tiene la forma

$$R(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

donde $f(x)$ y $g(x)$ son funciones polinomiales. Como la división entre cero no está permitida, concluimos que el dominio de una función racional es el conjunto de todos los números reales, excepto los ceros de g, es decir, las raíces de la ecuación $g(x) = 0$. Por tanto, el dominio de la función F es el conjunto de todos los números excepto $x = 2$, mientras que el dominio de la función g es el conjunto de todos los números excepto los que satisfacen $x^2 - 1 = 0$, o $x = \pm 1$.

Funciones de la forma

$$f(x) = x^r$$

donde r es cualquier número real, se llaman **funciones elevadas a una potencia**. Encontramos ejemplos de funciones elevadas a una potencia al principio de nuestro trabajo. Por ejemplo, las funciones

$$f(x) = \sqrt{x} = x^{1/2} \quad \text{y} \quad g(x) = \frac{1}{x^2} = x^{-2}$$

son funciones elevadas a una potencia.

Muchas de las funciones que encontraremos más adelante implicarán combinaciones de las funciones aquí presentadas. Por ejemplo, las siguientes funciones son combinaciones de tales funciones:

$$f(x) = \sqrt{\frac{1 - x^2}{1 + x^2}}$$

$$g(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 4}$$

$$h(x) = (1 + 2x)^{1/2} + \frac{1}{(x^2 + 2)^{3/2}}$$

Como con los polinomios de tercer grado o mayor, el análisis de estas funciones se facilita con las herramientas de cálculo que más adelante se desarrollarán.

En el siguiente ejemplo, utilizamos funciones elevadas a una potencia para construir un modelo que describa los costos de manejo de un automóvil.

EJEMPLO DE APLICACIÓN 3 Costos de manejo Un estudio de los costos de manejo basado en un sedán 2008 de tamaño mediano determinó los siguientes costos promedio (pagos del automóvil, gasolina, seguro, mantenimiento y depreciación) en centavos por milla.

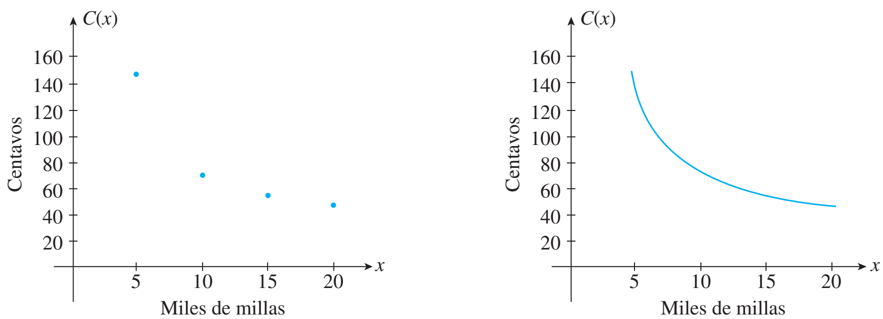
Millas/año	5000	10,000	15,000	20,000
Costo/milla, y (¢)	147.52	71.90	55.20	46.90

Un modelo matemático (que utiliza técnicas de mínimos cuadrados) que da el costo promedio en centavos por milla es

$$C(x) = \frac{1735.2}{x^{1.72}} + 38.6$$

donde x (en millares) denota el número de millas que el automóvil es manejado en 1 año. La gráfica de dispersión asociada con estos datos y la gráfica de C se muestran en la figura 56. Con este modelo calcule el costo de manejar un sedán 2008 de tamaño mediano 8000 y 18,000 millas por año.

Fuente: American Automobile Association



(a) Gráfica de dispersión **(b)** Miles de millas

FIGURA 56
(a) Gráfica de dispersión y (b) gráfica del modelo para estimar los costos de manejo.

Solución El costo promedio de manejar un automóvil 8000 millas por año es

$$C(8) = \frac{1735.2}{8^{1.72}} + 38.6 \approx 87.1$$

o aproximadamente 87.1¢/milla. El costo promedio de manejarlo 18,000 millas por año es

$$C(18) = \frac{1735.2}{18^{1.72}} + 38.6 \approx 50.6$$

o aproximadamente 50.6¢/milla. ■

Construcción de modelos matemáticos

Concluimos esta sección mostrando cómo pueden construirse algunos modelos matemáticos por medio de argumentos geométricos y algebraicos elementales.

Pueden seguirse las siguientes indicaciones para construir modelos matemáticos.

Indicaciones para construir modelos matemáticos

1. Asignar una letra a cada variable mencionada en el problema. Si es apropiado, trazar y etiquetar una figura.
2. Encontrar una expresión para la cantidad buscada.
3. Utilizar las condiciones en el problema para escribir la cantidad buscada como una función f de una variable. Observar las restricciones impuestas al dominio de f a partir de las consideraciones físicas del problema.

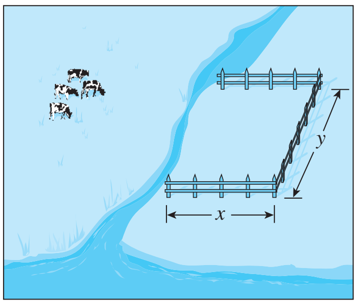


FIGURA 57
Terreno rectangular de pastoreo de x de ancho y y de largo.

EJEMPLO DE APLICACIÓN 4 Cercado de un área La propietaria del Rancho Los Feliz dispone de 3000 yardas de cerca para delimitar un terreno rectangular de pastoreo a lo largo de un tramo recto de un río. No se requiere cerca a lo largo del río. Si x denota el ancho del rectángulo, encuentre una función f en la variable x que dé el área del terreno si utiliza toda la cerca (figura 57).

Solución

1. Se dio esta información.
2. El área del terreno rectangular es $A = xy$. A continuación, observe que el largo de la cerca es $2x + y$ éste debe ser igual a 3000, puesto que se usará toda la cerca; es decir,

$$2x + y = 3000$$

3. En la ecuación vemos que $y = 3000 - 2x$. Al sustituir este valor de y en la expresión para A se obtiene

$$A = xy = x(3000 - 2x) = 3000x - 2x^2$$

Finalmente, observe que tanto x como y deben ser no negativas puesto que representan el ancho y largo de un rectángulo, respectivamente. Por tanto, $x \geq 0$ y $y \geq 0$. Pero el que le sigue es equivalente a $3000 - 2x \geq 0$, o $x \leq 1500$. Así que la función requerida es $f(x) = 3000x - 2x^2$ con dominio $0 \leq x \leq 1500$. ■

Nota Observe que si vemos la función $f(x) = 3000x - 2x^2$ estrictamente como una entidad matemática, entonces su dominio es el conjunto de todos los números reales. Pero consideraciones físicas dictan que su dominio debe restringirse al intervalo [0, 1500]. ■

EJEMPLO DE APLICACIÓN 5 Ingreso realizado por un vuelo charter Si exactamente 200 personas se registran en un vuelo charter, la agencia Leisure World cobra \$300 por persona. Sin embargo, si más de 200 personas lo hacen (suponga que este es el caso), entonces cada pasaje se reduce en \$1 por cada persona adicional. Sea x el número de pasajeros superior a 200, encuentre una función que dé el ingreso obtenido por la empresa.

Solución

1. Se dio esta información.
2. Si hay x pasajeros por encima de 200, entonces el número de pasajeros que se registra en el vuelo es $200 + x$. Además, el pasaje será $(300 - x)$ dólares por pasajero.
3. El ingreso será

$$\begin{aligned} R &= (200 + x)(300 - x) && \text{Número de pasajeros} \times \text{el pasaje por persona} \\ &= -x^2 + 100x + 60{,}000 \end{aligned}$$

Queda claro que x debe ser no negativa, y $300 - x \geq 0$ o $x \leq 300$. Así que la función requerida es $f(x) -x^2 + 100x + 60{,}000$ con dominio $[0, 300]$. ■

2.7 Ejercicio de autoevaluación

El Cunningham Day Care Center desea cercar un campo de juego de forma rectangular de 500 pies^2 de área con una cerca de madera. Encuentre una función que dé la cantidad de cerca requerida en función del ancho x del campo rectangular de juego.

La solución al ejercicio de autoevaluación 2.7 se encuentra en la página 144.

2.7 Preguntas de concepto

1. Describa qué es el modelado matemático.
2. Defina (a) una función polinomial y (b) una función racional. Dé un ejemplo de cada una.

2.7 Ejercicios

En los ejercicios 1-6 determine si la función dada es una función polinomial, una función racional o alguna otra función. Mencione el grado de cada función polinomial.

1. $f(x) = 3x^6 - 2x^2 + 1$
2. $f(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x - 3}$
3. $G(x) = 2(x^2 - 3)^3$
4. $H(x) = 2x^{-3} + 5x^{-2} + 6$
5. $f(t) = 2t^2 + 3\sqrt{t}$
6. $f(r) = \dfrac{6r}{(r^3 - 8)}$
7. **Reacción de una rana a un fármaco** Experimentos realizados por A. J. Clark sugiere que la respuesta $R(x)$ del músculo cardiaco de una rana a la inyección de x unidades de acetilcolina (como porcentaje del efecto máximo posible del fármaco) puede ser representado de forma aproximada por la función racional

$$R(x) = \frac{100x}{b + x} \qquad (x \geq 0)$$

donde b es una constante positiva que depende de la rana específica.

a. Si una concentración de 40 unidades de acetilcolina produce una respuesta de 50% en una cierta rana, encuentre la "función de respuesta" para esta rana.

b. Con el modelo encontrado en la parte (a), encuentre la respuesta del músculo cardiaco de la rana cuando se administran 60 unidades de acetilcolina.

8. **Envejecimiento de los conductores** El número de fatalidades como consecuencia de choques de automóviles basado en el número de millas recorridas comienza a aumentar después de que el conductor rebasa los 65 años. Además de la habilidad decadente a medida que uno envejece, el conductor anciano es más frágil. El número de fatalidades por cada 100 millones de millas vehículo recorridas es aproximadamente

$$N(x) = 0.0336x^3 - 0.118x^2 + 0.215x + 0.7 \qquad (0 \leq x \leq 7)$$

donde x denota el grupo de edad de los conductores, con $x = 0$ correspondiente a los de 50-54 años de edad, $x = 1$ correspondiente a los de 55-59 , $x = 2$ correspondiente a los de 60-64, . . . , y $x = 7$ correspondiente a los de 85-89. ¿Cuál es la tasa de fatalidad por cada 100 millones de millas vehículo recorridas de un conductor promedio en el grupo de 50-54 de edad? ¿En el grupo de 85-89 de edad?

Fuente: U.S. Department of Transportation

9. **Incremento de las cuotas del agua** Conforme a registros de 2001 a 2006, el servicio pagado por los usuarios en 60 comunidades del área de Boston que consumen un promedio de 90,000 galones de agua al año es

$$C(t) = 2.16t^3 + 40t + 751.5 \qquad (0 \leq t \leq 6)$$

donde $t = 0$ corresponde a 2001 y $C(t)$ está en dólares/año. ¿Cuál fue la suma promedio pagada por un usuario en 2001 por los servicios de agua y drenaje? Si la tendencia continuó, ¿cuál fue la suma promedio pagada en 2008?

Fuente: Massachusetts Water Resources Authority

10. **Tarjetas de regalo** Las tarjetas de regalo han ganado en popularidad en años recientes. Los consumidores las aprecian porque les permiten seleccionar el regalo que desean. Las ventas de tarjetas de regalo en Estados Unidos (en miles de millones de dólares) es aproximadamente

$$S(t) = -0.6204t^3 + 4.671t^2 + 3.354t + 47.4 \qquad (0 \leq t \leq 5)$$

en el año t, donde $t = 0$ corresponde a 2003.

a. ¿Cuáles fueron las ventas de tarjetas de regalo en 2003?
b. ¿Cuáles fueron las ventas de tarjetas de regalo en 2008?

Fuente: The Tower Group

11. **Suscriptores de Blackberry** Según un estudio realizado en 2004, el número de suscriptores de Blackberry, los dispositivos de correo electrónico portátiles, fabricados por Research in Motion Ltd. es aproximadamente

$$N(t) = -0.0675t^4 + 0.5083t^3 - 0.893t^2 + 0.66t + 0.32 \qquad (0 \leq t \leq 4)$$

donde $N(t)$ está en millones y t en años, con $t = 0$ correspondiente al inicio de 2002.

a. ¿Cuántos suscriptores de Blackberry había a principios de 2002?
b. Cuántos suscriptores de Blackberry había a principios de 2006?

Fuente: ThinkEquity Partners

12. **Tasas de mortalidad infantil en Masschusetts** Las defunciones de niños de menos de 1 año por cada 1000 nacimientos vivos están modeladas por la función

$$R(t) = 162.8t^{-3.025} \qquad (1 \leq t \leq 3)$$

donde t está en intervalos de 50 años, con $t = 1$ correspondiente a 1900.

a. Determine $R(1)$, $R(2)$ y $R(3)$ y utilice su resultado para trazar la gráfica de la función R en el dominio [1, 3].
b. ¿Cuál fue la tasa de mortalidad infantil en 1900? ¿En 1950? ¿En 2000?

Fuente: Massachusetts Department of Public Health

13. **Personas que ven videos en línea** A medida que crece el uso de Internet, más servicios de video populares tales como YouTube continuarán en expansión. Se proyecta que el número de personas que ve videos en línea (en millones) crezca conforme a la regla

$$N(t) = 52t^{0.531} \qquad (1 \leq t \leq 10)$$

donde t corresponde al inicio de 2003.

a. Trace la gráfica de N.
b. ¿Cuántas personas que ven videos en línea habrá a principios de 2010?

Fuente: eMarketer.com

14. **Ventas de chips** Se proyecta que las ventas de chips de memoria (en miles de millones de dólares) sean

$$S(t) = 4.3(t + 2)^{0.94} \qquad (0 \leq t \leq 6)$$

donde t está en años, con $t = 0$ correspondiente a 2002. Se utilizan chips de memoria en teléfonos celulares, cámaras digitales y otros productos.

a. ¿Cuáles fueron las ventas de chips de memoria a nivel mundial en 2002?
b. ¿Cuáles fueron las ventas en 2008?

Fuente: Web-Free Research Inc.

15. **Outsourcing de empleos** Según un estudio realizado en 2003, el número total de empleos estadounidenses (en millones) que se proyecta se trasladen a otro país alrededor del año t, donde $t = 0$ corresponde al inicio del año 2000, es

$$N(t) = 0.0018425(t + 5)^{2.5} \qquad (0 \leq t \leq 15)$$

¿Cuál fue el número proyectado de empleos trasladados al exterior en 2005 ($t = 5$)? ¿En 2010 ($t = 10$)?

Fuente: Forrester Research

16. **Inmigración a Estados Unidos** La inmigración a Estados Unidos de Europa, como porcentaje de la inmigración total, es aproximadamente

$$P(t) = 0.767t^3 - 0.636t^2 - 19.17t + 52.7 \qquad (0 \leq t \leq 4)$$

donde t está en décadas, con $t = 0$ correspondiente a la década de 1950.

a. Complete la tabla:

t	0	1	2	3	4
$P(t)$					

b. Utilice el resultado de la parte (a) para trazar la gráfica de P.
c. Utilice el resultado de la parte (b) para estimar la década cuando la inmigración, como porcentaje de la inmigración total fue máxima y mínima.

Fuente: Jeffrey Williamson, Harvard University

17. **Precio de venta de las grabadoras de DVD** El surgimiento de la música digital y la mejora del formato DVD son una parte de las razones por las cuales el precio de venta promedio de grabadoras de DVD autónomas se reducirá en los años por venir. La función

$$A(t) = \frac{699}{(t + 1)^{0.94}} \qquad (0 \leq t \leq 5)$$

da el precio de venta promedio proyectado (en dólares) de grabadoras de DVD autónomas en el año t, donde $t = 0$ corresponde al inicio de 2002. ¿Cuál fue el precio de venta de grabadoras de DVD autónomas a principios de 2002? ¿A principios de 2007?

Fuente: Consumer Electronics Association

18. **Caminar en comparación con correr** El consumo de oxígeno (en mililitros/libra/minuto) de una persona que camina a t mph es aproximadamente

$$f(x) = \frac{5}{3}x^2 + \frac{5}{3}x + 10 \qquad (0 \leq x \leq 9)$$

mientras que el consumo de oxígeno de un corredor a x mph es aproximadamente

$$g(x) = 11x + 10 \qquad (4 \leq x \leq 9)$$

a. Trace las gráficas de f y g.
b. ¿A qué velocidad es igual el consumo de oxígeno de un caminante al de un corredor? ¿Cuál es el nivel de consumo de oxígeno a esa velocidad?
c. ¿Qué le sucede al consumo de oxígeno del caminante y el corredor a velocidades superiores a las encontradas en la parte (b)?

Fuente: William McArdley, Frank Katch y Victor Katch, *Exercise Physiology*

19. **Precio de las autopartes** Durante años, los fabricantes de automóviles monopolizaron el mercado de autopartes, en particular de piezas laminadas como defensas, puertas y cofres, las piezas que con más frecuencia se dañan en un choque. A partir de finales de la década de 1970, sin embargo, apareció en escena la competencia. En un informe elaborado por una compañía de seguros para estudiar los efectos de la competencia, el precio de venta de una defensa de un fabricante de equipo original para un modelo 1983 de automóvil particular era

$$f(t) = \frac{110}{\frac{1}{2}t + 1} \qquad (0 \leq t \leq 2)$$

donde $f(t)$ está en dólares y t en años. Durante el mismo periodo, el precio de una defensa no original para el automóvil era

$$g(t) = 26\left(\frac{1}{4}t^2 - 1\right)^2 + 52 \qquad (0 \leq t \leq 2)$$

donde $g(t)$ también está en dólares. Encuentre una función $h(t)$ que dé la diferencia en precio entre la defensa original y la no original. Calcule $h(0)$, $h(1)$ y $h(2)$. ¿Qué parece indicar el resultado de su cálculo sobre la diferencia de precio entre defensas originales y no originales durante los dos años?

20. **Niños obesos en Estados Unidos** El porcentaje de niños obesos de 12-19 años de edad en Estados Unidos es aproximadamente

$$P(t) = \begin{cases} 0.04t + 4.6 & \text{si } 0 \leq t < 10 \\ -0.01005t^2 + 0.945t - 3.4 & \text{si } 10 \leq t \leq 30 \end{cases}$$

donde t está en años, con $t = 0$ correspondiente al inicio de 1970. ¿Cuál era el porcentaje de niños obesos de 12-19 años de edad a principios de 1970? ¿A principios de 1985? ¿A principios de 2000?

Fuente: Centers for Disease Control

21. **Precio del marfil** Según el World Wildlife Fund, un grupo que encabeza la lucha contra el comercio ilegal del marfil, el precio del marfil (en dólares/kilo) compilado de una variedad legal y del mercado negro es aproximadamente

$$f(t) = \begin{cases} 8.37t + 7.44 & \text{si } 0 \leq t \leq 8 \\ 2.84t + 51.68 & \text{si } 8 < t \leq 30 \end{cases}$$

donde t está en años, con $t = 0$ correspondiente al inicio de 1970.
a. Trace la gráfica de la función f.
b. ¿Cuál era el precio a principios de 1970? ¿A principios de 1990?

Fuente: World Wildlife Fund

22. **Deuda de tarjeta de crédito** Después de la aparición en 1950 de Diners Club, la primera tarjeta de crédito de Estados Unidos, las tarjetas de crédito han proliferado en el transcurso de los años. En la actualidad se utilizan más de 720 tarjetas diferentes en más de 4 millones de lugares en Estados Unidos. El promedio de deuda de tarjeta de crédito en dicho país (por cada tarjetahabiente) en miles de dólares es aproximadamente

$$D(t) = \begin{cases} 4.77(1 + t)^{0.2676} & \text{si } 0 \leq t \leq 2 \\ 5.6423t^{0.1818} & \text{si } 2 < t \leq 6 \end{cases}$$

donde t está en años, con $t = 0$ correspondiente al inicio de 1994. ¿Cuál era la deuda de tarjeta de crédito en Estados Unidos (por tarjetahabiente) a principios de 1994? ¿A principios de 1996? ¿A principios de 1999?

Fuente: David Evans y Richard Schmalensee, *Paying with Plastic, The Digital Revolution in Buying and Borrowing*

23. **Asistencia médica a los adultos mayores** Según un estudio, el costo que sale del bolsillo de los adultos mayores por asistencia médica, $f(t)$ como porcentaje del ingreso en el año t, donde $t = 0$ corresponde a 1977, es

$$f(t) = \begin{cases} \frac{2}{7}t + 12 & \text{si } 0 \leq t \leq 7 \\ t + 7 & \text{si } 7 < t \leq 10 \\ \frac{1}{3}t + \frac{41}{3} & \text{si } 10 < t \leq 25 \end{cases}$$

a. Trace la gráfica de f.
b. ¿Cuál era el costo que sale del bolsillo, como porcentaje del ingreso, de los adultos mayores por asistencia médica en 1982? ¿En 1992?

Fuente: Senate Select Committee on Aging, AARP

24. **Población en edad de trabajar** La razón de la población en edad de trabajar a los ancianos en Estados Unidos (incluidas las proyecciones después de 2000) es

$$f(t) = \begin{cases} 4.1 & \text{si } 0 \leq t < 5 \\ -0.03t + 4.25 & \text{si } 5 \leq t < 15 \\ -0.075t + 4.925 & \text{si } 15 \leq t \leq 35 \end{cases}$$

con $t = 0$ correspondiente al inicio de 1995.
a. Trace la gráfica de f.
b. ¿Cuál era la relación a principios de 2005? ¿Cuál será la relación a principios de 2020?
c. ¿Durante cuáles años la relación es constante?
d. ¿Durante cuáles años es máxima la declinación de la relación?

Fuente: U.S. Census Bureau

25. VENTAS DE REPRODUCTORES DE VIDEO DVD EN COMPARACIÓN CON VCR Las ventas de reproductores de DVD en el año t (en millones de unidades) son aproximadamente

$$f(t) = 5.6(1 + t) \qquad (0 \le t \le 3)$$

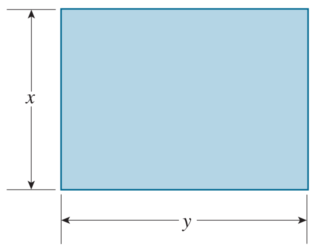
donde $t = 0$ corresponde a 2001. Durante el mismo periodo, las ventas de VCR (en millones de unidades) es

$$g(t) = \begin{cases} -9.6t + 22.5 & \text{si } 0 \le t \le 1 \\ -0.5t + 13.4 & \text{si } 1 < t \le 2 \\ -7.8t + 28 & \text{si } 2 < t \le 3 \end{cases}$$

a. Demuestre que en 2001 se vendieron más VCR que reproductores de DVD.
b. ¿Cuándo las ventas de reproductores de DVD excedieron por primera vez las de VCR?

Fuente: Popular Science

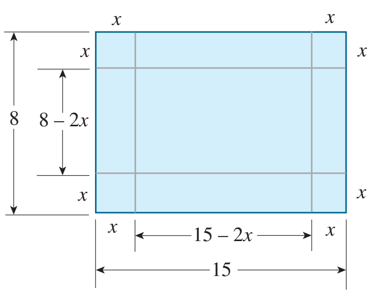
26. CERCADO DE UN ÁREA Patricia desea tener un jardín rectangular en su patio trasero. Dispone de 80 pies de material con el cual piensa cercar el jardín. Sea x el ancho del jardín, encuentre una función f en la variable x que dé el área del jardín. ¿Cuál es su dominio?



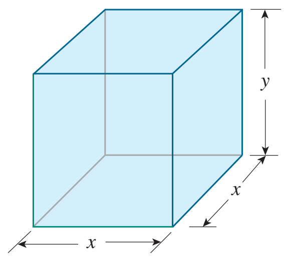
27. CERCADO DE UN ÁREA La vecina de Patricia, Juanita, también desea tener un jardín rectangular en su patio trasero. Pero Juanita desea que su jardín tenga un área de 250 pies^2. Sea x el ancho del jardín, encuentre una función f en la variable x que dé el largo de la cerca requerido para construir el jardín. ¿Cuál es el dominio de la función?

Sugerencia: Consulte la figura del ejercicio 26. El largo de cerca requerido es igual al perímetro del rectángulo, el cual es dos veces el ancho más dos veces el largo del rectángulo.

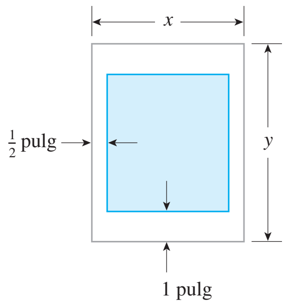
28. CONSTRUCCIÓN DE UNA CAJA RECTANGULAR Al recortar cuadrados idénticos de cada esquina de un cartón rectangular y plegar las pestañas resultantes, se puede hacer una caja abierta. Si el cartón es de 15 pulg de largo y 8 pulg de ancho y los recortes cuadrados son de x pulg $\times$ x pulg, encuentre una función que dé el volumen de la caja resultante.



29. COSTOS DE CONSTRUCCIÓN Una caja rectangular debe tener una base cuadrada y un volumen de 20 pies^3. El material para la base cuesta 30¢/pie^2, el material para los costados cuesta 10¢/pie^2. Sea x el largo de un lado de la base, encuentre una función en la variable x que dé el costo de construcción de la caja.



30. DISEÑO DE UN LIBRO La diseñadora de un libro decidió que sus páginas deben tener márgenes superior e inferior de 1 pulg y de $\frac{1}{2}$ pulg en los lados. Además estipuló que cada página debe tener un área de 50 pulg^2. Encuentre una función en la variable x que dé el área de la página impresa. ¿Cuál es el dominio de la función?



31. RENDIMIENTO DE UN MANZANAR Un manzanar tiene un rendimiento promedio de 36 fanegas* de manzanas/árbol si la densidad de árboles es de 22 árboles/acre. Por cada incremento de una unidad en la densidad de árboles, el rendimiento disminuye en 2 fanegas/árbol. Sea x el número de árboles que rebasa de 22/acre, encuentre una función en x que dé el rendimiento de manzanas.

32. INGRESOS POR LA RENTA DE UN YATE El propietario de un yate de lujo que navega entre las 4000 islas griegas cobra \$600/persona/día si exactamente 20 personas se registran para el crucero. Sin embargo, si más de 20 personas se registran (hasta la capacidad máxima de 90) para el crucero, entonces cada pasaje se reduce en \$4 por cada pasajero adicional. Suponga que se registran 20 personas para el crucero y que x representa el número de pasajeros mayor que 20.

a. Encuentre una función R que dé el ingreso/día obtenido por la renta del yate.
b. ¿Cuál es el ingreso/día si 60 personas se registran para el crucero?
c. ¿Cuál es el ingreso/día si 80 personas se registran para el crucero?

*1 fanega = 25.40 kg (nota del editor).

31. **Utilidad de un viñedo** Phillip, el propietario de un viñedo, estima que si produjeran 10,000 botellas de vino en esta temporada, la utilidad sería de \$5/botella. Pero si se produjeran más de 10,000 botellas, entonces la utilidad/botella de todo el lote se reduciría \$0.0002 por cada botella adicional vendida. Suponga que por lo menos se producen y venden 10,000 de vino y que x representa el número de botellas producidas y vendidas por encima de 10,000.
   a. Encuentre una función P que dé la utilidad en función de x.
   b. ¿Cuál es la utilidad que Phillip puede esperar por la ven-ta de 16,000 botellas de vino de su viñedo?

34. **Derrames de petróleo** El derrame de petróleo por el casco roto de un buque cisterna varado se esparce en todas direcciones en aguas tranquilas. Suponga que el área contaminada es un círculo de radio r y que éste se incrementa a razón de 2 pies/s.
   a. Encuentre una función f que dé el área contaminada en función de r.
   b. Encuentre una función g que dé el radio del área contaminada en función de t.
   c. Encuentre una función h que dé el área contaminada en función de t.
   d. ¿Cuál es el tamaño del área contaminada 30 segundos después de que se rompió el casco?

En los ejercicios 35-38 determine si el enunciado es verdadero o falso. Si es verdadero explique por qué lo es. Si es falso, dé un ejemplo para demostrar por qué lo es.

35. Una función polinomial es la suma de múltiplos constantes de funciones elevadas a una potencia.

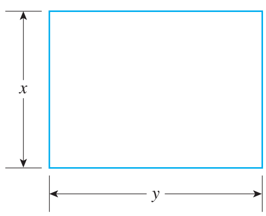
36. Una función polinomial es una función racional, pero lo inverso es falso.

37. Si $r > 0$, entonces la función elevada a una potencia $f(x) = x^r$ está definida para todos los valores de x.

38. La función $f(x) = 2^x$ es una función elevada a una potencia.

2.7 Solución del ejercicio de autoevaluación

Sea de y pies la longitud del campo de juego rectangular (vea la figura).



Entonces, el largo de la cerca requerido es $L = 2x + 2y$. Pero el requisito de que el área del campo de juego rectangular sea de 500 pies^2 implica que $xy = 500$ o después resolver para y, $y = 500/x$. Por consiguiente, el largo de la cerca requerido es

$$L = f(x) = 2x + 2\left(\frac{500}{x}\right) = 2x + \frac{1000}{x}$$

con dominio $(0, \infty)$.

USO DE LA TECNOLOGÍA

Construcción de modelos matemáticos a partir de datos en bruto

En ocasiones se puede utilizar un programa graficador para construir modelos a partir de conjuntos de datos. Por ejemplo, si los puntos correspondientes a los datos dados están dispersos en torno a una línea recta, en ese caso utilice **LinReg(ax+b)** (regresión lineal) del menú de cálculos estadísticos de la calculadora graficadora para obtener una función (modelo) que represente de forma aproximada la datos disponibles. Si los puntos parecen estar dispersos a lo largo de una parábola (la gráfica de la función cuadrática) entonces utilice **QuadReg** (una regresión polinomial de segundo grado), etc. (Éstas son funciones de la calculadora TI-83/84).

EJEMPLO DE APLICACIÓN 1 Industria india de los juegos
Los datos siguientes representan los ingresos brutos estimados (en miles de millones de dólares) de las industrias indias de los juegos de 2000 ($t = 0$) a 2005 ($t = 5$).

Año	0	1	2	3	4	5
Ingresos	11.0	12.8	14.7	16.8	19.5	22.7

a. Utilice una calculadora graficadora para encontrar una función polinomial f de cuarto grado que modele los datos.
b. Trace la gráfica de la función f en la pantalla de visualización $[0, 6] \times [0, 30]$.
c. Utilice la capacidad de evaluación de función de la calculadora graficadora para calcular $f(0), f(1), \ldots, f(5)$ y compare estos valores con los datos originales.
d. Si la tendencia continuara, ¿cuál sería el ingreso en 2006 ($t = 6$)?

Fuente: National Indian Gaming Association

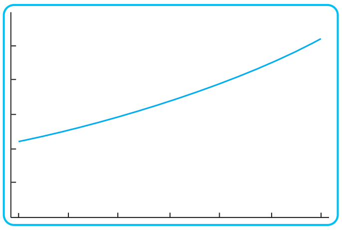


FIGURA **T1**
Gráfica de f en la pantalla de visualización $[0, 6] \times [0, 30]$.

Solución

a. Si se elige **QuartReg** (regresión polinomial de cuarto grado) en el menú de cálculos estadísticos de una calculadora graficadora obtenemos

$$f(t) = -0.00417t^4 + 0.0713t^3 - 0.168t^2 + 1.920t + 11$$

b. La gráfica de f se muestra en la figura T1.
c. Los valores requeridos, los cuales se comparan favorablemente con los datos dados, son los siguientes:

t	0	1	2	3	4	5
$f(t)$	11.0	12.8	14.7	16.8	19.5	22.7

d. El ingreso bruto en 2006 ($t = 6$) es

$$f(6) = -0.00417(6)^4 + 0.0713(6)^3 - 0.168(6)^2 + 1.920(6) + 11 = 26.469$$

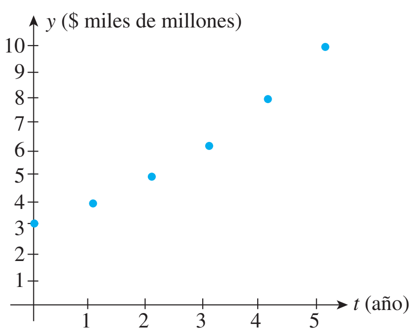
o $26,500 millones. ■

EJERCICIOS CON TECNOLOGÍA

En los ejercicios 1-16 utilice el menú de cálculos estadísticos para construir un modelo matemático asociado con los datos dados.

1. **VENTAS DE PROCESADORES DE SEÑALES DIGITALES** Las ventas proyectadas (en miles de millones de dólares) de procesadores de señales digitales y la gráfica de dispersión son las siguientes:

Año	1997	1998	1999	2000	2001	2002
Ventas	3.1	4	5	6.2	8	10



a. Use **P2Reg** para encontrar un modelo de regresión polinomial de segundo grado con los datos. $t = 0$ correspondiente a 1997.
b. Trace la gráfica de la función f encontrada en la parte (a) en la ventana de visualización $[0, 5] \times [0, 12]$.
c. Calcule los valores de $f(t)$ con $t = 0, 1, 2, 3, 4$ y 5. ¿Cómo se compara el modelo con los datos dados?

Fuente: A. G. Edwards & Sons, Inc.

2. **VENTAS AL DETALLE ANUALES** Las ventas al detalle o al menudeo anuales en Estados Unidos desde principios de 1990 hasta el 2000 (en miles de millones de dólares) se dan en la tabla siguiente:

Año	1990	1991	1992	1993	1994	1995
Ventas	471.6	485.4	519.2	553.4	595	625.5

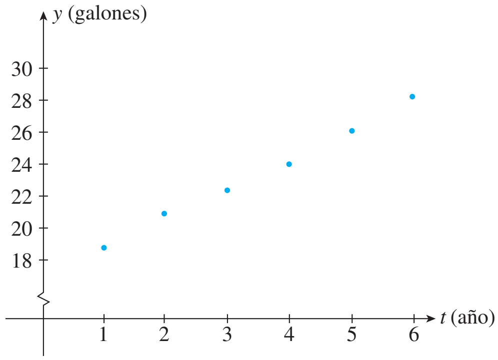
Año	1996	1997	1998	1999	2000
Ventas	656.6	685.6	727.2	781.7	877.7

a. Considere que $t = 0$ corresponde a 1990 y utilice **P2Reg** para encontrar un modelo de regresión polinomial de segundo grado basado en los datos dados.
b. Trace la gráfica de la función f encontrada en la parte (a) en la ventana de visualización $[0, 10] \times [0, 1000]$.
c. Calcule $f(0)$, $f(5)$ y $f(10)$. Compare estos valores con los datos dados.

Fuente: National Retail Federation

(*continúa*)

3. CONSUMO DE AGUA EMBOTELLADA El consumo anual per cápi-ta de agua embotellada (en galones) y la gráfica de dispersión de estos datos aparecen en la figura siguiente:



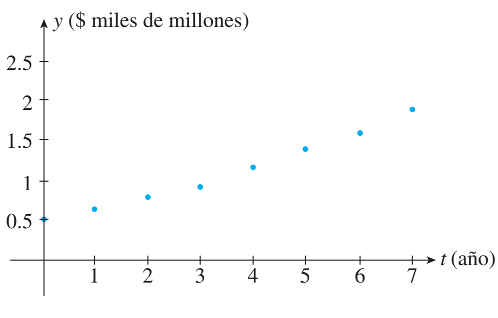
Año	2001	2002	2003	2004	2005	2006
Consumo	18.8	20.9	22.4	24	26.1	28.3

a. Use **LinReg(ax + b)** para encontrar un modelo de regresión polinomial (lineal) de primer grado con los datos, con $t = 1$ correspondiente a 2001.
b. Trace la gráfica de la función encontrada en la parte (a) en la ventana de visualización $[1, 6] \times [0, 30]$.
c. Calcule los valores con $t = 1, 2, 3, 4, 5$ y 6. ¿Cómo se comparan las cifras con los datos dados?
d. Si la tendencia continúa, ¿cuál será el consumo anual per cápita de agua embotellada en 2008 ($t = 8$)?

Fuente: Beverage Marketing Corporation

4. CONFERENCIAS EN LA WEB Las conferencias en la Web son un gran negocio de rápido crecimiento. La cantidad (en miles de millones de dólares) gastada en la realización de conferencias en la Web de principios de 2003 a 2010 y el diagrama de dispersión con estos datos se dan a continuación

Año	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010
Cantidad	0.50	0.63	0.78	0.92	1.16	1.38	1.60	1.90



a. Sea $t = 0$ que corresponde al inicio de 2003 y utilice **QuadReg** para encontrar un modelo de regresión polinomial de segundo grado basado en los datos dados.
b. Trace la gráfica de la función f encontrada en la parte (a) en la ventana $[0, 7] \times [0, 2]$.
c. Calcule $f(0)$, $f(3)$, $f(6)$ y $f(7)$. Compare estos valores con los datos dados.

Fuente: Gartner Dataquest

5. POBLACIÓN ESTUDIANTIL El número total proyectado de estudiantes en escuelas elementales, escuelas secundarias y bachilleratos (en millones) de principios de 1995 a 2015 se da en la tabla siguiente:

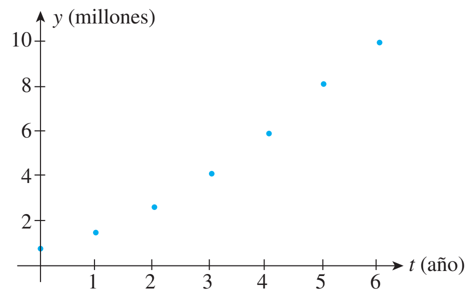
Año	1995	2000	2005	2010	2015
Número	64.8	68.7	72.6	74.8	78

a. Utilice **QuadReg** para encontrar un modelo de regresión polinomial de segundo grado basado en los datos dados. t está en intervalos de 5 años, y $t = 0$ corresponde al inicio de 1995.
b. Trace la gráfica de la función f encontrada en la parte (a) en la ventana de visualización $[0, 4] \times [0, 85]$.
c. Con base en el modelo encontrado en la parte (a), ¿cuál será el número de estudiantes total proyectado (todas las categorías) inscritos a principios de 2015?

Fuente: U.S. National Center for Education Statistics

6. EMBARQUES DE TELEVISORES DIGITALES El número estimado de envíos de televisores digitales entre 2000 y 2006 (en millones de unidades) y la gráfica de dispersión de estos datos son los siguientes:

Año	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006
Unidades enviadas	0.63	1.43	2.57	4.1	6	8.1	10



a. Utilice **CubicReg** para encontrar un modelo de regresión polinomial de tercer grado basado en los datos dados. $t = 0$ corresponde al inicio de 2000.
b. Trace la gráfica de la función f encontrada en la parte (a) en la ventana de visualización $[0, 6] \times [0, 11]$.
c. Calcule los valores $f(t)$ con $t = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ y 6.

Fuente: Consumer Electronics Manufacturers Association

7. GASTOS EN ASISTENCIA MÉDICA Los gastos en asistencia médi-ca realizados por empresas (en miles de millones de dólares) desde principios de 2000 hasta 2006 se resumen a continuación:

Año	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006
Número	185	235	278	333	389	450	531

a. Trace el diagrama de dispersión con los datos anteriores, con $t = 0$ correspondiente al inicio de 2000.
b. Utilice **QuadReg** para encontrar un modelo de regresión polinomial de segundo grado basado en los datos dados.
c. Si la tendencia continúa, ¿cuál será el gasto a principios de 2007?

Fuente: Centers for Medicine and Medicaid Services

8. Propietarios de TIVO El número proyectado de casas (en millones) con TIVO, que permiten a los usuarios grabar programas en un servidor y omitir los comerciales, se da en la tabla siguiente:

Año	2006	2007	2008	2009	2010
Casas	31.2	49.0	71.6	97.0	130.2

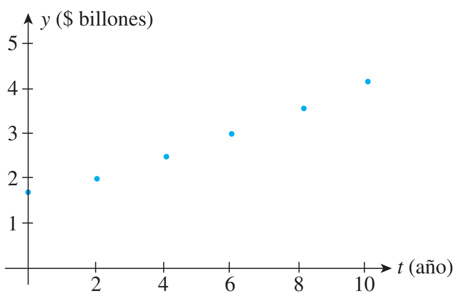
a. Sea $t = 0$ que corresponde al inicio de 2006 y utilice **QuadReg** para encontrar un modelo de regresión polinomial de segundo grado basado en los datos dados.

b. Obtenga la gráfica de dispersión y la gráfica de la función f encontrada en la parte (a) en la ventana de visualización $[0, 4] \times [0, 140]$.

Fuente: Strategy Analytics

9. Ingresos de la industria de las telecomunicaciones Se espera que los ingresos de la industria de las telecomunicaciones crezcan en los años próximos, motivados por la demanda de servicios de transmisión de datos de alta velocidad y banda ancha. Los ingresos a nivel mundial de la industria (en billones de dólares) y el diagrama de dispersión de estos datos son los siguientes:

Año	2000	2002	2004	2006	2008	2010
Ingresos	1.7	2.0	2.5	3.0	3.6	4.2



a. Sea $t = 0$ que corresponde al inicio de 2000 y utilice **CubicReg** para encontrar un modelo de regresión polinomial de tercer grado basado en los datos dados.

b. Trace la gráfica de la función f encontrada en la parte (a), en la ventana de visualización $[0, 10] \times [0, 5]$.

c. Calcule los ingresos a nivel mundial de la industria a principios de 2001 y 2010.

Fuente: Telecommunication Industry Association

10. Crecimiento de la población en el condado de Clark El condado de Clark en Nevada, dominado por la gran zona metropolitana de Las Vegas, es el área metropolitana de más rápido crecimiento en Estados Unidos. Su población de 1970 a 2000 se da en la tabla siguiente:

Año	1970	1980	1990	2000
Población	273,288	463,087	741,459	1,375,765

a. Utilice **CubicReg** para encontrar un modelo de regresión polinomial de tercer grado basado en los datos. Considere que t está en décadas y que $t = 0$ corresponde al inicio de 1970.

b. Trace la gráfica de la función f encontrada en la parte (a) en la ventana de visualización $[0, 3] \times [0, 1{,}500{,}000]$.

c. Compare los valores de f con $t = 0, 1, 2$ y 3, y los datos dados.

Fuente: U.S. Census Bureau

11. Contratación de cabilderos Numerosas entidades públicas como ciudades, condados, estados, empresas de servicios y tribus indias contratan firmas para que cabildeen en el Congreso. Un objetivo de está práctica es colocar asignaciones de dinero dirigidas a un proyecto específico en la ley de presupuestos. La suma (en millones de dólares) gastada por entidades públicas en esta práctica de cabildeo desde principios de 1998 hasta 2004 se muestra en la tabla siguiente:

Año	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004
Suma	43.4	51.7	62.5	76.3	92.3	101.5	107.7

a. Utilice **CubicReg** para encontrar un modelo de regresión polinomial de tercer grado basado en los datos dados, donde $t = 0$ corresponda al inicio de 1998.

b. Trace el diagrama de dispersión y la gráfica de la función f encontrada en la parte (a) en la ventana de visualización $[0, 6\ ] \times [0, 120]$.

c. Compare los valores de f con $t = 0, 3$ y 6 con los datos dados.

Fuente: Center for Public Integrity

12. Cuentas de mensajería instantánea móvil de empresas El número proyectado de cuentas de mensajería instantánea móvil de empresas (en millones) de 2006 a 2010 se da en la tabla siguiente ($t = 0$ corresponde al inicio de 2006):

Año	0	1	2	3	4
Cuentas	2.3	3.6	5.8	8.7	14.9

a. Utilice **CubicReg** para encontrar un modelo de regresión polinomial de tercer grado basado en los datos dados.

b. Trace la gráfica de la función f encontrada en la parte (a) en la ventana de visualización $[0, 5] \times [0, 16]$.

c. Calcule $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$ y $f(4)$.

Fuente: The Radical Group

13. Defunciones a causa del sarampión El sarampión sigue siendo la causa principal de las defunciones infantiles que se pueden evitar con una vacuna, pero debido a avances en la inmunización, los decesos provocados por el sarampión se han reducido globalmente. La tabla siguiente da el número de defunciones provocadas por el sarampión (en miles) en África subsahariana desde principios de 1999 hasta 2005:

Año	1999	2001	2003	2005
Cantidad	506	338	250	126

a. Utilice **CubicReg** para encontrar un modelo de regresión polinomial de tercer grado basado en los datos, con $t = 0$ correspondiente al inicio de 1999.

b. Trace el diagrama de dispersión y la gráfica de la función f encontrada en la parte (a).

c. Compare los valores de f con $t = 0, 2$ y 6.

Fuente: Centers for Disease Control and World Health Organization

14. Tasa de oficinas disponibles La tasa de oficinas disponibles en Manhattan desde principios de 2000 hasta 2006 se muestra en la tabla siguiente:

Año	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006
Tasa de disponibilidad	3.8	8.9	12	12.5	11	8.4	6.7

a. Utilice **CubicReg** para encontrar un modelo de regresión polinomial de tercer grado basado en los datos, con $t = 0$ correspondiente al inicio de 2000.
b. Trace el diagrama de dispersión y la gráfica de la función f encontrada en la parte (a).
c. Calcule los valores con $t = 1, 2, 3, 4, 5$ y 6.

Fuente: Cushman and Wakefield

15. Contenido de nicotina en los cigarrillos Aun cuando las medidas para desmotivar a los fumadores son más estrictas, el contenido de nicotina de los cigarrillos se ha incrementado, lo que hace más difícil que los fumadores dejen de fumar. La tabla siguiente da la cantidad de nicotina promedio en el humo de los cigarrillos desde principios de 1999 hasta 2004:

Año	1999	2000	2001	2002	2003	2004
Contenido por cigarrillo (mg)	1.71	1.81	1.85	1.84	1.83	1.89

a. Utilice **QuartReg** para encontrar un modelo de regresión polinomial de cuarto grado basado en los datos, con $t = 0$ correspondiente al inicio de 1999.
b. Trace la gráfica de la función f encontrada en la parte (a) en la ventana de visualización $[0, 5] \times [0, 2]$.
c. Calcule los valores de $f(t)$ con $t = 0, 1, 2, 3, 4$ y 5.
d. Si la tendencia continuó, ¿cuál habría sido la cantidad promedio de nicotina en los cigarrillos a principios de 2005?

Fuente: Massachusetts Tobacco Control Program

16. Activos del fondo de Seguridad Social Los activos proyectados del fondo de Seguridad Social (en billones de dólares) de 2008 a 2040 se dan en la tabla siguiente:

Año	2008	2011	2014	2017	2020	2023	2026	2029	2032	2035	2038	2040
Activos	2.4	3.2	4.0	4.7	5.3	5.7	5.9	5.6	4.9	3.6	1.7	0

Utilice **QuartReg** para encontrar un modelo de regresión polinomial de cuarto grado basado en los datos dados. $t = 0$ corresponde al inicio de 2008.

Fuente: Social Security Administration

CAPÍTULO 2 Resumen de las fórmulas y términos principales

FÓRMULAS

1. Pendiente de una recta	$m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$
2. Ecuación de una línea vertical	$x = a$
3. Ecuación de una línea horizontal	$y = b$
4. Forma punto-pendiente de la ecuación de una línea	$y - y_1 = m(x - x_1)$
5. Forma pendiente-ordenada de la ecuación de una recta	$y = mx + b$
6. Ecuación general de una recta	$Ax + By + C = 0$

TÉRMINOS

coordenadas (68)
definición alterna de una función (90)
dominio (87)
equilibrio del mercado (128)
función (87)
función compuesta (106)
función cuadrática (123)
función de costo total (112)
función de demanda (126)
función de ingreso (112)
función de oferta (127)
función de utilidad (112)
función definida por partes (92)
función elevada a una potencia (138)
función lineal (111)
función polinomial (135)
función racional (137)
gráfica de una ecuación (93)
gráfica de una función (91)
intersección con x (77)
intersección con y (77)
líneas paralelas (72)
líneas perpendiculares (76)
origen (68)
par ordenado (68)
pares ordenados (90)
prueba de la línea vertical (93)
punto de equilibrio (114)
rango (88)
sistema de coordenadas cartesianas (68)
variable dependiente (89)
variable independiente (89)

CAPÍTULO 2 Preguntas de revisión de conceptos

Llene los espacios en blanco

1. Un punto en el plano puede representarse de forma única mediante un par _______ de números. El primer número del par se llama _______ y el segundo número del par se llama ________.
2. **a.** El punto $P(a, 0)$ queda sobre el eje _____, y el punto $P(0, b)$ queda sobre el eje ____.
   b. Si el punto $P(a, b)$ queda en el cuarto cuadrante, entonces el punto $(-a, b)$ queda en el _______ cuadrante.
3. **a.** Si $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ son dos números distintos cualesquiera sobre una línea no vertical L, entonces la pendiente de L es $m =$ ______.
   b. La pendiente de la línea vertical es ______.
   c. La pendiente de la línea horizontal es _____.
   d. La pendiente de una recta inclinada hacia arriba es _____.
4. Si L_1 y L_2 son líneas no verticales con pendientes m_1 y m_2, respectivamente, entonces L_1 es paralela a L_2 si y sólo si _____ y L_1 es perpendicular a L_2 si y sólo si ______.
5. **a.** La ecuación de la recta que pasa por el punto $P(x_1, y_1)$ con pendiente m es _______. Esta forma de la ecuación de una recta se llama ________.
   b. La ecuación de la recta de pendiente m e intersección con y b es _______. Se llama forma _______ y ______ de la ecuación de una recta.
6. **a.** La forma general de la ecuación de una recta es ___________.
   b. Si la ecuación de una recta es $ax + by + c$ $(b \neq 0)$, entonces su pendiente es _______.
7. Si f es una función del conjunto A al conjunto B, entonces A se llama la ______ de f, y el conjunto de todos los valores de $f(x)$ cuando x toma todos los valores posibles de A es el ________ de f. El rango de f está contenido en el conjunto ________.
8. La gráfica de una función es el conjunto de todos los puntos (x, y) en la plano xy, de modo que x está en el ______ de f y $y =$ _____. La prueba de la línea vertical establece que una curva en el plano xy es la gráfica de una función $y = f(x)$ si y sólo si cada línea _______ la debe cortar en más de un _______.
9. Si f y g son funciones con dominios A y B, respectivamente, entonces (a) $(f \pm g)(x) =$ _______, (b) $(fg)(x) =$ _______ y (c) $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) =$ _______. El dominio de $f + g$ es _______. El dominio de $\dfrac{f}{g}$ es ________ con la condición adicional $g(x)$ nunca sea ______.
10. La composición de g y f es la función con la regla $(g \circ f)(x) =$ ______. Su dominio es el conjunto de todas las x en el dominio de _______ de modo que ________ quede en el dominio de ________.
11. Una función cuadrática tiene la forma $f(x) =$ ________. Su gráfica es una _________ que se abre ________ si $a > 0$ y ________ si $a < 0$. Su punto más alto o punto más bajo se llama ________. La coordenada x de su vértice es __________, y su eje de simetría es _________.
12. **a.** Una función polinomial de grado n es una función de la forma _______.
    b. Una función polinomial de grado 1 se llama función _______; una de grado 2 se llama función ________.
    c. Una función racional es un _______ de dos _______.
    d. Un función elevada a una potencia tiene la forma $f(x) =$ ______.

CAPÍTULO 2 Ejercicios de revisión

En los ejercicios 1-6 encuentre una ecuación de la recta *l*, que pase por el punto (−2, 4) y satisfaga la condición dada.

1. L es una línea vertical.
2. L es una línea horizontal.
3. L pasa por el punto $\left(3, \frac{7}{2}\right)$.
4. La intersección con x de L es 3.
5. L es paralela a la línea $5x - 2y = 6$.
6. L es perpendicular la línea $4x + 3y = 6$.
7. Encuentre una ecuación de la recta con pendiente $-\frac{1}{2}$ y la intersección con y, -3.
8. Encuentre la pendiente y la intersección con y de la recta con ecuación $3x - 5y = 6$.
9. Encuentre una ecuación de la recta que pasa por el punto $(2, 3)$ y que es paralela a la recta con ecuación $3x + 4y - 8 = 0$.
10. Encuentre una ecuación de la recta que pasa por el punto $(-1, 3)$ y que es paralela a la recta que une los puntos $(-3, 4)$ y $(2, 1)$.
11. Encuentre una ecuación de la recta que pasa por el punto $(-2, -4)$ que es perpendicular a la recta con ecuación $2x - 3y - 24 = 0$.

En los ejercicios 12 y 13 trace la gráfica de la ecuación.

12. $3x - 4y = 24$
13. $-2x + 5y = 15$

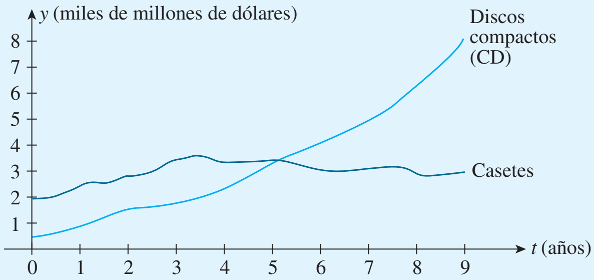
En los ejercicios 14 y 15 encuentre el dominio de la función.

14. $f(x) = \sqrt{9 - x}$
15. $f(x) = \dfrac{x + 3}{2x^2 - x - 3}$

16. Sea $f(x) = 3x^2 + 5x - 2$. Encuentre:

a. $f(-2)$
b. $f(a + 2)$
c. $f(2a)$
d. $f(a + h)$

17. Ventas de música pregrabada Las gráficas siguientes muestran las ventas y de música pregrabada (en miles de millones de dólares) por formato en función del tiempo t (en años), con $t = 0$ correspondiente a 1985.



a. ¿En qué años fueron mayores las ventas de casetes pregrabados que las de discos compactos pregrabados?
b. ¿En qué años fueron mayores las ventas de discos compactos pregrabados a las de casetes pregrabados?
c. ¿En qué año fueron las ventas de casetes pregrabados iguales a las de discos compactos pregrabados? Estime el nivel de ventas en cada formato en ese año.

Fuente: Recording Industry Association of America

18. Sea $y^2 = 2x + 1$.

a. Trace la gráfica de esta ecuación.
b. ¿Es y una función de x? ¿Por qué?
c. ¿Es x una función de y? ¿Por qué?

19. Trace la gráfica de la función definida por

$$f(x) \begin{cases} x + 1 & \text{si } x < 1 \\ -x^2 + 4x - 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

20. Sea $f(x) = \frac{1}{x}$ y $g(x) = 2x + 3$. Determine:

a. $f(x)g(x)$ **b.** $f(x)/g(x)$
c. $f(g(x))$ **d.** $g(f(x))$

En los ejercicios 21 y 22 determine el vértice y las intersecciones con *x* y trace la parábola.

21. $6x^2 - 11x - 10 = 0$ **22.** $-4x^2 + 4x + 3 = 0$

En los ejercicios 23 y 24 determine el punto de intersección de las líneas con las ecuaciones dadas.

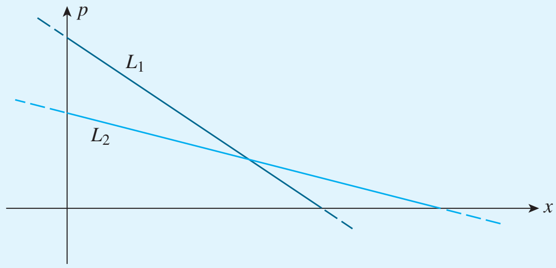
23. $3x + 4y = -6$ y $2x + 5y = -11$

24. $y = \dfrac{3}{4}x + 6$ y $3x - 2y + 3 = 0$

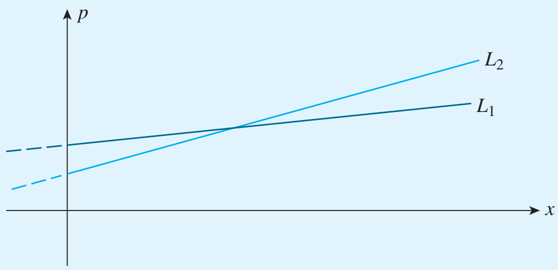
25. Determine el punto de intersección de las dos líneas rectas cuyas ecuaciones son $7x + 9y = -11$ y $3x = 6y - 8$.

26. Las funciones de costo e ingreso de una cierta empresa son $C(x) = 12x + 20{,}000$ y $R(x) = 20x$, respectivamente. Determine el punto de equilibrio de la empresa.

27. Demanda de radio relojes En la figura adjunta, L_1 es la curva de demanda de radio relojes modelo A fabricados por Ace Radio, y L_2 es la curva de demanda de sus radio relojes modelo B. ¿Cuál línea tiene la pendiente mayor? Interprete sus resultados.



28. Oferta de radio relojes En la figura adjunta, L_1 es la curva de oferta de los radio relojes modelo A fabricados por Ace Radio, y L_2 es la curva de oferta de sus radio relojes modelo B. ¿Cuál línea tiene la pendiente mayor? Interprete sus resultados.



29. Ventas de reproductores MP3 Las ventas de cierta marca de un reproductor MP3 están representadas de forma aproximada por la relación

$$S(x) = 6000x + 30{,}000 \qquad (0 \leq x \leq 5)$$

donde $S(x)$ denota el número de reproductores MP3 vendidos en el año x ($x = 0$ corresponde a 2005). Encuentre el número de reproductores MP3 que se espera vender en 2010.

30. Ventas de una empresa Las ventas totales de una empresa (en millones de dólares) son aproximadamente lineales como una función del tiempo (en años). Las ventas en 2004 fueron de \$2.4 millones, mientras que en 2009 ascendieron a \$7.4 millones.

a. Encuentre una ecuación que dé las ventas de la empresa en función del tiempo.
b. ¿Cuáles fueron las ventas en 2007?

31. Funciones de utilidad Una empresa tiene un costo fijo de \$30,000 y un costo de producción de \$6 por cada disco compacto que fabrica. Cada disco compacto se vende en \$10.

a. ¿Cuál es la función de costo?
b. ¿Cuál es la función de ingreso?
c. ¿Cuál es la función de utilidad?
d. Calcule la utilidad (o pérdida) correspondiente a niveles de producción de 6000, 8000 y 12,000 unidades, respectivamente.

32. Depreciación en línea recta Un edificio de oficinas que valía \$6 millones cuando se completó en 2005 se depreciará en línea recta durante 30 años.

a. ¿Cuál es la tasa de depreciación?
b. ¿Cuál será el valor en libros del edificio en 2015?

33. **Ecuaciones de demanda** No hay demanda de un cierto producto cuando su precio unitario es de \$200 o más, pero por cada \$10 de reducción del precio por debajo de \$200, la cantidad demandada aumenta 200 unidades. Encuentre la ecuación de demanda y trace su gráfica.

34. **Ecuaciones de oferta** Los distribuidores de bicicletas lanzarán 200 bicicletas al mercado cada mes cuando el precio unitario es de \$50 y 2000 bicicletas cuando el precio unitario es de \$100. Encuentre la ecuación de oferta si se sabe que es lineal.

35. **Regla de Clark** La regla de Clark es un método para calcular dosis pediátricas de medicamentos basado en el peso de un niño. Si a denota la dosis para adultos (en miligramos) y w es el peso del niño (en libras), entonces la dosis para niños es

$$D(w) = \frac{aw}{150}$$

Si la dosis para adultos de una sustancia es de 500 mg, ¿cuánto deberá recibir un niño que pesa 35 lb?

36. **Admisiones a una universidad** Las datos adjuntos fueron compilados por la Oficina de Admisiones del Carter College durante los pasados 5 años. Los datos relacionan el número de folletos y cartas de seguimiento (x) enviadas a una lista preseleccionada de estudiantes de segundo año de bachillerato que realizaron el examen PSAT y el número de solicitudes recibidas (y) por estos estudiantes (ambos medidos en millares).

Folletos enviados, x	1.8	2	3.2	4	4.8
Solicitudes completadas, y	0.4	0.5	0.7	1	1.3

a. Derive una ecuación de la línea recta L que pasa por los puntos (2, 0.5) y (4, 1).
b. Utilice esta ecuación para predecir el número de solicitudes recibidas que podría esperarse si se envían 6400 folletos y cartas de seguimiento durante el siguiente año.

37. **Funciones de ingresos** El ingreso mensual R (en cientos de dólares) derivado de la venta de rasuradoras eléctricas Royal está relacionado con el precio unitario p (en dólares) por la ecuación

$$R(p) = -\frac{1}{2}p^2 + 30p$$

Calcule el ingreso cuando una rasuradora cuesta \$30.

38. **Membresía de un gimnasio** La membresía del recién inaugurado gimnasio Venus es aproximadamente

$$N(x) = 200(4 + x)^{1/2} \qquad (1 \leq x \leq 24)$$

donde $N(x)$ denota el número de miembros después de x meses de la gran inauguración del gimnasio. Determine $N(0)$ y $N(12)$ e interprete sus resultados.

39. **Curva de aprendizaje de Thurstone** El psicólogo L. L. Thurstone descubrió el siguiente modelo para la relación entre el tiempo de aprendizaje T y el largo de una lista n:

$$T = f(n) = An\sqrt{n - b}$$

donde A y b son constantes que dependen de la persona y la tarea. Suponga que, para una cierta persona y tarea, $A = 4$ y $b = 4$. Calcule $f(4), f(5), \ldots, f(12)$ y utilice esta información para trazar la gráfica de la función f. Interprete sus resultados.

40. **Equilibrio del mercado** Las funciones de demanda y oferta mensuales de la lámpara de escritorio Luminar son

$$p = d(x) = -1.1x^2 + 1.5x + 40$$
$$p = s(x) = 0.1x^2 + 0.5x + 15$$

respectivamente, donde p está en dólares y x en miles de unidades. Determine la cantidad y el precio de equilibrio.

41. **Inflado de un globo** Un globo esférico se infla a razón de $\frac{9}{2}\pi$ pies^3/min.
a. Encuentre una función que dé el radio r del globo en función de su volumen.
Sugerencia: $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.
b. Encuentre una función g que dé el volumen del globo en función del tiempo t.
c. Encuentre una función h que dé el radio del globo en función del tiempo.
d. ¿Cuál es el radio del globo después de 8 min?

CAPÍTULO 2 Antes de continuar . . .

1. Encuentre una ecuación de la recta que pasa por $(-1, -2)$ y $(4, 5)$.

2. Encuentre una ecuación de la recta cuya pendiente es $-\frac{1}{3}$ e intersección con y, $\frac{4}{3}$.

3. Sea

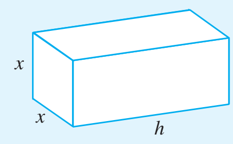
$$f(x) = \begin{cases} -2x + 1 & -1 \leq x < 0 \\ x^2 + 2 & 0 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

Determine (a) $f(-1)$, (b) $f(0)$ y (c) $f(\frac{3}{2})$.

4. Sea $f(x) = \frac{1}{x+1}$ y $g(x) = x^2 + 1$. Determine las reglas para (a) $f + g$, (b) fg, (c) $f \circ g$ y (d) $g \circ f$.

5. Los reglamentos postales especifican que un paquete enviado por correo puede tener un largo y contorno combinados de no más de 108 pulg. Suponga que un paquete rectangular tiene una sección transversal cuadrada de x pulg $\times$ x pulg y tiene el largo y contorno combinados de exactamente 108 pulg. Encuentre una función en términos de x que dé el volumen del paquete.

Sugerencia: El largo más el contorno es $4x + h$ (vea la figura adjunta).



FUNCIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS

3

LA FUNCIÓN EXPONENCIAL es sin duda la función más importante en las matemáticas y sus aplicaciones. Después de una breve introducción a la función exponencial y su *inversa*, la función logarítmica, se exploran algunos de los muchos usos que implican funciones exponenciales, por ejemplo la tasa de crecimiento de una población de bacterias en el laboratorio, la forma en que decae la materia radiactiva, la velocidad a la que un trabajador de una fábrica aprende un proceso determinado y la velocidad a la que se propaga una enfermedad transmisible a través del tiempo. Las funciones exponenciales también juegan un papel importante en el cálculo del interés ganado en una cuenta bancaria, un tema que se analiza en el capítulo 4.

¿Cuántas cámaras puede ensamblar un nuevo empleado de Eastman Optical luego de completar el programa básico de entrenamiento, y cuántas cámaras puede ensamblar después de estar en el puesto seis meses? En el ejemplo 5 de la página 174 usted verá cómo responder a estas preguntas.

3.1 Funciones exponenciales

Las funciones exponenciales y sus gráficas

Suponga que usted hace un depósito de \$1000 en una cuenta ganando intereses a una tasa de 10% anual *compuesto en forma continua* (la forma en que la mayoría de las instituciones financieras calcula los intereses). Entonces, el monto acumulado al final de t años $(0 \leq t \leq 20)$ está descrito por la función f, cuya gráfica aparece en la figura 1.* Esta función se llama *función exponencial*. Observe que la gráfica de f crece más lentamente al principio, pero con mayor rapidez a medida que pasa el tiempo. Para fines de comparación, también se muestra la gráfica de la función $y = g(t) = 1000(1 + 0.10t)$, obteniendo el monto acumulado para el mismo capital (\$1000) pero ganando un interés *simple* a una tasa de 10% anual. La moraleja de la historia: nunca es demasiado pronto para ahorrar.

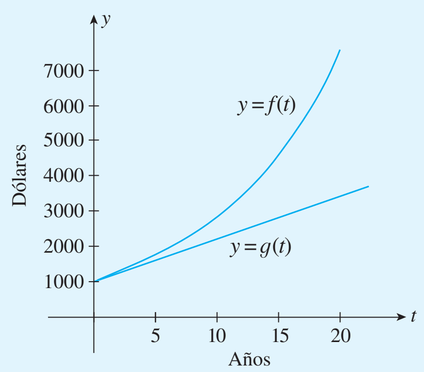


FIGURA 1
En una composición continua, una suma de dinero crece de manera exponencial.

Como se verá a lo largo de este capítulo, las funciones exponenciales desempeñan un papel importante en muchas aplicaciones del mundo real.

Observe que siempre que b es un número positivo y n es cualquier número real, la expresión b^n es un número real. Esto nos permite definir una función exponencial de la siguiente manera:

Función exponencial

La función definida por

$$f(x) = b^x \qquad (b > 0, b \neq 1)$$

se llama **función exponencial con base *b* y exponente *x***. El dominio de f es el conjunto de los números reales.

Por ejemplo, la función exponencial con base 2 es la función

$$f(x) = 2^x$$

con dominio $(-\infty, \infty)$. Los valores de $f(x)$ para valores seleccionados de x son:

$$f(3) = 2^3 = 8 \qquad f\left(\frac{3}{2}\right) = 2^{3/2} = 2 \cdot 2^{1/2} = 2\sqrt{2} \qquad f(0) = 2^0 = 1$$

$$f(-1) = 2^{-1} = \frac{1}{2} \qquad f\left(-\frac{2}{3}\right) = 2^{-2/3} = \frac{1}{2^{2/3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{4}}$$

* En la sección 4.1 se deduce la regla para f.

Los cálculos que involucran funciones exponenciales se facilitan por las leyes de los exponentes. Estas leyes se establecieron en la sección 1.5, tal vez usted desee revisar ese material. Sin embargo, por conveniencia, vamos a repetir estas leyes.

Leyes de los exponentes

Sean a y b números positivos y sean x y y números reales. Entonces,

1. $b^x \cdot b^y = b^{x+y}$

2. $\dfrac{b^x}{b^y} = b^{x-y}$

3. $(b^x)^y = b^{xy}$

4. $(ab)^x = a^x b^x$

5. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^x = \dfrac{a^x}{b^x}$

El uso de las leyes de los exponentes se ilustra en los dos ejemplos siguientes:

EJEMPLO 1

a. $16^{7/4} \cdot 16^{-1/2} = 16^{7/4-1/2} = 16^{5/4} = 2^5 = 32$ Ley 1

b. $\dfrac{8^{5/3}}{8^{-1/3}} = 8^{5/3-(-1/3)} = 8^2 = 64$ Ley 2

c. $(64^{4/3})^{-1/2} = 64^{(4/3)(-1/2)} = 64^{-2/3}$

$$= \frac{1}{64^{2/3}} = \frac{1}{(64^{1/3})^2} = \frac{1}{4^2} = \frac{1}{16}$$ Ley 3

d. $(16 \cdot 81)^{-1/4} = 16^{-1/4} \cdot 81^{-1/4} = \dfrac{1}{16^{1/4}} \cdot \dfrac{1}{81^{1/4}} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{6}$ Ley 4

e. $\left(\dfrac{3^{1/2}}{2^{1/3}}\right)^4 = \dfrac{3^{4/2}}{2^{4/3}} = \dfrac{9}{2^{4/3}}$ Ley 5

■

EJEMPLO 2 Sea $f(x) = 2^{2x-1}$. Encontrar el valor de x cuando $f(x) = 16$.

Solución Queremos resolver la ecuación

$$2^{2x-1} = 16 = 2^4$$

Pero esta ecuación es válida sí y sólo si

$$2x - 1 = 4 \qquad b^m = b^n \Rightarrow m = n$$

dando $x = \frac{5}{2}$. ■

Las funciones exponenciales desempeñan un papel importante en el análisis matemático. Debido a sus características especiales, son de las funciones más útiles y se encuentran en prácticamente todos los campos donde se aplica la matemática. Por mencionar algunos ejemplos: en condiciones ideales, el número de bacterias presente en cualquier momento t en un cultivo puede ser descrito por una función exponencial de t; la descomposición de sustancias radiactivas en el tiempo, de acuerdo con una ley "exponencial" del decaimiento, el dinero depositado a plazo fijo gana intereses compuestos que crecen exponencialmente, y algunas de las funciones de distribución más importantes encontradas en las estadísticas son exponenciales.

Vamos a comenzar nuestro análisis de las propiedades de las funciones exponenciales mediante el estudio de sus gráficas.

EJEMPLO 3 Trace la gráfica de la función exponencial $y = 2^x$.

Solución En primer lugar, como se explicó antes, el dominio de la función exponencial $y = f(x) = 2^x$ es el conjunto de los números reales. A continuación, si suponemos

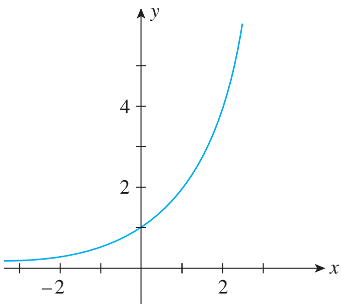


FIGURA 2
La gráfica de $y = 2^x$.

$x = 0$ se obtiene $y = 2^0 = 1$, la intersección de f en el eje y. No hay intersección en el eje x, ya que no hay valor de x para el cual $y = 0$. Para encontrar el rango de f, considere la siguiente tabla de valores:

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
y	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	16	32

Vemos en estos cálculos que 2^x disminuye y se aproxima a cero cuando x decrece sin límite y que 2^x aumenta sin límite a medida que x se incrementa sin límite. Así, el rango de f es el intervalo $(0, \infty)$; es decir, el conjunto de números reales positivos. Por último, se esboza la gráfica de $y = f(x) = 2^x$ en la figura 2. ■

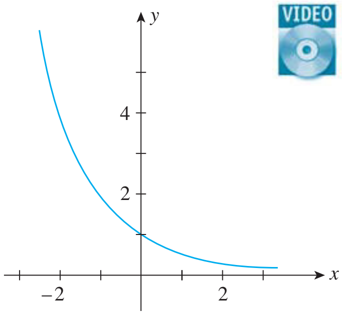


FIGURA 3
La gráfica de $y = (1/2)^x$.

VIDEO

EJEMPLO 4 Trazar la gráfica de la función exponencial $y = (1/2)^x$.

Solución El dominio de la función exponencial $y = (1/2)^x$ es el conjunto de todos los números reales. La intersección con el eje y es $(1/2)^0 = 1$; no hay intersección en el eje x, ya que no hay un valor de x para el cual $y = 0$. De la siguiente tabla de valores

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
y	32	16	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{32}$

se deduce que $(1/2)^x = 1/2^x$ aumenta sin límite cuando x decrece sin límite, y que $(1/2)^x$ disminuye y se aproxima a cero cuando x se incrementa sin límite. Por tanto, el rango de f es el intervalo $(0, \infty)$. La gráfica de $y = f(x) = (1/2)^x$ se muestra en la figura 3. ■

Las funciones $y = 2^x$ y $y = (1/2)^x$, cuyas gráficas se estudiaron en los ejemplos 3 y 4, son casos especiales de la función exponencial $y = f(x) = b^x$, obtenidos al establecer $b = 2$ y $b = 1/2$, respectivamente. En general, la función exponencial $y = b^x$ con $b > 1$ tiene una gráfica similar a $y = 2^x$, mientras que la gráfica de $y = b^x$ para $0 < b < 1$ es similar a la de $y = (1/2)^x$ (ejercicios 23 y 24 de la página 158). Cuando $b = 1$, la función $y = b^x$ se reduce a la función constante $y = 1$. Con fines de comparación, se muestran las gráficas de las tres funciones en la figura 4.

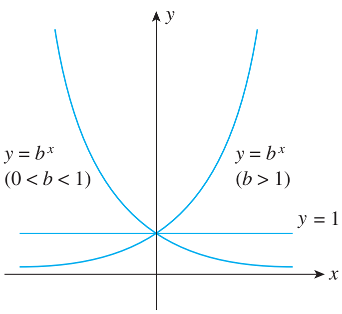


FIGURA 4
$y = b^x$ es una función creciente de x si $b > 1$, una función constante si $b = 1$, y una función decreciente si $0 < b < 1$.

Propiedades de la función exponencial

La función exponencial $y = b^x$ $(b > 0, b \neq 1)$ tiene las siguientes propiedades:

1. Su dominio es $(-\infty, \infty)$.
2. Su rango es $(0, \infty)$.
3. Su gráfica pasa por el punto $(0, 1)$.
4. Su gráfica es una curva ininterrumpida que carece de valles o crestas.
5. Su gráfica aumenta de izquierda a derecha si $b > 1$ y cae de izquierda a derecha si $b < 1$.

La base *e*

Se puede demostrar, aunque no se hará aquí, que a medida que m se hace más y más grande, el valor de la expresión

$$\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m$$

TABLA 1

m	$\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m$
10	2.59374
100	2.70481
1000	2.71692
10,000	2.71815
100,000	2.71827
1,000,000	2.71828

se aproxima al número irracional 2.7182818..., que se denota por e. Puede convencerse de la veracidad de esta definición del número e examinando la tabla 1, que se puede construir con la ayuda de una calculadora. (También, a continuación vea el ejercicio de Exploración con tecnología.)

Exploración con TECNOLOGÍA

Para obtener una confirmación visual de que la expresión $(1 + 1/m)^m$ se aproxima al número $e = 2.71828...$ a medida que m se hace más y más grande, trace la gráfica de $f(x) = (1 + 1/x)^x$ en una ventana de tamaño adecuado y observe que $f(x)$ se acerca a 2.71828... cuando x se hace más y más grande. Utilice **ZOOM** y **TRACE** para encontrar el valor de $f(x)$ para valores grandes de x.

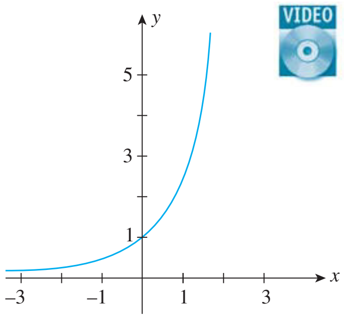


FIGURA **5**
La gráfica de $y = e^x$.

VIDEO

EJEMPLO 5 Trazar la gráfica de la función $y = e^x$.

Solución Dado $e > 1$, se deduce de la discusión anterior que la gráfica de $y = e^x$ es similar a la gráfica de $y = 2^x$ (figura 2). Con la ayuda de una calculadora obtenemos la siguiente tabla:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	0.05	0.14	0.37	1	2.72	7.39	20.09

La gráfica de $y = e^x$ se muestra en la figura 5. ■

A continuación, tomemos en cuenta otra función exponencial de la base e estrechamente relacionada con la función anterior y que es particularmente útil en la construcción de modelos que describen "decaimiento exponencial".

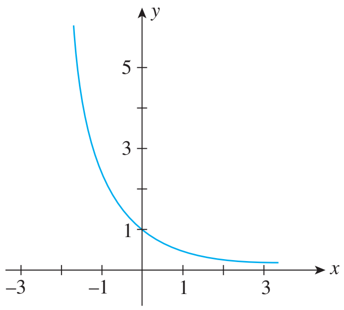


FIGURA **6**
La gráfica de $y = e^{-x}$.

EJEMPLO 6 Trazar la gráfica de la función $y = e^{-x}$.

Solución Dado $e > 1$, se deduce que $0 < 1/e < 1$, así $f(x) = e^{-x} = 1/e^x = (1/e)^x$ es una función exponencial con base menor que 1. Por tanto, tiene una gráfica similar a la de la función exponencial $y = (1/2)^x$. Al igual que antes, construimos la siguiente tabla de valores de $y = e^{-x}$ para valores seleccionados de x:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	20.09	7.39	2.72	1	0.37	0.14	0.05

Usando esta tabla, la gráfica de $y = e^{-x}$ se muestra en la figura 6. ■

3.1 Ejercicios de autoevaluación

1. Resolver la ecuación $2^{2x+1} \cdot 2^{-3} = 2^{x-1}$.

2. Trazar la gráfica de $y = e^{0.4x}$.

Las soluciones de los ejercicios de autoevaluación 3.1 se pueden encontrar en la página 160.

3.1 Preguntas de concepto

1. Definir la función exponencial f con base b y exponente x. ¿Qué restricciones, en su caso, se consideran para b?

2. Para la función exponencial $y = b^x$ ($b > 0$, $b \neq 1$), establecer (a) su dominio y su rango, (b) la intersección en el eje y, (c) cuándo se eleva su gráfica y cuándo desciende para $b > 1$ y $b < 1$.

3.1 Ejercicios

En los ejercicios 1 a 8, evaluar la expresión.

1. a. $4^{-3} \cdot 4^5$ **b.** $3^{-3} \cdot 3^6$

2. a. $(2^{-1})^3$ **b.** $(3^{-2})^3$

3. a. $9(9)^{-1/2}$ **b.** $5(5)^{-1/2}$

4. a. $\left[\left(-\frac{1}{2}\right)^3\right]^{-2}$ **b.** $\left[\left(-\frac{1}{3}\right)^2\right]^{-3}$

5. a. $\dfrac{(-3)^4(-3)^5}{(-3)^8}$ **b.** $\dfrac{(2^{-4})(2^6)}{2^{-1}}$

6. a. $3^{1/4} \cdot 9^{-5/8}$ **b.** $2^{3/4} \cdot 4^{-3/2}$

En los ejercicios 7 a 12, simplificar la expresión.

7. a. $(64x^9)^{1/3}$ **b.** $(25x^3y^4)^{1/2}$

8. a. $(2x^3)(-4x^{-2})$ **b.** $(4x^{-2})(-3x^5)$

9. a. $\dfrac{6a^{-5}}{3a^{-3}}$ **b.** $\dfrac{4b^{-4}}{12b^{-6}}$

10. a. $y^{-3/2}y^{5/3}$ **b.** $x^{-3/5}x^{8/3}$

11. a. $(2x^3y^2)^3$ **b.** $(4x^2y^2z^3)^2$

12. a. $\dfrac{5^0}{(2^{-3}x^{-3}y^2)^2}$ **b.** $\dfrac{(x+y)(x-y)}{(x-y)^0}$

En los ejercicios 13 a 22, resolver la ecuación para *x*.

13. $6^{2x} = 6^4$ **14.** $5^{-x} = 5^3$

15. $3^{3x-4} = 3^5$ **16.** $10^{2x-1} = 10^{x+3}$

17. $(2.1)^{x+2} = (2.1)^5$ **18.** $(-1.3)^{x-2} = (-1.3)^{2x+1}$

19. $8^x = \left(\frac{1}{32}\right)^{x-2}$ **20.** $3^{x-x^2} = \dfrac{1}{9^x}$

21. $3^{2x} - 12 \cdot 3^x + 27 = 0$

22. $2^{2x} - 4 \cdot 2^x + 4 = 0$

En los ejercicios 23 a 32, trace las gráficas de las funciones dadas utilizando los mismos ejes.

23. $y = 2^x$, $y = 3^x$ y $y = 4^x$

24. $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ y $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$

25. $y = 2^{-x}$, $y = 3^{-x}$ y $y = 4^{-x}$

26. $y = 4^{0.5x}$ y $y = 4^{-0.5x}$

27. $y = 4^{0.5x}$, $y = 4^x$ y $y = 4^{2x}$

28. $y = e^x$, $y = 2e^x$ y $y = 3e^x$

29. $y = e^{0.5x}$, $y = e^x$ y $y = e^{1.5x}$

30. $y = e^{-0.5x}$, $y = e^{-x}$ y $y = e^{-1.5x}$

31. $y = 0.5e^{-x}$, $y = e^{-x}$ y $y = 2e^{-x}$

32. $y = 1 - e^{-x}$ y $y = 1 - e^{-0.5x}$

33. Una función f tiene la forma $f(x) = Ae^{kx}$. Encontrar f si se sabe que $f(0) = 100$ y $f(1) = 120$.
Sugerencia: $e^{kx} = (e^k)^x$.

34. Si $f(x) = Axe^{-kx}$, encontrar $f(3)$ si $f(1) = 5$ y $f(2) = 7$.
Sugerencia: $e^{kx} = (e^k)^x$.

35. Si

$$f(t) = \frac{1000}{1 + Be^{-kt}}$$

encontrar $f(5)$ dado que $f(0) = 20$ y $f(2) = 30$.
Sugerencia: $e^{kx} = (e^k)^x$.

36. Seguimiento con GPS Las empresas voltean cada vez más hacia el GPS (sistema de posicionamiento global) para hacer seguimiento de los vehículos de su flotilla. El número estimado de los rastreadores automáticos instalados en los automóviles de flotilla en Estados Unidos se calcula por

$$N(t) = 0.6e^{0.17t} \qquad (0 \le t \le 5)$$

donde $N(t)$ se mide en millones y t se mide en años, con $t = 0$ correspondiente al año 2000.

a. ¿Cuál fue el número de rastreadores automáticos instalados en el 2000? ¿Cuántos fueron proyectados para ser instalados en 2005?

b. Trazar la gráfica de N.

Fuente: C. J. Driscoll Associates

37. Tasas de discapacidad Debido a los avances de la tecnología médica, las tasas de discapacidad para las personas mayores de 65 años de edad ha disminuido drásticamente. La función

$$R(t) = 26.3e^{-0.016t} \qquad (0 \leq t \leq 18)$$

muestra la tasa de discapacidad $R(t)$, en porcentaje, para las personas mayores de 65 años, desde 1982 ($t = 0$) hasta el 2000, donde t se mide en años.

a. ¿Cuál fue la tasa de discapacidad en 1982? ¿En 1986? ¿En 1994? ¿En 2000?

b. Trazar la gráfica de R.

Fuente: Frost and Sullivan

38. Hogares de casados El porcentaje de familias que eran hogares de casados entre 1970 y 2000 es de aproximadamente

$$P(t) = 86.9e^{-0.05t} \qquad (0 \leq t \leq 3)$$

donde t se mide en décadas, con $t = 0$ correspondiente al inicio de 1970.

a. ¿Qué porcentaje de las familias de los hogares se casó a principios de 1970, 1980, 1990 y 2000?

b. Trazar la gráfica de P.

Fuente: U.S. Census Bureau

39. Crecimiento de los sitios web Según un estudio realizado en el año 2000, el número proyectado de las direcciones web (en miles de millones) se aproxima mediante la función

$$N(t) = 0.45e^{0.5696t} \qquad (0 \leq t \leq 5)$$

donde t se mide en años, con $t = 0$ correspondiente al inicio de 1997.

a. Complete la siguiente tabla encontrando el número de direcciones web en cada año:

Año	0	1	2	3	4	5
Número de direcciones web (miles de millones)						

b. Trazar la gráfica de N.

40. Usuarios de Internet en China El número de usuarios de Internet en China se proyecta que sea

$$N(t) = 94.5e^{0.2t} \qquad (1 \leq t \leq 6)$$

donde $N(t)$ se mide en millones y t se mide en años, con $t = 1$ que corresponde al inicio de 2005.

a. ¿Cuántos usuarios de Internet había allí a principios de 2005? ¿A principios de 2006?

b. ¿Cuántos usuarios de Internet se esperaba que hubiera allí a principios de 2010?

c. Trazar la gráfica de N.

Fuente: C. E. Unterberg

41. Impuesto mínimo alterno El impuesto mínimo alterno se creó en 1969 para evitar que los muy ricos utilizaran deducciones creativas y se protegieran para no pagar nada al Internal Revenue Service (Sistema de Administración Tributaria). Pero esto tiene cada vez más éxito en la clase media. El número de contribuyentes sujetos a un impuesto mínimo alterno se prevé que sea

$$N(t) = \frac{35.5}{1 + 6.89e^{-0.8674t}} \qquad (0 \leq t \leq 6)$$

donde $N(t)$ se mide en millones y t se mide en años, con $t = 0$ correspondiente a 2004. ¿Cuál es el número previsto de contribuyentes sujetos a un impuesto mínimo alterno en 2010?

Fuente: Brookings Institution

42. Absorción de fármacos La concentración de un fármaco en un órgano en cualquier tiempo t (en segundos) está dada por

$$C(t) = \begin{cases} 0.3t - 18(1 - e^{-t/60}) & \text{si } 0 \leq t \leq 20 \\ 18e^{-t/60} - 12e^{-(t-20)/60} & \text{si } t > 20 \end{cases}$$

donde $C(t)$ se mide en gramos por centímetro cúbico (g/cm^3).

a. ¿Cuál es la concentración inicial del fármaco en el órgano?

b. ¿Cuál es la concentración del fármaco en el órgano después de 10 segundos?

c. ¿Cuál es la concentración del fármaco en el órgano después de 30 segundos?

43. Absorción de fármacos La concentración de un fármaco en un órgano en cualquier tiempo t (en segundos) está dada por

$$x(t) = 0.08 + 0.12(1 - e^{-0.02t})$$

donde $x(t)$ se mide en gramos por centímetro cúbico (g/cm^3).

a. ¿Cuál es la concentración inicial del fármaco en el órgano?

b. ¿Cuál es la concentración del fármaco en el órgano después de 20 segundos?

44. Absorción de fármacos Jane tomó 100 mg de un fármaco en la mañana y otros 100 mg del mismo fármaco a la misma hora a la mañana siguiente. La cantidad del fármaco en su cuerpo t días después de que tomó la primera dosis, está dada por

$$A(t) = \begin{cases} 100e^{-1.4t} & \text{si } 0 \leq t < 1 \\ 100(1 + e^{1.4})e^{-1.4t} & \text{si } t \geq 1 \end{cases}$$

¿Cuál fue la cantidad de fármaco en el cuerpo de Jane inmediatamente después de tomar la segunda dosis? ¿Después de dos días?

En los ejercicios 45 a 48, determine si la afirmación es verdadera o falsa. Si es verdadera, explique por qué lo es. Si es falsa, dé un ejemplo para demostrar por qué lo es.

45. $(x^2 + 1)^3 = x^6 + 1$ **46.** $e^{xy} = e^x e^y$

47. Si $x < y$, entonces $e^x < e^y$.

48. Si $0 < b < 1$ y $x < y$, entonces $b^x > b^y$.

3.1 Soluciones a los ejercicios de autoevaluación

1. $2^{2x+1} \cdot 2^{-3} = 2^{x-1}$

$$\frac{2^{2x+1}}{2^{x-1}} \cdot 2^{-3} = 1 \qquad \text{Se dividen ambos lados entre } 2^{x-1}.$$

$$2^{(2x+1)-(x-1)-3} = 1$$

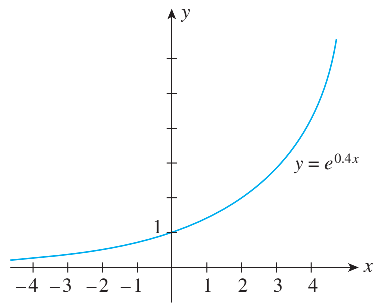
$$2^{x-1} = 1$$

Esto es verdadero si y sólo si $x - 1 = 0$ o $x = 1$.

2. Primero se construye la siguiente tabla de valores:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$y = e^{0.4x}$	0.3	0.4	0.7	1	1.5	2.2	3.3	5

Enseguida se trazan los puntos y se unen con una curva suave para obtener la gráfica de f que se muestra en la siguiente figura.



USO DE LA TECNOLOGÍA

Aunque la prueba está fuera del alcance de este libro, se puede demostrar que una función exponencial de la forma $f(x) = b^x$, donde $b > 1$, en última instancia, crecerá más rápido que la función potencia $g(x) = x^n$ para *cualquier* número real positivo n. Para hacer una demostración visual de este resultado para el caso especial de la función exponencial $f(x) = e^x$, podemos utilizar una herramienta de graficación para trazar las gráficas de ambas f y g (para valores seleccionados de n) sobre el mismo conjunto de ejes en una ventana de visualización adecuada y observar que la gráfica de f, en última instancia, está por encima de la de g.

EJEMPLO 1 Utilice una calculadora graficadora para trazar las gráficas de (a) $f(x) = e^x$ y $g(x) = x^3$ sobre el mismo conjunto de ejes en la ventana de visualización $[0, 6] \times [0, 250]$ y (b) $f(x) = e^x$ y $g(x) = x^5$ en la ventana de visualización $[0, 20] \times [0, 1{,}000{,}000]$.

Solución

a. Las gráficas de $f(x) = e^x$ y $g(x) = x^3$ en la ventana de visualización $[0, 6] \times [0, 250]$ se muestran en la figura T1a.

b. Las gráficas de $f(x) = e^x$ y $g(x) = x^5$ en la ventana de visualización $[0, 20] \times [0, 1{,}000{,}000]$ se muestran en la figura T1b.

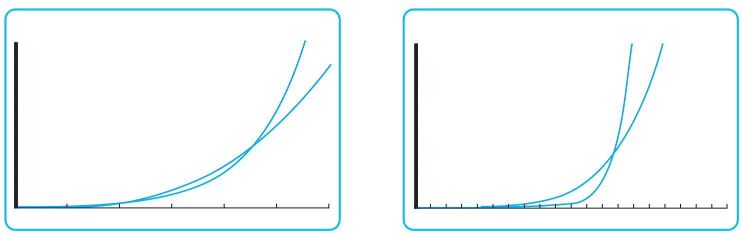


FIGURA **T1**

(a) Las gráficas de $f(x) = e^x$ y $g(x) = x^3$ en la ventana de visualización $[0, 6] \times [0, 250]$

(b) Las gráficas de $f(x) = e^x$ y $g(x) = x^5$ en la ventana de visualización $[0, 20] \times [0, 1{,}000{,}000]$

■

En los ejercicios siguientes se pide usar una calculadora graficadora para mostrar las propiedades de las funciones exponenciales.

EJERCICIOS CON TECNOLOGÍA

En los ejercicios 1 y 2 trace las gráficas de las funciones *f* y *g* sobre el mismo conjunto de ejes en la ventana de visualización especificada.

1. $f(x) = e^x$ y $g(x) = x^2$; $[0, 4] \times [0, 30]$

2. $f(x) = e^x$ y $g(x) = x^4$; $[0, 15] \times [0, 20{,}000]$

En los ejercicios 3 y 4 trace las gráficas de las funciones *f* y *g* sobre el mismo conjunto de ejes en una ventana de visualización apropiada para demostrar que *f*, en última instancia, crece más rápido que *g*. (*Nota:* su respuesta no será única.)

3. $f(x) = 2^x$ y $g(x) = x^{2.5}$

4. $f(x) = 3^x$ y $g(x) = x^3$

5. Trace las gráficas de $f(x) = 2^x$, $g(x) = 3^x$ y $h(x) = 4^x$ sobre el mismo conjunto de ejes en la ventana de visualización $[0, 5] \times [0, 100]$. Comente la relación entre la base b y el crecimiento de la función $f(x)^x = b^x$.

6. Trace las gráficas de $f(x) = (1/2)^x$, $g(x) = (1/3)^x$ y $h(x) = (1/4)^x$ sobre el mismo conjunto de ejes en la ventana de visualización $[0, 4] \times [0, 1]$. Comente la relación entre la base b y el crecimiento de la función $f(x)^x = b^x$.

7. Trace las gráficas de $f(x) = e^x$, $g(x) = 2e^x$ y $h(x) = 3e^x$ sobre el mismo conjunto de ejes en la ventana de visualización $[-3, 3] \times [0, 10]$. Comente el papel que desempeña la constante k en la gráfica de $f(x) = ke^x$.

8. Trace las gráficas de $f(x) = -e^x$, $g(x) = -2e^x$ y $h(x) = -3e^x$ sobre el mismo conjunto de ejes en la ventana de visualización $[-3, 3] \times [-10, 0]$. Comente el papel que desempeña la constante k en la gráfica de $f(x) = ke^x$.

9. Trace las gráficas de $f(x) = e^{0.5x}$, $g(x) = e^x$ y $h(x) = e^{1.5x}$ sobre el mismo conjunto de ejes en la ventana de visualización $[-2, 2] \times [0, 4]$. Comente el papel que desempeña la constante k en la gráfica de $f(x) = e^{kx}$.

10. Trace las gráficas de $f(x) = e^{-0.5x}$, $g(x) = e^{-x}$ y $h(x) = e^{-1.5x}$ sobre el mismo conjunto de ejes en la ventana de visualización $[-2, 2] \times [0, 4]$. Comente el papel que desempeña la constante k en la gráfica de $f(x) = e^{kx}$.

11. **ABSORCIÓN DE FÁRMACOS** La concentración de un fármaco en un órgano en cualquier tiempo t (en segundos) está dada por

$$x(t) = 0.08 + 0.12(1 - e^{-0.02t})$$

donde $x(t)$ se mide en gramos por centímetro cúbico (g/cm^3).

a. Trace la gráfica de la función x en la ventana de visualización $[0, 200] \times [0, 0.2]$.

b. ¿Cuál es la concentración inicial del fármaco en el órgano?

c. ¿Cuál es la concentración del fármaco en el órgano después de 20 segundos?

12. **ABSORCIÓN DE FÁRMACOS** Jane tomó 100 mg de un fármaco en la mañana y otro de 100 mg del mismo fármaco al mismo tiempo a la mañana siguiente. La cantidad de fármaco en su cuerpo después de t días luego de la primera dosis está dada por

$$A(t) = \begin{cases} 100e^{-1.4t} & \text{si } 0 \le t < 1 \\ 100(1 + e^{1.4})e^{-1.4t} & \text{si } t \ge 1 \end{cases}$$

a. Trace la gráfica de la función A en la ventana de visualización $[0, 5] \times [0, 140]$.

b. Compruebe los resultados del ejercicio 44, en la página 159.

13. **ABSORCIÓN DE FÁRMACOS** La concentración de un fármaco en un órgano en cualquier tiempo t (en segundos) está dada por

$$C(t) = \begin{cases} 0.3t - 18(1 - e^{-t/60}) & \text{si } 0 \le t \le 20 \\ 18e^{-t/60} - 12e^{-(t-20)/60} & \text{si } t > 20 \end{cases}$$

donde $C(t)$ se mide en gramos por centímetro cúbico (g/cm^3).

a. Trace la gráfica de la función C en la ventana de visualización $[0, 120] \times [0, 1]$.

b. ¿Cuánto tiempo, después de que el medicamento es introducido por primera vez, se necesita para que la concentración del fármaco alcance un punto máximo?

c. Después de que la concentración del fármaco ha alcanzado su máximo, ¿cuánto tiempo se necesita para que la concentración del fármaco decaiga a 0.5 g/cm^3?
Sugerencia: Trace las gráficas de $y_1 = C(x)$ y $y_2 = 0.5$ y utilice la función **ISECT** de su calculadora graficadora.

14. **MODELADO CON DATOS** El número de usuarios de Internet en China (en millones) desde el comienzo de 2005 hasta 2010 se muestran en la tabla siguiente:

Año	2005	2006	2007	2008	2009	2010
Número	116.1	141.9	169.0	209.0	258.1	314.8

a. Utilice **ExpReg** para encontrar un modelo de regresión exponencial de los datos. Sea $t = 1$ correspondiente a principios de 2005.
Sugerencia: $a^x = e^{x \ln a}$.

b. Trace el diagrama de dispersión y la gráfica de la función f que se encuentra en la parte (a).

3.2 Funciones logarítmicas

Logaritmos

Ya está familiarizado con las ecuaciones exponenciales de la forma

$$b^y = x \qquad (b > 0, b \neq 1)$$

donde la variable x se expresa en términos de un número real b y una variable y. Pero, ¿qué pasa con la solución de esta misma ecuación para y? Puede recordar de sus cursos de álgebra que el número y se llama el **logaritmo de x en base b** y se denota por $\log_b x$. Es la potencia a la cual la base b debe ser elevada con el fin de obtener el número x.

Logaritmo de x en base b

$$y = \log_b x \quad \text{si y sólo si} \quad x = b^y \qquad (x > 0)$$

Observe que el logaritmo $\log_b x$ se define sólo para los valores positivos de x.

EJEMPLO 1

a. $\log_{10} 100 = 2$, ya que $100 = 10^2$
b. $\log_5 125 = 3$, ya que $125 = 5^3$

c. $\log_3 \dfrac{1}{27} = -3$, ya que $\dfrac{1}{27} = \dfrac{1}{3^3} = 3^{-3}$

d. $\log_{20} 20 = 1$, ya que $20 = 20^1$ ■

EJEMPLO 2 Resolver cada una de las siguientes ecuaciones para x.

a. $\log_3 x = 4$ **b.** $\log_{16} 4 = x$ **c.** $\log_x 8 = 3$

Solución

a. Por definición, $\log_3 x = 4$ implica $x = 3^4 = 81$.
b. $\log_{16} 4 = x$ equivale a $4 = 16^x = (4^2)^x = 4^{2x}$, o $4^1 = 4^{2x}$, de la cual se deduce que

$$2x = 1 \qquad b^m = b^n \Rightarrow m = n$$

$$x = \frac{1}{2}$$

c. Refiriéndose una vez más a la definición, vemos que la ecuación $\log_x 8 = 3$ es equivalente a

$$8 = 2^3 = x^3$$

$$x = 2 \qquad a^m = b^m \Rightarrow a = b$$

■

Los dos sistemas de logaritmos más utilizados son el sistema de **logaritmos comunes**, que utiliza el número 10 como su base, y el sistema de **logaritmos naturales**, que utiliza el número irracional $e = 2.71828...$ como su base. Además, es práctica habitual de escribir **log** para el $\log_{10}$ y **ln** para el $\log_e$.

Notación logarítmica

$$\log x = \log_{10} x \qquad \text{Logaritmo común}$$

$$\ln x = \log_e x \qquad \text{Logaritmo natural}$$

El sistema de logaritmos naturales es ampliamente utilizado en el trabajo teórico. El uso de logaritmos naturales en vez de logaritmos de otras bases a menudo conduce a expresiones más sencillas.

Leyes de logaritmos

Los cálculos que implican logaritmos se facilitan con las siguientes **leyes de los logaritmos**.

Leyes de logaritmos

Si m y n son números positivos ($b > 0$, $b \neq 1$), entonces

1. $\log_b mn = \log_b m + \log_b n$

2. $\log_b \dfrac{m}{n} = \log_b m - \log_b n$

3. $\log_b m^n = n \log_b m$

4. $\log_b 1 = 0$

5. $\log_b b = 1$

△ No hay que confundir la expresión $\log \dfrac{m}{n}$ (ley 2) con la expresión $\dfrac{\log m}{\log n}$. Por ejemplo

$$\log \frac{100}{10} = \log 100 - \log 10 = 2 - 1 = 1 \neq \frac{\log 100}{\log 10} = \frac{2}{1} = 2$$

Se le pedirá probar estas leyes en los ejercicios 74 a 76 en la página 170. Sus derivaciones se basan en la definición de logaritmo y en las leyes correspondientes de los exponentes. Los siguientes ejemplos ilustran las propiedades de los logaritmos.

EJEMPLO 3

a. $\log(2 \cdot 3) = \log 2 + \log 3$ **b.** $\text{In} \dfrac{5}{3} = \text{In } 5 - \text{In } 3$

c. $\log \sqrt{7} = \log 7^{1/2} = \dfrac{1}{2} \log 7$ **d.** $\log_5 1 = 0$

e. $\log_{45} 45 = 1$ ■

EJEMPLO 4 Dado que $\log 2 \approx 0.3010$, $\log 3 \approx 0.4771$ y $\log 5 \approx 0.6990$, utilice las leyes de los logaritmos para encontrar

a. $\log 15$ **b.** $\log 7.5$ **c.** $\log 81$ **d.** $\log 50$

Solución

a. Tenga en cuenta que $15 = 3 \cdot 5$, así que por la ley 1 de los logaritmos tenemos,

$$\begin{aligned} \log 15 &= \log 3 \cdot 5 \\ &= \log 3 + \log 5 \\ &\approx 0.4771 + 0.6990 \\ &= 1.1761 \end{aligned}$$

b. Observe que el $7.5 = 15/2 = (3 \cdot 5)/2$, aplicamos las leyes 1 y 2, para obtener

$$\begin{aligned} \log 7.5 &= \log \frac{(3)(5)}{2} \\ &= \log 3 + \log 5 - \log 2 \\ &\approx 0.4771 + 0.6990 - 0.3010 \\ &= 0.8751 \end{aligned}$$

c. Puesto que $81 = 3^4$, se aplica la ley 3 para obtener

$$\begin{aligned} \log 81 &= \log 3^4 \\ &= 4 \log 3 \\ &\approx 4(0.4771) \\ &= 1.9084 \end{aligned}$$

d. Escribimos $50 = 5 \cdot 10$ y encontrar que

$$\begin{aligned} \log 50 &= \log(5)(10) \\ &= \log 5 + \log 10 \\ &\approx 0.6990 + 1 && \text{Utilice la ley 5} \\ &= 1.6990 \end{aligned}$$

■

EJEMPLO 5 Desarrollar y simplificar las siguientes expresiones:

a. $\log_3 x^2y^3$ **b.** $\log_2 \dfrac{x^2+1}{2^x}$ **c.** $\ln \dfrac{x^2\sqrt{x^2-1}}{e^x}$

Solución

a. $$\begin{aligned} \log_3 x^2y^3 &= \log_3 x^2 + \log_3 y^3 && \text{Ley 1} \\ &= 2\log_3 x + 3\log_3 y && \text{Ley 3} \end{aligned}$$

b. $$\begin{aligned} \log_2 \frac{x^2+1}{2^x} &= \log_2(x^2+1) - \log_2 2^x && \text{Ley 2} \\ &= \log_2(x^2+1) - x\log_2 2 && \text{Ley 3} \\ &= \log_2(x^2+1) - x && \text{Ley 5} \end{aligned}$$

c. $$\begin{aligned} \ln \frac{x^2\sqrt{x^2-1}}{e^x} &= \ln \frac{x^2(x^2-1)^{1/2}}{e^x} && \text{Reescriba} \\ &= \ln x^2 + \ln(x^2-1)^{1/2} - \ln e^x && \text{Leyes 1 y 2} \\ &= 2\ln x + \frac{1}{2}\ln(x^2-1) - x\ln e && \text{Ley 3} \\ &= 2\ln x + \frac{1}{2}\ln(x^2-1) - x && \text{Ley 5} \end{aligned}$$

■

Los ejemplos 6 y 7 ilustran cómo las propiedades de los logaritmos se utilizan para resolver ecuaciones.

EJEMPLO 6 Resuelva $\log_3(x+1) - \log_3(x-1) = 1$ para x.

Solución Al utilizar las propiedades de los logaritmos, obtenemos

$$\begin{aligned} \log_3(x+1) - \log_3(x-1) &= 1 \\ \log_3 \frac{x+1}{x-1} &= 1 && \text{Ley 2} \\ \frac{x+1}{x-1} &= 3^1 = 3 && \text{Definición de los logaritmos} \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} x + 1 &= 3(x - 1) \\ x + 1 &= 3x - 3 \\ 4 &= 2x \\ x &= 2 \end{aligned}$$

■

EJEMPLO 7 Resuelva $\log x + \log(2x - 1) = \log 6$.

Solución Tenemos

$$\begin{aligned} \log x + \log(2x - 1) &= \log 6 \\ \log x + \log(2x - 1) - \log 6 &= 0 \\ \log\left[\frac{x(2x - 1)}{6}\right] &= 0 && \text{Leyes 1 y 2} \\ \frac{x(2x - 1)}{6} &= 10^0 = 1 && \text{Definición de los logaritmos} \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} x(2x - 1) &= 6 \\ 2x^2 - x - 6 &= 0 \\ (2x + 3)(x - 2) &= 0 \\ x &= -\frac{3}{2} \quad \text{o} \quad 2 \end{aligned}$$

Dado que el dominio de $\log(2x - 1)$ es el intervalo $(\frac{1}{2}, \infty)$ (porque $2x - 1$ debe ser positivo), rechazamos la raíz $-\frac{3}{2}$ de la ecuación cuadrática y se concluye que la solución de la ecuación dada es $x = 2$. ■

Nota Si se utiliza el hecho de que $\log a = \log b$ si y sólo si $a = b$, también podemos resolver la ecuación del ejemplo 7 como sigue:

$$\begin{aligned} \log x + \log(2x - 1) &= \log 6 \\ \log x(2x - 1) &= \log 6 \\ x(2x - 1) &= 6 \end{aligned}$$

El resto de la solución es la misma que en el ejemplo 7. ■

Funciones logarítmicas y sus gráficas

La definición de un logaritmo significa que si b y n son números positivos y b es diferente de 1, entonces la expresión de $\log_b n$ es un número real. Esto nos permite definir una función logarítmica de la siguiente manera.

Función logarítmica

La función definida por

$$f(x) = \log_b x \qquad (b > 0, b \neq 1)$$

se llama **función logarítmica con base b**. El dominio de f es el conjunto de todos los números positivos.

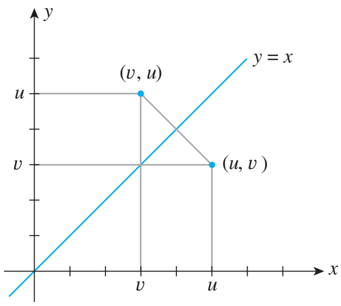


FIGURA 7
Los puntos (u, v) y (v, u) son reflejos entre sí.

Una forma fácil de obtener la gráfica de la función logarítmica $y = \log_b x$ es construir una tabla de valores del logaritmo (base b). Sin embargo, otro método más instructivo se basa en la explotación de la íntima relación entre las funciones exponencial y logarítmica.

Si un punto (u, v) se encuentra en la gráfica de $y = \log_b x$, entonces

$$v = \log_b u$$

Pero también se puede escribir esta ecuación en forma exponencial como

$$u = b^v$$

Así que el punto (v, u) también se encuentra en la gráfica de la función $y = b^x$. Ahora se analizará la relación entre los puntos (u, v) y (v, u) y la recta $y = x$ (figura 7). Si se piensa en la recta $y = x$ como un espejo, entonces el punto (v, u) es el reflejo del punto (u, v). Del mismo modo, el punto (u, v) es un reflejo del punto de (v, u). Podemos tomar ventaja de esta relación para trazar la gráfica de las funciones logarítmicas. Por ejemplo, si la gráfica de $y = \log_b x$, donde $b > 1$, entonces tenemos sólo que se quiere trazar el reflejo en el espejo de la gráfica de $y = b^x$ con respecto a la recta $y = x$ (figura 8).

Usted puede descubrir las siguientes propiedades de la función logarítmica, considerando la reflexión de la gráfica de una función exponencial adecuada (ejercicios 47 y 48 en la página 169).

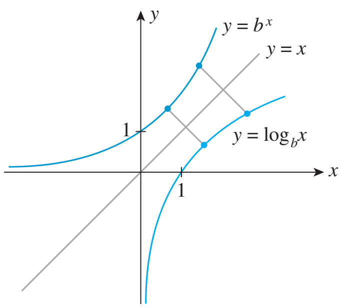


FIGURA 8
Las gráficas de $y = b^x$ e $y = \log_b x$ son reflexiones entre sí.

Propiedades de la función logarítmica

La función logarítmica $y = \log_b x$ ($b > 0$, $b \neq 1$) tiene las siguientes propiedades:

1. Su dominio es $(0, \infty)$.
2. Su rango es $(-\infty, \infty)$.
3. Su gráfica pasa por el punto $(1, 0)$.
4. Su gráfica es una curva ininterrumpida carece de valles y crestas.
5. Su gráfica aumenta de izquierda a derecha si $b > 1$ y cae de izquierda a derecha si $b < 1$.

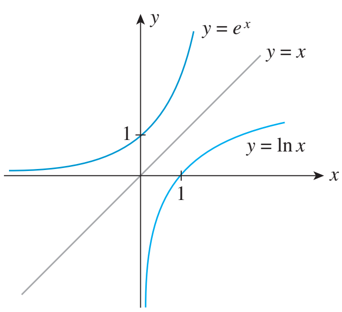


FIGURA 9
La gráfica de $y = \ln x$ es el reflejo de la gráfica de $y = e^x$.

EJEMPLO 8 Trazar la gráfica de la función $y = \ln x$.

Solución En primer lugar, se traza la gráfica de $y = e^x$. Luego, la gráfica requerida se obtiene trazando el reflejo de la gráfica de $y = e^x$ con respecto a la recta $y = x$ (figura 9). ■

Propiedades relativas a las funciones exponenciales y logarítmicas

Se utilizó la relación que existe entre la función exponencial $f(x) = e^x$ y la función logarítmica $g(x) = \ln x$ al trazar la gráfica de g en el ejemplo 8. Esta relación se describe con más detalle mediante las siguientes propiedades, que son una consecuencia inmediata de la definición del logaritmo de un número.

Propiedades relativas a e^x y ln x

$$e^{\ln x} = x \qquad (x > 0) \qquad \textbf{(1)}$$

$$\ln e^x = x \qquad (\text{para cualquier número real } x) \qquad \textbf{(2)}$$

(La verificación de estas propiedades se deja al lector.)

De las propiedades 1 y 2, se concluye que la función compuesta

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= f[g(x)]\\ &= e^{\ln x} = x\\ (g \circ f)(x) &= g[f(x)]\\ &= \ln e^{x} = x\end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}f[g(x)] &= g[f(x)]\\ &= x\end{aligned}$$

Se dice que si cualesquier dos funciones f y g satisfacen esta relación, son **inversas** entre sí. Tenga en cuenta que la función f deshace lo que hace la función g, y viceversa, por lo que la composición de las dos funciones en cualquier orden resulta en la función de identidad $F(x) = x$.

Las relaciones expresadas en las ecuaciones (1) y (2) son útiles para resolver ecuaciones que involucran exponenciales y logaritmos.

Exploración con TECNOLOGÍA

Usted puede demostrar la validez de las propiedades 1 y 2, las cuales establecen que la función exponencial $f(x) = e^x$ y la función logarítmica $g(x) = \ln x$ son inversas entre sí, de la siguiente manera:

1. Trace la gráfica de $(f \circ g)(x) = e^{\ln x}$, utilizando la ventana de visualización $[0, 10] \times [0, 10]$. Interprete el resultado.
2. Trace la gráfica de $(g \circ f)(x) = \ln e^x$, utilizando la ventana de visualización estándar. Interprete el resultado.

VIDEO

EJEMPLO 9 Resolver la ecuación $2e^{x+2} = 5$.

Solución Primero se dividen ambos lados de la ecuación entre 2 para obtener

$$e^{x+2} = \frac{5}{2} = 2.5$$

A continuación se toma el logaritmo natural de cada lado de la ecuación y, se utiliza la ecuación (2), para obtener

$$\begin{aligned}\ln e^{x+2} &= \ln 2.5\\ x + 2 &= \ln 2.5\\ x &= -2 + \ln 2.5\\ &\approx -1.08\end{aligned}$$

■

Explore y analice

Tome la ecuación $y = y_0 b^{kx}$, donde y_0 y k son constantes positivas y $b > 0$, $b \neq 1$. Suponga que queremos expresar y en la forma $y = y_0 e^{px}$. Utilice las leyes de los logaritmos para demostrar que $p = k \ln b$ y, por tanto, que $y = y_0 e^{(k \ln b)x}$ es una forma alterna de $y = y_0 b^{kx}$ utilizando la base e.

EJEMPLO 10 Resolver la ecuación $5 \ln x + 3 = 0$.

Solución Al sumar -3 a ambos lados de la ecuación se obtiene

$$\begin{aligned}5 \ln x &= -3\\ \ln x &= -\frac{3}{5} = -0.6\end{aligned}$$

y, por tanto,

$$e^{\ln x} = e^{-0.6}$$

Se utiliza la ecuación (1) para concluir que

$$x = e^{-0.6} \approx 0.55$$

3.2 Ejercicios de autoevaluación

1. Trace la gráfica de $y = 3^x$ y $y = \log_3 x$ en el mismo conjunto de ejes.

2. Resuelva la ecuación $3e^{x+1} - 2 = 4$.

Las soluciones a los ejercicios de autoevaluación 3.2 se pueden encontrar en la página 170.

3.2 Preguntas de concepto

1. **a.** Defina $y = \log_b x$.
   b. Defina la función logarítmica f con base b. ¿Qué restricciones, en su caso, se consideran para b?
2. Para la función logarítmica $y = \log_b x$ ($b > 0$, $b \neq 1$), establezca (a) su dominio y el rango, (b) su intersección en x, (c) cuándo crece su gráfica y cuándo desciende para el caso en que $b > 1$ y en que $b < 1$.
3. **a.** Si $x > 0$, ¿qué es $e^{\ln x}$?
   b. Si x es cualquier número real, ¿qué es $\ln e^x$?

3.2 Ejercicios

En los ejercicios 1 a 10, exprese cada ecuación en forma logarítmica.

1. $2^6 = 64$
2. $3^5 = 243$
3. $3^{-2} = \frac{1}{9}$
4. $5^{-3} = \frac{1}{125}$
5. $\left(\frac{1}{3}\right)^1 = \frac{1}{3}$
6. $\left(\frac{1}{2}\right)^{-4} = 16$
7. $32^{3/5} = 8$
8. $81^{3/4} = 27$
9. $10^{-3} = 0.001$
10. $16^{-1/4} = 0.5$

En los ejercicios 11 a 16, dado que log 3 ≈ 0.4771 y log 4 ≈ 0.6021, encuentre el valor de cada logaritmo.

11. $\log 12$
12. $\log \frac{3}{4}$
13. $\log 16$
14. $\log \sqrt{3}$
15. $\log 48$
16. $\log \frac{1}{300}$

En los ejercicios 17 a 20 escriba la expresión como el logaritmo de una cantidad simple.

17. $2 \ln a + 3 \ln b$
18. $\frac{1}{2} \ln x + 2 \ln y - 3 \ln z$
19. $\ln 3 + \frac{1}{2} \ln x + \ln y - \frac{1}{3} \ln z$
20. $\ln 2 + \frac{1}{2} \ln (x + 1) - 2 \ln(1 + \sqrt{x})$

En los ejercicios 21 a 28 utilice las leyes de los logaritmos para desarrollar y simplificar cada expresión.

21. $\log x(x + 1)^4$
22. $\log x(x^2 + 1)^{-1/2}$
23. $\log \frac{\sqrt{x + 1}}{x^2 + 1}$
24. $\ln \frac{e^x}{1 + e^x}$
25. $\ln xe^{-x^2}$
26. $\ln x(x + 1)(x + 2)$
27. $\ln \frac{x^{1/2}}{x^2\sqrt{1 + x^2}}$
28. $\ln \frac{x^2}{\sqrt{x}(1 + x)^2}$

En los ejercicios 29 a 42 utilice las leyes de los logaritmos para resolver cada ecuación.

29. $\log_2 x = 3$
30. $\log_3 x = 2$
31. $\log_2 8 = x$
32. $\log_3 27 = 2x$
33. $\log_x 10^3 = 3$
34. $\log_x \frac{1}{16} = -2$
35. $\log_2(2x + 5) = 3$
36. $\log_4(5x - 4) = 2$

37. $\log_2 x - \log_2(x - 2) = 3$

38. $\log x - \log(x + 6) = -1$

39. $\log_5(2x + 1) - \log_5(x - 2) = 1$

40. $\log(x + 7) - \log(x - 2) = 1$

41. $\log x + \log(2x - 5) = \log 3$

42. $\log_3(x + 1) + \log_3(2x - 3) = 1$

En los ejercicios 43 a 46 trace la gráfica de cada ecuación.

43. $y = \log_3 x$

44. $y = \log_{1/3} x$

45. $y = \ln 2x$

46. $y = \ln \frac{1}{2}x$

En los ejercicios 47 y 48 trace las gráficas de las ecuaciones en el mismo eje de coordenadas.

47. $y = 2^x$ y $y = \log_2 x$

48. $y = e^{3x}$ y $y = \frac{1}{3} \ln x$

En los ejercicios 49 a 58 utilice logaritmos para resolver cada ecuación para *t*.

49. $e^{0.4t} = 8$

50. $\frac{1}{3}e^{-3t} = 0.9$

51. $5e^{-2t} = 6$

52. $4e^{t-1} = 4$

53. $2e^{-0.2t} - 4 = 6$

54. $12 - e^{0.4t} = 3$

55. $\dfrac{50}{1 + 4e^{0.2t}} = 20$

56. $\dfrac{200}{1 + 3e^{-0.3t}} = 100$

57. $A = Be^{-t/2}$

58. $\dfrac{A}{1 + Be^{t/2}} = C$

59. Una función f tiene la forma $f(x) = a + b \ln x$. Encuentre f si se sabe que $f(1) = 2$ y $f(2) = 4$.

60. **Promedio de duración de la vida** Una de las razones del aumento de la esperanza de vida en los últimos años han sido los avances en la tecnología médica. El promedio de vida de las mujeres estadounidenses desde 1907 hasta 2007 está dado por

$$W(t) = 49.9 + 17.1 \ln t \qquad (1 \leq t \leq 6)$$

donde $W(t)$ se mide en años y t se mide en intervalos de 20 años, con $t = 1$ correspondiente a 1907.

a. ¿Cuál era la esperanza de vida promedio para las mujeres en 1907?
b. Si la tendencia continúa, ¿cuál será la expectativa de vida promedio para las mujeres en 2027?

Fuente: American Association of Retired People

61. **Presión arterial** La presión arterial sistólica normal de un menor se puede aproximar con la función

$$p(x) = m(\ln x) + b$$

donde $p(x)$ se mide en milímetros de mercurio, x se mide en libras, y m y b son constantes. Teniendo en cuenta que $m = 19.4$ y $b = 18$, determinar la presión arterial sistólica de un niño que pesa 92 libras.

62. **Magnitud de los terremotos** En la escala de Richter, la magnitud R de un terremoto está dada por la fórmula

$$R = \log \frac{I}{I_0}$$

donde I es la intensidad del terremoto que se está midiendo e I_0 es la intensidad de referencia estándar.

a. Exprese la intensidad de un terremoto de magnitud $R = 5$, en términos de la intensidad estándar I.
b. Exprese la intensidad I de un terremoto de magnitud $R = 8$ en términos de la intensidad estándar I. ¿Cuántas veces es mayor la intensidad de un terremoto de magnitud 8 de uno de magnitud 5?
c. En los tiempos modernos, la mayor pérdida de vidas humanas atribuible a un terremoto ocurrió en el este de China en 1976. Conocido como el terremoto de Tangshan, registró 8.2 en la escala de Richter. ¿De qué manera se compara la intensidad de este terremoto con la de uno de magnitud $R = 5$?

63. **Intensidad del sonido** La intensidad relativa de un sonido D, de intensidad I se mide en decibeles (db), donde

$$D = 10 \log \frac{I}{I_0}$$

I_0 es el umbral de nivel de audibilidad.

a. Exprese la intensidad de un sonido de 30 db (el nivel de sonido de una conversación normal) en términos de I_0.
b. Determine cuántas veces es mayor la intensidad de un sonido de 80 db (música rock) respecto de un sonido de 30 db.
c. El ruido prolongado por encima de 150 db causa sordera permanente. ¿De qué manera la intensidad de un sonido de 150 dB se compara con la de uno de 80 db?

64. **Presión barométrica** La ley de Halley establece que la presión barométrica (en pulgadas de mercurio), a una altura x por encima del nivel del mar se aproxima por la ecuación

$$p(x) = 29.92e^{-0.2x} \qquad (x \geq 0)$$

Si la presión barométrica medida en un globo de aire caliente es de 20 pulgadas de mercurio, ¿a qué altitud está el globo?

65. **Altura de los árboles** La altura (en pies) de cierto tipo de árbol se calcula por

$$h(t) = \frac{160}{1 + 240e^{-0.2t}}$$

donde t es la edad del árbol en años. Calcule la edad de un árbol de 80 pies.

66. **Ley de enfriamiento de Newton** La temperatura de una taza de café t minutos después de que se sirve está dada por

$$T = 70 + 100e^{-0.0446t}$$

donde T se mide en grados Fahrenheit.

a. ¿Cuál era la temperatura del café cuando se sirvió?
b. ¿Cuándo se enfriará el café lo suficiente (digamos, a 120°F) como para beberlo?

67. Longitud de un pez La longitud (en centímetros) de un mero típico del Pacífico con t años de edad es de aproximadamente

$$f(t) = 200(1 - 0.956e^{-0.18t})$$

Suponga que un mero del Pacífico capturado por Mike mide 140 cm. ¿Cuál es su edad aproximada?

68. Absorción de fármacos La concentración de un fármaco en un órgano en cualquier tiempo t (en segundos) está dada por

$$x(t) = 0.08(1 - e^{-0.02t})$$

donde $x(t)$ se mide en gramos por centímetro cúbico (g/cm^3).

a. ¿Cuánto tiempo haría falta para que la concentración del fármaco en el órgano llegara a 0.02 g/cm^3?

b. ¿Cuánto tiempo haría falta para que la concentración del fármaco en el órgano llegara a 0.04 g/cm^3?

69. Absorción de fármacos La concentración de un fármaco en un órgano en cualquier tiempo t (en segundos) está dada por

$$x(t) = 0.08 + 0.12e^{-0.02t}$$

donde $x(t)$ se mide en gramos por centímetro cúbico (g/cm^3).

a. ¿Cuánto tiempo haría falta para que la concentración del fármaco en el órgano llegara a 0.18 g/cm^3?

b. ¿Cuánto tiempo haría falta para que la concentración del fármaco en el órgano llegara a 0.16 g/cm^3?

70. Ciencia forense Los científicos forenses utilizan la siguiente ley para determinar el momento de la muerte o el asesinato de las víctimas de accidentes. Si T denota la temperatura de un cuerpo t horas después de la muerte, entonces

$$T = T_0 + (T_1 - T_0)(0.97)^t$$

donde T_0 es la temperatura del aire y T_1 es la temperatura del cuerpo en el momento de la muerte. Juan Pérez fue encontrado muerto a media noche en su casa, cuando la temperatura ambiente era de 70°F y su temperatura corporal, de 80°F. ¿Cuándo lo mataron? Suponga que la temperatura normal del cuerpo es de 98.6°F.

En los ejercicios 71 y 72, determine si la afirmación es verdadera o falsa. Si es verdadera, explique por qué. Si es falso, dé un ejemplo para demostrar por qué lo es.

71. $(\ln x)^3 = 3 \ln x$ para todo x en $(0, \infty)$.

72. En $a - \ln b = \ln(a - b)$ para todos los números reales positivos a y b.

73. a. Dado que $2^x = e^{kx}$, encontrar k.

b. Demostrar que, en general, si b es un número real no negativo, entonces cualquier ecuación de la forma $y = b^x$ se puede escribir en la forma $y = e^{kx}$, por un número real k.

74. Utilice la definición de logaritmo para demostrar que

a. $\log_b mn = \log_b m + \log_b n$

b. $\log_b \dfrac{m}{n} = \log_b m - \log_b n$

Sugerencia: Sea $\log_b m = p$ y $\log_b n = q$. Entonces, $b^p = m$ y $b^q = n$.

75. Utilice la definición de logaritmo para probar que

$$\log_b m^n = n \log_b m$$

76. Utilice la definición de logaritmo para probar que

a. $\log_b 1 = 0$

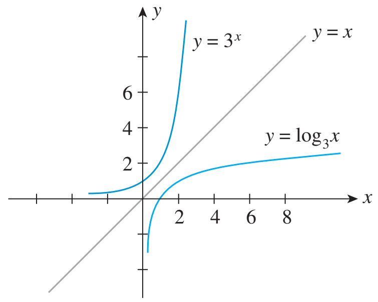
b. $\log_b b = 1$

3.2 Soluciones a los ejercicios de autoevaluación

1. En primer lugar, se traza la gráfica de $y = 3^x$ con la ayuda de la siguiente tabla de valores:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y = 3^x$	1/27	1/9	1/3	0	3	9	27

A continuación, se toma el reflejo de esta gráfica con respecto a la recta $y = x$ para obtener la gráfica de $y = \log_3 x$.



2.

$$\begin{aligned} 3e^{x+1} - 2 &= 4 \\ 3e^{x+1} &= 6 \\ e^{x+1} &= 2 \\ \ln e^{x+1} &= \ln 2 && \text{Tomar el logaritmo de ambos lados.} \\ (x+1)\ln e &= \ln 2 && \text{Ley 3} \\ x + 1 &= \ln 2 && \text{Ley 5} \\ x &= \ln 2 - 1 \\ &\approx -0.3069 \end{aligned}$$

3.3 Funciones exponenciales como modelos matemáticos

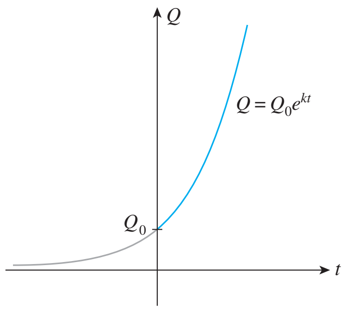


FIGURA 10
El crecimiento exponencial.

Crecimiento exponencial

Muchos de los problemas derivados de situaciones prácticas pueden ser descritos matemáticamente en términos de funciones exponenciales o funciones estrechamente relacionadas con la función exponencial. En esta sección se analizarán algunas aplicaciones con funciones exponenciales de las ciencias biológicas y sociales.

En la sección 3.1 se vio que la función exponencial $f(x) = b^x$ es una función creciente cuando $b > 1$. En particular, la función $f(x) = e^x$ comparte esta propiedad. De este resultado, se puede deducir que la función $Q(t) = Q_0e^{kt}$, donde Q_0 y k son constantes positivas, tiene las siguientes propiedades:

1. $Q(0) = Q_0$.
2. $Q(t)$ aumenta "rápidamente" sin límite cuando t crece sin límite (figura 10).

La propiedad 1 se desprende del cálculo

$$Q(0) = Q_0e^0 = Q_0$$

La función exponencial

$$Q(t) = Q_0e^{kt} \qquad (0 \leq t < \infty) \tag{3}$$

proporciona un modelo matemático de una cantidad $Q(t)$ que está presente al inicio en la cantidad de $Q(0) = Q_0$ y cuya tasa de crecimiento en cualquier tiempo t es directamente proporcional a la cantidad presente en el tiempo t (vea el ejemplo 5, sección 9.7). Esta cantidad se dice que presenta un **crecimiento exponencial**, y la constante k de proporcionalidad se denomina **constante de crecimiento**. Los intereses devengados por un depósito a plazo fijo cuando es compuesto continuamente muestra crecimiento exponencial (capítulo 4). A continuación se presentan otros ejemplos de crecimiento exponencial.

EJEMPLO DE APLICACIÓN 1 **Crecimiento de las bacterias** En condiciones ideales de laboratorio, el número de bacterias en un cultivo crece con base en la ley $Q(t) = Q_0e^{kt}$, donde Q_0 denota el número de bacterias inicialmente presentes en el cultivo, k es una constante determinada por el tipo de bacteria en cuestión y t es el tiempo transcurrido medido en horas. Suponga que inicialmente están presentes 10,000 bacterias en el cultivo y 2 horas más tarde están presentes 60,000. ¿Cuántas bacterias habrá en el cultivo al cabo de 4 horas?

Solución

Tomando en cuenta que $Q(0) = Q_0 = 10{,}000$, por lo que $Q(t) = 10{,}000e^{kt}$. A continuación, el hecho de que 60,000 bacterias están presentes 2 horas más tarde se traduce en $Q(2) = 60{,}000$. Por tanto,

$$\begin{aligned} 60{,}000 &= 10{,}000e^{2k} \\ e^{2k} &= 6 \end{aligned}$$

Al calcular el logaritmo natural en ambos lados de la ecuación, obtenemos

$$\begin{aligned} \ln e^{2k} &= \ln 6 \\ 2k &= \ln 6 \qquad \text{Dado } \ln e = 1 \\ k &\approx 0.8959 \end{aligned}$$

Así, el número de bacterias presente en cualquier tiempo t está dada por

$$Q(t) = 10{,}000e^{0.8959t}$$

En particular, el número de bacterias presentes en el cultivo al final de 4 horas está dado por

$$\begin{aligned} Q(4) &= 10{,}000e^{0.8959(4)} \\ &\approx 360{,}029 \end{aligned}$$

■

Decaimiento exponencial

En contraste con el crecimiento exponencial, una cantidad exhibe **decaimiento exponencial** si disminuye a un ritmo que es directamente proporcional a su tamaño. Esta cantidad puede ser descrita por la función exponencial

$$Q(t) = Q_0e^{-kt} \qquad (0 \leq t < \infty) \tag{4}$$

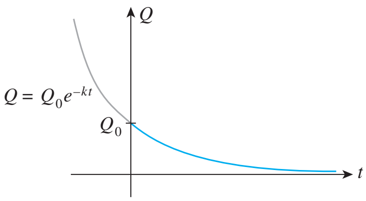


FIGURA **11**
Decaimiento exponencial.

donde la constante positiva Q_0 mide la cantidad inicialmente presente ($t = 0$) y k es un número positivo adecuado, llamado **constante de decaimiento**. La elección de este número se determina por la naturaleza de la sustancia en cuestión. La gráfica de esta función se presenta en la figura 11.

EJEMPLO DE APLICACIÓN 2 Degradación radiactiva Las sustancias radiactivas se degradan exponencialmente. Por ejemplo, la cantidad de radio presente en cualquier tiempo t obedece a la ley $Q(t) = Q_0e^{-kt}$, donde Q_0 es la cantidad presente inicial y k es una constante positiva adecuada. La **vida media de una sustancia radiactiva** es el tiempo requerido para que una cantidad determinada se reduzca a la mitad. Ahora se sabe que la vida media del radio es de aproximadamente 1600 años. Suponga que inicialmente hay 200 miligramos de radio puro. Encuentre la cantidad que queda después de t años. ¿Cuál es la cantidad que queda después de 800 años?

Solución La cantidad inicial del radio presente es de 200 miligramos, por lo que $Q(0) = Q_0 = 200$. Por tanto, $Q(t) = 200e^{-kt}$. A continuación, el dato relativo a la vida media del radio implica que $Q(1600) = 100$, y esto da

$$100 = 200e^{-1600k}$$

$$e^{-1600k} = \frac{1}{2}$$

Al calcular el logaritmo natural de ambos lados de esta ecuación se tiene

$$-1600k \ln e = \ln \frac{1}{2}$$

$$-1600k = \ln \frac{1}{2} \qquad \ln e = 1$$

$$k = -\frac{1}{1600} \ln \left(\frac{1}{2}\right) = 0.0004332$$

Por tanto, la cantidad de radio que queda después de t años es

$$Q(t) = 200e^{-0.0004332t}$$

En concreto, la cantidad de radio que queda después de 800 años es

$$Q(800) = 200e^{-0.0004332(800)} \approx 141.42$$

o aproximadamente 141 miligramos. ■

EJEMPLO DE APLICACIÓN 3 Degradación radiactiva El carbono 14, un isótopo radiactivo del carbono, tiene una vida media de 5770 años. ¿Cuál es su constante de decaimiento?

Solución Tenemos $Q(t) = Q_0e^{-kt}$. Dado que la vida media del elemento es de 5770 años, la mitad de la sustancia que queda al final de ese periodo, es decir,

$$Q(5770) = Q_0e^{-5770k} = \frac{1}{2}Q_0$$

$$e^{-5770k} = \frac{1}{2}$$

Al calcular el logaritmo natural a ambos lados de esta ecuación, tenemos

$$\begin{aligned} \ln e^{-5770k} &= \ln \frac{1}{2} \\ -5770k &= -0.693147 \\ k &\approx 0.00012 \end{aligned}$$

■

El fechado por carbono 14 es un método muy conocido que los antropólogos utilizan para establecer la edad de los fósiles de plantas y animales. Este método supone que la proporción de carbono 14 (C-14) presente en la atmósfera se ha mantenido constante en los últimos 50,000 años. El profesor Willard Libby, quien recibió el Premio Nobel de Química en 1960, propuso esta teoría.

La cantidad de C-14 en los tejidos de una planta o animal vivos es constante. Sin embargo, cuando un organismo muere, deja de absorber nuevas cantidades de C-14, y la cantidad de C-14 en los restos disminuye debido a la descomposición natural de la sustancia radiactiva. Así, la edad aproximada del fósil de una planta o un animal se puede determinar al medir la cantidad de C-14 presente en los restos.

EJEMPLO DE APLICACIÓN 4 Fechado por carbono 14 Un cráneo de un sitio arqueológico tiene la décima parte de la cantidad de C-14 que originalmente contenía. Determine la edad aproximada del cráneo.

Solución Aquí,

$$\begin{aligned} Q(t) &= Q_0e^{-kt} \\ &= Q_0e^{-0.00012t} \end{aligned}$$

donde Q_0 es la cantidad de C-14 presente originalmente y k, la constante de decaimiento, es igual a 0.00012 (vea el ejemplo 3). Puesto que $Q(t) = (1/10)Q_0$, tenemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{10}Q_0 &= Q_0e^{-0.00012t} \\ \ln \frac{1}{10} &= -0.00012t \qquad \text{Al tomar el logaritmo natural a ambos lados.} \\ t &= \frac{\ln \frac{1}{10}}{-0.00012} \\ &\approx 19{,}200 \end{aligned}$$

o cerca de 19,200 años. ■

Curvas de aprendizaje

El siguiente ejemplo muestra cómo se puede aplicar la función exponencial para describir ciertos tipos de procesos de aprendizaje. Considere la función

$$Q(t) = C - Ae^{-kt}$$

donde C, A y k son constantes positivas.

La gráfica de la función Q se muestra en la figura 12, donde la parte de la gráfica correspondiente a los valores negativos de t se dibuja con una línea gris, ya que, en la práctica, normalmente se restringe el dominio de la función al intervalo $[0, \infty)$. Observe que $Q(t)$ $(t > 0)$ aumenta rápidamente al principio, pero que la tasa de crecimiento disminuye considerablemente después de un tiempo. El valor de $Q(t)$ no supera nunca a C.

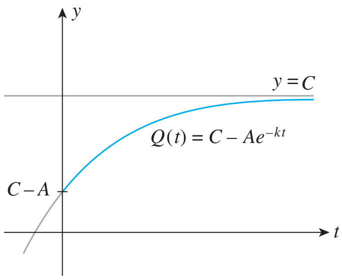


FIGURA 12
Una curva de aprendizaje.

Este comportamiento de la gráfica de la función Q se asemeja mucho al modelo de aprendizaje experimentado por los trabajadores que realizan trabajos altamente repetitivos. Por ejemplo, la productividad de un trabajador en una línea de ensamble aumenta rápidamente en las primeras etapas del periodo de capacitación. Este incremento de la productividad es un resultado directo de la capacitación de los trabajadores y la experiencia acumulada. Pero la tasa del incremento de la productividad se desacelera con el tiempo, y el nivel de productividad del trabajador se acerca a algún nivel fijo debido a las limitaciones del trabajador y de la máquina. Debido a esta característica, a la gráfica de la función $Q(t) = C - Ae^{-kt}$ se le llama **curva de aprendizaje**.

EJEMPLO DE APLICACIÓN 5 Tiempo de ensamblaje La División de Cámaras de Eastman Optical produce una cámara reflex de 35 mm de una sola lente. El departamento de capacitación de Eastman determina que, después de completar el programa de capacitación básica, un nuevo empleado, sin experiencia previa, será capaz de ensamblar

$$Q(t) = 50 - 30e^{-0.5t}$$

cámaras modelo F por día, t meses después de que comience a trabajar en la línea de ensamble.

a. ¿Cuántas cámaras modelo F puede ensamblar un nuevo empleado por día luego de la capacitación básica?
b. ¿Cuántas cámaras modelo F puede ensamblar por día un empleado con un mes de experiencia? ¿Un empleado con 2 meses de experiencia? ¿Un empleado con 6 meses de experiencia?
c. ¿Cuántas cámaras modelo F puede ensamblar por día un empleado con experiencia promedio?

Solución

a. El número de cámaras modelo F que un nuevo empleado puede ensamblar está dado por

$$Q(0) = 50 - 30 = 20$$

b. El número de cámaras modelo F que un empleado con 1 mes de experiencia, 2 meses de experiencia y 6 meses de experiencia puede ensamblar por día está dado por

$$Q(1) = 50 - 30e^{-0.5} \approx 31.80$$
$$Q(2) = 50 - 30e^{-1} \approx 38.96$$
$$Q(6) = 50 - 30e^{-3} \approx 48.51$$

o aproximadamente 32, 39 y 49, respectivamente.

c. A medida que t se hace más y más grande, $Q(t)$ se acerca a 50. Por tanto, se puede esperar que un empleado con experiencia media, en última instancia, ensamble 50 cámaras modelo F por día. ■

Otras aplicaciones de la curva de aprendizaje se encuentran en los modelos que describen la difusión de información sobre un producto o la velocidad de un objeto en caída en un medio viscoso.

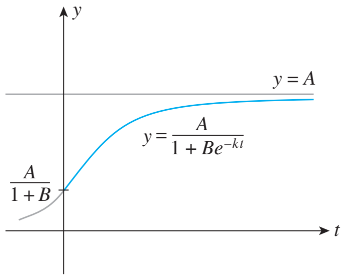


FIGURA **13**
Una curva logística.

Funciones de crecimiento logístico

Nuestro último ejemplo de la aplicación de funciones exponenciales a la descripción de los fenómenos naturales implica la **curva logística** (también llamada **curva en S** o **sigmoide**), que es la gráfica de la función

$$Q(t) = \frac{A}{1 + Be^{-kt}}$$

donde *A, B* y *k* son constantes positivas. La función *Q* se llama **función de crecimiento logístico** y la gráfica de la función *Q* se esboza en la figura 13.

Observe que $Q(t)$ aumenta más rápido para valores pequeños de *t*. En efecto, para valores pequeños de *t*, la curva logística se asemeja a una curva de crecimiento exponencial. Sin embargo, la *tasa de crecimiento* de $Q(t)$ disminuye muy rápido a medida que *t* aumenta y $Q(t)$ se aproxima al número *A* a medida que *t* se hace más y más grande, pero $Q(t)$ no supera nunca a *A*.

Así, la curva logística exhibe tanto la propiedad de un rápido crecimiento de la curva de crecimiento exponencial, como la propiedad de "saturación" de la curva de aprendizaje. Debido a estas características, la curva logística sirve como un modelo matemático adecuado para describir muchos fenómenos naturales. Por ejemplo, si se in-trodujo un número reducido de conejos en una pequeña isla en el Pacífico Sur, se podría esperar que su población creciera muy rápido al principio, pero la tasa de crecimiento podría disminuir más rápido a medida que el hacinamiento, la escasez de alimentos, y otros factores ambientales le afectan. Al final, la población se estabilizaría en un nivel compatible con la capacidad del medio para soportar tal forma de vida. Este nivel, dado por *A,* se llama *capacidad de carga* del ambiente. Los modelos que describen la propagación de rumores y las epidemias son otros ejemplos de la aplicación de la curva logística.

VIDEO

EJEMPLO DE APLICACIÓN 6 Propagación de la influenza El número de soldados en Fort MacArthur que contrajeron influenza después de *t* días durante una epidemia se aproxima por el modelo exponencial

$$Q(t) = \frac{5000}{1 + 1249e^{-kt}}$$

Si 40 soldados contrajeron la influenza el día 7, determine cuántos soldados contrajeron la influenza el día 15.

Solución La información proporcionada implica que

$$Q(7) = \frac{5000}{1 + 1249e^{-7k}} = 40$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}
40(1 + 1249e^{-7k}) &= 5000\\
1 + 1249e^{-7k} &= \frac{5000}{40} = 125\\
e^{-7k} &= \frac{124}{1249}\\
-7k &= \ln \frac{124}{1249}\\
k &= -\frac{\ln \frac{124}{1249}}{7} \approx 0.33
\end{aligned}$$

Por consiguiente, el número de soldados que contrajeron la influenza luego de t días está dada por

$$Q(t) = \frac{5000}{1 + 1249e^{-0.33t}}$$

En concreto, el número de soldados que contrajeron la influenza para el día 15 está dada por

$$Q(15) = \frac{5000}{1 + 1249e^{-15(0.33)}}$$
$$\approx 508$$

o aproximadamente 508 soldados. ■

Exploración con TECNOLOGÍA

Consulte el ejemplo 6.

1. Utilice una calculadora graficadora para trazar la gráfica de la función Q, utilizando la ventana de visualización $[0, 40] \times [0, 5000]$.
2. ¿Cuánto tiempo tomará para que los primeros 1000 soldados contraigan la influenza?
   Sugerencia: Trace las gráficas de $y_1 = Q(t)$ y $y_2 = 1000$ y encuentre el punto de intersección de las dos gráficas.

3.3 Ejercicios de autoevaluación

Suponga que la población (en millones) de un país en cualquier tiempo t crece con base en la regla

$$P = \left(P_0 + \frac{I}{k}\right)e^{kt} - \frac{I}{k}$$

donde P denota la población en cualquier tiempo t, k es una constante que refleja la tasa natural de crecimiento de la población, I es una constante que proporciona la tasa (constante) de inmigración en el país y P_0 es la población total del país en el tiempo $t = 0$. La población de Estados Unidos en 1980 ($t = 0$) fue de 226.5 millones. Si la tasa natural de crecimiento es 0.8% anual ($k = 0.008$) y la inmigración neta se permite a un ritmo de medio millón de personas por año ($I = 0.5$), ¿cuál será la población en 2010?

La solución al ejercicio de autoevaluación 3.3 *se puede encontrar en la página 179.*

3.3 Preguntas de concepto

1. Dados el modelo de crecimiento exponencial sin restricciones y el modelo de decaimiento exponencial. ¿Qué efecto tiene la magnitud del crecimiento (decaimiento) constante sobre el crecimiento (decaimiento) de una cantidad?
2. ¿Qué es la vida media de una sustancia radiactiva?
3. ¿Cuál es la función de crecimiento logístico? ¿Cuáles son sus características?

3.3 Ejercicios

1. **Crecimiento exponencial** Dada una cantidad $Q(t)$ descrita por la función de crecimiento exponencial

$$Q(t) = 400e^{0.05t}$$

donde t se mide en minutos, responda las siguientes preguntas:

a. ¿Cuál es la constante de crecimiento?
b. ¿Qué cantidad está presente inicialmente?
c. Complete la siguiente tabla de valores:

t	0	10	20	100	1000
Q					

2. **Decaimiento exponencial** Dada una cantidad $Q(t)$ que presenta un decaimiento exponencial descrito por la función

$$Q(t) = 2000e^{-0.06t}$$

donde t se mide en años, conteste las siguientes preguntas:

a. ¿Cuál es la constante de desintegración?
b. ¿Qué cantidad está presente inicialmente?
c. Complete la siguiente tabla de valores:

t	0	5	10	20	100
Q					

3. **Crecimiento de bacterias** La tasa de crecimiento de *Escherichia coli,* una bacteria común que se encuentra en el intestino humano, es proporcional a su tamaño. En condiciones ideales de laboratorio, cuando esta bacteria se cultiva en un medio nutritivo, el número de células de un cultivo se duplica aproximadamente cada 20 minutos.

a. Si la población inicial de la célula es 100, determine la función $Q(t)$ que expresa el crecimiento exponencial del número de células de esta bacteria en función del tiempo t (en minutos).
b. ¿Cuánto tiempo se necesita para que una colonia de 100 células aumente a una población de 1 millón?
c. Si la población inicial de células fue de 1000, ¿cómo podría cambiar esto nuestro modelo?

4. **Población mundial** La población del mundo a principios de 1990 era de 5300 millones. Suponga que la población continúa creciendo a un ritmo de aproximadamente 2% anual y encuentre la función $Q(t)$ que expresa la población mundial (en miles de millones) en función del tiempo t (en años), con $t = 0$ correspondiente a principios de 1990. Usando esta función, complete la siguiente tabla de valores y trace la gráfica de la función Q.

Año	1990	1995	2000	2005
Población mundial				

Año	2010	2015	2020	2025
Población mundial				

5. **Población mundial** Consulte al ejercicio 4.

a. Si la población mundial sigue creciendo a un ritmo de aproximadamente 2% anual, encuentre la longitud del tiempo t_0 requerida para que la población mundial triplique su tamaño.
b. Usando el tiempo t_0 encontrado en la parte (a), ¿cuál sería la población mundial, si la tasa de crecimiento se redujera a 1.8% anual?

6. **Valor de reventa** Garland Mills compró cierta pieza de maquinaria hace tres años por \$500,000. Su valor actual de reventa es de \$320,000. ¿Cuál será el valor de reventa de la máquina dentro de 4 años, suponiendo que decrece en forma exponencial?

7. **Presión atmosférica** Si la temperatura es constante, la presión atmosférica P (en libras/pulgada cuadrada) varía según la altitud sobre el nivel del mar h, de acuerdo con la ley

$$P = p_0 e^{-kh}$$

donde p_0 es la presión atmosférica a nivel del mar y k es una constante. Si la presión atmosférica es de 15 lb/pulg^2 al nivel del mar y 12.5 libras/pulg^2 a 4000 pies, encuentre la presión atmosférica a una altitud de 12,000 pies.

8. **Degradación radiactiva** El elemento radiactivo polonio se degrada según la ley

$$Q(t) = Q_0 \cdot 2^{-(t/140)}$$

donde Q_0 es la cantidad inicial y el tiempo t se mide en días. Si la cantidad de polonio que queda después de 280 días es de 20 mg, ¿cuál fue la cantidad presente inicial?

9. **Degradación radiactiva** El fósforo 32 (P-32) tiene una vida media de 14.2 días. Si 100 gramos de esta sustancia están presentes inicialmente, encuentre la cantidad presente después de t días. ¿Qué cantidad quedará después de 7.1 día?

10. **Lluvia nuclear** El estroncio 90 (Sr-90), un isótopo radiactivo de estroncio, está presente en la “lluvia” resultante de las explosiones nucleares. Es especialmente peligroso para la vida animal, incluidos los humanos, porque es absorbido por la estructura ósea, tras la ingesta de alimentos contaminados. Su vida media es de 27 años. Si la cantidad de Sr-90 en un área determinada es de cuatro veces el nivel “seguro”, encuentre cuánto tiempo debe transcurrir antes de que llegue a un “nivel aceptable”.

11. **Fechado por carbono 14** Algunos depósitos de madera recuperada de un sitio arqueológico contienen 20% de la cantidad de C-14 que originalmente contenían. ¿Cuánto hace que murió el árbol del que se obtuvo la madera?

12. **Fechado por carbono 14** Los restos óseos del llamado hombre de Pittsburgh, descubierto en Pennsylvania, habían perdido 82% del C-14 que originalmente contenía. Determine la edad aproximada de los huesos.

13. **Curvas de aprendizaje** El American Court Reporting Institute determinó que el estudiante promedio que toma el curso avanzado de estenógrafo, que dura 20 semanas, progresa con base en la función

$$Q(t) = 120(1 - e^{-0.05t}) + 60 \qquad (0 \le t \le 20)$$

donde $Q(t)$ mide el número de palabras (por minuto) del dictado que el estudiante puede tomar en estenógrafo después de t semanas en el curso. Trace la gráfica de la función Q y conteste las siguientes preguntas:

a. ¿Cuál es la velocidad inicial de escritura del estudiante promedio en este curso?
b. ¿Qué velocidad de escritura tiene el estudiante promedio cuando llega a la mitad del curso?
c. ¿Cuántas palabras por minuto puede tomar el estudiante promedio después de completar este curso?

14. **Personas que viven con VIH** Con base en los datos compilados por la OMS, el número de personas que vivían con VIH (virus de inmunodeficiencia humana) en todo el mundo desde 1985 hasta 2006 se estimaba en

$$N(t) = \frac{39.88}{1 + 18.94e^{-0.2957t}} \qquad (0 \le t \le 21)$$

donde $N(t)$ se mide en millones y t en años, con $t = 0$ correspondiente a principios de 1985.

a. ¿Cuántas personas vivían con VIH en el mundo a principios de 1985? ¿A principios de 2005?
b. Suponiendo que la tendencia continúa, ¿cuántas personas vivían con el VIH en el mundo a principios de 2008?

Fuente: World Health Organization

15. **Deuda federal** Según datos obtenidos de la Oficina del Presupuesto, la deuda total federal estadounidense (en billones de dólares) de 2001 a 2006 está dada por

$$f(t) = 5.37e^{0.078t} \qquad (1 \le t \le 6)$$

donde t se mide en años, con $t = 1$ correspondiente a 2001. ¿Cuál era la deuda federal total en 2001? ¿En 2006?

Fuente: Congressional Budget Office

16. **Efecto de la publicidad en las ventas** Metro Departament Store determinó que t semanas después de terminada una promoción de ventas, el volumen de ventas estaba dado por

$$S(t) = B + Ae^{-kt} \qquad (0 \le t \le 4)$$

donde $B = 50{,}000$ y es igual al volumen promedio semanal de las ventas antes de la promoción. Los volúmenes de ventas al final de la primera y tercera semanas fueron \$83,515 y \$65,055, respectivamente. Suponga que el volumen de ventas está disminuyendo de manera exponencial.

a. Encuentre la constante de desintegración k.
b. Encuentre el volumen de ventas al final de la cuarta semana.

17. **Demanda de computadoras** Universal Instruments encontró que la demanda mensual de su nueva línea de computadoras para el hogar Galaxy t meses después de colocar la línea en el mercado estaba dada por

$$D(t) = 2000 - 1500e^{-0.05t} \qquad (t > 0)$$

Grafique esta función y responda las siguientes preguntas:

a. ¿Cuál es la demanda después de 1 mes? ¿Después de 1 año? ¿Después de 2 años? ¿Después de 5 años?
b. ¿En qué nivel se espera que se estabilice la demanda?

18. **Confiabilidad de los chips de computadora** El porcentaje de chips de computadora de una marca determinada que fallará después de t años de uso se estima en

$$P(t) = 100(1 - e^{-0.1t})$$

¿Qué porcentaje de esta marca de chips de computadora se espera que sea útil después de 3 años?

19. **Longitud de un pez** Longitud (en centímetros) de un mero típico del Pacífico con t años de edad es de aproximadamente

$$f(t) = 200(1 - 0.956e^{-0.18t})$$

¿Cuál es la longitud de un mero típico del Pacífico de 5 años de edad?

20. **Propagación de una epidemia** Durante una epidemia de influenza, el número de niños en el Sistema Escolar de la Comunidad de Woodbridge que contrajeron influenza después de t días fue dado por

$$Q(t) = \frac{1000}{1 + 199e^{-0.8t}}$$

a. ¿Cuántos niños fueron afectados por la influenza después del primer día?
b. ¿Cuántos niños tenía influenza después de 10 días?

21. **Profesores laicos en las escuelas católicas romanas** El cambio de profesores religiosos a laicos en las escuelas católicas romanas ha sido atribuido en parte a la disminución en el número de mujeres y hombres que ingresan a las órdenes religiosas. El porcentaje de profesores que son laicos está dado por

$$f(t) = \frac{98}{1 + 2.77e^{-t}} \qquad (0 \le t \le 4)$$

donde t se mide en décadas, y $t = 0$ corresponde a principios de 1960. ¿Qué porcentaje de los profesores eran laicos a comienzos de 1990?

Fuentes: National Catholic Education Association y Department of Education

22. **Crecimiento poblacional de la mosca de la fruta** Sobre la base de datos recabados durante un experimento, un biólogo descubrió que el desarrollo de una mosca de la fruta (*Drosophila*) con un suministro limitado de alimento podría ser aproximado mediante el modelo exponencial

$$N(t) = \frac{400}{1 + 39e^{-0.16t}}$$

donde t indica el número de días desde el inicio del experimento.

a. ¿Cuál era la población inicial de la mosca de la fruta en el experimento?
b. ¿Cuál era la población de la mosca de la fruta el día 20?

23. **Demografía** El número de ciudadanos de entre 45 y 64 años se prevé que sea

$$P(t) = \frac{197.9}{1 + 3.274e^{-0.0361t}} \qquad (0 \leq t \leq 20)$$

donde $P(t)$ se mide en millones y t se mide en años, con $t = 0$ correspondiente a principios de 1990. Las personas que pertenecen a este grupo de edad son los objetivos de las compañías de seguros que desean vender anualidades. ¿Cuál es la población proyectada de los ciudadanos de entre 45 y 64 años en 2010?

Fuente: K. G. Securities

24. **Crecimiento de la población en el siglo xxi** La población de Estados Unidos. se aproxima por la función

$$P(t) = \frac{616.5}{1 + 4.02e^{-0.5t}}$$

donde $P(t)$ se mide en millones de personas y t se mide en intervalos de 30 años, con $t = 0$ correspondiente a 1930. ¿Cuál es la población que se espera en Estados Unidos para 2020 ($t = 3$)?

25. **Difusión de la información** Trescientas estudiantes asistieron a la ceremonia de inauguración de un nuevo edificio en un campus universitario. El rector de la universidad, tradicionalmente femenina, anunció un nuevo programa de expansión, que incluía planes para hacerla mixta. El número de estudiantes que se enteró del nuevo programa t horas más tarde se da por la función

$$f(t) = \frac{3000}{1 + Be^{-kt}}$$

Si 600 estudiantes en el campus había oído hablar del nuevo programa de 2 horas después de la ceremonia, ¿cuántas estudiantes habían oído hablar de la política después de 4 horas?

26. **Degradación radiactiva** Una sustancia radiactiva se degrada con base en la fórmula

$$Q(t) = Q_0e^{-kt}$$

donde $Q(t)$ indica la cantidad de la sustancia presente en el tiempo t (medido en años), Q_0 denota la cantidad de la sustancia presente inicialmente y k (una constante positiva) es la constante de decaimiento.

a. Demostrar que la vida media de la sustancia es $\bar{t} = \ln 2/k$.

b. Suponga que una sustancia radiactiva se degrada con base en la fórmula

$$Q(t) = 20e^{-0.0001238\bar{t}}$$

¿Cuánto tiempo tomará para que la sustancia se degrada a la mitad de la cantidad original?

27. **Función de crecimiento logístico** Considere la función de crecimiento logístico

$$Q(t) = \frac{A}{1 + Be^{-kt}}$$

Suponga que la población es Q_1 cuando $t = t_1$ y Q_2 cuando $t = t_2$. Demuestre que el valor de k es

$$k = \frac{1}{t_2 - t_1} \ln\left[\frac{Q_2(A - Q_1)}{Q_1(A - Q_2)}\right]$$

28. **Función de crecimiento logístico** La capacidad de carga de una colonia de moscas de la fruta (*Drosophila*) es de 600. La población de moscas de la fruta después de 14 días es 76, y después de 21 días es 167. ¿Cuál es el valor de la constante de crecimiento k?

Sugerencia: Utilice el resultado del ejercicio 27.

3.3 Soluciones de los ejercicios de autoevaluación

Tomando en cuenta que $P_0 = 226.5$, $k = 0.008$ e $I = 0.5$. Por tanto

$$\begin{aligned} P &= \left(226.5 + \frac{0.5}{0.008}\right)e^{0.008t} - \frac{0.5}{0.008} \\ &= 289e^{0.008t} - 62.5 \end{aligned}$$

Así, la población esperada para 2010 está dada por

$$\begin{aligned} P(30) &= 289e^{0.24} - 62.5 \\ &\approx 304.9 \end{aligned}$$

o aproximadamente 304.9 millones.

USO DE LA TECNOLOGÍA

Análisis de modelos matemáticos

Podemos utilizar una calculadora graficadora para analizar los modelos matemáticos encontrados en esta sección.

EJEMPLO DE APLICACIÓN 1 Ventas de juegos por Internet
El crecimiento estimado en los ingresos mundiales de juegos por Internet (en miles de millones de dólares), según lo previsto por los analistas de la industria, se da en la siguiente tabla:

Año	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010
Ingreso	3.1	3.9	5.6	8.0	11.8	15.2	18.2	20.4	22.7	24.5

a. Utilice **Logistic** para encontrar un modelo de regresión para los datos. Sea $t = 0$ correspondiente a 2001.
b. Trace el diagrama de dispersión y la gráfica de la función f encontradas en la parte (a) usando la ventana de visualización $[0, 9] \times [0, 30]$.

Fuente: Christiansen Capital/Advisors

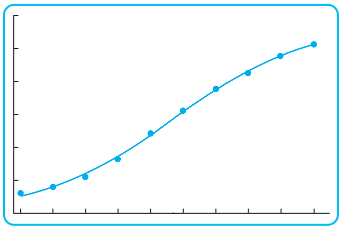


FIGURA T1
La gráfica de f en la pantalla de visualización $[0, 9] \times [0, 30]$.

Solución

a. Al usar **Logistic** encontramos

$$f(t) = \frac{27.11}{1 + 9.64e^{-0.49t}} \qquad (0 \le t \le 9)$$

b. La gráfica de dispersión de los datos y la gráfica de f en la ventana de visualización $[0, 9] \times [0, 30]$ se muestran en la figura TI. ■

EJERCICIOS CON TECNOLOGÍA

1. **BANCA EN LÍNEA** En un estudio elaborado en el 2000 se proyectó que el porcentaje de hogares que utiliza banca en línea es

$$f(t) = 1.5e^{0.78t} \qquad (0 \le t \le 4)$$

donde t se mide en años, con $t = 0$ correspondiente a principios de 2000. Trace la gráfica de f, usando la ventana de visualización $[0, 4] \times [0, 40)$.

Fuente: Online Banking Report

2. **LEY DE ENFRIAMIENTO DE NEWTON** La temperatura de una taza de café t minutos después de servida está dada por

$$T = 70 + 100e^{-0.0446t}$$

donde T se mide en grados Fahrenheit.
a. Trace la gráfica de T, usando la ventana de visualización $[0, 30] \times [0, 200)$.
b. ¿Cuándo se enfriará el café lo suficiente (digamos, a 120° F) como para beberlo?
Sugerencia: Utilice la función ISECT.

3. **VIAJES AÉREOS** Los viajes en avión se han incrementado drásticamente en los últimos 30 años. En un estudio realizado en 2000, la Federal Aviation Administration proyectó un crecimiento exponencial de los viajes aéreos hasta 2010. La función

$$f(t) = 666e^{0.0413t} \qquad (0 \le t \le 10)$$

da el número de pasajeros (en millones) en el año t, con $t = 0$ correspondiente a 2000.
a. Trace la gráfica de f, usando la ventana de visualización $[0, 10] \times [0, 1000]$.
b. ¿Cuántos pasajeros aéreos había en el 2000? ¿Cuál fue el número previsto de pasajeros para 2008?

Fuente: Federal Aviation Administration

4. **VENTAS DE JUEGOS PARA COMPUTADORA** El número total de unidades del juego más reciente de Starr Communication, Laser Beams, vendidos t meses después de su lanzamiento está dado por

$$N(t) = -20(t + 20)e^{-0.05t} + 400$$

mil unidades. Trace la gráfica de N, utilizando la ventana de visualización $[0, 500] \times [0, 500]$.

5. **CRECIMIENTO DE LA POBLACIÓN EN EL SIGLO XXI** La población de Estados Unidos se aproxima con la función

$$P(t) = \frac{616.5}{1 + 4.02e^{-0.5t}}$$

donde $P(t)$ se mide en millones de personas y t en intervalos de 30 años, con $t = 0$ correspondiente a 1930.

a. Trace la gráfica de f, usando la ventana de visualización $[0, 4] \times [0, 650]$.

b. ¿Cuál es la población esperada en Estados Unidos para 2020 ($t = 3$)?

Fuente: U.S. Census Bureau

6. Tiempo de la tasa de crecimiento de un tumor La tasa a la que crece un tumor, con respecto al tiempo, está dada por

$$R = Ax \ln \frac{B}{x} \qquad (\text{para } 0 < x < B)$$

donde A y B son constantes positivas y x es el radio del tumor. Trace la gráfica de R para el caso de $A = B = 10$.

7. Absorción de fármacos La concentración de un fármaco en un órgano en cualquier tiempo t (en segundos) está dada por

$$C(t) = \begin{cases} 0.3t - 18(1 - e^{-t/60}) & \text{si } 0 \leq t \leq 20 \\ 18e^{-t/60} - 12e^{-(t-20)/60} & \text{si } t > 20 \end{cases}$$

donde $C(t)$ se mide en gramos/centímetro cúbico (g/cm^3).

a. Trace la gráfica de C, utilizando la ventana de visualización $[0, 120] \times [0, 1]$.

b. ¿Cuál es la concentración inicial del fármaco en el órgano?

c. ¿Cuál es la concentración del fármaco en el órgano después de 10 segundos?

d. ¿Cuál es la concentración del fármaco en el órgano después de 30 segundos?

8. Modelado con datos Los valores de acumulación de nieve (en pulgadas) en el aeropuerto Logan, t horas después de una tormenta de nieve que duró 33 horas en Boston en 1995, son los siguientes:

Hora	0	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33
Pulgadas	0.1	0.4	3.6	6.5	9.1	14.4	19.5	22	23.6	24.8	26.6	27

Aquí, $t = 0$ corresponde al mediodía del 6 de febrero.

a. Utilice **Logistic** para encontrar un modelo de regresión para los datos.

b. Trace el diagrama de dispersión y la gráfica de la función f encontrados en la parte (a), utilizando la ventana de visualización $[0, 33] \times [0, 30]$.

Fuente: Boston Globe

9. Embarques de computadoras en todo el mundo Con base en un pronóstico de IDC realizado en 2007, los embarques de computadoras en todo el mundo (en millones de unidades) a partir de 2005 a 2009 se dan en la siguiente tabla:

Año	2005	2006	2007	2008	2009
Computadoras	207.1	226.2	252.9	283.3	302.4

a. Utilice **Logistic** para encontrar un modelo de regresión para los datos. Sea $t = 0$ correspondiente a 2005.

b. Trace la gráfica de la función f que se encuentra en la parte (a), utilizando la ventana de visualización $[0, 4] \times [200, 300]$.

Fuente: International Data Corporation

10. Deuda federal Con base en datos obtenidos de la Oficina del Presupuesto, la deuda total federal estadounidense (en billones de dólares) de 2001 a 2006 se da en la siguiente tabla:

Año	2001	2002	2003	2004	2005	2006
Deuda	5.81	6.23	6.78	7.40	7.93	8.51

a. Utilice **ExpReg** para encontrar un modelo de regresión para los datos. Sea $t = 1$ correspondiente a 2001.

b. Trace la gráfica de la función f que se encuentra en la parte (a), utilizando la ventana de visualización $[1, 6] \times [4, 10]$.

Fuente: Congressional Budget Office

CAPÍTULO 3 Resumen de las fórmulas y términos principales

FÓRMULAS

1. Función exponencial con base b	$y = b^x$
2. Función exponencial con base e	$y = e^x$
3. Función logarítmica con base b	$y = \log_b x$
4. Función logarítmica con base e	$y = \ln x$
5. Propiedades inversas de $\ln x$ y e^x	$\ln e^x = x$ y $e^{\ln x} = x$

TÉRMINOS

constante de crecimiento (171)
constante de decaimiento (172)
crecimiento exponencial (171)
decaimiento exponencial (172)
función de crecimiento logístico (175)
logaritmo común (162)
logaritmo natural (162)
vida media de una sustancia radiactiva (172)

CAPÍTULO 3 Preguntas de revisión de conceptos

Llene los espacios en blanco.

1. La función $f(x) = x^b$ (b, un número real) se llama función _____, mientras que la función $g(x) = b^x$, donde $b >$ _____ y $b \neq$ _____, se llama función _____.

2. a. El dominio de la función $y = 3^x$ es _____ y su rango es _____.

b. La gráfica de la función $y = 0.3^x$ pasa por el punto _____ y cae de _____ a _____.

3. a. Si $b > 0$ y $b \neq 1$, entonces la función logarítmica $y = \log_b x$ tiene dominio _____ y rango _____; su gráfica pasa por el punto _____.

b. La gráfica de $y = \log_b x$ _____ de izquierda a derecha si $b < 1$ y _____ de izquierda a derecha si $b > 1$.

4. a. Si $x > 0$, entonces $e^{\ln x} =$ _____.

b. Si x es cualquier número real, entonces $\ln e^x =$ _____.

5. a. En el modelo de crecimiento exponencial $Q = Q_0e^{kt}$, Q_0 representa la cantidad presente _____ y k es llamada _____ constante.

b. En el modelo de decaimiento exponencial $Q = Q_0e^{-kt}$, k es llamada _____ constante.

c. La vida media de una sustancia radiactiva es el _____ requerido para que una sustancia se descomponga al _____ _____ de su cantidad original.

6. a. El modelo $Q(t) = C - Ae^{-kt}$ es llamado _____ _____. El valor de $Q(t)$ no supere nunca _____.

b. El modelo $Q(t) = \dfrac{A}{1 + Be^{-kt}}$, $y = A$, $y = A$, es llamado _____ _____ _____ de la gráfica de Q. Si la cantidad $Q(t)$ es en principio menor que A, entonces $Q(t)$ al final se acercará a _____ a medida que aumenta t; el número A, representa la capacidad del medio para soportar la vida y se llama _____ de _____ del ambiente.

CAPÍTULO 3 Ejercicios de revisión

En los ejercicios 1 a 4 trace la gráfica de la función.

1. $f(x) = 5^x$

2. $y = \left(\dfrac{1}{5}\right)^x$

3. $f(x) = \log_4 x$

4. $y = \log_{1/4} x$

En los ejercicios 5 a 8 exprese cada ecuación en forma logarítmica.

5. $3^4 = 81$

6. $9^{1/2} = 3$

7. $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-3} = \dfrac{27}{8}$

8. $16^{-3/4} = 0.125$

En los ejercicios 9 a 12, dado que ln 2 ≈ 0.6931, ln 3 ≈ 1.0986 y ln 5 ≈ 1.6094, encuentre el valor de la expresión.

9. $\ln 30$

10. $\ln 9$

11. $\ln 3.6$

12. $\ln 75$

En los ejercicios 13 a 15, dado que ln 2 = *x*, ln 3 = *y* y ln 5 = *z*, exprese cada uno de los valores logarítmicos dados en términos de *x*, *y* y *z*.

13. $\ln 30$

14. $\ln 3.6$

15. $\ln 75$

En los ejercicios 16 a 21 resuelva para *x* sin utilizar una calculadora.

16. $2^{2x-3} = 8$

17. $e^{x^2+x} = e^2$

18. $3^{x-1} = 9^{x+2}$

19. $2^{x^2+x} = 4^{x^2-3}$

20. $\log_4(2x + 1) = 2$

21. $\ln(x - 1) + \ln 4 = \ln(2x + 4) - \ln 2$

En los ejercicios 22 a 35 resuelva para *x*, dando su respuesta precisa con cuatro decimales.

22. $4^x = 5$

23. $3^{-2x} = 8$

24. $3 \cdot 2^{-x} = 17$

25. $2e^{-x} = 7$

26. $0.2e^x = 3.4$

27. $e^{2x-1} = 14$

28. $5^{3x+1} = 16$

29. $2^{3x+1} = 3^{2x-3}$

30. $2^{x^2} = 12$

31. $3e^{\sqrt{x}} = 15$

32. $4e^{-0.1x} - 2 = 8$

33. $8 - e^{0.2x} = 2$

34. $\dfrac{20}{1 + 2e^{0.2x}} = 4$

35. $\dfrac{30}{1 + 2e^{-0.1x}} = 4$

36. Trace la gráfica de la función $y = \log_2(x + 3)$.

37. Trace la gráfica de la función $y = \log_3(x + 1)$.

38. **Crecimiento de bacterias** Un cultivo de bacterias que inicialmente contenía 2000 bacterias tiene un conteo de 18,000 bacterias después de 2 horas.

a. Determine la función $Q(t)$ que expresa el crecimiento exponencial del número de células de esta bacteria en función del tiempo t (en minutos).

b. Encuentre el número de bacterias presentes después de 4 horas.

39. Degradación radiactiva El elemento radiactivo radio tiene una vida media de 1600 años. ¿Cuál es su constante de decaimiento?

40. Demanda de reproductores de DVD VCA Television encontró que la demanda mensual para su nueva línea de reproductores de DVD t meses después de colocar los reproductores en el mercado está dada por:

$$D(t) = 4000 - 3000e^{-0.06t} \qquad (t \geq 0)$$

Grafique esta función y responda las siguientes preguntas:

a. ¿Cuál fue la demanda después de 1 mes? ¿Después de 1 año? ¿Después de 2 años?

b. ¿A qué nivel se espera que se estabilice la demanda?

41. Epidemia de influenza Durante una epidemia de influenza, el número de estudiantes en una universidad determinada que contrajeron la influenza después de t días puede aproximarse por el modelo exponencial

$$Q(t) = \frac{3000}{1 + 499e^{-kt}}$$

Si 90 estudiantes contrajeron la influenza para el día 10, ¿cuántos estudiantes contrajeron la influenza para el día 20?

42. Tasa de mortalidad infantil en Estados Unidos La tasa de mortalidad infantil en Estados Unidos (por 1000 nacidos vivos) se aproxima por la función

$$N(t) = 12.5e^{-0.0294t} \qquad (0 \leq t \leq 21)$$

donde t se mide en años, con $t = 0$ correspondiente a 1980. ¿Cuál fue la tasa de mortalidad en 1980? ¿En 1990? ¿En 2000?

Fuente: U.S. Department of Health and Human Services

43. Absorción de fármacos La concentración de un fármaco en un órgano en cualquier tiempo t (en segundos) está dada por

$$x(t) = 0.08(1 - e^{-0.02t})$$

donde $x(t)$ se mide en gramos/centímetro cúbico (g/cm^3).

a. ¿Cuál es la concentración inicial del fármaco en el órgano?

b. ¿Cuál es la concentración del fármaco en el órgano después de 30 segundos?

CAPÍTULO 3 Antes de continuar . . .

1. Simplifique la expresión $(2x^{-2})^2(9x^{-4})^{1/2}$.

2. Resuelva $e^{2x} - e^x - 6 = 0$ para x.
Sugerencia: Sea $u = e^x$.

3. Resuelva $\log_2(x^2 - 8x + 1) = 0$.

4. Resuelve la ecuación $\dfrac{100}{1 + 2e^{0.3t}} = 40$ para t.

5. La temperatura de una taza de café en el tiempo t (en minutos) es

$$T(t) = 70 + ce^{-kt}$$

Al inicio, la temperatura del café era de 200°F. Tres minutos más tarde, era de 180°. ¿Cuándo será de 150°F?

MATEMÁTICAS FINANCIERAS

4

EL INTERÉS QUE SE agrega periódicamente al capital y que en adelante genera intereses por sí mismo se llama *interés compuesto.* Este capítulo inicia obteniendo la *fórmula del interés compuesto*, que proporciona la cantidad de dinero acumulada cuando se invierte una cantidad inicial en una cuenta de plazo fijo y gana intereses compuestos.

Una *anualidad* es una secuencia de los pagos efectuados a intervalos regulares. Se deducen las fórmulas que dan el *valor futuro de una anualidad* (con la que usted termina) y el *valor presente de una anualidad* (suma global que, si se invierte ahora, rendirá el mismo valor futuro que el de la anualidad). Luego, utilizando estas fórmulas, se responderá a cuestiones relacionadas con la amortización de ciertos tipos de préstamos a plazos y cuestiones referentes a *fondos de amortización* (fondos que se establecen para ser utilizados para un propósito específico en una fecha futura).

¿Cuánto pueden permitirse pedir prestado al banco los Jackson para comprar una casa? Han determinado que después de hacer un pago inicial pueden realizar pagos mensuales de \$2000. En el ejemplo 4 de la página 218 nos enteramos de cómo determinar la cantidad máxima que pueden permitirse pedir prestada si obtienen una hipoteca fija a 30 años a la tasa actual.

4.1 Interés compuesto

Interés simple

Una aplicación natural de las funciones lineales al mundo de los negocios se encuentra en el cálculo del **interés simple**, interés que se calcula sólo sobre el capital original. Así, si I denota el interés sobre un capital P (en dólares) a una tasa de interés de r anual para t años, entonces tenemos

$$I = Prt$$

La **cantidad acumulada** A, la suma del principal e interés después de t años, está dada por

$$\begin{aligned} A &= P + I = P + Prt \\ &= P(1 + rt) \end{aligned}$$

y es una función lineal de t (vea el ejercicio 44). En las aplicaciones de negocios, normalmente estamos interesados sólo en el caso en que t es positivo, por lo que sólo esa parte de la línea que se calcule en el cuadrante 1 es de nuestro interés (figura 1).

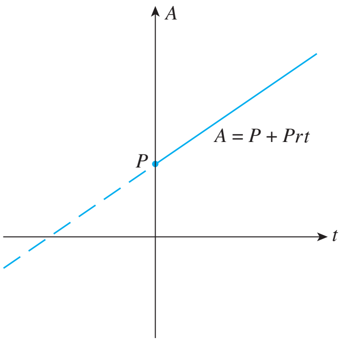


FIGURA 1
La cantidad acumulada es una función lineal de t.

Fórmulas de interés simple

Interés:	$I = Prt$	**(1a)**
Cantidad acumulada:	$A = P(1 + rt)$	**(1b)**

EJEMPLO 1 Un banco paga un interés simple a una tasa de 8% anual para ciertos depósitos. Si un cliente deposita $1000 y no hace retiros durante 3 años, ¿cuál es la cantidad total en depósito al final de 3 años? ¿Cuál es el interés devengado en ese periodo?

Solución Utilizando la ecuación (1b) con $P = 1000$, $r = 0.08$ y $t = 3$, vemos que la cantidad total en depósito al final de 3 años está dada por

$$\begin{aligned} A &= P(1 + rt) \\ &= 1000\,[1 + (0.08)(3)] = 1240 \end{aligned}$$

o $1240.

El interés ganado durante el periodo de 3 años se obtiene de

$$\begin{aligned} I &= Prt \qquad \text{Utilizar (1a)} \\ &= 1000\,(0.08)(3) = 240 \end{aligned}$$

o $240. ■

Exploración con TECNOLOGÍA

Consulte el ejemplo 1. Utilice una herramienta de graficación para trazar la gráfica de la función $A = 1000(1 + 0.08t)$, utilizando la ventana de visualización $[0, 10] \times [0, 2000]$.

1. ¿Cuál es la intersección de la línea recta con el eje A y qué representa?
2. ¿Cuál es la pendiente de la línea recta, y qué representa? (vea el ejercicio 44).

EJEMPLO DE APLICACIÓN 2 Fondos fiduciarios Se invierte una suma de \$2000 en un fondo fiduciario a 10 años que paga 6% de interés anual simple. ¿Cuál es el importe total del fondo fiduciario al final de los 10 años?

Solución El importe total del fondo fiduciario al final de 10 años está dado por

$$\begin{aligned} A &= P(1 + rt) \\ &= 2000[1 + (0.06)(10)] = 3200 \end{aligned}$$

o \$3200. ■

Interés compuesto

A diferencia del interés simple, el **interés compuesto** es el interés ganado que se agrega periódicamente al capital y después él mismo genera intereses a la misma tasa. A fin de encontrar una fórmula para la cantidad acumulada, veamos un ejemplo numérico. Suponga que se depositan \$1000 (el capital) en un banco por un periodo de 3 años, ganando intereses a una tasa de 8% anual (llamada **tasa nominal**, o **establecida**) compuesta anualmente. Luego, utilizando la ecuación (1b) con $P = 1000$, $r = 0.08$ y $t = 1$, vemos que el monto acumulado al final del primer año es

$$\begin{aligned} A_1 &= P(1 + rt) \\ &= 1000[1 + (0.08)(1)] = 1000(1.08) = 1080 \end{aligned}$$

o \$1080.

Para encontrar la cantidad acumulada A_2 al final del segundo año, utilizamos (1b) una vez más, ahora con $P = A_1$. (Recuerde que el principal *y* los intereses ahora ganan intereses en el segundo año.) Obtenemos

$$\begin{aligned} A_2 &= P(1 + rt) = A_1(1 + rt) \\ &= 1000[1 + 0.08(1)][1 + 0.08(1)] \\ &= 1000[1 + 0.08]^2 = 1000(1.08)^2 = 1166.40 \end{aligned}$$

o \$1166.40.

Por último, el importe acumulado A_3 al final del tercer año se calcula al utilizar (1b) con $P = A_2$, dando

$$\begin{aligned} A_3 &= P(1 + rt) = A_2(1 + rt) \\ &= 1000[1 + 0.08(1)]^2[1 + 0.08(1)] \\ &= 1000[1 + 0.08]^3 = 1000(1.08)^3 \approx 1259.71 \end{aligned}$$

o aproximadamente \$1259.71.

Si reexamina nuestros cálculos, verá que los importes acumulados al final de cada año tienen la siguiente forma.

Primer año:	$A_1 = 1000(1 + 0.08)$, o $A_1 = P(1 + r)$
Segundo año:	$A_2 = 1000(1 + 0.08)^2$, o $A_2 = P(1 + r)^2$
Tercer año:	$A_3 = 1000(1 + 0.08)^3$, o $A_3 = P(1 + r)^3$

Estas observaciones sugieren el siguiente resultado general: si P dólares son invertidos a un plazo de t años, devengando intereses a la tasa de r anual compuesta anualmente, el monto acumulado es

$$A = P(1 + r)^t \tag{2}$$

La fórmula (2) se obtuvo bajo el supuesto de que el interés estaba compuesto *anualmente*. En la práctica, sin embargo, el interés es compuesto más de una vez al año. El intervalo de tiempo entre los cálculos de intereses sucesivos se llama **periodo de conversión**.

Si los intereses se componen m veces al año a una tasa nominal r sobre un capital de P dólares, entonces la tasa de interés simple por periodo de conversión es

$$i = \frac{r}{m} \qquad \frac{\text{Tasa de interés anual}}{\text{Periodos por año}}$$

Por ejemplo, si la tasa de interés nominal es de 8% anual ($r = 0.08$) y el interés es compuesto trimestralmente ($m = 4$), entonces

$$i = \frac{r}{m} = \frac{0.08}{4} = 0.02$$

o 2% por periodo.

Para encontrar una fórmula general para la cantidad acumulada cuando un capital de P dólares se deposita en un banco por un periodo de t años y devenga intereses a la tasa (nominal) r anual compuesta m veces anual, se procede como antes, utilizando (1b) en varias ocasiones con la tasa de interés $i = \frac{r}{m}$. Vemos que el monto acumulado al final de cada periodo es

$$\begin{array}{lll}
\text{Primer periodo:} & A_1 = P(1+i) & \\
\text{Segundo periodo:} & A_2 = A_1(1+i) & = [P(1+i)](1+i) = P(1+i)^2 \\
\text{Tercer periodo:} & A_3 = A_2(1+i) & = [P(1+i)^2](1+i) = P(1+i)^3 \\
\qquad \vdots & & \qquad \vdots \\
n\text{ésimo periodo} & A_n = A_{n-1}(1+i) & = [P(1+i)^{n-1}](1+i) = P(1+i)^n
\end{array}$$

Hay $n = mt$ periodos en t años (número de periodos de conversión anual por el plazo en años). Por tanto, el monto acumulado al final del año t está dado por

$$A = P(1+i)^n$$

Fórmula de interés compuesto (monto acumulado)

$$A = P(1+i)^n \tag{3}$$

donde $i = \dfrac{r}{m}$, $n = mt$ y

A = Cantidad acumulada al final de los periodos de conversión n
P = Capital
r = Tasa de interés nominal anual
m = Número de periodos de conversión anual
t = Plazo (número de años)

Exploración con TECNOLOGÍA

Sea $A_1(t)$ el monto acumulado de \$100 que gana un interés simple a una tasa de 10% anual durante t años, y sea $A_2(t)$ el monto acumulado de \$100 que gana intereses a una tasa de 10% anual compuesto mensualmente durante t años.

1. Calcule las expresiones para $A_1(t)$ y $A_2(t)$.
2. Utilice una herramienta de graficación para trazar las gráficas de A_1 y A_2 en el mismo conjunto de ejes, utilizando la ventana de visualización $[0, 20] \times [0, 800]$.
3. Comente sobre el crecimiento de $A_1(t)$ y $A_2(t)$ haciendo referencia a las gráficas de A_1 y A_2.

EJEMPLO 3 Calcule el monto acumulado después de 3 años si se invierten \$1000 al 8% anual compuesto en forma (a) anual, (b) semestral, (c) trimestral, (d) mensual y (e) diaria (suponiendo un año de 365 días).

Solución

a. En este caso, $P = 1000$, $r = 0.08$ y $m = 1$. Por tanto, $i = r = 0.08$ y $n = 3$, por lo que la ecuación (3) da

$$\begin{aligned} A &= 1000(1 + 0.08)^3 \\ &\approx 1259.71 \end{aligned}$$

o \$1259.71.

b. En este caso, $P = 1000$, $r = 0.08$ y $m = 2$. Por tanto, $i = \frac{0.08}{2}$ y $n = (3)(2) = 6$, por lo que la ecuación (3) da

$$\begin{aligned} A &= 1000\left(1 + \frac{0.08}{2}\right)^6 \\ &\approx 1265.32 \end{aligned}$$

o \$1265.32.

c. En este caso, $P = 1000$, $r = 0.08$ y $m = 4$. Por tanto, $i = \frac{0.08}{4}$ y $n = (3)(4) = 12$, por lo que la ecuación (3) da

$$\begin{aligned} A &= 1000\left(1 + \frac{0.08}{4}\right)^{12} \\ &\approx 1268.24 \end{aligned}$$

o \$1268.24.

d. En este caso, $P = 1000$, $r = 0.08$ y $m = 12$. Por tanto, $i = \frac{0.08}{12}$ y $n = (3)(12) = 36$, por lo que la ecuación (3) da

$$\begin{aligned} A &= 1000\left(1 + \frac{0.08}{12}\right)^{36} \\ &\approx 1270.24 \end{aligned}$$

o \$1270.24.

e. En este caso, $P = 1000$, $r = 0.08$, $m = 365$ y $t = 3$. Por tanto, $i = \frac{0.08}{365}$ y $n = (3)(365) = 1095$, así que la ecuación (3) da

$$\begin{aligned} A &= 1000\left(1 + \frac{0.08}{365}\right)^{1095} \\ &\approx 1271.22 \end{aligned}$$

o \$1271.22. Esos resultados se resumen en la tabla 1.

TABLA **1**

Tasa nominal, r	Periodo de conversión	Tasa de interés/ periodo de conversión	Inversión inicial	Monto acumulado
8%	Anual ($m = 1$)	8%	\$1000	\$1259.71
8	Semestral ($m = 2$)	4	1000	1265.32
8	Trimestral ($m = 4$)	2	1000	1268.24
8	Mensual ($m = 12$)	2/3	1000	1270.24
8	Diario ($m = 365$)	8/365	1000	1271.22

Exploración con TECNOLOGÍA

Las inversiones a las que se les permite crecer con el tiempo pueden aumentar su valor de manera sorprendentemente rápida. Tenga en cuenta el crecimiento potencial de $10,000 si se reinvierten las ganancias. De manera más concreta, suponga que $A_1(t)$, $A_2(t)$, $A_3(t)$, $A_4(t)$ y $A_5(t)$ denotan los valores acumulados de una inversión de $10,000 en un plazo de t años y ganando intereses a la tasa de 4%, 6%, 8%, 10% y 12% anual compuesto anualmente.

1. Calcule expresiones para $A_1(t)$, $A_2(t)$, . . . , $A_5(t)$.
2. Utilice una herramienta de graficación para trazar las gráficas de A_1, A_2, . . . , A_5, en el mismo conjunto de ejes, utilizando la ventana de visualización $[0, 20] \times [0, 100{,}000]$.
3. Use **TRACE** para encontrar $A_1(20)$, $A_2(20)$, . . . , $A_5(20)$ e interprete sus resultados.

Interés compuesto continuo

Una pregunta que surge de forma natural en el estudio del interés compuesto es: ¿Qué pasa con la cantidad acumulada a lo largo de un periodo fijo si el interés se calcula cada vez con mayor frecuencia?

La intuición sugiere que el interés compuesto con mayor frecuencia, incrementará la cantidad acumulada. Esto se ve confirmado por los resultados del ejemplo 3, donde se encontró que las cantidades acumuladas aumentan de hecho cuando se incrementa el número de periodos de conversión anual.

Esto nos lleva a otra pregunta: ¿La cantidad acumulada sigue creciendo sin límite, o se aproxima a un número fijo cuando el interés se calcula cada vez con mayor frecuencia durante un periodo fijo?

Para responder a esta pregunta, veremos de nuevo la fórmula de interés compuesto:

$$A = P(1 + i)^n = P\left(1 + \frac{r}{m}\right)^{mt} \tag{4}$$

Recuerde que m es el número de periodos de conversión anual. Así que para encontrar una respuesta a nuestra pregunta, debemos hacer que m sea cada vez más grande en (4). Si dejamos que $u = \frac{m}{r}$ de forma que $m = ru$, (4) se convierte en

$$\begin{aligned} A &= P\left(1 + \frac{1}{u}\right)^{urt} && \frac{r}{m} = \frac{1}{u} \\ &= P\left[\left(1 + \frac{1}{u}\right)^{u}\right]^{rt} && \text{Puesto que } a^{xy} = (a^x)^y \end{aligned}$$

Ahora obsérvese que u se hace cada vez más grande a medida que m también se hace cada vez más grande. Pero, desde nuestro trabajo en la sección 3.1, sabemos que $(1 + 1/u)^u$ se aproxima a e a medida que u se hace cada vez más grande. Utilizando este resultado, podemos ver que, a medida que m se hace cada vez más grande, A se aproxima a $P(e)^{rt} = Pe^{rt}$. En esta situación, decimos que el interés es *compuesto continuamente*. Resumamos este importante resultado.

Fórmula del interés compuesto continuo

$$A = Pe^{rt} \tag{5}$$

donde

P = Capital
r = Tasa de interés nominal compuesta en forma continua
t = Tiempo en años
A = Cantidad acumulada al final t años

EJEMPLO 4 Calcule el monto acumulado después de 3 años si se invierten \$1000 a 8% anual compuesto en forma (a) diaria (suponiendo un año de 365 días) y (b) continua.

Solución

a. Utilice la fórmula (3) con $P = 1000$, $r = 0.08$, $m = 365$ y $t = 3$. Por tanto, $i = \frac{0.08}{365}$ y $n = (365)(3) = 1095$, por lo que

$$A = 1000\left(1 + \frac{0.08}{365}\right)^{(365)(3)} \approx 1271.22$$

o \$1271.22.

b. Aquí usamos la fórmula (5) con $P = 1000$, $r = 0.08$ y $t = 3$, obteniendo

$$\begin{aligned} A &= 1000e^{(0.08)(3)} \\ &\approx 1271.25 \end{aligned}$$

o \$1271.25. ■

Note que los importes acumulados correspondientes al interés compuesto diariamente y al interés compuesto continuo se diferencian por muy poco. La fórmula del interés compuesto continuo es una herramienta muy importante en el trabajo teórico del análisis financiero.

Exploración con TECNOLOGÍA

En el primer párrafo de la sección 3.1 se señaló que el monto acumulado de una cuenta que gana un interés *compuesto continuo* a la larga superará, con mucho, el monto acumulado de una cuenta que gana interés a la misma tasa nominal, pero con un interés simple. Ilustramos este hecho con el siguiente ejemplo.

Suponga que usted deposita \$1000 en la cuenta I, que genera intereses a la tasa de 10% anual compuesto en forma continua de modo que el monto acumulado al final de t años es $A_1(t) = 1000e^{0.1t}$. Suponga que también deposita \$1000 en la cuenta II, que genera un interés simple a la tasa de 10% anual, por lo que el monto acumulado al final de t años es $A_2(t) = 1000(1 + 0.1t)$. Utilice un herramienta de graficación para trazar las gráficas de las funciones A_1 y A_2 en la ventana de visualización $[0, 20] \times [0, 10{,}000]$ para ver las cantidades acumuladas de $A_1(t)$ y $A_2(t)$ durante un periodo de 20 años.

Tasa de interés efectiva

Los ejemplos 3 y 4 muestran que los intereses realmente devengados por la inversión dependen de la frecuencia con la que se suma el interés. Así, la tasa indicada, o nominal, de 8% anual no refleja la tasa real a la que se gana el interés. Esto sugiere que necesitamos encontrar una base común para comparar las tasas de interés. El uso de la *tasa efectiva* proporciona una forma de comparación de las tasas de interés. La **tasa efectiva** es la tasa de interés *simple* que produciría el mismo monto acumulado en 1 año que la tasa nominal compuesta m veces al año. La tasa efectiva también se llama **rendimiento anual efectivo**.

Para obtener una relación entre la tasa de interés nominal, r anual compuesta m veces al año, y su correspondiente tasa efectiva, R anual, supondremos una inversión inicial de P dólares. Entonces, el monto acumulado después de 1 año a una tasa de interés simple de R anual es

$$A = P(1 + R)$$

Además, la cantidad acumulada después de 1 año a una tasa de interés de r anual compuesta m veces al año es

$$A = P(1 + i)^n = P\left(1 + \frac{r}{m}\right)^m \qquad \text{Puesto que } i = \frac{r}{m} \text{ y } t = 1$$

Al igualar las dos expresiones se tiene

$$P(1 + R) = P\left(1 + \frac{r}{m}\right)^m$$

$$1 + R = \left(1 + \frac{r}{m}\right)^m \qquad \text{Se dividen ambos lados entre } P.$$

Si resolvemos la ecuación anterior para R, se obtiene la siguiente fórmula para calcular la tasa de interés efectiva.

Fórmula de la tasa de interés efectiva

$$r_{\text{ef}} = \left(1 + \frac{r}{m}\right)^m - 1 \tag{6}$$

donde

r_{ef} = Tasa de interés efectiva
r = Tasa de interés nominal anual
m = Número de periodos de conversión al año

EJEMPLO 5 Calcule la tasa de interés efectiva que corresponde a una tasa nominal de 8% anual compuesta de forma (a) anual, (b) semestral, (c) trimestral, (d) mensual y (e) diaria.

Solución

a. La tasa de interés efectiva correspondiente a una tasa nominal de 8% anual compuesta anualmente está dada por supuesto, por 8% anual. Este resultado también se confirma mediante el uso de la ecuación (6) con $r = 0.08$ y $m = 1$. Por tanto,

$$r_{\text{ef}} = (1 + 0.08) - 1 = 0.08$$

b. Sea $r = 0.08$ y $m = 2$. Entonces la ecuación (6) nos da

$$\begin{aligned} r_{\text{ef}} &= \left(1 + \frac{0.08}{2}\right)^2 - 1 \\ &= (1.04)^2 - 1 \\ &= 0.0816 \end{aligned}$$

por lo que la tasa efectiva es 8.16% anual.

c. Sea $r = 0.08$ y $m = 4$. Entonces la ecuación (6) nos da

$$\begin{aligned} r_{\text{ef}} &= \left(1 + \frac{0.08}{4}\right)^4 - 1 \\ &= (1.02)^4 - 1 \\ &\approx 0.08243 \end{aligned}$$

así que la tasa efectiva correspondiente en este caso es 8.243% anual.

d. Sea $r = 0.08$ y $m = 12$. Entonces la ecuación (6) nos da

$$\begin{aligned} r_{\text{ef}} &= \left(1 + \frac{0.08}{12}\right)^{12} - 1 \\ &\approx 0.08300 \end{aligned}$$

por lo que la tasa efectiva correspondiente en este caso es de 8.3% anual.

e. Sea $r = 0.08$ y $m = 365$. Entonces la ecuación (6) nos da

$$\begin{aligned} r_{\text{ef}} &= \left(1 + \frac{0.08}{365}\right)^{365} - 1 \\ &\approx 0.08328 \end{aligned}$$

por lo que la tasa efectiva correspondiente en este caso es 8.328% al año. ■

Explore y analice

Recuerde la fórmula de la tasa de interés efectiva:

$$r_{\text{ef}} = \left(1 + \frac{r}{m}\right)^m - 1$$

1. Demuestre que

$$r = [(1 + {}_{\text{ef}})^{1/m} - 1]$$

2. Se sabe que un certificado de depósito (CD) tiene una tasa de interés efectiva de 5.3%. Si el interés se capitaliza mensualmente, calcule la tasa nominal de interés utilizando el resultado del inciso l.

Si se conoce la tasa de interés efectiva r_{ef}, entonces el monto acumulado después de t años con una inversión de P dólares puede calcularse con mayor facilidad utilizando la fórmula

$$A = P(1 + r_{\text{ef}})^t$$

La Truth in Lending Act de 1968 aprobada por el Congreso exige que la tasa de interés efectiva figure en todos los contratos relativos a los cargos por interés. La aprobación de esta ley ha beneficiado a los consumidores porque ahora tienen una base común para comparar las diferentes tasas nominales citadas por las distintas entidades financieras. Por otra parte, conocer la tasa efectiva permite a los consumidores calcular los gastos reales involucrados en una transacción. Por tanto, si las tasas efectivas de interés del ejemplo 5 se conocen, los valores acumulados del ejemplo 3 podrían ser fácilmente encontrados (vea la tabla 2).

TABLA **2**

Tasa nominal, r	Frecuencia de pago de intereses	Tasa efectiva	Inversión inicial	Monto acumulado después de 3 años
8%	Anual	8%	\$1000	$1000(1 + 0.08)^3 \approx \$1259.71$
8	Semestral	8.16	1000	$1000(1 + 0.0816)^3 \approx 1265.32$
8	Trimestral	8.243	1000	$1000(1 + 0.08243)^3 \approx 1268.23$
8	Mensual	8.300	1000	$1000(1 + 0.08300)^3 \approx 1270.24$
8	Diario	8.328	1000	$1000(1 + 0.08328)^3 \approx 1271.22$

Valor presente

Volvamos a la fórmula (3) del interés compuesto, que expresa el monto acumulado al final de n periodos en que el interés a una tasa r se capitaliza m veces al año. El capital P en (3) es llamado con frecuencia el **valor presente** y el valor acumulado A se llama **valor futuro**, dado que se realiza en una fecha futura. En ciertos casos, un inversionista podría determinar cuánto dinero se debe invertir ahora, a una tasa fija de interés, de modo que obtendrá una suma determinada en alguna fecha futura. Este problema puede ser resuelto mediante la expresión de P en términos de A. Por tanto, de la ecuación (3) se tiene que

$$P = A(1 + i)^{-n}$$

Aquí, como antes, $i = \frac{r}{m}$, donde m es el número de periodos de conversión anual.

Fórmula de valor presente para el interés compuesto

$$P = A(1 + i)^{-n} \tag{7}$$

EJEMPLO 6 ¿Cuánto dinero debe ser depositado en un banco que paga intereses a una tasa de 6% anual compuesto mensualmente, para que, al final de 3 años, el monto acumulado sea de $20,000?

Solución En este caso, $r = 0.06$ y $m = 12$, así que $i = \frac{0.06}{12}$ y $n = (3)(12) = 36$. Por tanto, el problema es determinar P, ya que $A = 20{,}000$. Utilizando la ecuación (7) obtenemos

$$\begin{aligned} P &= 20{,}000\left(1 + \frac{0.06}{12}\right)^{-36} \\ &\approx 16{,}713 \end{aligned}$$

o $16,713. ■

EJEMPLO 7 Calcule el valor presente de $49,158.60 a pagar dentro de 5 años a una tasa de interés de 10% anual compuesto trimestralmente.

Solución Al utilizar (7) con $r = 0.1$ y $m = 4$, por lo que $i = \frac{0.1}{4}$, $n = (4)(5) = 20$ y $A = 49{,}158.6$, se tiene

$$P = (49{,}158.6)\left(1 + \frac{0.1}{4}\right)^{-20} \approx 30{,}000.07$$

o aproximadamente $30,000. ■

Si se resuelve la fórmula (5) para P, tenemos

$$A = Pe^{rt}$$

y

$$P = Ae^{-rt} \tag{8}$$

que da el valor presente en términos del valor futuro (acumulado) para el caso de capitalización continua.

Uso de logaritmos para resolver problemas en finanzas

Los siguientes dos ejemplos muestran cómo se pueden utilizar los logaritmos para resolver problemas que implican interés compuesto.

EJEMPLO 8 ¿Cuánto tiempo tardan $10,000 para convertirse en $15,000 si la inversión gana un interés de 12% anual compuesto trimestralmente?

Solución Al utilizar la fórmula (3) con $A = 15{,}000$, $P = 10{,}000$, $r = 0.12$ y $m = 4$, se obtiene

$$\begin{aligned} 15{,}000 &= 10{,}000\left(1 + \frac{0.12}{4}\right)^{4t} \\ (1.03)^{4t} &= \frac{15{,}000}{10{,}000} = 1.5 \end{aligned}$$

Calculando el logaritmo a ambos lados de la ecuación da

$$\begin{aligned} \ln(1.03)^{4t} &= \ln 1.5 \\ 4t \ln 1.03 &= \ln 1.5 \qquad \log_b m^n = n \log_b m \\ 4t &= \frac{\ln 1.5}{\ln 1.03} \end{aligned}$$

$$t = \ln \frac{\ln 1.5}{4 \ln 1.03} \approx 3.43$$

Por lo que requerirá aproximadamente 3.4 años para que la inversión de \$10,000 se convierta en \$15,000. ■

EJEMPLO 9 Encontrar la tasa de interés necesaria para que una inversión de \$10,000 crezca hasta un monto de \$18,000 en 5 años si los intereses se capitaliza mensualmente.

Solución Utilice la fórmula (3) con $A = 18{,}000$, $P = 10{,}000$, $m = 12$ y $t = 5$. Por tanto, $i = \frac{r}{12}$ y $n = (12)(5) = 60$, por lo que

$$18{,}000 = 10{,}000\left(1 + \frac{r}{12}\right)^{12(5)}$$

Al dividir ambos lados de la ecuación entre 10,000 se obtiene

$$\frac{18{,}000}{10{,}000} = \left(1 + \frac{r}{12}\right)^{60}$$

o, al simplificar,

$$\left(1 + \frac{r}{12}\right)^{60} = 1.8$$

Ahora se calcula el logaritmo a ambos lados de la ecuación, y se obtiene

$$\ln\left(1 + \frac{r}{12}\right)^{60} = \ln 1.8$$

$$60 \ln\left(1 + \frac{r}{12}\right) = \ln 1.8$$

$$\ln\left(1 + \frac{r}{12}\right) = \frac{\ln 1.8}{60} \approx 0.009796$$

$$\left(1 + \frac{r}{12}\right) \approx e^{0.009796} \qquad \ln e^x = x$$

$$\approx 1.009844$$

y

$$\frac{r}{12} \approx 1.009844 - 1$$

$$r \approx 0.1181$$

u 11.81% anual. ■

EJEMPLO DE APLICACIÓN 10 Inversiones inmobiliarias Blakely Investment Company es propietaria de un edificio de oficinas ubicada en el distrito comercial de una ciudad. Como resultado del continuo éxito de un programa de renovación urbana, las empresas locales están disfrutando de un pequeño auge. El valor de mercado de la propiedad de Blakely es

$$V(t) = 300{,}000e^{\sqrt{t}/2}$$

donde $V(t)$ se mide en dólares y t es el tiempo en años desde el presente. Si la tasa esperada de apreciación es de 9% compuesto en forma continua durante los próximos 10 años, calcule una expresión para el valor presente $P(t)$ del precio de mercado de la propiedad que será válido para los próximos 10 años. Calcule $P(7)$, $P(8)$ y $P(9)$, e interprete sus resultados.

Solución Utilizando la fórmula (8) con $A = V(t)$ y $r = 0.09$, encontramos que el valor presente del precio de mercado de la propiedad en t años partir de ahora es

$$\begin{aligned} P(t) &= V(t)e^{-0.09t} \\ &= 300{,}000e^{-0.09t + \sqrt{t}/2} \qquad (0 \leq t \leq 10) \end{aligned}$$

Sea $t = 7$, 8 y 9, respectivamente, encontramos que

$$\begin{aligned} P(7) &= 300{,}000e^{-0.09(7)+\sqrt{7}/2} \approx 599{,}837, \text{ o } \$599{,}837 \\ P(8) &= 300{,}000e^{-0.09(8)+\sqrt{8}/2} \approx 600{,}640, \text{ o } \$600{,}640 \\ P(9) &= 300{,}000e^{-0.09(9)+\sqrt{9}/2} \approx 598{,}115, \text{ o } \$598{,}115 \end{aligned}$$

De los resultados de estos cálculos, vemos que el valor presente de los precios de mercado de bienes raíces parece disminuir después de cierto periodo de crecimiento. Esto sugiere que existe un momento óptimo para los propietarios al vender. Más tarde se mostrará que el máximo valor presente de una propiedad en el mercado es de aproximadamente \$600.779, y que se produce en el tiempo $t \approx 7.72$ años. ■

Los rendimientos de determinadas inversiones, como los certificados de depósito cupón cero (CD) y los bonos cupón cero se comparan expresando el tiempo necesario para que cada inversión se triplique, o incluso se cuadruplique. En estos cálculos se utiliza la fórmula del interés compuesto (3).

VIDEO

EJEMPLO DE APLICACIÓN 11 Opciones de inversión Jane ha reducido sus opciones de inversión a dos:

1. Comprar un CD que vence en 12 años y que paga intereses al vencimiento, a una tasa de 10% anual compuesto diariamente (suponga 365 días en un año).
2. Comprar un CD de cupón cero que triplicará su inversión en el mismo periodo.

¿Qué opción optimizará su inversión?

Solución Calculemos el monto acumulado en la opción 1. Aquí

$$r = 0.10 \qquad m = 365 \qquad t = 12$$

así que $n = 12(365) = 4380$ e $i = \frac{0.10}{365}$. El monto acumulado al final de 12 años (después de 4380 periodos de conversión) es

$$A = P\left(1 + \frac{0.10}{365}\right)^{4380} \approx 3.32P$$

o \$$3.32P$. Si Jane elige la opción 2, el monto acumulado de la inversión después de 12 años será de \$$3P$. Por tanto, debe elegir la opción 1. ■

EJEMPLO DE APLICACIÓN 12 Cuenta individual de retiro Moesha tiene una cuenta individual de retiro con una firma de corretaje. Su dinero se invierte en un fondo mutualista del mercado de dinero que paga intereses sobre una base diaria. Durante un periodo de 2 años, en los que no se hicieron depósitos ni retiros, su cuenta creció de \$4500 a \$5268.24. Calcule la tasa efectiva a la que la cuenta de Moesha estaba ganando intereses durante ese periodo (suponga 365 días en un año).

Solución Sea r_{ef} que denota la tasa de interés efectiva requerida. Tenemos

$$\begin{aligned} 5268.24 &= 4500(1 + r_{ef})^2 \\ (1 + r_{ef})^2 &= 1.17072 \\ 1 + r_{ef} &\approx 1.081998 \qquad \text{Obtener la raíz cuadrada de ambos lados.} \end{aligned}$$

o $r_{ef} \approx 0.081998$. Por consiguiente, la tasa efectiva fue de 8.20% anual. ■

4.1 Ejercicios de autoevaluación

1. Calcule el valor presente de $20,000 pagaderos a 3 años a una tasa de interés del 12% anual compuesto mensualmente.

2. Pablo es un jubilado que vive del Seguro Social y de los ingresos de su inversión. En la actualidad, su inversión de $100,000 en un CD a un año está produciendo 4.6% de interés compuesto diario. Si reinvierte el capital ($100,000) en la fecha de vencimiento del CD en otro CD a 1 año que paga 3.2% de interés compuesto diario, calcule la disminución neta en su ingreso anual por esta inversión.

Las soluciones de los ejercicios de autoevaluación 4.1 se pueden encontrar en la página 200.

4.1 Preguntas de concepto

1. Explique la diferencia entre el interés simple y el interés compuesto.

2. ¿Cuál es la diferencia entre el monto acumulado (valor futuro) y el valor presente de una inversión?

3. ¿Cuál es la tasa de interés efectiva?

4.1 Ejercicios

1. Calcule el interés simple en una inversión de $500 hecha por 2 años con una tasa de interés de 8% anual. ¿Cuál es el monto acumulado?

2. Calcule el interés simple en una inversión de $1000 hecha por 3 años a una tasa de interés de 5% anual. ¿Cuál es el monto acumulado?

3. Calcule el monto acumulado al final de 9 meses en un depósito de $800 en un banco que paga interés simple a una tasa de 6% anual.

4. Calcule el monto acumulado al final de 8 meses en un depósito bancario de $1200 que paga interés simple a una tasa de 7% anual.

5. Si la cantidad acumulada es de $1160 al final de 2 años y la tasa de interés simple es de 8% anual, entonces ¿cuál es el capital?

6. Un depósito bancario que paga interés simple a razón de 5% anual creció a una suma de $3100 en 10 meses. Calcule el capital.

7. ¿Cuántos días tomará para que la suma de $1000 gane $20 de intereses si se deposita en un banco que paga interés simple de 5% anual? (Utilice un año de 365 días.)

8. ¿Cuántos días tomará para que la suma de $1500 gane $25 de intereses si se deposita en un banco que paga 5% anual? (Utilice un año de 365 días.)

9. Un depósito bancario que paga interés simple pasó de una suma inicial de $1000 a una suma de $1075 en 9 meses. Calcule la tasa de interés.

10. Determine la tasa de interés simple a la que $1200 crecerán a $1250 en 8 meses.

En los ejercicios 11 a 20, calcule la cantidad acumulada *A* si el capital *P* se invierte a la tasa de interés *r* durante *t* años.

11. $P = \$1000$, $r = 7\%$, $t = 8$, compuesto anualmente

12. $P = \$1000$, $r = 8\frac{1}{2}\%$, $t = 6$, compuesto anualmente

13. $P = \$2500$, $r = 7\%$, $t = 10$, compuesto semestralmente

14. $P = \$2500$, $r = 9\%$, $P\ t = 10\frac{1}{2}$, compuesto semestralmente

15. $P = \$12,000$, $r = 8\%$, $t = 10\frac{1}{2}$, compuesto trimestralmente

16. $P = \$42,000$, $r = 7\frac{3}{4}\%$, $t = 8$, compuesto trimestralmente

17. $P = \$150,000$, $r = 14\%$, $t = 4$, compuesto mensualmente

18. $P = \$180,000$, $r = 9\%$, $t = 6\frac{1}{4}$, compuesto mensualmente

19. $P = \$150,000$, $r = 12\%$, $t = 3$, compuesto diariamente

20. $P = \$200,000$, $r = 8\%$, $t = 4$, compuesto diariamente

En los ejercicios 21 a 24, calcule la tasa efectiva correspondiente a la tasa nominal dada.

21. 10% anual compuesta semestralmente

22. 9% anual compuesta trimestralmente

23. 8% anual compuesta mensualmente

24. 8% anual compuesta diariamente

En los ejercicios 25 a 28, calcule el valor presente de $40,000 a pagar en 4 años a la tasa de interés dada.

25. 8% anual compuesta semestralmente

26. 8% anual compuesta trimestralmente

27. 7% anual compuesta mensualmente

28. 9% anual compuesta diariamente

29. Determine la cantidad acumulada después de 4 años si se invierten $5000 al 8% anual de interés compuesto continuo.

30. Calcule el monto acumulado después de 6 años si se invierten $6500 al 7% anual de interés compuesto continuamente.

En los ejercicios 31 a 38, utilice logaritmos para resolver cada problema.

31. ¿Cuánto tiempo tardan $5000 para crecer a $6500 si la inversión genera intereses a una tasa de 12% anual compuesta mensualmente?

32. ¿Cuánto tiempo tardan $12,000 para crecer a $15,000 si la inversión genera intereses a una tasa de 8% anual compuesta mensualmente?

33. ¿Cuánto tiempo tarda una inversión de $2000 en duplicarse si la inversión genera intereses a una tasa de 9% anual compuesta mensualmente?

34. ¿Cuánto tiempo tarda una inversión de $5000 en triplicarse si la inversión genera intereses a una tasa de 8% anual compuesta diariamente?

35. Calcule la tasa de interés necesaria para que una inversión de $5000 crezca hasta un monto de $6000 en 3 años con un interés compuesto continuamente.

36. Calcule la tasa de interés necesaria para que una inversión de $4000 se duplique en 5 años con intereses compuestos continuamente.

37. ¿Cuánto tiempo tarda una inversión de $6000 en crecer hasta $7000 si la misma genera intereses a una tasa de $7\frac{1}{2}\%$ compuesto en forma continua?

38. ¿Cuánto tiempo tarda una inversión de $8000 en duplicarse si la inversión genera intereses a una tasa de 8% compuesto en forma continua?

39. DECISIONES DEL CONSUMIDOR Mitchell tiene la opción de elegir entre pagar su estado de cuenta de $300 ahora o liquidarlo luego de 1 mes (30 días) por $306. Si elige pagar después de 1 mes, calcule la tasa de interés simple que le cargarían.

40. SENTENCIA DE LA CORTE Jennifer recibió una indemnización de $150,000 en una demanda exitosa contra su empleador hace 5 años. El interés (simple) en la sentencia se acumuló a una tasa de 12% anual a partir de la fecha de presentación. Si el caso se arregla hoy, ¿cuánto recibirá Jennifer al final del juicio?

41. CRÉDITOS PUENTE Para ayudar a financiar la compra de una casa nueva, los Abdullah han decidido solicitar un préstamo a corto plazo (un crédito puente) por un monto de $120,000 por un periodo de 3 meses. Si el banco cobra un interés simple a una tasa de 12% anual, ¿cuánto deberán los Abdullah al banco al final del plazo?

42. BONOS CORPORATIVOS David posee bonos a 10 años de Ace Corporation por un valor de $20,000. Estos bonos pagan intereses cada 6 meses a razón de 7% anual (interés simple). ¿Cuánto dinero recibirá David de esta inversión cada 6 meses? ¿Cuánto interés recibirá David durante la vigencia de los bonos?

43. BONOS MUNICIPALES Maya pagó $10,000 por un bono a 7 años emitido por una ciudad. Recibió intereses por valor de $3500 durante la vigencia de los bonos. ¿Qué tasa de interés (simple) pagaron los bonos?

44. Escriba la ecuación (1b) en la forma intersección de la pendiente e interprete el significado de la pendiente y la intersección A en términos de r y P.
Sugerencia: Consulte la figura 1.

45. COSTOS HOSPITALARIOS Si el costo de una habitación semiprivada en un hospital fue de $580 por día hace 5 años y los costos hospitalarios se han incrementado a una tasa de 8% anual desde entonces, ¿qué tasa se puede esperar que se deba pagar por una habitación semiprivada hoy?

46. GASTO FAMILIAR EN COMIDA Hoy una familia típica de cuatro personas gasta $600 por mes en alimentación. Si la inflación se produce a una tasa de 5% anual durante los próximos 6 años, ¿cuánto debe esperar gastar en alimentos la familia típica de cuatro personas en los próximos 6 años a partir de ahora?

47. APRECIACIÓN DE UNA CASA Los Kwan están planeando comprar una casa en 4 años a partir de ahora. Los expertos en vivienda en su área han estimado que el costo de una casa se incrementará a una tasa de 5% anual durante ese periodo. Si esta predicción económica es cierta, ¿cuánto pueden esperar pagar los Kwan por una casa que cuesta actualmente $210,000?

48. CONSUMO ELÉCTRICO Una empresa de servicios públicos en una ciudad del oeste de Estados Unidos espera que el consumo de electricidad aumente 8% anual durante la próxima década, sobre todo debido al aumento previsto de la población. Si el consumo se incrementa a esa tasa, calcule la cantidad en la cual la empresa de servicios tendrá que aumentar su capacidad de generación con el fin de satisfacer las necesidades de la zona a finales de la década.

49. FONDOS DE PENSIONES Los administradores de un fondo de pensiones han invertido $1.5 millones en certificados de depósito del gobierno de Estados Unidos, que pagan intereses a una tasa de 5.5% anual compuesto semestralmente durante un periodo de 10 años. Al final de este periodo, ¿cuánto valdrá la inversión?

50. FONDOS PARA EL RETIRO Hace $5\frac{1}{2}$ años, Chris invirtió $10,000 en un fondo de retiro que creció a una tasa de 10.82% anual compuesta trimestralmente. ¿Cuál es el valor de su cuenta hoy?

51. FONDOS MUTUOS Jodie invirtió $15,000 en un fondo de inversión hace 4 años. Si el fondo creció a una tasa de 9.8% anual compuesta mensualmente, ¿cuánto valdrá la cuenta de Jodie hoy?

52. FONDOS FIDUCIARIOS Un joven es el beneficiario de un fondo fiduciario establecido para él hace 21 años, en su nacimiento. Si la cantidad original colocada en fideicomiso era de $10,000, ¿cuánto recibirá si el dinero ha ganado intereses a la tasa de 8% anual compuesta anualmente? ¿Compuesta trimestralmente? ¿Compuesta mensualmente?

53. **Planeación de inversiones** Calcule cuánto dinero debe ser depositado en un banco que paga intereses a una tasa de 8.5% anual compuesta trimestralmente para que, al final de 5 años, el monto acumulado sea de $40,000.

54. **Pagarés** Una persona compró un pagaré de $10,000 a 4 años, con una tasa de interés de 8.5% anual compuesta semestralmente. ¿Cuánto costó el pagaré?

55. **Financiamiento de una carrera universitaria** Los padres de un niño acaban de entrar en posesión de una gran herencia y desean establecer un fondo fiduciario para su educación universitaria. Si estiman que necesitarán $100,000 en 13 años, ¿cuánto deben colocar en el fondo ahora si pueden invertir el dinero a 8½ anual compuesto de forma (a) anual, (b) semestral y (c) trimestral?

56. **Inversiones** Anthony invirtió una suma de dinero hace 5 años en una cuenta de ahorros que ha puesto los intereses pagados a razón de 8% anual compuesto trimestralmente. Su inversión ahora vale $22,289.22. ¿Cuánto invirtió inicialmente?

57. **Comparaciones de tasas** En los últimos 5 años, Bendix Mutual Fund creció a una tasa del 10.4% anual compuesta trimestralmente. Durante el mismo periodo, Acme Mutual Fund creció a una tasa de 10.6% anual compuesta semestralmente. ¿Qué fondo de inversión tiene una mejor tasa de rendimiento?

58. **Comparaciones de tasa** Fleet Street Savings Bank paga intereses a una tasa de 4.25% anual compuesta semanalmente en una cuenta de ahorros, mientras que Washington Bank paga intereses a una tasa de 4.125% anual compuesta diariamente (suponga 1 año de 365 días). ¿Qué banco ofrece una mejor tasa de interés?

59. **Consolidación de un préstamo** Los propietarios de The Coachmen Inn obtuvieron dos préstamos del Union Bank: uno por $8000 a pagar en 3 años y otro por $15,000 a pagar en 6 años, ambos con una tasa de interés de 10% anual compuesta semestralmente. El banco se ha comprometido a permitir la consolidación de los dos préstamos en uno solo a pagar en 5 años a la misma tasa de interés. ¿Qué cantidad tendrán que pagar al banco los propietarios de la posada al final de los 5 años?
Sugerencia: Busque el valor presente de los dos primeros préstamos.

60. **Tasa de interés efectiva** Calcule la tasa de interés efectiva correspondiente a una tasa nominal de 9% anual compuesta en forma anual, semestral, trimestral y mensual.

61. **Bonos cupón cero** Juan está contemplando la compra de un bono cupón cero que vence en 10 años y tiene un valor nominal de $10,000. Si el bono obtiene un rendimiento de 5.25% anual, ¿cuánto debe pagar Juan por el bono?

62. **Crecimiento de los ingresos de un negocio de cine en casa** Maxwell comenzó un negocio de cine en casa en 2005. Los ingresos de su empresa para ese año fueron de $240,000. Los ingresos crecieron 20% en 2006 y 30% en 2007. Maxwell calculó que el crecimiento de los ingresos para su empresa en los próximos 3 años será por lo menos de 25% anual. ¿Cuánto espera Maxwell que será su ingreso mínimo en 2010?

63. **Ventas al detalle en línea** Las ventas al detalle en línea se situaron en $23,500 millones en el año 2000. Para los siguientes dos años, crecieron 33.2% y 27.8% anual, respectivamente. Se proyectó que durante los siguientes 6 años, las ventas al detalle en línea crecerían 30.5%, 19.9%, 24.3%, 14.0%, 17.6% y 10.5% anual, respectivamente. ¿Cuáles fueron las ventas en línea proyectadas para 2008?
Fuente: Jupiter Research

64. **Poder de compra** Las tasas de inflación en la economía estadounidense de 2003 a 2006 son de 1.6%, 2.3%, 2.7% y 3.4%, respectivamente. ¿Cuál era el poder adquisitivo de un dólar a principios de 2007 en comparación con uno de principios de 2003?
Fuente: U.S. Census Bureau

65. **Opciones de inversión** La inversión A ofrece un rendimiento de 10% compuesto semestralmente, y la inversión B ofrece 9.75% de rentabilidad compuesta continuamente. ¿Cuál inversión tiene una tasa de rendimiento más alta durante un periodo de 4 años?

66. **Efecto de la inflación sobre los sueldos** El sueldo anual actual de Leonard es de $45,000. Diez años a partir de ahora, ¿cuánto necesita ganar para mantener su poder de compra presente si la tasa de inflación en ese periodo es de 3% anual compuesta continuamente?

67. **Ahorro para la universidad** Los padres de Jing-Mei recibieron una gran herencia, y desean establecer un fideicomiso para la educación universitaria de su hijo. Si para dentro de 7 años a partir de ahora necesitan un estimado de $70,000, ¿en cuánto deberían establecer el fondo, si invierten el dinero a 10.5% compuesto trimestralmente? ¿Y si lo hacen continuamente?

68. **Pensiones** María, que ahora tiene 50 años, es empleada de una empresa que le garantiza una pensión de $40,000 por año a los 65 años de edad. ¿Cuál es el valor presente de su pensión el primer año, si la tasa de inflación en los próximos 15 años es de 6% anual compuesta continuamente? ¿Y si es 8% anual compuesta continuamente? ¿Y si es de 12% anual compuesta continuamente?

69. **Inversiones inmobiliarias** Un inversionista compró una propiedad frente al mar. Debido al desarrollo de un puerto deportivo en las cercanías, se espera que el valor de mercado de la propiedad aumente según la regla

$$V(t) = 80{,}000e^{\sqrt{t}/2}$$

donde $V(t)$ se mide en dólares y t es el tiempo (en años) desde el presente. Si la tasa de apreciación se espera que sea de 9% compuesta continuamente durante los próximos 8 años, calcule una expresión para el valor presente $P(t)$ del precio de mercado de la propiedad para los próximos 8 años. ¿Qué $P(t)$ se espera que sea en el año 4?

70. La fórmula de interés simple, $A = P(1 + rt)$ [fórmula (1b)] se puede escribir de la forma $A = Prt + P$, que es la forma de pendiente-intersección de una línea recta con pendiente Pr e intersección A en P.
    a. Describa la familia de líneas rectas que se obtienen por mantener fijo el valor de r y permitir que varíe el valor de P. Interprete sus resultados.
    b. Describa la familia de líneas rectas que se obtienen por mantener fijo el valor de P y permitir que varíe el valor de r. Interprete sus resultados.

71. Tasa de interés efectiva Suponga que una inversión inicial de $\$P$ crece a un monto acumulado de $\$A$ en t años. Demuestre que la tasa efectiva (rendimiento anual efectivo) es

$$r_{ef} = (A/P)^{1/t} - 1$$

Utilice la fórmula dada en el ejercicio 71 para resolver los ejercicios 72 a 76.

72. Tasa de interés efectiva Martha invirtió \$40,000 en una tienda hace 5 años. Su inversión vale hoy \$70,000. ¿Cuál es la tasa efectiva (rendimiento anual efectivo) de su inversión?

73. Apreciación de una casa Georgia compró una casa en enero de 2000 por \$200,000. En enero de 2006 vendió la casa y obtuvo un beneficio neto de \$56,000. Calcule la tasa anual efectiva de rendimiento sobre su inversión en el periodo de 6 años.

74. Transacciones de acciones comunes Steven compró 1000 acciones de una determinada serie por \$25,250 (incluidas las comisiones). Vendió sus acciones 2 años más tarde y recibió \$32,100 después de deducir comisiones. Calcule la tasa anual efectiva de rendimiento sobre su inversión en el periodo de 2 años.

75. Bonos cupón cero Nina compró un bono cupón cero por \$6724.53. El bono vence en 7 años y tiene un valor nominal de \$10,000. Calcule la tasa anual efectiva de interés para el bono.

Sugerencia: Suponga que el precio de compra del bono es la inversión inicial y que el valor nominal del bono es la cantidad acumulada.

76. Fondos de inversión del mercado de dinero Carlos invirtió \$5000 en un fondo de inversión del mercado de dinero que paga intereses sobre una base diaria. El saldo en su cuenta al final de 8 meses (245 días) fue \$5170.42. Calcule la tasa efectiva a la que devengó intereses la cuenta de Carlos durante ese periodo (suponga 1 año de 365 días).

En los ejercicios 77 a 80, determine si la afirmación es verdadera o falsa. Si es verdadera, explique por qué lo es. Si es falsa, dé un ejemplo para demostrar por qué lo es.

77. Cuando se utiliza el interés simple, el monto acumulado es una función lineal de t.

78. Si el interés es compuesto anualmente, la cantidad acumulada después de t años es la misma que el importe acumulado bajo un interés simple durante t años.

79. Si el interés es compuesto anualmente, la tasa efectiva es la misma que la tasa nominal.

80. El sueldo de Susan aumentó de \$50,000 anual a \$60,000 anual durante un periodo de 4 años. Por tanto, Susan recibió aumentos anuales de 5% durante ese periodo.

4.1 Soluciones de los ejercicios de autoevaluación

1. Utilizando la ecuación (7) con $A = 20{,}000$, $r = 0.12$ y $m = 12$ de modo que $i = \frac{0.12}{12}$ y $n = (3)(12) = 36$, encontramos que el valor presente requerido debe ser

$$P = 20{,}000\left(1 + \frac{0.12}{12}\right)^{-36} \approx 13{,}978.50$$

o \$13,978.50.

2. El importe acumulado de las inversiones actuales de Paul se calcule utilizando la ecuación (3) con $P = 100{,}000$, $r = 0.046$ y $m = 365$. Por tanto, $i = \frac{0.046}{365}$ y $n = 365$, por lo que la cantidad acumulada requerida está dada por

$$A = 100{,}000\left(1 + \frac{0.046}{365}\right)^{365} \approx 104{,}707$$

o \$104,707. A continuación, se calcula el monto acumulado de la reinversión de Paul. Ahora, utilizando (3) con $P = 100{,}000$, $r = 0.032$ y $m = 365$ así que $i = \frac{0.032}{365}$ y $n = 365$, encontramos que el monto acumulado requerido en este caso es

$$\bar{A} = 100{,}000\left(1 + \frac{0.032}{365}\right)^{365} \approx 103{,}252$$

o \$103.252. Por tanto, Paul puede esperar experimentar una disminución neta de los ingresos anuales de 104,707 – 103,252 o \$1455.

USO DE LA TECNOLOGÍA

Cómo calcular el monto acumulado de una inversión, la tasa de interés efectiva y el valor presente de una inversión

Calculadora graficadora

Algunas herramientas de graficación han incorporado rutinas para resolver problemas relacionados con las matemáticas financieras. Por ejemplo, la función **TVM SOLVER** de la TI-83/84 incorpora varias funciones que se pueden utilizar para resolver los problemas que se calculen en las secciones 4.1 a 4.3. Para acceder a la **TVM SOLVER** en la TI-83 presione **2nd**, presione **FINANCE** y, a continuación, seleccione **1: TVM Solver**. Para el acceso a la TVM Solver en la TI-83 plus y la TI-84, presione **APPS**, presione **1: Finance** y, a continuación, seleccione **1: TVM Solver**. Los procedimientos paso a paso para usar estas funciones se pueden encontrar en el sitio web del libro.

EJEMPLO 1 Cálculo del monto acumulado de una inversión Calcule la cantidad acumulada después de 10 años si se invierten $5000 a una tasa de 10% anual compuesta mensualmente.

Solución Utilizando **TVM SOLVER** de la TI-83/84 con las siguientes entradas:

N = 120 (10)(12)
I% = 10
PV = −5000 Recuerde que una inversión es un desembolso.
PMT = 0
FV = 0
P/S = 12 El número de pagos cada año
C/Y = 12 El número de periodos de conversión de cada año
PMT:FIN BEGIN

```
  N     = 120
  I%    = 10
  PV    = –5000
  PMT = 0
■ FV    = 13535.20745
  P/Y   = 12
  C/Y   = 12
  PMT : END     BEGIN
```

FIGURA T1
La pantalla de la TI-83/84 muestra el valor futuro (VF) de una inversión.

obtenemos la pantalla que se muestra en la figura T1. Concluimos que la cantidad acumulada requerida es de $13,535.21. ■

EJEMPLO 2 Cálculo de la tasa de interés efectiva Calcule la tasa de interés efectiva correspondiente a una tasa nominal de 10% anual compuesta trimestralmente.

Solución Aquí usamos la función **Eff** de la calculadora TI-83/84 para obtener el resultado mostrado en la figura T2. La tasa efectiva requerida es aproximadamente 10.38% anual. ■

```
▶ Eff (10, 4)
        10.38128906
```

FIGURA T2
La pantalla de la TI-83/84 que muestra la tasa de interés efectiva (Eff).

EJEMPLO 3 Cálculo del valor presente de una inversión Calcule el valor presente de $20,000 a pagar en 5 años si la tasa de interés es de 7.5% anual compuesto diariamente.

Solución Utilizando **TVM SOLVER** de la TI-83/84 con las siguientes entradas,

N = 1825 (5)(365)
I% = 7.5
PV = 0
PMT = 0
FV = 20000
P/Y = 365 El número de pagos cada año
C/Y = 365 El número de conversiones de cada año
PMT:FIN BEGIN

(*continúa*)

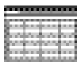
se obtiene la pantalla que se muestra en la figura T3. Vemos que el valor presente requerido es de aproximadamente $13.746.32. Tenga en cuenta que PV es negativo porque la inversión es un desembolso (dinero que se paga).

```
  N     = 1825
  I%    = 7.5
■ PV    = −13746.3151
  PMT   = 0
  FV    = 20000
  P/Y   = 365
  C/Y   = 365
  PMT : END    BEGIN
```

FIGURA **T3**
La pantalla de la TI-83/84 muestra el valor presente (PV) de una inversión.

■

Excel



Excel tiene muchas funciones integradas para resolver problemas relacionados con las matemáticas financieras. Aquí se expone la aplicación de FV (valor futuro), EFFECT (tasa efectiva) y PV (valor presente) funciones para resolver problemas del tipo que hemos encontrado en la sección 4.1.

EJEMPLO 4 Cálculo del monto acumulado de una inversión Determine la cantidad acumulada después de 10 años si se invierten $5000 a una tasa de 10% anual compuesta mensualmente.

Solución Para calcular el valor futuro de la suma total de una inversión, por lo que utilizamos la función FV (valor futuro). Seleccione **f_x** de la barra de herramientas para obtener el cuadro de diálogo Insert Function. A continuación seleccione **Financial** del cuadro de lista Or select a category:. Enseguida seleccione **FV** debajo de Select a function: y haga clic en **OK**. Aparecerá el cuadro de diálogo Function Arguments (figura T4). En nuestro ejemplo, el cursor del mouse se encuentra en el cuadro de edición titulado Type, por lo que una definición de ese término aparece en la parte inferior de la caja. La figura T4 muestra las entradas para cada cuadro de edición en nuestro ejemplo.

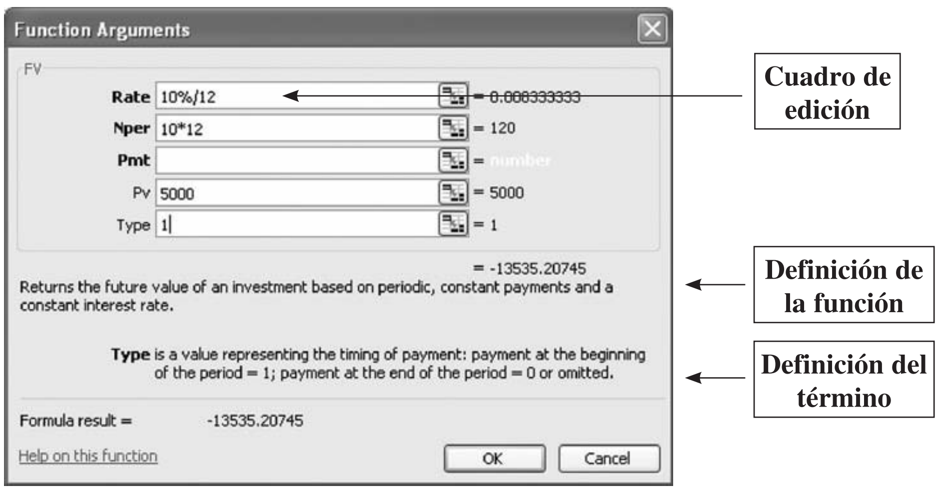


FIGURA **T4**
Cuadro de diálogo de Excel para calcular el valor futuro (FV) de una inversión.

Tenga en cuenta que la entrada de Nper es el número total de periodos en que la inversión genera intereses. El cuadro de Pmt se deja en blanco, ya que no se agregó nada de dinero a la inversión original. La entrada en Pv es 5000. La entrada para Type

Nota: Las palabras y los caracteres en negrita y encerrados en un recuadro (por ejemplo, **Enter**) indican que se requiere una acción (*clic*, seleccionar o presionar). Las palabras y los caracteres impresos en azul (por ejemplo, Chart sub-type:) indican palabras y caracteres que aparecen en la pantalla.

es un 1 porque la suma total de pago se realiza al inicio del periodo de inversión. La respuesta, −$13,535.21, se muestra en la parte inferior del cuadro de diálogo. Es negativa porque una inversión se considera un desembolso de dinero (dinero que se paga). (Haga clic en **OK** y la respuesta también aparecerá en su hoja de cálculo.) ■

EJEMPLO 5 Cálculo de la tasa de interés efectiva Calcule la tasa de interés efectiva correspondiente a una tasa nominal de 10% anual compuesta trimestralmente.

Solución Se utiliza la función EFFECT para calcular la tasa de interés efectiva. Al ingresar a esta función desde el cuadro de diálogo Insert Function e insertar los datos de entrada necesarios, obtenemos el cuadro de diálogo Function Arguments mostrado en la figura T5. La tasa efectiva que se requiere es de aproximadamente 10.38% anual.

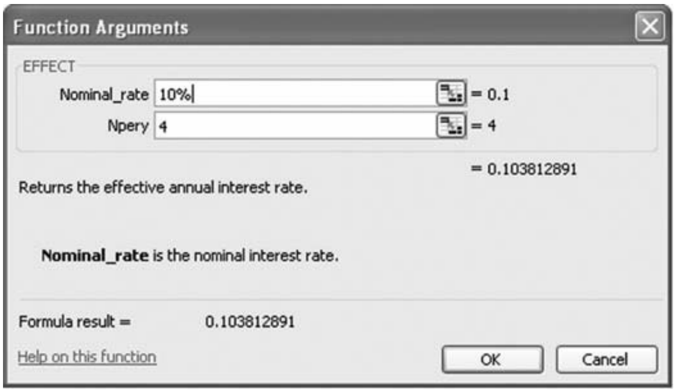


FIGURA **T5**
Cuadro de diálogo de Excel para la función de la tasa de interés efectiva (EFFECT).

■

EJEMPLO 6 Cálculo del valor presente de una inversión Calcule el valor presente de $20,000 a pagar en 5 años si la tasa de interés es de 7.5% anual compuesta diariamente.

Solución Se utiliza la función PV para calcular el valor presente de la suma total de una inversión. Al ingresar a esta función desde el cuadro de diálogo Insert Function e insertar los datos de entrada necesarios, obtenemos el cuadro de diálogo PV se muestra en la figura T6. Una vez más, el cuadro de edición Pmt se deja en blanco, ya que no se agregó nada de dinero a la inversión original. La entrada Fv es 20000. La respuesta es negativa, porque una inversión se considera un desembolso de dinero (dinero que se paga). Deducimos que la cantidad requerida es $13,746.32.

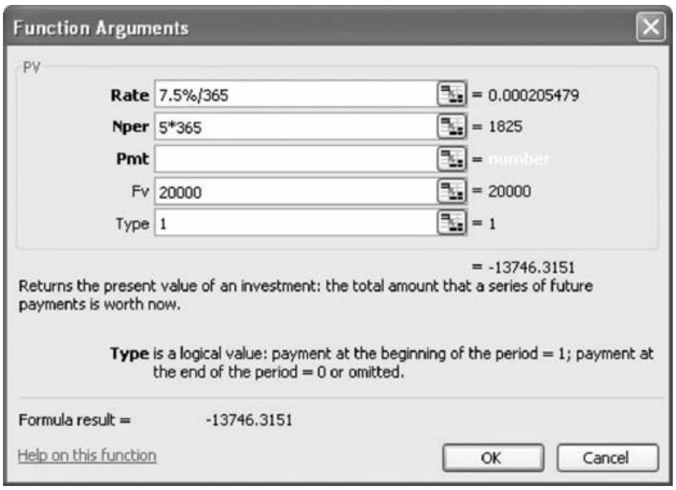


FIGURA **T6**
Cuadro de diálogo de Excel para la función de valor presente (PV).

■

(*continúa*)

EJERCICIOS CON TECNOLOGÍA

1. Calcule el monto acumulado A si se invierten \$5000 a una tasa de interés de $5\frac{3}{8}\%$ anual compuesta mensualmente durante 3 años.
2. Calcule el monto acumulado A si se invierten \$2850 a una tasa de interés de $6\frac{5}{8}\%$ anual compuesta mensualmente durante 4 años.
3. Calcule el monto acumulado A si se invierten \$327.35 a la tasa de interés de $5\frac{1}{3}$ anual compuesta diariamente durante 7 años.
4. Calcule el monto acumulado A si se invierten \$327.35 a la tasa de interés del $6\frac{7}{8}\%$ anual compuesta diariamente durante 8 años.
5. Calcule la tasa efectiva correspondiente a $8\frac{2}{3}\%$ anual compuesta trimestralmente.
6. Calcule la tasa efectiva correspondiente a $10\frac{5}{8}\%$ anual compuesta mensualmente.
7. Calcule la tasa efectiva correspondiente al $9\frac{3}{4}\%$ anual compuesta mensualmente.
8. Calcule la tasa efectiva correspondiente a $4\frac{3}{8}\%$ anual compuesta trimestralmente.
9. Calcule el valor presente de \$38,000 a pagar en 3 años a $8\frac{1}{4}\%$ anual compuesta trimestralmente.
10. Calcule el valor presente de \$150,000 a pagar en 5 años a $9\frac{3}{8}\%$ anual compuesta mensualmente.
11. Calcule el valor presente de \$67,456 a pagar en 3 años a $7\frac{7}{8}\%$ anual compuesta mensualmente.
12. Calcule el valor presente de \$111,000 a pagar en 5 años a $11\frac{5}{8}\%$ anual compuesta mensualmente.

4.2 Anualidades

Valor futuro de una anualidad

Una **anualidad** es una serie de pagos efectuados a intervalos regulares. El periodo en que estos pagos se hacen se llama **término** de la anualidad. Si el término está dado por un *intervalo fijo,* por un intervalo que comienza en una fecha determinada, pero que se extiende indefinidamente, o que no se fija por anticipado, una anualidad puede llamarse **anualidad cierta**, *perpetuidad* o una *anualidad contingente,* respectivamente. En general, los pagos en una anualidad no tiene por qué ser iguales, pero en muchas aplicaciones importantes son iguales. En esta sección se supone que los pagos de una anualidad son iguales. Algunos ejemplos de anualidades son depósitos regulares a una cuenta de ahorro, pagos mensuales de hipotecas y los pagos mensuales del seguro.

Las anualidades también se clasifican por las fechas de pago. Una anualidad en la que se efectúan los pagos al *final* de cada periodo de pago se llama **anualidad ordinaria**, mientras que una anualidad en la cual los pagos se realizan al comienzo de cada periodo se le llama una *anualidad anticipada.* Por otra parte, una anualidad en la que el periodo de pago coincide con el periodo de conversión del interés es una **anualidad simple**, mientras que una renta vitalicia en la que el periodo de pago difiere del periodo de conversión del interés se llama *anualidad compleja* o *anualidad generada*.

En esta sección consideramos anualidades ordinarias que son ciertas y simples, con pagos periódicos que son iguales. En otras palabras, se estudian las anualidades que están sujetos a las siguientes condiciones:

1. Los términos están dados por intervalos fijos.
2. Los pagos periódicos son iguales.
3. Los pagos se efectúan al *final* de los periodos.
4. Los plazos de pago coinciden con los periodos de conversión del interés.

Para encontrar una fórmula para la cantidad acumulada S de una anualidad, suponga que se abonará una suma de \$100 en una cuenta al final de cada trimestre durante un periodo de 3 años. Por otra parte, suponga que la cuenta genera intereses sobre el depósito, a razón de 8% anual, compuesto trimestralmente. Entonces, el primer pago de

\$100 realizado a finales del primer trimestre devenga intereses a la tasa de 8% anual compuesta cuatro veces al año (o 8/4 = 2% por trimestre) en los 11 trimestres restantes y, por consiguiente, la fórmula de interés compuesto tiene un monto acumulado de

$$100\left(1 + \frac{0.08}{4}\right)^{11} \quad \text{o} \quad 100(1 + 0.02)^{11}$$

dólares al final del término de la anualidad (figura 2).

El segundo pago de \$100 realizado a finales del segundo trimestre devenga intereses a la misma tasa en los 10 trimestres restantes y, por tanto, tiene un monto acumulado de

$$100(1 + 0.02)^{10}$$

dólares al final del término de la anualidad, y así sucesivamente. El último pago no gana ningún interés, ya que se paga al final del plazo. El importe de la anualidad se obtiene al sumar todos los términos en la figura 2. Así,

$$S = 100 + 100(1 + 0.02) + 100(1 + 0.02)^2 + \cdots + 100(1 + 0.02)^{11}$$

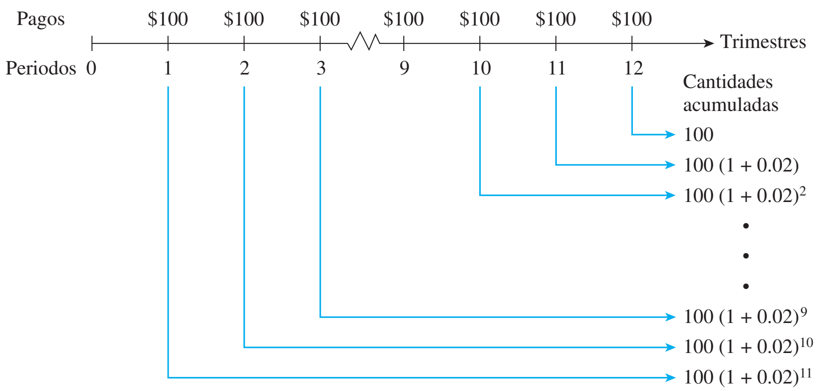


FIGURA **2**
La suma de las cantidades acumuladas es la cantidad de la anualidad.

La suma de la derecha es la suma de los primeros n términos de una *progresión geométrica* cuyo primer término es 100 y su razón común es (1 + 0.02). En la sección 4.4 se muestra que la suma de S se puede escribir en la forma más compacta

$$\begin{aligned} S &= 100\left[\frac{(1 + 0.02)^{12} - 1}{0.02}\right] \\ &\approx 1341.21 \end{aligned}$$

es decir, aproximadamente \$1341.21.

Para encontrar una fórmula general para la suma acumulada S de una anualidad, suponga que una suma de \$$R$ se abona en una cuenta al final de cada periodo durante n periodos y que la cuenta genera intereses a una tasa de i por periodo. A continuación, al proceder como lo hicimos con el ejemplo numérico, se obtiene

$$\begin{aligned} S &= R + R(1 + i) + R(1 + i)^2 + \cdots + R(1 + i)^{n-1} \\ &= R\left[\frac{(1 + i)^n - 1}{i}\right] \end{aligned} \qquad \textbf{(9)}$$

La expresión entre corchetes es comúnmente denotada por $s_{\overline{n}|i}$ (léase "*s* ángulo *n* en *i*") y se llama **factor de monto compuesto**. Se han construido tablas extensas que dan valores de $s_{\overline{n}|i}$ para diferentes valores de i y de n (vea, por ejemplo, la tabla 1 en el sitio web del libro). En términos del factor de monto compuesto,

$$S = Rs_{\overline{n}|i} \qquad \textbf{(10)}$$

La cantidad S en las ecuaciones (9) y (10) es factible en una fecha futura y por ello se le llama valor futuro de una anualidad.

Valor futuro de una anualidad

El **valor futuro S de una anualidad** de n pagos de R dólares cada uno, pagados al final de cada periodo de inversión en una cuenta que devenga intereses a la tasa i por periodo, es

$$S = R\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right]$$

VIDEO

EJEMPLO 1 Calcule el monto de una anualidad ordinaria que consiste en 12 pagos mensuales de \$100 que gana intereses de 12% anual compuesto mensualmente.

Solución Dado que i es la tasa de interés por *periodo,* y ya que el interés se capitaliza mensualmente, en este caso tenemos $i = \frac{0.12}{12} = 0.01$. Utilizando la ecuación (9) con $R = 100$, $n = 12$ e $i = 0.01$, tenemos

$$\begin{aligned} S &= \frac{100[(1.01)^{12} - 1]}{0.01} \\ &\approx 1268.25 \qquad \text{Use una calculadora.} \end{aligned}$$

o \$1268.25. El mismo resultado se obtiene mediante la observación de que

$$\begin{aligned} S &= 100s_{\overline{12}|0.01} \\ &= 100(12.6825) \\ &= 1268.25 \qquad \text{Use la tabla 1 del sitio web de la obra.} \end{aligned}$$

■

Explore y analice

Valor futuro S de una anualidad anticipada

1. Considere una anualidad que reúna las condiciones 1, 2 y 4 en la página 204, pero con la condición 3 sustituida por la condición de que los pagos se realizan al *inicio* de los periodos de pago. Utilizando un argumento similar al utilizado para establecer la fórmula (9), mostrar que el valor futuro S de una anualidad anticipada de n pagos de R dólares cada uno, pagados al inicio de cada inversión en una cuenta que devenga intereses a la tasa i por periodo, es

$$S = R(1+i)\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right]$$

2. Utilice el resultado de la parte 1 para ver cuál será la cantidad de sus ahorros cuando tenga 65 años si comienza a ahorrar \$4000 al año a los 30 años, suponiendo 10% de rentabilidad media anual; si empieza a ahorrar a los 35; si empieza a ahorrar a los 40. [Moraleja: ¡Nunca es demasiado pronto para empezar a ahorrar!]

Exploración con TECNOLOGÍA

Remítase al problema del recuadro anterior de Explore y analice.

1. Demuestre que si $R = 4000$ e $i = 0.1$, entonces $S = 44{,}000\,[(1.1)^n - 1]$. Utilizando una herramienta de graficación, trace la gráfica de $f(x) = 44{,}000[(1.1)^x - 1]$, utilizando la ventana de visualización $[0, 40] \times [0, 1{,}200{,}000]$.
2. Compruebe los resultados de la parte 1, mediante la evaluación de $f(35)$, $f(30)$ y $f(25)$ utilizando la función EVAL.

Valor presente de una anualidad

En ciertos casos, puede que desee determinar el valor presente de P de una serie de pagos periódicos iguales que se realizará durante un periodo de tiempo determinado. Después de cada pago, el nuevo saldo continúa ganando intereses a una tasa nominal. La cantidad P se conoce como el valor presente de una anualidad.

Obtener una fórmula para determinar el valor presente P de una anualidad, se puede argumentar de la siguiente manera. La cantidad P invertida ahora y que genera intereses a la tasa i por periodo tendrá un valor acumulado de $P(1+i)^n$ al final de n periodos. Pero esto debe ser igual al valor futuro de la anualidad S dada por la fórmula (9). Por tanto, igualando ambas expresiones, tenemos

$$P(1+i)^n = R\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right]$$

Al multiplicar ambos lados de esta ecuación por $(1+i)^{-n}$ da

$$\begin{aligned} P = R(1+i)^{-n} &= \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right] \\ &= R\left[\frac{(1+i)^n(1+i)^{-n} - (1+i)^{-n}}{i}\right] \qquad (1+i)^n(1+i)^{-n} = 1 \\ &= R\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right] \\ &= Ra_{\overline{n}|i} \end{aligned}$$

donde el factor $a_{\overline{n}|i}$ (léase "*a* ángulo *n* en *i*") representa la expresión entre corchetes. Se han construido tablas extensas que dan valores de $a_{\overline{n}|i}$ para diferentes valores de i y de n (vea la tabla 1 en el sitio web del libro).

Valor presente de una anualidad

El **valor presente P de una anualidad** consistente de n pagos de R dólares cada uno, pagados al final de cada periodo de inversión en una cuenta que gana intereses a la tasa i por periodo, es

$$P = R\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right] \tag{11}$$

EJEMPLO 2 Calcule el valor presente de una anualidad ordinaria que consiste de 24 pagos mensuales de $100 cada uno y que gana intereses a 9% anual compuesto mensualmente.

Solución En este caso, $R = 100$, $i = \frac{r}{m} = \frac{0.09}{12} = 0.0075$ y $n = 24$, así que por la fórmula (1) tenemos

$$\begin{aligned} P &= \frac{100[1-(1.0075)^{-24}]}{0.0075} \\ &\approx 2188.91 \end{aligned}$$

o $2188.91. El mismo resultado se puede obtener al utilizar la tabla 1 del sitio web del libro. Por tanto,

$$\begin{aligned} P &= 100a_{\overline{24}|0.0075} \\ &= 100(21.8891) \\ &= 2188.91 \end{aligned}$$

■

EJEMPLO DE APLICACIÓN 3 Ahorro para una carrera universitaria Como un programa de ahorro para la educación universitaria de Alberto, sus padres deciden depositar \$100 al final de cada mes en una cuenta bancaria que paga intereses a una tasa de 6% anual compuesto mensualmente. Si el programa de ahorro comenzó cuando Alberto tenía 6 años, ¿cuánto dinero habrán acumulado cuando cumpla 18 años?

Solución En el momento que el niño cumpla 18 años, sus padres habrán hecho 144 depósitos en la cuenta. Por tanto, $n = 144$. Además, tenemos $R = 100$, $r = 0.06$ y $m = 12$, así que $i = \frac{0.06}{12} = 0.005$. Utilizando la ecuación (9), encontramos que la cantidad de dinero que han acumulado está dada por

$$\begin{aligned} S &= \frac{100(1.005)^{144} - 1}{0.005} \\ &\approx 21{,}015 \end{aligned}$$

o \$21,015. ■

EJEMPLO DE APLICACIÓN 4 Financiamiento de un automóvil Después de hacer un pago inicial de \$4000 para un automóvil, Murphy pagó \$400 por mes durante 36 meses a 12% anual compuesto mensualmente sobre el saldo insoluto. ¿Cuál fue el costo original del automóvil? ¿Qué parte del total de los pagos del automóvil de Murphy se dedicó a cargos de intereses?

Solución El préstamo obtenido por Murphy es el valor presente de la anualidad

$$\begin{aligned} P &= \frac{400[1 - (1.01)^{-36}]}{0.01} = 400a_{\overline{36|}0.01} \\ &\approx 12{,}043 \end{aligned}$$

o \$12,043. Por tanto, el costo original del automóvil es \$16,043 (\$12,043 más los \$4,000 de pago inicial). Los cargos por intereses pagados por Murphy están dados por (36)(400) – 12,043 o \$2,357. ■

Una aplicación importante de las anualidades se plantea en el ámbito de la planeación fiscal. Durante la década de 1980, el Congreso estadounidense creó muchos planes de ahorro para el retiro fiscalmente blindados, tales como cuentas individuales de retiro, planes Keogh y la pensión simplificada del empleado. Estos planes son ejemplos de las anualidades en que se permite al individuo hacer aportaciones (que a menudo son deducibles de impuestos) a una cuenta de inversión. El importe de la aportación está limitada por la legislación del Congreso. Los impuestos sobre las aportaciones o los intereses acumulados en estas cuentas son diferidos hasta que el dinero se retira, idealmente durante el retiro, cuando su categoría tributaria debe ser inferior. En el periodo intermedio, el individuo tiene el beneficio de que la exención de impuestos hace crecer su inversión.

Suponga, por ejemplo, que usted es elegible para hacer una aportación totalmente deducible a una cuenta individual de retiro y se calcule en una categoría tributaria marginal de 28%. Además, suponga que usted recibe un bono de fin de año por \$2000 de su empleador y tiene la opción de depositarlos, ya sea en su cuenta individual de retiro o en una cuenta normal de ahorros, donde ambas cuentas generan intereses a una tasa anual efectiva de 8% anual. Si usted decide invertir su bono en una cuenta de ahorro, primero tendrá que pagar impuestos sobre los \$2000, dejando \$1440 para invertir. Al final de un año, también tendrá que pagar impuestos sobre los intereses devengados, dejándole con

Cantidad acumulada	–	Impuesto sobre los intereses	=	Importe neto
1555.20	–	32.26	=	1522.94

o $1522.94.

Por otro lado, si usted deposita el dinero en su cuenta individual de retiro, la suma total ganará intereses y al final de 1 año tendrá (1.08)($2000), o $2160, en su cuenta. Por supuesto, todavía tiene que pagar impuestos sobre este dinero cuando lo retire, pero ha ganado la ventaja del crecimiento libre de impuestos del gran capital al paso de los años. La desventaja de esta opción es que si usted retira el dinero antes de llegar a la edad de 59½ años, tendrá que pagar los impuestos tanto de sus aportaciones como de los intereses devengados, además de que deberá pagar una multa de 10%, según las leyes estadounidenses.

Nota En la práctica, el tamaño de las aportaciones que un individuo puede hacer a los diversos planes de retiro pueden variar de un año a otro. Además, él o ella puede hacer aportaciones a diferentes plazos de pago. Para simplificar nuestro análisis, consideraremos ejemplos con pagos fijos a intervalos regulares. ■

EJEMPLO DE APLICACIÓN 5 **Cuenta individual de retiro** Caroline tiene previsto hacer una aportación de $2000 el 31 de enero de cada año en una cuenta individual de retiro que gana intereses a una tasa efectiva de 9% anual. Después de que realiza el 25o pago el 31 de enero del año siguiente a su retiro, ¿cuánto tiene en su cuenta individual de retiro?

Solución La cantidad de dinero que Caroline tendrá después de su 25º pago en su cuenta se calcula utilizando la ecuación (9) $R = 2000$, $r = 0.09$, $m = 1$ y $t = 25$, de modo que $i = \frac{r}{m} = 0.09$ y $n = mt = 25$. La cantidad buscada está dada por

$$S = \frac{2000\left[(1.09)^{25} - 1\right]}{0.09}$$

$$\approx 169{,}401.79$$

o $169,401.79. ■

Las anualidades diferidas después de impuestos son otro tipo de inversión que permite a un individuo construir activos para su retiro, fondos para la universidad u otras necesidades futuras. La ventaja adquirida en este tipo de inversión es que el impuesto sobre los intereses acumulados se aplaza a una fecha posterior. Tenga en cuenta que en este tipo de inversión no son deducibles de impuestos las aportaciones en sí. A primera vista, la ventaja obtenida puede parecer relativamente insignificante, pero su efecto real se ilustra en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO DE APLICACIÓN 6 **Análisis de inversiones** Tanto Clark como Colby son individuos asalariados de 45 años de edad, que ahorran para su retiro dentro de 20 años. Ambos también están en la categoría tributaria marginal de 28%. Clark hace una aportación de $1000 anual el 31 de diciembre en una cuenta de ahorro ganando una tasa efectiva de 8% anual. Al mismo tiempo, Colby hace un pago de $1000 anuales a una compañía de seguros para una anualidad diferida después de impuestos. La anualidad también gana intereses a una tasa efectiva de 8% anual. (Suponga que ambos hombres permanecen en la misma categoría tributaria durante este periodo, e ignore los impuestos estatales al ingreso.)

a. Calcule la cantidad que cada hombre tendrá en su cuenta de inversión al final de 20 años.

b. Calcule los intereses devengados por cada cuenta.

c. Demuestre que incluso si el interés en la inversión de Colby fuera gravado con un impuesto de 28% al retiro de su inversión, al final de 20 años el importe neto acumulado de su inversión seguiría siendo mayor que el de Clark.

Solución

a. Debido a que Clark está en la categoría tributaria marginal de 28%, el rendimiento neto de su inversión es (0.72)(8), o 5.76% anual.

Utilizando la fórmula (9) con $R = 1000$, $r = 0.0576$, $m = 1$ y $t = 20$, de modo que $i = 0.0576$ y $n = mt = 20$, se ve que la inversión de Clark tendrá un valor de

$$S = \frac{1000\left[(1 + 0.0576)^{20} - 1\right]}{0.0576} \approx 35{,}850.49$$

o $35,850.49 a su retiro.

Colby tiene una inversión blindada fiscalmente con un rendimiento efectivo de 8% anual. Utilizando la fórmula (9) $R = 1000$, $r = 0.08$, $m = 1$ y $t = 20$, de modo que $i = 0.08$ y $n = mt = 20$, vemos que la inversión de Colby tendrá un valor de

$$S = \frac{1000\left[(1 + 0.08)^{20} - 1\right]}{0.08} \approx 45{,}761.96$$

o $45,761.96 a su retiro.

b. Cada uno de ellos ha pagado 20(1000), o $20,000, en su cuenta. Por tanto, el total de intereses devengados en la cuenta de Clark serán (35,850.49 – 20,000), o $15,850.49, mientras que el total de intereses devengados en la cuenta de Colby será (45,761.96 – 20,000), o $25,761.96.

c. Desde la parte (b) vemos que el total de intereses devengados en la cuenta de Colby será de $25,761.96. Si estuviesen gravadas al 28%, todavía acabaría con (0.72)(25,761.96), o $18,548.61. Esto es mayor que el interés total de $15,850.49 ganado por Clark. ■

4.2 Ejercicios de autoevaluación

1. Phyliss abrió una cuenta individual de retiro el 31 de enero de 1993, con una aportación de $2000. Ella planea hacer una aportación de $2000 a partir de entonces el 31 de enero de cada año hasta su retiro en 2012 (20 pagos). Si la cuenta genera intereses a una tasa de 8% anual compuesto anualmente, ¿cuánto tendrá Phyliss en su cuenta cuando se jubile?

2. Denver Wildcatting Company tiene una necesidad inmediata de un préstamo. En un acuerdo con su banquero, Denver asigna sus ingresos de $4800 mensuales por regalías de ciertas propiedades petroleras durante los próximos 3 años a los bancos, con el primer pago al final del primer mes. Si el banco cobra intereses a la tasa de 9% anual compuesto mensualmente, ¿cuál es el importe del préstamo negociado entre las partes?

Las soluciones de los ejercicios de autoevaluación 4.2 se pueden encontrar en la página 212.

4.2 Preguntas de concepto

1. En una anualidad ordinaria, ¿el plazo es fijo o variable? ¿Los pagos periódicos son todos del mismo tamaño o varían? ¿Los pagos se efectúan al principio o al final del periodo de pago? ¿Los periodos de pago coinciden con los periodos de conversión del interés?

2. ¿Cuál es la diferencia entre una anualidad ordinaria y una anualidad anticipada?

3. ¿Cuál es el valor futuro de una anualidad? Dé un ejemplo.

4. ¿Cuál es el valor presente de una anualidad? Dé un ejemplo.

4.2 Ejercicios

En los ejercicios 1 a 8 calcule la cantidad (valor futuro) de cada anualidad ordinaria.

1. $1000 anual durante 10 años a 10% anual compuesto anualmente
2. $1500 por semestre durante 8 años a 9% anual compuesto semestralmente
3. $1800 por trimestre durante 6 años a 8% anual compuesto trimestralmente
4. $500 por semestre durante 12 años a 11% anual compuesto semestralmente
5. $600 por trimestre durante 9 años a 12% anual compuesto trimestralmente
6. $150 por mes durante 15 años a 10% anual compuesto mensualmente
7. $200 por mes durante $20\frac{1}{4}$ años a 9% anual compuesto mensualmente
8. $100 por semana durante $7\frac{1}{2}$ años a 7.5% anual compuesto semanalmente

En los ejercicios 9 a 14 calcule el valor presente de cada anualidad ordinaria.

9. $5000 por año durante 8 años a 8% anual compuesto anualmente
10. $1200 por semestre durante 6 años a 10% anual compuesto semestralmente
11. $4000 por año durante 5 años a 9% anual compuesto anualmente
12. $3000 por semestre durante 6 años a 11% anual compuesto semestralmente
13. $800 por trimestre durante 7 años a 12% anual compuesto trimestralmente
14. $150 por mes durante 10 años a 8% anual compuesto mensualmente
15. **Cuenta individual de retiro** Si un comerciante deposita $1500 al final de cada año fiscal en una cuenta individual de retiro que paga intereses a una tasa de 8% anual compuesta anualmente, ¿cuánto tendrá en su cuenta al final de 25 años?
16. **Cuentas de ahorro** Si Jackson deposita $100 al final de cada mes en una cuenta de ahorros que paga intereses a una tasa de 8% anual compuesta mensualmente, ¿cuánto tendrá depositado en su cuenta de ahorros al final de 6 años, suponiendo que no hace retiros durante ese periodo?
17. **Cuentas de ahorro** Linda ha reunido un "Fondo del Club de Navidad" en su banco. Al final de cada mes, de diciembre a octubre inclusive, hará un depósito de $40 en su fondo. Si el dinero genera intereses a una tasa de 7% anual compuesta mensualmente, ¿cuánto tendrá en su cuenta el 1 de diciembre del año siguiente?
18. **Cuentas Keogh** Robin, que trabaja por cuenta propia, aporta $5000 por año a una cuenta Keogh. ¿Cuánto tendrá en la cuenta después de 25 años si la cuenta genera intereses a una tasa de 8.5% anual compuesta anualmente?
19. **Planeación de retiro** Como un beneficio adicional para los últimos 12 años, el empleador de Colin ha aportado $100 al final de cada mes en una cuenta de retiro de empleados para Colin que paga intereses a una tasa de 7% anual compuesta mensualmente. Colin también ha aportado $2000 al final de cada uno de los últimos 8 años en una cuenta individual de retiro que paga intereses a una tasa de 9% anual compuesta anualmente. ¿Cuánto tiene Colin en su fondo de retiro en este momento?
20. **Cuentas de ahorro** Los Pirerra planean viajar a Europa en 3 años a partir de ahora y han acordado destinar $150 mensuales para su viaje. Si depositan el dinero al final de cada mes en una cuenta de ahorros que paga intereses a una tasa de 8% anual compuesta mensualmente, ¿cuánto dinero habrá en su fondo de viaje al final del tercer año?
21. **Análisis de inversiones** Karen ha depositado $150 al final de cada mes en una cuenta de retiro libre de impuestos desde que tenía 25 años. Matt, que tiene la misma edad que Karen, comenzó a depositar $250 al final de cada mes en una cuenta de retiro libre de impuestos cuando tenía 35 años. Suponiendo que ambas cuentas han generado y seguirán generando intereses a una tasa de 5% anual compuesta mensualmente, ¿quién terminará con la cuenta de retiro más grande a la edad de 65 años?
22. **Análisis de inversiones** Luis tiene $150,000 en su cuenta de retiro en su empresa actual. Debido a que está asumiendo una posición en otra empresa, tiene la intención de cambiar sus activos a una nueva cuenta. Luis también planea depositar $3000 cada trimestre en la nueva cuenta hasta su retiro dentro de 20 años. Si la cuenta genera intereses a una tasa de 8% anual compuesta trimestralmente, ¿cuánto tendrá Luis en su cuenta en el momento de su retiro?
    Sugerencia: Utilice la fórmula de interés compuesto y la fórmula de anualidad.
23. **Arrendamiento de automóviles** Los Betze han alquilado un automóvil por 2 años a $450 por mes. Si el dinero tiene un valor de 9% anual compuesto mensualmente, ¿cuál es el pago equivalente en efectivo (valor presente) de esta anualidad?
24. **Financiamiento de automóviles** Lupé hizo un pago inicial de $4000 para la compra de un automóvil nuevo. Para pagar el saldo, ha obtenido un préstamo de su banco a una tasa de 12% anual con capitalización mensual. Bajo los términos de su convenio de financiamiento, está obligada a hacer pagos de $420 cada mes durante 36 meses. ¿Cuál es el precio al contado del automóvil?
25. **Planes de plazos** Mike's Sporting Goods vende ejercitadoras elípticas en dos planes de pago: al contado o a plazos. En el plan a plazos, el cliente paga $22 por mes durante 3 años a una tasa de 18% anual compuesta mensualmente. Calcule el precio al contado de una ejercitadora elíptica si es equivalente al precio pagado por un cliente con el plan a plazos.
26. **Pagos de lotería** Una comisión de la lotería estatal entrega al ganador de la lotería "Million Dollar" 20 pagos de $50,000 por año. La comisión hace el primer pago de $50,000 de inmediato y los otros $n = 19$ pagos al final de cada uno de los próximos 19 años. Determine cuánto dinero debe tener la comisión en el banco inicialmente para garantizar los pagos, en el supuesto de que el saldo en depósito en el banco gana intereses a una tasa de 8% anual compuesta anualmente.
    Sugerencia: Calcule el valor presente de una anualidad.

27. **Compra de una casa** Los Johnson tienen acumulado un ahorro de \$40,000 que quieren utilizar como pago inicial para la compra de una casa nueva. Debido a que su ingreso bruto actual está colocado en un categoría tributaria relativamente alta, han decidido invertir un mínimo de \$2400 por mes en pagos mensuales (para aprovechar la deducción de impuestos) para la compra de su casa. Sin embargo, debido a otras obligaciones financieras, sus pagos mensuales no deben exceder los \$3000. Si las tasas hipotecarias locales son de 7.5% anual compuesto mensualmente para una hipoteca convencional a 30 años, ¿cuál es el rango de precios de casas que deben considerar?

28. **Compra de una casa** Remítase al ejercicio 27. Si las tasas hipotecarias locales se incrementaron al 8%, ¿cómo afectaría esto a la gama de precios de las casas que los Johnson deberían considerar?

29. **Compra de una casa** Remítase al ejercicio 27. Si los Johnson deciden obtener una hipoteca a 15 años en lugar de una a 30 años, ¿cuál es el rango de precios de las casas que deben tener en cuenta cuando la tasa hipotecaria local para este tipo de préstamo es de 7%?

30. **Plan de ahorro** Lauren planea depositar \$5000 en una cuenta bancaria a principios del próximo mes y \$200 por mes en la misma cuenta al final de ese mes y al final de cada mes siguiente durante los próximos 5 años. Si su banco paga intereses a una tasa de 6% anual compuesta mensualmente, ¿cuánto tendrá Lauren en su cuenta al final de 5 años? (Suponga que no hace retiros durante el periodo de 5 años).

31. **Planeación financiera** Joe planea depositar \$200 al final de cada mes en una cuenta bancaria por un periodo de dos años, después de lo cual planea depositar \$300 al final de cada mes en la misma cuenta durante otros 3 años. Si el banco paga intereses a una tasa de 6% anual compuesta mensualmente, ¿cuánto tendrá Joe en su cuenta al final de 5 años? (Suponga que no hace retiros durante el periodo de 5 años.)

32. **Análisis de la inversión** Desde los 25 hasta los 40 años, Jessica depositó \$200 al final de cada mes en una cuenta de retiro libre de impuestos. No hizo retiros o más aportaciones hasta la edad de 65 años. Alex hizo depósitos de \$300 en su cuenta de retiro libre de impuestos desde los 40 hasta los 65 años de edad. Si ambas cuentas devengaron intereses a una tasa de 5% anual compuesta mensualmente, ¿quién terminará con el ahorro más grande al llegar a la edad de 65 años?
Sugerencia: utilice tanto la fórmula de anualidad como la fórmula de interés compuesto.

En los ejercicios 33 y 34 determine si la afirmación es verdadera o falsa. Si es verdadera, explique por qué lo es. Si es falsa, dé un ejemplo para demostrar por qué lo es.

33. El valor futuro de una anualidad se puede calcular mediante la suma de todos los pagos que se abonarán en la cuenta.

34. Si el valor futuro de una anualidad que consiste de n pagos de R dólares cada uno (pagado al final de cada periodo de inversión en una cuenta que devenga intereses a la tasa i por periodo) es S dólares, entonces
$$R = \frac{iS}{(1+i)^n - 1}$$

4.2 Soluciones de los ejercicios de autoevaluación

1. La cantidad que Phyliss tendrá en su cuenta cuando se jubile se puede calcular utilizando la fórmula (9) con $R = 2000$, $r = 0.08$, $m = 1$ y $t = 20$, de modo que $i = r = 0.08$ y $n = mt = 20$. Por tanto,
$$S = \frac{2000[(1.08)^{20} - 1]}{0.08} \approx 91{,}523.93$$
o \$91,523.93.

2. Se quiere determinar el valor presente de una anualidad ordinaria que consiste en 36 pagos mensuales de \$4800 cada uno y ganando un interés de 9% anual compuesto mensualmente. Utilizando la fórmula (11) con $R = 4800$, $m = 12$ y $t = 3$, por lo que $i = \frac{r}{m} = \frac{0.09}{12} = 0.0075$ y $n = (12)(3) = 36$, encontramos
$$P = \frac{4800[1 - (1.0075)^{-36}]}{0.0075} \approx 150{,}944.67$$
o \$150,944.67, el monto del préstamo negociado.

USO DE LA TECNOLOGÍA

Cálculo del monto de una anualidad

Calculadora graficadora

Como se mencionó en la sección de Uso de la tecnología en la sección 4.1, la TI-83/84 puede facilitar la solución de problemas en finanzas. Seguimos aprovechando su versatilidad.

EJEMPLO 1 Calcular el valor futuro de una anualidad Calcule el monto de una anualidad ordinaria de 36 pagos trimestrales de \$220 cada uno, que generan intereses a una tasa de 10% anual compuesto trimestralmente.

Solución Usamos **TVM SOLVER** de la TI-83/84 con las siguientes entradas:

N = 36
1% = 10
PV = 0
PMT = −220 *Recuerde que un pago es un desembolso.*
FV = 0
P/Y = 4 *El número de pagos cada año*
C/Y = 4 *El número de periodos de conversión de cada año*
PMT:END BEGIN

El resultado está desplegado en la figura T1. Deducimos que la cantidad deseada es $12,606.31.

```
N      = 36
I%     = 10
PV     = 0
PMT    = –220
FV     = 12606.31078
P/Y    = 4
C/Y    = 4
PMT : END     BEGIN
```

FIGURA T1
La pantalla de la TI-83/84 que muestra el valor futuro (FV) de una anualidad.

■

EJEMPLO 2 Calcular el valor presente de una anualidad Calcule el valor presente de una anualidad ordinaria que consiste en 48 pagos mensuales de $300 cada uno y gana intereses a una tasa de 9% anual compuesta mensualmente.

Solución Usamos el **TVM SOLVER** de la TI-83/84 con las siguientes entradas:

N = 48
1% = 9
PV = 0
PMT = −300 *Un pago es un desembolso.*
FV = 0
P/Y = 12 *El número de pagos cada año*
N/C = 12 *El número de periodos de conversión de cada año*
PMT:END BEGIN

El resultado se muestra en la figura T2. Vemos que el valor presente requerido de la anualidad es de $12,055.43.

```
N      = 48
I%     = 9
PV     = 12055.43457
PMT    = –300
FV     = 0
P/Y    = 12
C/Y    = 12
PMT : END     BEGIN
```

FIGURA T2
La pantalla de la TI-83/84 que muestra el valor presente (PV) de una anualidad ordinaria.

■

Excel

Ahora se muestra cómo Excel se puede utilizar para resolver los problemas financieros que involucran anualidades.

EJEMPLO 3 Calcular el valor futuro de una anualidad Calcule el monto de una anualidad ordinaria de 36 pagos trimestrales de $220 cada uno, que genera intereses a la tasa de 10% anual compuesta trimestralmente.

(*continúa*)

Solución Aquí estamos calculando el valor futuro de una serie de pagos iguales, así que usamos la función FV (valor futuro). Al igual que antes, tenemos acceso al cuadro de diálogo Insert Function para obtener el cuadro de diálogo Function Arguments. Después de realizar cada una de las entradas necesarias, se obtiene el cuadro de diálogo que se muestra en la figura T3.

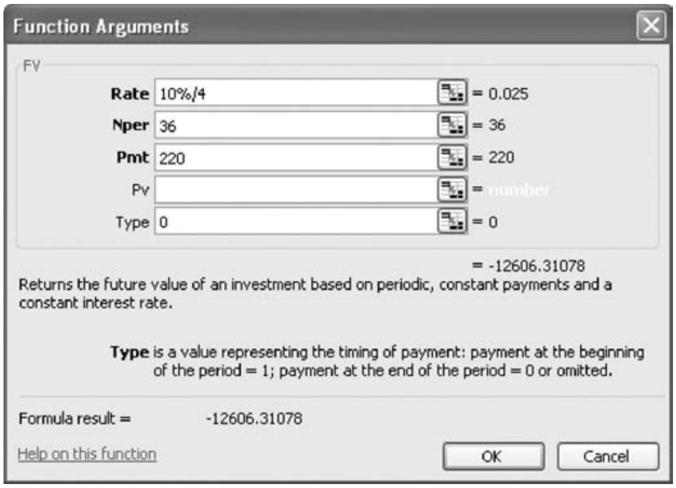


FIGURA **T3**
Cuadro de diálogo de Excel para el valor futuro (FV) de una anualidad.

Tenga en cuenta que se introdujo un 0 en el cuadro de edición Type porque los pagos se hacen al final de cada periodo de pago. Una vez más, la respuesta es negativa porque el efectivo es pagado. Deducimos que la cantidad deseada es de $12,606.31. ■

EJEMPLO 4: Calcular el valor presente de una anualidad Calcule el valor presente de una anualidad ordinaria que consiste en 48 pagos mensuales de $300 cada uno y gana intereses a una tasa de 9% anual compuesta mensualmente.

Solución Aquí utilizamos la función PV para calcular el valor presente de una anualidad. Al tener acceso a la función PV (valor actual) desde el cuadro de diálogo Insert Function y realizar las entradas necesarias, se obtiene el cuadro de diálogo PV que se muestra en la figura T4. Vemos que el valor presente requerido de la anualidad es de $12,055.43.

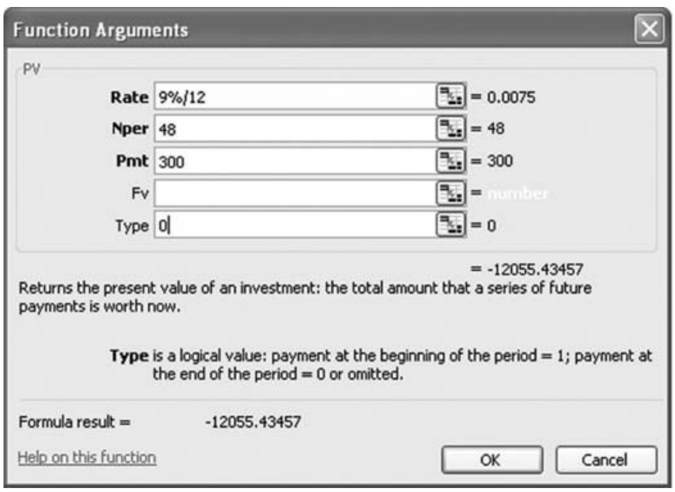


FIGURA **T4**
Cuadro de diálogo de Excel para calcular el valor presente (PV) de una anualidad.

■

Nota: Las palabras y los caracteres en negrita y encerrados en un recuadro (por ejemplo, **Enter**) indican que se requiere una acción (*clic*, seleccionar o presionar). Las palabras y los caracteres impresos en azul (por ejemplo, Chart sub-type:) indican palabras y caracteres que aparecen en la pantalla.

EJERCICIOS CON TECNOLOGÍA

1. Calcule el monto de una anualidad ordinaria de 20 pagos de $2500 por trimestre a $7\frac{1}{4}\%$ anual compuesto trimestralmente.
2. Calcule el monto de una anualidad ordinaria de 24 de pagos de $1790 por trimestre a $8\frac{3}{4}\%$ anual compuesto trimestralmente.
3. Calcule el monto de una anualidad ordinaria de $120 por mes durante 5 años a $6\frac{3}{8}\%$ anual compuesto mensualmente.
4. Calcule el monto de una anualidad ordinaria de $225 por mes durante 6 años a $7\frac{5}{8}\%$ anual compuesto mensualmente.
5. Calcule el valor presente de una anualidad ordinaria de $4500 por semestre durante 5 años ganando intereses por 9% anual compuesto semestralmente.
6. Calcule el valor presente de una anualidad ordinaria de $2100 por trimestre durante 7 años ganando intereses a $7\frac{1}{8}\%$ anual compuesto trimestralmente.
7. Calcule el valor presente de una anualidad ordinaria de $245 por mes durante 6 años ganando intereses a $8\frac{3}{8}\%$ anual compuesto mensualmente.
8. Calcule el valor presente de una anualidad ordinaria de $185 por mes durante 12 años ganando intereses al $6\frac{5}{8}\%$ anual compuesto mensualmente.
9. **ANUALIDADES** En el momento del retiro, Christine espera tener una suma de $500,000 en su cuenta de retiro. Suponiendo que la cuenta paga intereses a una tasa de 5% anual compuesta en forma continua, su contador le indicó que si ella hacía retiros por valor de x dólares por año ($x > 25{,}000$), entonces el tiempo necesario para agotar sus ahorros sería T años, donde

$$T = f(x) = 20 \ln\left(\frac{x}{x - 25{,}000}\right) \qquad (x > 25{,}000)$$

   a. Trace la gráfica de f, utilizando la ventana de visualización $[25{,}000, 50{,}000] \times [0, 100]$.
   b. ¿Cuánto debe planear retirar Christine de su cuenta de retiro cada año si quiere que le dure 25 años?

4.3 Amortización y fondos de amortización

Amortización de préstamos

Las fórmulas de anualidades derivadas en la sección 4.2 se puede utilizar para responder a cuestiones relacionadas con la amortización de ciertos tipos de préstamos a plazos. Por ejemplo, en un préstamo de vivienda típico, el deudor hace pagos periódicos para reducir su deuda con el prestamista, que cobra intereses a una tasa fija sobre el saldo de la deuda. En la práctica, el prestatario está obligado a devolver al prestamista en cuotas periódicas, generalmente del mismo monto y en un plazo fijo, por lo que el préstamo (capital más los cargos por intereses) se amortiza al final del plazo.

Al pensar en R pagos mensuales del préstamo como los pagos en una anualidad, se ve que el monto original del préstamo es determinado por P, el valor presente de la anualidad. De la ecuación (11), de la sección 4.2, tenemos

$$P = R\left[\frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i}\right] = Ra_{\overline{n}|i} \tag{12}$$

Una pregunta que podría plantear un financiero es: ¿Cuánto debe ser el pago mensual para que un préstamo se amortice al final del plazo del préstamo? Para responder a esta pregunta, simplemente resolvemos (12) para R en términos de P, obteniendo

$$R = \frac{Pi}{1 - (1 + i)^{-n}} = \frac{P}{a_{\overline{n}|i}}$$

Fórmula de amortización

El pago periódico R sobre un préstamo de P dólares para ser amortizado en n periodos con un cargo por intereses a la tasa i por periodo es

$$R = \frac{Pi}{1 - (1 + i)^{-n}} \tag{13}$$

EJEMPLO DE APLICACIÓN 1 Plan de amortización Una suma de $50,000 debe ser reembolsada en un periodo de 5 años mediante cuotas iguales al final de cada año. Si se cobra una tasa de interés de 8% anual sobre el saldo insoluto y el cálculo de los intereses se hace al final de cada año, determine el monto de cada pago para que el préstamo (el capital más los cargos por intereses) se amortice al final de 5 años. Verifique el resultado mostrando el plan de amortización.

Solución Al sustituir $P = 50{,}000$, $i = r = 0.08$ (en este caso, $m = 1$) y $n = 5$ en la fórmula (13), obtenemos

$$R = \frac{(50{,}000)(0.08)}{1 - (1.08)^{-5}} \approx 12{,}522.82$$

dando la cuota anual requerida de $12,522.82.

El plan de amortización se presenta en la tabla 3. El capital pendiente de pago al final de 5 años es, por supuesto, cero. (La cifra de $0.01 en la tabla 3 es resultado de los errores de redondeo.) Observe que, inicialmente, la mayor porción del reembolso se destina al pago de los cargos por interés, pero a medida que pasa el tiempo cada vez más el pago se destina al reembolso del capital.

TABLA **3**

Una tabla de amortización

Final del periodo	Cargo por interés	Reembolso realizado	Pago destinado al capital	Capital pendiente de pago
0	—	—	—	$50,000.00
1	$4,000.00	$12,522.82	$ 8,522.82	41,477.18
2	3,318.17	12,522.82	9,204.65	32,272.53
3	2,581.80	12,522.82	9,941.02	22,331.51
4	1,786.52	12,522.82	10,736.30	11,595.21
5	927.62	12,522.82	11,595.20	0.01

Financiamiento de una casa

EJEMPLO DE APLICACIÓN 2 Pagos de una hipoteca Los Blakely obtuvieron un préstamo de $120,000 de un banco para ayudar a financiar la compra de una casa. El banco le cobró intereses a una tasa de 9% anual sobre el saldo insoluto, con el cálculo de intereses realizado al final de cada mes. Los Blakely han acordado pagar el préstamo en cuotas mensuales iguales durante 30 años. ¿De cuánto debería ser cada pago si el préstamo se amortizará al final del término?

Solución Aquí, $P = 120{,}000$, $i = \frac{r}{m} = \frac{0.09}{12} = 0.0075$ y $n = (30)(12) = 360$. Al utilizar la fórmula (13) se encuentra que el pago mensual requerido está dado por

$$R = \frac{(120{,}000)(0.0075)}{1 - (1.0075)^{-360}}$$
$$\approx 965.55$$

o $965.55.

EJEMPLO DE APLICACIÓN 3 **Valor de una casa** Teresa y Raúl compraron una casa hace 10 años por \$200,000. Hicieron un pago inicial de 20% del precio de compra y obtuvieron una hipoteca convencional por 30 años al 9% anual sobre el saldo insoluto. La casa tiene ahora un valor de \$380,000. ¿A cuánto asciende el patrimonio que tienen ahora Teresa y Raúl en su casa (después de haber hecho 120 pagos mensuales)?

Solución Puesto que el pago inicial fue de 20%, sabemos que obtuvieron un préstamo de 80% de \$200,000, es decir \$160,000. Además, utilizando la fórmula (13) con $P = 160{,}000$, $i = \frac{r}{m} = \frac{0.09}{12} = 0.0075$ y $n = (30)(12) = 360$, se determina que su cuota mensual es

$$\begin{aligned} R &= \frac{(160{,}000)(0.0075)}{1 - (1.0075)^{-360}} \\ &\approx 1287.40 \end{aligned}$$

o \$1287.40.

Después de haber hecho 120 pagos mensuales, el capital pendiente de pago está dado por la suma de los valores actuales de las cuotas remanentes (es decir, $360 - 120 = 240$ cuotas). Sin embargo, esta suma es sólo el valor presente de una anualidad con $n = 240$, $R = 1287.40$ e $i = 0.0075$. Utilizando la fórmula (11), encontramos

$$\begin{aligned} P &= 1287.40\left[\frac{1 - (1 + 0.0075)^{-240}}{0.0075}\right] \\ &\approx 143{,}088.01 \end{aligned}$$

o aproximadamente \$143,088. Por tanto, Teresa y Raúl tienen un capital de 380,000 – 143,088, es decir, \$236,912. ■

Explore y analice con tecnología

1. Tenga en cuenta la fórmula (13) de la amortización:

$$R = \frac{Pi}{1 - (1 + i)^{-n}}$$

Suponga que conoce los valores de R, P y n y desea determinar i. Explique cómo puede lograr esta tarea encontrando el punto de intersección de las gráficas de las funciones

$$y_1 = R \quad \text{y} \quad y_2 = \frac{Pi}{1 - (1 + i)^{-n}}$$

2. Thalía sabe que el reembolso mensual en su préstamo hipotecario convencional a 30 años de \$150,000 es de \$1100.65 al mes. Ayude a Thalía a determinar la tasa de interés de su préstamo mediante la verificación o la ejecución de los siguientes pasos:

a. Trace las gráficas de

$$y_1 = 1100.65 \quad \text{y} \quad y_2 = \frac{150{,}000x}{1 - (1 + x)^{-360}}$$

utilizando la ventana de visualización $[0, 0.01] \times [0, 1200]$.

b. Utilice la función ISECT (intersección) de la herramienta gráfica para encontrar el punto de intersección de las gráficas del inciso (a). Explique por qué esto proporciona el valor de i.

c. Calcule r de la relación $r = 12i$.

Explore y analice con tecnología

1. Suponga que obtiene un préstamo hipotecario de $\$P$ con una tasa de interés r anual que se amortiza a lo largo de t años mediante pagos mensuales de $\$R$. Demuestre que, después de N pagos, el capital pendiente de pago es el proporcionado por

$$B(N) = P\left[\frac{(1+i)^n - (1+i)^N}{(1+i)^n - 1}\right] \qquad (0 \le N \le n)$$

Sugerencia: $B(N) = R\left[\dfrac{1-(1+i)^{-n+N}}{i}\right]$. Para ver esto, estudie el ejemplo 3 de la página 217. Reemplace R utilizando la fórmula (13).

2. Consulte el ejemplo 3, de la página 217. Utilizando el resultado de la parte 1, muestre que el saldo insoluto de Teresa y Raúl después de hacer N pagos es

$$E(N) = \frac{160{,}000\,(1.0075^{360} - 1.0075^N)}{1.0075^{360} - 1} \qquad (0 \le N \le 360)$$

3. Utilizando una calculadora graficadora, trace la gráfica de

$$E(x) = \frac{160{,}000\,(1.0075^{360} - 1.0075^x)}{1.0075^{360} - 1}$$

utilizando la ventana de visualización $[0, 360] \times [0, 160{,}000]$.

4. Remítase a la gráfica en el punto 3, observe que el capital pendiente de pago cae lentamente en los primeros años y acelera rápidamente a cero al final del préstamo. ¿Puede explicar por qué?

5. ¿Cuánto tiempo tardarán Teresa y Raúl para pagar la mitad del préstamo de $160,000?

Sugerencia: Vea la sección previa de Explore y analice con tecnología.

EJEMPLO DE APLICACIÓN 4 Asequibilidad de una casa Los Jackson han determinado que, después de hacer un pago inicial, pueden permitirse hacer pagos mensuales de su casa hasta por $2000. El banco cobra intereses a una tasa de 7.2% anual sobre el saldo insoluto, con el cálculo de intereses realizado al final de cada mes. Si el préstamo se amortizará en cuotas mensuales iguales durante 30 años, ¿cuál es la cantidad máxima que los Jackson pueden pedir prestada al banco?

Solución Aquí, $i = \frac{r}{m} = \frac{0.072}{12} = 0.006$, $n = (30)(12) = 360$ y $R = 2000$; se requiere calcular P. De la ecuación (12), tenemos

$$P = \frac{R[1-(1+i)^{-n}]}{i}$$

Al sustituir los valores numéricos de R, n e i en esta expresión para P, se obtiene

$$P = \frac{2000[1-(1.006)^{-360}]}{0.006} \approx 294{,}643$$

Por tanto, los Jackson pueden pedir prestado un máximo de $294,643. ■

Una hipoteca de tasa ajustable (ARM, por sus siglas en inglés) es un préstamo hipotecario en el que la tasa de interés ha cambiado periódicamente con base en un índice financiero. Por ejemplo, una ARM 5/1 tiene una tasa inicial los primeros 5 años, y posteriormente se ajusta cada año por el plazo restante del préstamo.

EJEMPLO DE APLICACIÓN 5 Hipotecas de tasa ajustable Hace 5 años, los Campbell obtuvieron una ARM 5/1 para ayudar a financiar la compra de su casa. La cantidad del préstamo original fue de $350,000 para un periodo de 30 años, con intereses a una tasa de 5.76% anual compuesta mensualmente. La hipoteca de los Campbell se debe restablecer el próximo mes y la nueva tasa de interés será de 6.96% anual compuesta mensualmente.

a. ¿Cuál fue el pago mensual de la hipoteca de los Campbell durante los primeros 5 años?

b. ¿Cuál será el nuevo pago mensual de la hipoteca de los Campbell (después del reinicio)? ¿Cuánto aumentará el pago mensual?

Solución

a. En primer lugar calculamos el pago mensual de los Campbell en el monto original del préstamo. Utilizando la fórmula (13) con $P = 350{,}000$, $i = \frac{r}{m} = \frac{0.0576}{12}$ y $n = mt = (12)(30) = 360$, encontramos que el pago mensual era

$$R = \frac{350{,}000\left(\frac{0.0576}{12}\right)}{1 - \left(1 + \frac{0.0576}{12}\right)^{-360}} \approx 2044.729$$

o $2044.73 durante los primeros 5 años.

b. Con el fin de calcular el monto del nuevo pago de la hipoteca de los Campbell, primero tenemos que encontrar su capital pendiente de pago, el cual está dado por el valor presente de sus pagos hipotecarios restantes. Utilizando la fórmula (11), con $R = 2044.729$, $i = \frac{r}{m} = \frac{0.0576}{12}$ y $n = mt = 360 - 5(12) = 300$, encontramos que su capital insoluto es

$$P = 2044.729\left[\frac{1 - \left(1 + \frac{0.0576}{12}\right)^{-300}}{\frac{0.0576}{12}}\right] \approx 324{,}709.194$$

o $324,709.19.

A continuación calculamos la cantidad de su nuevo pago de hipoteca para el tiempo restante (300 meses). Utilizando la fórmula (13) con $P = 324{,}709.194$, $i = \frac{r}{m} = \frac{0.0696}{12}$ y $n = mt = 300$, encontramos que el pago mensual es

$$R = \frac{324{,}709.194\left(\frac{0.0696}{12}\right)}{1 - \left(1 + \frac{0.0696}{12}\right)^{-300}} \approx 2286{,}698$$

o $2286.70, un incremento de $241.97. ■

Fondos de amortización

Los fondos de amortización son otra importante aplicación de las fórmulas de la anualidad. En pocas palabras, un **fondo de amortización** es una cuenta que está configurada para un propósito específico en una fecha futura. Por ejemplo, una persona puede establecer un fondo de amortización con el fin de cumplir una deuda en una fecha futura. Una empresa podría establecer un fondo de amortización con el fin de acumular capital suficiente para reemplazar el equipo que se espera que sea obsoleto en una fecha futura.

Al pensar en la cantidad que se acumula en una fecha determinada en el futuro como el valor futuro de una anualidad [ecuación (9), sección 4.2], podemos responder a preguntas sobre una gran clase de problemas de fondo de amortización.

EJEMPLO DE APLICACIÓN 6 Fondo de amortización El propietario de Carson Hardware ha decidido crear un fondo de amortización con el fin de comprar un camión en un plazo de 2 años. Se espera que el camión costará \$30,000. Si el fondo gana 10% de interés anual compuesto trimestralmente, determine el tamaño de cada cuota trimestral igual que el titular debe pagar al fondo. Verifique el resultado mostrando el plan.

Solución El problema en cuestión es encontrar el monto de cada pago trimestral R de una anualidad, ya que su valor futuro es $S = 30{,}000$, los intereses devengados por cada periodo de conversión es $i = \frac{r}{m} = \frac{0.1}{4} = 0.025$ y el número de pagos es $n = (2)(4) = 8$. La fórmula de una anualidad,

$$S = R\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right]$$

cuando resolvemos para R rendimientos

$$R = \frac{iS}{(1+i)^n - 1} \tag{14}$$

o, de manera equivalente,

$$R = \frac{S}{s_{\overline{n}|i}}$$

Al sustituir los valores numéricos apropiados para i, S y n en la ecuación (14), obtenemos el pago trimestral deseado

$$R = \frac{(0.025)(30{,}000)}{(1.025)^8 - 1} \approx 3434.02$$

o \$3434.02. La tabla 4 muestra el plan requerido.

TABLA **4**

Un plan de fondo de amortización

Final del periodo	Depósito efectuado	Intereses devengados	Adición al fondo	Monto acumulado en el fondo
1	\$3,434.02	0	\$3,434.02	\$ 3,434.02
2	3,434.02	\$ 85.85	3,519.87	6,953.89
3	3,434.02	173.85	3,607.87	10,561.76
4	3,434.02	264.04	3,698.06	14,259.82
5	3,434.02	356.50	3,790.52	18,050.34
6	3,434.02	451.26	3,885.28	21,935.62
7	3,434.02	548.39	3,982.41	25,918.03
8	3,434.02	647.95	4,081.97	30,000.00

La fórmula derivada en este último ejemplo se restablece como sigue.

Pago del fondo de amortización

El pago periódico R requerido para acumular una suma de S dólares durante n periodos con un cargo por intereses a la tasa i por periodo es

$$R = \frac{iS}{(1+i)^n - 1} \tag{15}$$

He aquí un resumen de las fórmulas desarrolladas hasta ahora en este capítulo:

1. Interés simple y compuesto; anualidades

Un depósito

Interés simple | Interés compuesto

Depósitos periódicos

Valor futuro de una anualidad | Valor presente de una anualidad

$$A = P(1 + rt) \qquad A = P(1 + i)^n \qquad S = R\left[\frac{(1 + i)^n - 1}{i}\right] \qquad P = R\left[\frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i}\right]$$

$$I = Prt \qquad P = A(1 + i)^{-n}$$

$$A = Pe^{rt}$$ Capitalización continua

$$P = Ae^{-rt}$$ Capitalización continua

2. Tasa de interés efectiva

$$r_{\text{ef}} = \left(1 + \frac{r}{m}\right)^m - 1$$

3. Amortización

$$R = \frac{Pi}{1 - (1 + i)^{-n}}$$ Pago periódico

$$P = R\left[\frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i}\right]$$ Cantidad amortizada

4. Fondo de amortización

$$R = \frac{iS}{(1 + i)^n - 1}$$ Pago periódico realizado

4.3 Ejercicios de autoevaluación

1. Los Mendoza desean un préstamo de $300,000 de un banco para ayudarlos a financiar la compra de una casa. Su banquero ha ofrecido los siguientes planes para su consideración. En el plan I, los Mendoza tienen 30 años para pagar el préstamo en cuotas mensuales pagando un interés sobre el saldo insoluto de 6.09% anual compuesto mensualmente. En el plan II, el préstamo debe ser cubierto en cuotas mensuales durante 15 años pagando un interés sobre el saldo insoluto de 5.76% anual compuesto mensualmente.
 a. Calcule el plazo mensual para cada plan.
 b. ¿Cuál es la diferencia en el total de pagos efectuados en virtud de cada plan?

2. Harris, una persona de 46 años de edad que trabaja por su cuenta, está diseñando un plan de retiro con beneficios definidos. Si desea tener $250,000 en esta cuenta a los 65 años, ¿cuál es el monto de cada cuota anual que tendrá que depositar en una cuenta de ahorros que gana un interés de $8\frac{1}{4}$ % anual?

Las soluciones de los ejercicios de autoevaluación 4.3 se pueden encontrar en la página 225.

4.3 Preguntas de concepto

1. Escriba la fórmula de la amortización.
 a. Si P e i son fijas y n puede aumentar, ¿qué pasará con R?
 b. Interprete el resultado del inciso (a).

2. Utilizando la fórmula para calcular el pago del fondo de amortización, demuestre que si el número de pagos a un fondo de amortización aumenta, entonces el monto de los pagos periódicos en dicho fondo se reducen.

4.3 Ejercicios

En los ejercicios 1 a 8, calcule el pago periódico *R* requerido para amortizar un préstamo de *p* dólares durante *t* años con interés que se cobra a una tasa *r*% anual compuesta *m* veces en un año.

1. $P = 100{,}000$, $r = 8$, $t = 10$, $m = 1$
2. $P = 40{,}000$, $r = 3$, $t = 15$, $m = 2$
3. $P = 5000$, $r = 4$, $t = 3$, $m = 4$
4. $P = 16{,}000$, $r = 9$, $t = 4$, $m = 12$
5. $P = 25{,}000$, $r = 3$, $t = 12$, $m = 4$
6. $P = 80{,}000$, $r = 10.5$, $t = 15$, $m = 12$
7. $P = 80{,}000$, $r = 10.5$, $t = 30$, $m = 12$
8. $P = 100{,}000$, $r = 10.5$, $t = 25$, $m = 12$

En los ejercicios 9 a 14, calcule el pago periódico *R* necesario para acumular una suma de *S* dólares durante *t* años con intereses devengados a la tasa *r*% anual compuesta *m* veces en un año.

9. $S = 20{,}000$, $r = 4$, $t = 6$, $m = 2$
10. $S = 40{,}000$, $r = 4$, $t = 9$, $m = 4$
11. $S = 100{,}000$, $r = 4.5$, $t = 20$, $m = 6$
12. $S = 120{,}000$, $r = 4.5$, $t = 30$, $m = 6$
13. $S = 250{,}000$, $r = 10.5$, $t = 25$, $m = 12$
14. $S = 350{,}000$, $r = 7.5$, $t = 10$, $m = 12$
15. Suponga que los pagos se hicieron al final de cada trimestre en una anualidad ordinaria que genera intereses a una tasa de 10% anual compuesta trimestralmente. Si el valor futuro de la anualidad después de 5 años es de \$50,000, ¿cuál era el monto de cada pago?
16. Suponga que los pagos se hicieron a finales de cada mes en una anualidad ordinaria que genera intereses a una tasa de 9% anual compuesta mensualmente. Si el valor futuro de la pensión después de 10 años es de \$60,000, ¿cuál era el monto de cada pago?
17. Suponga que los pagos se harán por $6\frac{1}{2}$ años al final de cada periodo semestral en una anualidad ordinaria que genera intereses a una tasa de 7.5% anual compuesto semestralmente. Si el valor presente de la anualidad es de \$35,000, ¿cuál debería ser el monto de cada pago?
18. Suponga que los pagos se harán para $9\frac{1}{4}$ años al final de cada mes en una anualidad ordinaria que genera intereses a una tasa de 6.25% anual compuesta mensualmente. Si el valor presente de la anualidad es de \$42,000, ¿cuál debería ser el monto de cada pago?
19. **Amortización de un préstamo** Una suma de \$100,000 a pagar en un periodo de 10 años por medio de pagos iguales hechos al final de cada año. Si una tasa de interés de 10% anual se cobra sobre el saldo insoluto y el cálculo de los intereses se hacen al final de cada año, determine el monto de cada pago para que el préstamo (capital más intereses cargados) se amortice al final de 10 años.
20. **Amortización de un préstamo** ¿Qué pago mensual se requiere para amortizar un préstamo de \$30,000 durante 10 años si los intereses a una tasa de 12% anual se cobran sobre el saldo insoluto y el cálculo de los intereses se hace al final de cada mes?
21. **Hipotecas** Complete el siguiente cuadro, que muestra los pagos mensuales de una hipoteca de \$100,000, a 30 años, a las tasas de interés que se muestran. Utilice esta información para responder las siguientes preguntas.

Importe de la hipoteca, \$	Tasa de interés, %	Pago mensual, \$
100,000	7	665.30
100,000	8	. . .
100,000	9	. . .
100,000	10	. . .
100,000	11	. . .
100,000	12	1028.61

   a. ¿Cuál es la diferencia en los pagos mensuales entre una hipoteca por \$100,000, a 30 años garantizada en 7% anual y una garantizada a 10% anual?
   b. Utilice la tabla para calcular los pagos hipotecarios mensuales de una hipoteca de \$150,000 a 10% anual durante 30 años y otra de \$50,000 a 10% anual durante 30 años.
22. **Financiamiento de una casa** Los Fleming obtuvieron un préstamo bancario de \$288,000 para ayudarles a financiar la compra de una casa. El banco cobra intereses a una tasa de 9% anual sobre el saldo insoluto y el cálculo de intereses se hace al final de cada mes. Los Fleming han acordado pagar el préstamo en cuotas mensuales iguales durante 25 años. ¿Cuál debería ser el monto de cada pago si el préstamo se amortiza al final del término?
23. **Financiamiento de un automóvil** El precio de un automóvil nuevo es de \$16,000. Suponga que una persona hace un pago inicial de 25% para la compra del automóvil y obtiene el financiamiento para el saldo a una tasa de 10% anual compuesta mensualmente.
   a. ¿Qué pago mensual deberá hacer si el automóvil se financia en un periodo de 36 meses? ¿En un periodo de 48 meses?
   b. ¿Cuál será el cargo por intereses si elige un plan de 36 meses? ¿Y si elige un plan de 48 meses?
24. **Análisis financiero** Un grupo de inversionistas privados compró un complejo de condominios por \$2 millones. Hicieron un pago inicial de 10% y obtuvieron financiamiento para el saldo. Si el préstamo se amortiza en 15 años a una tasa de interés de 12% anual compuesta trimestralmente, calcule el pago trimestral requerido.
25. **Financiamiento de una casa** Los Taylor han adquirido una casa de \$270,000. Hicieron un pago inicial de \$30,000 y obtuvieron una hipoteca con interés que se cobra a razón de 8% anual sobre el saldo insoluto. El cálculo de intereses

se hace al final de cada mes. Si el préstamo se amortiza en 30 años, ¿cuál será el pago mensual que deberán hacer los Taylor? ¿Cuál es su patrimonio neto (sin tener en cuenta la apreciación) después de 5 años? ¿Después de 10 años? ¿Después de 20 años?

26. **Planeación financiera** Jessica quiere acumular $10,000 para el final de un plazo de 5 años en una cuenta bancaria especial, que abrió para este propósito. Para lograr este objetivo, Jessica tiene previsto depositar una suma fija de dinero en la cuenta al final de cada mes durante el periodo de 5 años. Si el banco paga intereses a una tasa de 5% anual compuesto mensualmente, ¿cuánto tiene que depositar cada mes en su cuenta?

27. **Fondos de amortización** Una ciudad tiene $2.5 millones en bonos escolares a pagar en 20 años y ha establecido un fondo de amortización para el retiro de esta deuda. Si el fondo gana intereses a una tasa de 7% anual compuesta anualmente, ¿qué cantidad debe depositarse anualmente en este fondo?

28. **Fideicomiso** Carl es el beneficiario de un fideicomiso de $20,000 creado para él por sus abuelos. Bajo los términos del fideicomiso, recibirá el dinero durante un periodo de 5 años en cuotas iguales al final de cada año. Si el fondo gana intereses a una tasa de 9% anual compuesta anualmente, ¿qué importe recibirá cada año?

29. **Fondos de amortización** Lowell Corporation desea establecer un fondo de amortización para retirar una deuda de $200,000 a pagar en 10 años. Si la inversión genera intereses a una tasa de 9% anual compuesta trimestralmente, calcule la cantidad del depósito trimestral que se debe hacer con el fin de acumular la cantidad requerida.

30. **Fondos de amortización** La gerencia de Gibraltar Brokerage Services prevé un gasto de capital de $20,000 en 3 años para la compra de nuevas computadoras y ha decidido crear un fondo de amortización para financiar esta adquisición. Si el fondo gana intereses a una tasa de 10% anual compuesta trimestralmente, determine el monto de cada una de las cuotas trimestrales (iguales) que debe ser depositado en el fondo.

31. **Cuentas de retiro** Andrea, persona que trabaja por su cuenta, quiere acumular un fondo de retiro de $250,000. ¿Cuánto debe depositar cada mes en su cuenta de retiro, que paga intereses a una tasa de 8.5% anual compuesta mensualmente, para llegar a su meta tras el retiro dentro de 25 años?

32. **Préstamos para estudiantes** Joe obtuvo de un banco un préstamo de $12,000 hace 3 años para emplear en los gastos de su universidad. El banco cobró intereses a una tasa de 4% anual compuesta mensualmente en su préstamo. Ahora que se ha graduado de la universidad, Joe quiere pagar el préstamo amortizándolo por medio de pagos mensuales durante 10 años a la misma tasa de interés. Calcule el monto de los pagos mensuales que tendrá que realizar.

33. **Cuentas de retiro** Robin desea acumular una suma de $450,000 en una cuenta en el momento de su retiro 30 años a partir de ahora. Si desea hacer esto a través de pagos mensuales en la cuenta que gana intereses a una tasa de 10% anual compuesta mensualmente, lo que debería ser el monto de cada pago?

34. **Financiamiento de los gastos de la universidad** Los abuelos de Yumi le dieron un regalo de $20,000 cuando tenía 10 años de edad para que los utilizara en su educación universitaria. Durante los siguientes 7 años, hasta que cumplió 17 de edad, los padres de Yumi invirtieron su dinero en una cuenta libre de impuestos que daba rendimientos a una tasa de 5.5% anual compuesta mensualmente. Luego de cumplir los 17, Yumi planea retirar sus fondos en cuotas anuales iguales durante los próximos 4 años, comenzando a la edad de 18. Si se espera que el fondo universitario devengue intereses a una tasa de 6% anual compuesta anualmente, ¿cuál será el monto de cada cuota?

35. **Cuenta individual de retiro** Martin ha depositado $375 en su cuenta individual de retiro al final de cada trimestre durante los últimos 20 años. Su inversión ha ganado intereses a una tasa de 8% anual compuesta trimestralmente durante este periodo. Ahora, a los 60 años, está considerando el retiro. ¿Qué pago trimestral recibirá los próximos 15 años? (Suponga que el dinero gana intereses a la misma tasa y que los pagos se hacen al final de cada trimestre.) Si sigue trabajando y realiza pagos trimestrales por la misma cantidad en su cuenta individual de retiro hasta la edad de 65 años, ¿qué pago trimestral recibirá de su fondo de retiro durante los siguientes 10 años?

36. **Financiamiento de un automóvil** Darla compró un automóvil nuevo durante una promoción especial de ventas del fabricante. Obtuvo un préstamo del fabricante por la cantidad de $16,000 a una tasa de 7.9% anual compuesta mensualmente. Su banco hace cargos de 11.5% anual compuesta mensualmente por los préstamos para automóviles nuevos. Suponiendo que cada préstamo se amortizará en 36 cuotas mensuales iguales, determine la cantidad de interés que habría pagado al final de 3 años para cada préstamo. ¿Cuánto habría pagado en intereses durante la vida del préstamo por haber tomado el préstamo del fabricante en lugar del de su banco?

37. **Autofinanciamiento** Dan está contemplando vender su automóvil para comprar uno nuevo. Puede pagar una cuota mensual de un máximo de $400. Si la tasa de interés vigente es de 7.2% anual compuesta mensualmente por un préstamo de 48 meses, ¿cuál es el automóvil más caro que Dan puede comprar, en el supuesto de que recibirá $8000 de la venta?

38. **Autofinanciamiento** Paula está considerando la compra de un automóvil nuevo. Ella ha reducido su búsqueda a dos vehículos que son igualmente atractivos para ella. El automóvil A cuesta $28,000, y el B $28,200. El fabricante del automóvil A ofrece financiamiento al 0% durante 48 meses sin enganche, mientras que el fabricante B ofrece un descuento de $2000 en el momento de la compra más el financiamiento a una tasa de 3% anual compuesta mensualmente más 48 meses sin enganche. Si Paula ha decidido comprar el automóvil con el costo neto más bajo para ella, ¿qué automóvil debe comprar?

39. **Refinanciamiento de una casa** Los Sanderson están pensando en refinanciar su casa. El capital pendiente de pago en su préstamo original es de $100,000 y debía ser amortizado en 240 cuotas mensuales iguales a una tasa de interés de 10% anual compuesto mensualmente. El nuevo préstamo que esperan obtener se amortiza en el mismo periodo a una tasa de interés de 7.8% anual compuesta mensualmente. ¿Cuánto menos pueden llegar a pagar durante la vida del préstamo en intereses por el refinanciamiento del préstamo en este tiempo?

40. **Análisis de la inversión** Desde que tenía 22 años, Ben ha depositado \$200 al final de cada mes en una cuenta de retiro libre de impuestos que genera intereses a una tasa de 6.5% anual compuesta mensualmente. Larry, que tiene la misma edad que Ben, decidió abrir una cuenta de retiro libre de impuestos 5 años después de que Ben abrió la suya. Si la cuenta de Larry devenga intereses a la misma tasa que la de Ben, determine la cantidad que Larry debe depositar cada mes en su cuenta para que ambos hombres tengan la misma cantidad de dinero en sus cuentas a los 65 años.

41. **Préstamos personales** Hace dos años Paul pidió prestados \$10,000 a su hermana Gerri para iniciar un negocio. Paul está de acuerdo en pagar intereses a Gerri por el préstamo a una tasa de 6% anual compuesta continuamente. Pablo ahora empezará a pagar la cantidad que le debe por amortización del préstamo (más los intereses que se han acumulado en los últimos 2 años) por medio de pagos mensuales durante los próximos 5 años a una tasa de interés de 5% anual compuesta mensualmente. Calcule el monto de los pagos mensuales que Pablo tendrá que hacer.

42. **Refinanciamiento de una casa** Josh compró un condominio hace 5 años por \$180,000. Hizo un pago inicial de 20% y financió el saldo con una hipoteca convencional a 30 años que se amortizará mediante pagos mensuales con una tasa de interés de 7% anual compuesta mensualmente sobre el saldo insoluto. El condominio está tasado ahora en \$250,000. Josh tiene previsto comenzar su negocio y desea aprovechar el patrimonio que tiene en el condominio. Si Josh puede obtener una nueva hipoteca para refinanciar su condominio sobre la base de un préstamo de 80% del valor de tasación, ¿qué cantidad de dinero puede reunir Josh para su negocio? (Haga caso omiso de los impuestos.)

43. **Financiamiento de una casa** Hace 8 años Kim consiguió un préstamo bancario de \$180,000 para ayudar a financiar la compra de una casa. La hipoteca era por un periodo de 30 años, con una tasa de interés de 9.5% anual compuesta mensualmente sobre el saldo insoluto para ser amortizado por medio de pagos mensuales. ¿Cuál es el capital insoluto de la casa de Kim ahora?

44. **Hipotecas con pagos globales** Olivia planea obtener una hipoteca con pago global a 5 años por \$200,000 para la compra de un condominio. Su pago mensual para los 5 años se calcula sobre la base de una hipoteca convencional a 30 años a una tasa de 6% anual compuesta mensualmente. Al final de los 5 años, Olivia está obligada a pagar el saldo adeudado (el pago "global"). ¿Cuál será su pago mensual y su pago global?

45. **Hipotecas con pago global** Emilio obtiene una hipoteca "global" por \$280,000 a 7 años de Fannie Mae para financiar la compra de su primera casa. Los pagos mensuales se basan en una amortización a 30 años. Si la tasa de interés vigente es de 7.5% anual compuesta mensualmente, ¿a cuánto asciende el pago mensual de Emilio? ¿A cuánto ascenderá su pago "global" al final de 7 años?

46. **Financiamiento de una casa** Sarah obtuvo un préstamo bancario de \$200,000 para la compra de una casa. La hipoteca se amortiza mediante pagos mensuales por un periodo de 15 años, con una tasa de interés de 6% anual compuesta mensualmente sobre el saldo insoluto. Ella planea vender su casa en 5 años. ¿Cuánto deberá todavía Sarah de su casa?

47. **Refinanciamiento de una casa** Hace 4 años, Emily obtuvo un préstamo bancario de \$200,000 para ayudar a financiar la compra de un departamento en Boston. El plazo de la hipoteca es de 30 años y la tasa de interés es de 9.5% anual compuesta mensualmente. Debido a que la tasa de interés para una hipoteca convencional a 30 años se ha reducido a 6.75% anual compuesta mensualmente, Emily está pensando en refinanciar su propiedad.
   a. ¿A cuánto asciende el pago mensual actual de Emily por la hipoteca?
   b. ¿Cuánto es el capital actual pendiente de pago de Emily?
   c. Si Emily decide refinanciar su propiedad, obteniendo un préstamo hipotecario a 30 años por el importe del capital actual pendiente de pago a la tasa de interés vigente de 6.75% anual compuesta mensualmente, ¿cuál será su pago mensual por la hipoteca?
   d. ¿Cuánto menos sería el pago mensual de Emily por la hipoteca si se refinancia?

48. **Refinanciamiento de una casa** Hace 5 años, Diane obtuvo un préstamo bancario de \$300,000 para ayudar a financiar la compra de un lote en el área de la Bahía de San Francisco. El plazo de la hipoteca era de 30 años, y la tasa de interés de 9% anual compuesta mensualmente sobre el saldo insoluto. Debido a que la tasa de interés para una hipoteca convencional a 30 años se ha reducido a 7% anual compuesta mensualmente, Diane está pensando en refinanciar su propiedad.
   a. ¿A cuánto asciende el pago mensual actual de Diane por la hipoteca?
   b. ¿Cuánto es el capital actual pendiente de pago de Diane?
   c. Si Diane decide refinanciar su propiedad, obteniendo un préstamo hipotecario a 30 años por el importe del capital actual pendiente de pago a una tasa de interés vigente de 7% anual compuesta mensualmente, ¿cuál será su pago mensual por la hipoteca?
   d. ¿Cuánto menos sería el pago mensual de Diane si se refinancia?

49. **Hipotecas de tasa ajustable** Hace 3 años, Samantha obtuvo un préstamo de hipoteca a tasa ajustable (ARM) para ayudar a financiar la compra de una casa. El monto del préstamo original fue de \$150,000 por un periodo de 30 años, con intereses a una tasa de 7.5% anual compuesta mensualmente. En la actualidad la tasa de interés es de 7% anual compuesta mensualmente y los pagos mensuales de Samantha se deben volver a calcular. ¿Cuál será su nuevo pago mensual?
   Sugerencia: Calcule su capital pendiente de pago actual. A continuación, para amortizar el préstamo en los próximos 27 años, determine el pago mensual con base en la tasa de interés actual.

50. **Hipotecas de tasa ajustable** George obtuvo un préstamo de hipoteca a tasa ajustable (ARM) para ayudar a financiar la compra de su casa hace 5 años. El monto del préstamo fue de \$300,000 para un periodo de 30 años, con intereses a una tasa de 8% anual compuesta mensualmente. En la actualidad, la tasa de interés por su ARM es de 6.5% anual compuesta mensualmente y los pagos mensuales de George se deben restablecer. ¿Cuál será el nuevo pago mensual?

51. Financiamiento de una casa Después de hacer un pago inicial de \$25,000, los Meyer necesitan obtener un préstamo de \$280,000 para comprar una casa. La tasa actual de su banco para un préstamo hipotecario a 25 años es de 11% anual compuesta mensualmente. El propietario se ha ofrecido a financiar el préstamo a 9.8% anual compuesta mensualmente. Suponiendo que ambos préstamos se amorticen en un periodo de 25 años con 300 cuotas mensuales iguales, determine la diferencia en el monto de los intereses que los Meyer pagarían por la elección del financiamiento del vendedor en lugar del de su banco.

52. Refinanciamiento de una casa Los Martínez planean refinanciar su casa. El saldo pendiente de su préstamo original es de \$150,000. Su compañía financiera les ha ofrecido dos opciones:

Opción A: una hipoteca de tasa fija a una tasa de interés de 7.5% anual compuesta mensualmente, a pagar durante un periodo de 30 años en 360 cuotas mensuales iguales.

Opción B: una hipoteca de tasa fija a una tasa de interés de 7.25% anual compuesta mensualmente, a pagar durante un periodo de 15 años en 180 cuotas mensuales iguales.

a. Calcule el pago mensual requerido para amortizar cada uno de estos préstamos durante la vida del préstamo.

b. ¿Cuál es el monto de intereses que los Martínez ahorrarán si eligen la hipoteca a l5 años en lugar de la hipoteca a 30 años?

4.3 Soluciones a los ejercicios de autoevaluación

1. a. Utilizamos la ecuación (13) en cada caso. Bajo el plan de I,

$$P = 300{,}000 \qquad i = \frac{r}{m} = \frac{0.0609}{12} = 0.005075$$

$$n = (30)(12) = 360$$

Por tanto, el monto de cada pago mensual bajo el plan I es

$$R = \frac{300{,}000(0.005075)}{1 - (1.005075)^{-360}} \approx 1816.05$$

o \$1816.05.

Bajo el plan II,

$$P = 300{,}000 \qquad i = \frac{r}{m} = \frac{0.0576}{12} = 0.0048$$

$$n = (15)(12) = 180$$

Por tanto, el monto de cada pago mensual bajo el plan II es

$$R = \frac{300{,}000(0.0048)}{1 - (1.0048)^{-180}} \approx 2492.84$$

o \$2492.84.

b. Bajo el plan I, el monto total de los reembolsos será

$$(360)(1816.05) = 653{,}778$$

Número de pagos × el monto de cada pago

o \$653,778. Bajo el plan II, el monto total de los reembolsos será

$$(180)(2492.84) = 448{,}711.20$$

o \$448,711.20. Por tanto, la diferencia en los pagos es

$$653{,}778 - 448{,}711.20 = 205{,}066.80$$

o \$205.066.80.

2. Utilizamos la ecuación (15) con

$$S = 250{,}000$$

$$i = r = 0.0825$$

Dado que $m = 1$

$$n = 20$$

dando el tamaño requerido de cada cuota como

$$R = \frac{(0.0825)(250{,}000)}{(1.0825)^{20} - 1} \approx 5313.59$$

o \$5313.59.

USO DE LA TECNOLOGÍA

Amortización de un préstamo

Calculadora graficadora

Aquí usamos la función **TVM SOLVER** de la TI-83/84 para ayudarnos a resolver los problemas de las amortizaciones y los fondos de amortización.

EJEMPLO DE APLICACIÓN 1 Calcular el pago para amortizar un préstamo Los Wong están pensando obtener un préstamo por \$120,000 con aprobación previa a 30 años para ayudar a financiar la compra de una casa.

(*continúa*)

La compañía hipotecaria hace cargos por intereses a una tasa de 8% anual sobre el saldo insoluto; el cálculo de intereses se realiza al final de cada mes. ¿Cuáles serán las cuotas mensuales si el préstamo se amortiza al final del periodo?

Solución Usamos **TVM SOLVER** de la TI-83/84 con las siguientes entradas:

N = 360 (30)(12)
1% = 8
PV = 120000
PMT = 0
FV = 0
P/Y = 12 El número de pagos cada año
C/Y = 12 El número de periodos de conversión de cada año
PMT:END BEGIN

N = 360
I% = 8
PV = 120000
■ PMT = −880.51748...
FV = 0
P/Y = 12
C/Y = 12
PMT : END BEGIN

FIGURA T1
La pantalla de la TI-83/84 muestra la cuota mensual, PMT.

Del resultado que se muestra en la figura TI, vemos que el pago requerido es $880.52. ■

EJEMPLO DE APLICACIÓN 2 Calcular el pago en un fondo de amortización Heidi quiere establecer una cuenta de retiro que tendrá un valor de $500,000 en un plazo de 20 años. Ella espera que la cuenta genere intereses a una tasa de 11% anual compuesta mensualmente. ¿Cuál debe ser la aportación mensual en su cuenta cada mes?

Solución Usamos **TVM SOLVER** de la TI-83/84 con las siguientes entradas:

N = 240 (20)(12)
1% = 11
PV = 0
PMT = 0
VF = 500000
P/Y = 12 El número de pagos cada año
C/Y = 12 El número de periodos de conversión de cada año
PMT:END BEGIN

N = 240
I% = 11
PV = 0
■ PMT = −577.60862...
FV = 500000
P/Y = 12
C/Y = 12
PMT : END BEGIN

FIGURA T2
La pantalla TI-83/84 muestra el pago mensual, PMT.

El resultado se muestra en la figura T2. Vemos que la aportación mensual de Heidi debe ser de $577.61. (*Nota:* La pantalla de PMT es negativo porque es una salida.) ■

Excel

Aquí se utiliza Excel para ayudarnos a resolver los problemas de las amortizaciones y los fondos de amortización.

EJEMPLO DE APLICACIÓN 3 Calcular el pago para amortizar un préstamo Los Wong están considerando un préstamo de $120,000 con aprobación previa a 30 años para ayudar a financiar la compra de una casa. La compañía hipotecaria hace cargos por intereses a una tasa de 8% anual sobre el saldo insoluto; el cálculo de intereses se realiza al final de cada mes. ¿Cuáles serán las cuotas mensuales si el préstamo se amortiza al final del periodo?

Solución Utilizamos la función PMT para resolver este problema. Al tener acceso a esta función desde el cuadro de diálogo Insert Function y realizar las entradas necesarias, se obtiene el cuadro de diálogo Function Arguments que se muestra en la figura T3. Vemos que el resultado deseado es $880.52. (Recuerde que el dinero que usted paga se representa con un número negativo.)

Nota: Las palabras y caracteres impresos en azul (por ejemplo, Chart sub-type) indican palabras y caracteres sobre la pantalla.

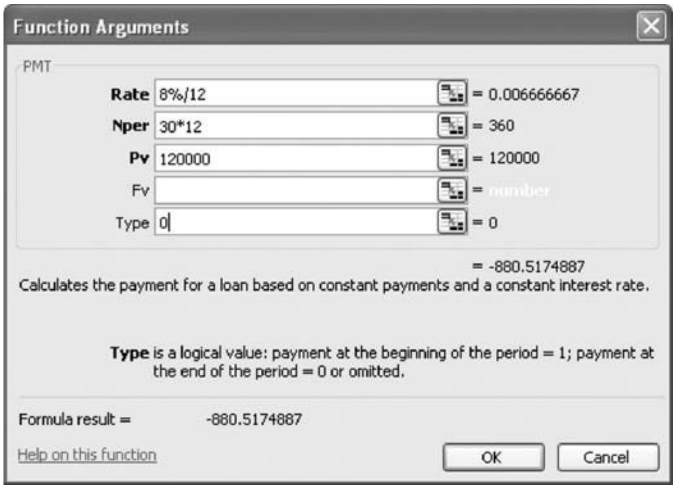


FIGURA T3
Cuadro de diálogo de Excel dando la función de pago, PMT.

EJEMPLO DE APLICACIÓN 4 Calcular el pago en un fondo de amortización Heidi quiere establecer una cuenta de retiro que tendrá un valor de $500,000 en un plazo de 20 años. Ella espera que la cuenta genere intereses a una tasa de 11% anual compuesta mensualmente. ¿Cuál debe ser la aportación mensual en su cuenta cada mes?

Solución Como en el ejemplo 3, utilizamos la función PMT, pero esta vez se nos da el valor futuro de la inversión. Al tener acceso a la función PMT desde el cuadro de diálogo Insert Function y realizar las entradas necesarias, se obtiene el cuadro de diálogo Function Arguments que se muestra en la figura T4. Vemos que la aportación mensual de Heidi debe ser de $577.61. (Tenga en cuenta que el valor de PMT es negativo porque es una salida.)

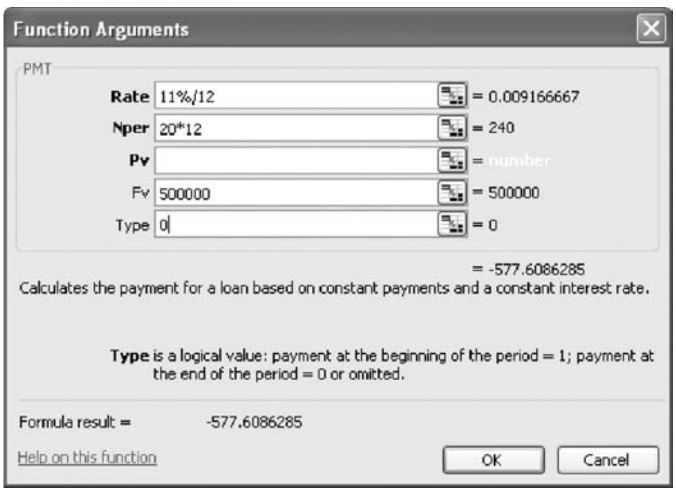


FIGURA T4
Cuadro de diálogo de Excel dando la función de pago, PMT.

EJERCICIOS CON TECNOLOGÍA

1. Calcule el pago periódico necesario para amortizar un préstamo de $55,000 durante 120 meses con intereses que se cobran a una tasa de $6\frac{5}{8}\%$ anual compuesta mensualmente.

2. Calcule el pago periódico necesario para amortizar un préstamo de $178,000 durante 180 meses con intereses que se cobran a una tasa de $7\frac{1}{8}\%$ anual compuesta mensualmente.

(*continúa*)

3. Calcule el pago periódico necesario para amortizar un préstamo de \$227,000 durante 360 meses con intereses que se cobran a una tasa de $8\frac{1}{8}\%$ anual compuesta mensualmente.

4. Calcule el pago periódico necesario para amortizar un préstamo de \$150,000 durante 360 meses con intereses que se cobran a una tasa de $7\frac{3}{8}\%$ anual compuesta mensualmente.

5. Calcule el pago periódico necesario para acumular \$25,000 durante 12 trimestres con intereses devengados a una tasa de $4\frac{3}{8}\%$ anual compuesta trimestralmente.

6. Calcule el pago periódico necesario para acumular \$50,000 durante 36 trimestres con intereses devengados a una tasa de $3\frac{7}{8}\%$ anual compuesta trimestralmente.

7. Calcule el pago periódico necesario para acumular \$137,000 durante 120 meses con intereses devengados a una tasa de $4\frac{3}{4}\%$ anual compuesta mensualmente.

8. Calcule el pago periódico necesario para acumular \$144,000 durante 120 meses con intereses devengados a una tasa de $4\frac{5}{8}\%$ anual compuesta mensualmente.

9. Un préstamo de \$120,000 se pagará en un periodo de 10 años por medio de cuotas iguales hechas al final de cada año. Si se cobra una tasa de interés de 8.5% anual sobre el saldo insoluto y el cálculo de los intereses se hace al final de cada año, determine el monto de cada cuota de modo que el préstamo se amortice al final de los 10 años. Verifique el resultado mostrando el plan de amortización.

10. Un préstamo de \$265,000 se pagará en un periodo de 8 años por medio de cuotas iguales hechas al final de cada año. Si se cobra una tasa de interés de 7.4% anual sobre el saldo insoluto y el cálculo de los intereses se hace al final de cada año, determine el monto de cada cuota para que el préstamo se amortice al final de los 8 años. Verifique el resultado mostrando el plan de amortización.

4.4 Progresiones aritméticas y geométricas

Progresiones aritméticas

Una **progresión aritmética** es una serie de números en la que cada término después del primero se obtiene sumando una constante d al término anterior. La constante d se llama **diferencia común**. Por ejemplo, la serie

$$2, 5, 8, 11, \ldots$$

es una progresión aritmética con diferencia común igual a 3.

Observe que una progresión aritmética está completamente determinada si se conocen el primer término y la diferencia. De hecho, si

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$$

es una progresión aritmética con el primer término dado por a y una diferencia común dada por d, entonces, por definición, tenemos

$$\begin{aligned}
a_1 &= a \\
a_2 &= a_1 + d = a + d \\
a_3 &= a_2 + d = (a + d) + d = a + 2d \\
a_4 &= a_3 + d = (a + 2d) + d = a + 3d \\
&\vdots \\
a_n &= a_{n-1} + d = a + (n - 2)d + d = a + (n - 1)d
\end{aligned}$$

Por tanto, tenemos la siguiente fórmula para encontrar el n-ésimo término de una progresión aritmética con primer término a y una diferencia común:

n-ésimo término de una progresión aritmética

El n-ésimo término de una progresión aritmética con un primer término a y una diferencia común d está dado por

$$a_n = a + (n - 1)d \qquad \textbf{(16)}$$

EJEMPLO 1 Calcular el duodécimo término de la progresión aritmética

$$2, 7, 12, 17, 22, \ldots$$

Solución El primer término de la progresión aritmética es $a_1 = a = 2$ y la diferencia común es $d = 5$, de modo que, al establecer $n = 12$ en la ecuación (16), encontramos

$$a_{12} = 2 + (12 - 1)5 = 57$$ ■

EJEMPLO 2 Escribir los primeros cinco términos de una progresión aritmética, cuyo tercero y undécimo términos son 21 y 85, respectivamente.

Solución Al utilizar la ecuación (16), se obtiene

$$a_3 = a + 2d = 21$$

$$a_{11} = a + 10d = 85$$

Al restar la primera ecuación de la segunda se obtiene $8d = 64$ o $d = 8$. Al sustituir este valor de d en el rendimiento de la primera ecuación $a + 16 = 21$, o $a = 5$. Por tanto, la progresión aritmética requerida está dada por la secuencia

$$5, 13, 21, 29, 37, \ldots$$ ■

Sea S_n la suma de los primeros n términos de una progresión aritmética con el primer término $a_1 = a$ y la diferencia común d. Entonces

$$S_n = a + (a + d) + (a + 2d) + \cdots + [a + (n - 1)d] \quad \textbf{(17)}$$

Al reescribir la expresión de S_n con los términos en orden inverso se tiene

$$S_n = [a + (n - 1)d] + [a + (n - 2)d] + \cdots + (a + d) + a \quad \textbf{(18)}$$

Al sumar las ecuaciones (17) y (18), obtenemos

$$\begin{aligned} 2S_n &= [2a + (n - 1)d] + [2a + (n - 1)d] \\ &\quad + \cdots + [2a + (n - 1)d] \\ &= n[2a + (n - 1)d] \\ S_n &= \frac{n}{2}[2a + (n - 1)d] \end{aligned}$$

Suma de términos de una progresión aritmética

La suma de los primeros n términos de una progresión aritmética con un primer término a y la diferencia común d viene dada por

$$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n - 1)d] \quad \textbf{(19)}$$

EJEMPLO 3 Calcular la suma de los 20 primeros términos de la progresión aritmética del ejemplo l.

Solución Sea $a = 2$, $d = 5$ y $n = 20$ en la ecuación (19), obtenemos

$$S_{20} = \frac{20}{2}[2 \cdot 2 + 19 \cdot 5] = 990$$ ■

EJEMPLO DE APLICACIÓN 4 Ventas de una empresa Madison Electric Company tuvo ventas de \$200,000 en su primer año de operación. Si las ventas se incrementaron anualmente \$30,000 a partir de entonces, calcule las ventas de Madison en el quinto año y sus ventas totales durante los primeros 5 años de operación.

Solución Las ventas anuales de Madison siguen una progresión aritmética, con el primer término dado por $a = 200{,}000$ y la diferencia común dada por $d = 30{,}000$. Las ventas en el quinto año se calculan utilizando la ecuación (16) con $n = 5$. Por tanto,

$$a_5 = 200{,}000 + (5 - 1)30{,}000 = 320{,}000$$

o \$320.000.

Las ventas totales de Madison durante los primeros 5 años de funcionamiento se calculan utilizando la ecuación (19) con $n = 5$. Por tanto,

$$\begin{aligned} S_5 &= \frac{5}{2}[2(200{,}000) + (5 - 1)30{,}000] \\ &= 1{,}300{,}000 \end{aligned}$$

o \$1,300,000. ■

Progresiones geométricas

Una **progresión geométrica** es una serie de números en la que cada término después del primero se obtiene al multiplicar el término anterior por una constante r. La constante r se llama **razón común**.

Una progresión geométrica está completamente determinada si se conocen el primer término y la razón común. Por tanto, si

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$$

es una progresión geométrica con el primer término dado por a y una razón común dada por r, entonces por definición tenemos

$$\begin{aligned} a_1 &= a \\ a_2 &= a_1 r = ar \\ a_3 &= a_2 r = ar^2 \\ a_4 &= a_3 r = ar^3 \\ &\vdots \\ a_n &= a_{n-1} r = ar^{n-1} \end{aligned}$$

n-ésimo término de una progresión geométrica

El n-ésimo término de una progresión geométrica con un primer término a y una razón común r está dada por

$$a_n = ar^{n-1} \qquad \textbf{(20)}$$

EJEMPLO 5 Calcular el octavo término de una progresión geométrica cuyos 5 primeros términos son 162, 54, 18, 6 y 2.

Solución La razón común se calcula tomando la relación de cualquier término que no sea el primero con el término anterior. Tomando la relación entre el cuarto término con el tercer término, por ejemplo, $r = \frac{6}{18} = \frac{1}{3}$. Para encontrar el octavo término de la progresión geométrica, utilice la fórmula (20) con $a = 162$, $r = \frac{1}{3}$ y $n = 8$, obteniendo

$$\begin{aligned} a^8 &= 162\left(\frac{1}{3}\right)^7 \\ &= \frac{2}{27} \end{aligned}$$

■

EJEMPLO 6 Calcular el décimo término de una progresión geométrica con términos positivos y el tercer término igual a 16 y el séptimo término igual a 1.

Solución Al utilizar la ecuación (20) con $n = 3$ y $n = 7$, respectivamente, se tiene

$$\begin{aligned} a_3 &= ar^2 = 16 \\ a_7 &= ar^6 = 1 \end{aligned}$$

Al dividir a_7 entre a_3 se tiene

$$\frac{ar^6}{ar^2} = \frac{1}{16}$$

de la que obtenemos $r^4 = \frac{1}{16}$, o $r = \frac{1}{2}$. Al sustituir este valor de r en la expresión para a_3, obtenemos

$$a = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 16 \quad \text{o} \quad a = 64$$

Por último, utilizando (20) una vez más con $a = 64$, $r = \frac{1}{2}$ y $n = 10$ se tiene

$$a_{10} = 64\left(\frac{1}{2}\right)^9 = \frac{1}{8}$$

■

Para encontrar la suma de los primeros n términos de una progresión geométrica con el término por primera vez $a_1 = a$ y la razón común r, denota la suma requerida por S_n Entonces,

$$S_n = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-2} + ar^{n-1} \tag{21}$$

Al multiplicar (21) por r, obtenemos

$$rS_n = ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^{n-1} + ar^n \tag{22}$$

Al restar (22) de (21) se tiene

$$\begin{aligned} S_n - rS_n &= a - ar^n \\ (1 - r)S_n &= a(1 - r^n) \end{aligned}$$

Si $r \neq 1$, podemos dividir ambos lados de la última ecuación entre $(1 - r)$, obteniendo

$$S_n = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r}$$

Si $r = 1$, entonces (21) se tiene

$$\begin{aligned} S_n &= a + a + a + \cdots + a \qquad n \text{ términos} \\ &= na \end{aligned}$$

Por tanto,

$$S_n = \begin{cases} \dfrac{a(1 - r^n)}{1 - r} & \text{si } r \neq 1 \\ na & \text{si } r = 1 \end{cases}$$

Suma de términos de una progresión geométrica

La suma de los primeros n términos de una progresión geométrica con primer término n y una relación común r está dada por

$$S_n = \begin{cases} \dfrac{a(1 - r^n)}{1 - r} & \text{si } r \neq 1 \\ na & \text{si } r = 1 \end{cases} \tag{23}$$

EJEMPLO 7 Calcular la suma de los seis primeros términos de la progresión geométrica siguiente:

$$3, 6, 12, 24, \ldots$$

Solución En este caso, $a = 3$, $r = \frac{6}{3} = 2$ y $n = 6$, por lo que la fórmula (23) da

$$S_6 = \frac{3(1 - 2^6)}{1 - 2} = 189$$

■

VIDEO

EJEMPLO DE APLICACIÓN 8 Ventas de una empresa Michaelson Land Development Company tuvo ventas por $1 millón en su primer año de operación. Si las ventas aumentaron 10% por año a partir de entonces, calcule las ventas de Michaelson en el quinto año y sus ventas totales durante los primeros 5 años de operación.

Solución Las ventas anuales de Michaelson siguen una progresión geométrica, con el primer término dado por $a = 1{,}000{,}000$ y la razón común dada por $r = 1.1$. Las ventas en el quinto año se calculan utilizando la fórmula (20) con $n = 5$. Por tanto,

$$a_5 = 1{,}000{,}000(1.1)^4 = 1{,}464{,}100$$

o $1,464,100.

Las ventas totales de Michaelson durante los primeros 5 años de operación se calculan al utilizar la ecuación (23) con $n = 5$. Por tanto,

$$\begin{aligned} S_5 &= \frac{1{,}000{,}000\,[1 - (1.1)^5]}{1 - 1.1} \\ &= 6{,}105{,}100 \end{aligned}$$

o $6,105,100.

■

Método de depreciación de doble saldo decreciente

En la sección 2.5 hemos discutido el método de depreciación de un activo en línea recta o lineal. La depreciación lineal asume que el activo se deprecia a una tasa constante. Para algunos activos (como las máquinas) cuyos valores de mercado caen rápidamente en los primeros años de uso y, después, más lentamente, con frecuencia se utiliza otro método de depreciación llamado **método de doble saldo decreciente**. En la práctica, una empresa comercial normalmente emplea el método de depreciación de doble saldo decreciente para depreciar esos activos durante un determinado número de años y después cambia al método lineal.

Para derivar una expresión para el valor en libros de un activo que se deprecia por el método de doble saldo decreciente, sea C (en dólares) que denota el costo original del activo y sea que el activo se deprecia en N años. Utilizando este método, el monto amortizado cada año es $\frac{2}{N}$ veces el valor de los activos al comienzo de ese año. Por tanto, la cantidad en que se deprecia el activo en su primer año de uso está dada por $\frac{2C}{N}$, por lo que si $V(1)$ denota el valor en libros del activo al final del primer año entonces

$$V(1) = C - \frac{2C}{N} = C\left(1 - \frac{2}{N}\right)$$

Enseguida, si $V(2)$ denota el valor en libros del activo al final del segundo año, entonces un argumento similar lleva a

$$\begin{aligned} V(2) &= C\left(1 - \frac{2}{N}\right) - C\left(1 - \frac{2}{N}\right)\frac{2}{N} \\ &= C\left(1 - \frac{2}{N}\right)\left(1 - \frac{2}{N}\right) \\ &= C\left(1 - \frac{2}{N}\right)^2 \end{aligned}$$

Si continuamos, encontramos que si $V(n)$ denota el valor en libros del activo al final de n años, entonces el término C, $V(1)$, $V(2)$, . . . , $V(N)$ forman una progresión geométrica con el primer término C y razón común $(1 - \frac{2}{N})$. En consecuencia, el n-ésimo término, $V(n)$, está dado por

$$V(n) = C\left(1 - \frac{2}{N}\right)^n \qquad (1 \leq n \leq N) \tag{24}$$

Además, si $D(n)$ indica el monto por el cual ha sido depreciado el activo al final del año n, a continuación,

$$\begin{aligned} D(n) &= C - C\left(1 - \frac{2}{N}\right)^n \\ &= C\left[1 - \left(1 - \frac{2}{N}\right)^n\right] \end{aligned} \tag{25}$$

EJEMPLO DE APLICACIÓN 9 **Depreciación de equipo** Un tractor adquirido a un costo de $60,000 se amortizará por el método de doble saldo decreciente durante 10 años. ¿Cuál es el valor en libros del tractor al término de 5 años? ¿Por qué cantidad ha sido depreciado el tractor al final del quinto año?

Solución Tenemos $C = 60{,}000$ y $N = 10$. Por tanto, utilizando la fórmula (24) con $n = 5$ se obtiene el valor en libros del tractor en el quinto año como sigue

$$\begin{aligned} V(5) &= 60{,}000\left(1 - \frac{2}{10}\right)^5 \\ &= 60{,}000\left(\frac{4}{5}\right)^5 = 19{,}660.80 \end{aligned}$$

o $19,660.80.

La cantidad por la cual el tractor ha sido depreciado al final del quinto año está dada por

$$60{,}000 - 19{,}660.80 = 40{,}339.20$$

o $40,339.20. Usted puede verificar el último resultado utilizando directamente la ecuación (25). ■

Exploración con TECNOLOGÍA

Un tractor adquirido a un costo de \$60,000 se amortizará durante 10 años con un valor residual de \$0. Utilizando el método de doble saldo decreciente, su valor al final de n años es $V_1(n) = \$60{,}000(0.8)^n$. Utilizando la depreciación en línea recta, su valor al final de n años es $V_2(n) = 60{,}000 - 6000n$. Utilice una utilidad gráfica para dibujar los gráficos de V_1 y V_2 en la ventana de visualización $[0, 10] \times [0, 70{,}000]$. Comente sobre las ventajas de cada método de depreciación.

4.4 Ejercicios de autoevaluación

1. Calcule la suma de los cinco primeros términos de la progresión geométrica con primer término -24 y razón común de $-\frac{1}{2}$.
2. Equipo de oficina adquirido por \$75,000 será depreciado por el método de doble saldo decreciente durante 5 años. Calcule el valor en libros al final de 3 años.
3. Deducir la fórmula para el valor futuro de una anualidad [ecuación (9), sección 4.2].

Las soluciones de los ejercicios de autoevaluación 4.4 se puede encontrar en la página 236.

4.4 Preguntas de concepto

1. Suponga una progresión aritmética con un primer término a y una diferencia común d.
   a. ¿Cuál es la fórmula para el término n-ésimo de esta progresión?
   b. ¿Cuál es la fórmula para la suma de los primeros n términos de esta progresión?
2. Suponga una progresión geométrica con un primer término a y una relación común r.
   a. ¿Cuál es la fórmula para el término n-ésimo de esta progresión?
   b. ¿Cuál es la fórmula para la suma de los primeros n términos de esta progresión?

4.4 Ejercicios

En los ejercicios 1 a 4, calcule el término *n*-ésimo de la progresión aritmética que tiene valores dados de *a*, *d* y *n*.

1. $a = 6, d = 3, n = 9$ **2.** $a = -5, d = 3, n = 7$

3. $a = -15, d = \dfrac{3}{2}, n = 8$ **4.** $a = 1.2, d = 0.4, n = 98$

5. Calcule los cinco primeros términos de la progresión aritmética cuyos términos cuarto y undécimo son 30 y 107, respectivamente.

6. Calcule los cinco primeros términos de la progresión aritmética cuyo séptimo y vigésimo tercer términos son -5 y -29, respectivamente.

7. Calcule el séptimo término de la progresión aritmética $x, x + y, x + 2y, \ldots$

8. Calcule el término undécimo de la progresión aritmética $a + b, 2a, 3a - b, \ldots$

9. Calcule la suma de los 15 primeros términos de la progresión aritmética 4, 11, 18, . . .

10. Calcule la suma de los primeros 20 términos de la progresión aritmética $5, -1, -7, \ldots$

11. Calcule la suma de los enteros impares entre 14 y 58.

12. Calcule la suma de los enteros pares entre 21 y 99.

13. Calcule $f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(20)$, dado que $f(x) = 3x - 4$.

14. Calcule $g(1) + g(2) + g(3) + \cdots + g(50)$, dado que $g(x) = 12 - 4x$.

15. Demuestre que la ecuación (19) puede escribirse como

$$S_n = \frac{n}{2}(a + a_n)$$

donde a_n representa el último término de una progresión aritmética. Utilice esta fórmula para determinar:
a. La suma de los 11 primeros términos de la progresión aritmética cuyo primero y undécimo términos son 3 y 47, respectivamente.
b. La suma de los 20 primeros términos de la progresión aritmética cuyo primero y vigésimo términos son 5 y -33, respectivamente.

16. Crecimiento de las ventas Moderne Furniture Company tuvo ventas por \$1,500,000 durante su primer año de operación. Si el aumento de las ventas fue de $160,000 por año a partir de entonces, calcule las ventas de Moderne en el quinto año y sus ventas totales durante los primeros 5 años de operación.

17. **Programa de ejercicios** Como parte de su programa de ejercicio, Karen ha decidido trotar. Si trota 1 milla el primer día y aumenta su recorrido diario $\frac{1}{4}$ de milla cada semana, ¿cuándo alcanzará su meta de 10 millas por día?

18. **Costo de perforación** Se perforará un pozo de petróleo de 100 pies. El costo de la perforación del primer pie es de $10.00, y el de perforación de cada pie adicional es de $4.50 más que el del pie anterior. Calcule el costo de perforación del total de los 100 pies.

19. **Decisiones del consumidor** Kunwoo quiere ir del aeropuerto a su hotel, que está a 25 millas. El precio del viaje en taxi es de $2.00 por la primera milla y $1.20 por cada milla adicional. La limusina del aeropuerto también va a su hotel y cobra una tarifa única de $15.00. ¿Cuánto dinero ahorra el turista si aborda la limusina del aeropuerto?

20. **Comparaciones de sueldo** Markeeta, una recién graduada de la universidad, recibió dos ofertas de trabajo. Una empresa le ofreció un sueldo inicial de $48,800 con la garantía de incrementos anuales de $2000 por año por los primeros 5 años. La empresa B le ofrece un sueldo inicial de $50,400 con la garantía de incrementos de $l500 anuales por los primeros 5 años.
   a. ¿Qué empresa está ofreciendo un sueldo más alto para el quinto año de empleo?
   b. ¿Qué empresa está ofreciendo más dinero para los primeros 5 años de empleo?

21. **Método de depreciación de suma de los dígitos de los años** Uno de los métodos que el Internal Revenue Service (Sistema de Administración Tributaria) permite para calcular la depreciación de los bienes de ciertos negocios es el método de la suma de los dígitos de los años. Si una propiedad valorada en C dólares tiene una vida útil estimada de N años y un valor residual de S dólares, entonces el monto de depreciación D_n permitida durante el año n-ésimo está dada por

$$D_n = (C - S)\,\frac{N - (n - 1)}{S_N} \qquad (0 \le n \le N)$$

donde S_N es la suma de los primeros N enteros positivos. Por tanto,

$$S_N = 1 + 2 + \cdots + N = \frac{N(N + 1)}{2}$$

   a. Compruebe que la suma de la progresión aritmética $S_N = 1 + 2 + \cdots + N$ está dada por

$$\frac{N(N + 1)}{2}$$

   b. Si el mobiliario de una oficina vale $6000 se depreciará por este método durante $N = 10$ años y el valor de rescate de los muebles es de $500, y calcule la depreciación para el tercer año calculando D_3.

22. **Método de depreciación de suma de los dígitos de los años** Consulte el ejemplo 1, sección 2.5. El monto permitido de la depreciación para una máquina de impresión, que tiene una vida útil estimada de 5 años y un valor inicial de $100,000 (sin valor de rescate), es de $20,000 por año, utilizando el método de depreciación en línea recta. Determine el monto de depreciación que se permitiría para el primer año si la máquina de impresión se depreciara con el método de la suma de los dígitos de los años descrito en el ejercicio 21. ¿Qué método se traduciría en una mayor depreciación del activo en su primer año de uso?

En los ejercicios 23 a 28, determine cuál de las series son progresiones geométricas. Para cada progresión geométrica, calcule el séptimo término y la suma de los siete primeros términos.

23. $4, 8, 16, 32, \ldots$

24. $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \ldots$

25. $\frac{1}{2}, -\frac{3}{8}, \frac{1}{4}, -\frac{9}{64}, \ldots$

26. $0.004, 0.04, 0.4, 4, \ldots$

27. $243, 81, 27, 9, \ldots$

28. $-1, 1, 3, 5, \ldots$

29. Calcule el vigésimo término y la suma de los 20 primeros términos de la progresión geométrica $-3, 3, -3, 3, \ldots$.

30. Calcule el vigésimo tercer término en una progresión geométrica con un primer término $a = 0.1$ y una razón de $r = 2$.

31. **Crecimiento de la población** Se ha proyectado que la población de una determinada ciudad en el suroeste se incrementará 8% durante cada uno de los próximos 5 años. Si la población actual es de 200,000, ¿cuál es la población que se espera después de 5 años?

32. **Crecimiento de las ventas** Metro Cable TV tuvo ventas de $2,500,000 en su primer año de funcionamiento. Si a partir de entonces las ventas aumentaron 12% con respecto al año anterior, calcule las ventas de la empresa en el quinto año y las ventas totales durante los primeros 5 años de operación.

33. **Índice del costo de la vida** Suponga que el índice del costo de la vida se ha incrementado 3% durante cada uno de los últimos 6 años y que un miembro de la EUW Union tenía garantizado un aumento anua1 igual a 2% por encima del incremento en el índice del costo de la vida durante ese periodo. ¿Cuál debería ser el sueldo actual de un miembro del sindicato cuyo salario hace 6 años era de $42,000?

34. **Planes de ahorro** Los padres de un niño de 9 años han acordado depositar $10 en la cuenta bancaria de su hijo en su 10o cumpleaños y duplicar el tamaño de su depósito cada año subsiguiente hasta cumplir 18 años.
   a. ¿Cuánto tendrán que depositar en su cumpleaños número 18?
   b. ¿Cuánto habrán depositado para su cumpleaños número 18?

35. **Comparaciones de sueldo** Un empleado de Stenton Printing Co., cuyo sueldo anual actual es de $48,000, tiene la opción de tomar un incremento anual de 8% anual para los próximos 4 años o un aumento anual fijo de $4000 anual. ¿Cuál opción sería más rentable para él teniendo en cuenta sus ingresos totales durante el periodo de 4 años?

36. Crecimiento de las bacterias Se sabe que un cultivo de cierta bacteria duplica su número cada 3 horas. Si el cultivo tiene un conteo inicial de 20, ¿cuál será la población del cultivo al final de 24 horas?

37. Fondos fiduciarios Sarah es la beneficiaria de un fondo fiduciario que recibirá durante un periodo de 6 años. Bajo los términos del fideicomiso, ella recibirá $10,000 el primer año y cada pago anual sucesivo se incrementará 15%.
a. ¿Cuánto recibirá durante el sexto año?
b. ¿Cuál es el importe total de los 6 pagos que recibirá?

En los ejercicios 38 a 40, calcule el valor en libros de equipo de oficina comprado a un costo *C* al final del año *n*-ésimo si se deprecia por el método de doble saldo decreciente durante 10 años.

38. $C = \$20{,}000$, $n = 4$ **39.** $C = \$150{,}000$, $n = 8$

40. $C = \$80{,}000$, $n = 7$

41. Método de depreciación de doble saldo decreciente Un equipo de restaurante se compró a un costo de $150,000 y se depreció por el método de depreciación de doble saldo decreciente durante 10 años. ¿Cuál es el valor en libros del equipo al final de 6 años? ¿A qué monto será depreciado el equipo al final del sexto año?

42. Método de depreciación de doble saldo decreciente Remítase al ejercicio 22. Recuerde que una máquina de impresión con una vida útil estimada de 5 años y un valor inicial de $100,000 (y sin valor de rescate) iba a depreciarse. Al final del primer año, el importe de la depreciación permitida era de $20,000 utilizando el método de línea recta y $33,333 con el método de la suma de los dígitos de los años. Determine el monto de la depreciación que se permitiría para el primer año si la máquina de impresión se deprecia por el método de doble saldo decreciente. ¿Cuál de estos tres métodos se traduciría en la depreciación más grande de la máquina de impresión al final de su primer año de uso?

En los ejercicios 43 y 44 determine si la afirmación es verdadera o falsa. Si es verdadera, explique por qué. Si es falsa, dé un ejemplo para demostrar por qué lo es.

43. Si $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ y $b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n$ son progresiones geométricas, entonces, $a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3, \ldots, a_n + b_n$ es también una progresión geométrica.

44. Si $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ y $b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n$ son progresiones aritméticas, entonces, $a_1b_1, a_2b_2, a_3b_3, \ldots, a_nb_n$ es también una progresión aritmética.

4.4 Soluciones de los ejercicios de autoevaluación

1. Utilizando la ecuación (23) y con $a = -24$ $r = -\frac{1}{2}$, se obtiene

$$S_5 = \frac{-24\left[1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^5\right]}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{-24\left(1 + \frac{1}{32}\right)}{\frac{3}{2}} = -\frac{33}{2}$$

2. Utilizando la ecuación (24) con $C = 75{,}000$, $N = 5$ y $n = 3$, se tiene el valor en libros del equipo de oficina al final de tres años como

$$V(3) = 75{,}000\left(1 - \frac{2}{5}\right)^3 = 16{,}200$$

o $16,200.

3. Se tiene que

$$S = R + R(1 + i) + R(1 + i)^2 + \cdots + R(1 + i)^{n-1}$$

En la suma a la derecha se ve fácilmente que la suma de los primeros n términos de una progresión geométrica con un primer término R y una razón común $(1 + i)$, por lo que en virtud de la fórmula (23) se obtiene

$$S = \frac{R[1 - (1 + i)^n]}{1 - (1 + i)} = R\left[\frac{(1 + i)^n - 1}{i}\right]$$

CAPÍTULO 4 Resumen de fórmulas y términos principales

FÓRMULAS

1. Interés simple (cantidad acumulada)	$A = P(1 + rt)$
2. Interés compuesto	
a. Cantidad acumulada	$A = P(1 + i)^n$
b. Valor presente	$P = A(1 + i)^{-n}$

c. Tasa de interés por periodo de conversión	$i = \dfrac{r}{m}$
d. Número de periodos de conversión	$n = mt$
3. Interés compuesto continuo	
a. Cantidad acumulada	$A = Pe^{rt}$
b. Valor presente	$P = Ae^{-rt}$
4. Tasa de interés efectiva	$r_{\text{ef}} = \left(1 + \dfrac{r}{m}\right)^m - 1$
5. Anualidades	
a. Valor futuro	$S = R\left[\dfrac{(1+i)^n - 1}{i}\right]$
b. Valor presente	$P = R\left[\dfrac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right]$
6. Amortización del pago	$R = \dfrac{Pi}{1-(1+i)^{-n}}$
7. Cantidad amortizada	$P = R\left[\dfrac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right]$
8. Pago del fondo de amortización	$R = \dfrac{iS}{(1+i)^n - 1}$

TÉRMINOS

CAPÍTULO 4 Preguntas de revisión de conceptos

Llene los espacios en blanco.

1. **a.** El interés simple se calcula sólo sobre el capital _______. La fórmula para la cantidad acumulada utilizando el interés simple es A = _______.
   b. En los cálculos con interés compuesto, los intereses devengados se agregan periódicamente al capital y, después, generan _______. La fórmula para la cantidad acumulada con el interés compuesto es A = _______. Al resolver esta ecuación para P da la fórmula de valor presente con el interés compuesto como P = _______.
2. La tasa de interés efectiva es la tasa de interés _______ que produciría el mismo importe acumulado en _______ año que la tasa _______ compuesta _______ veces al año. La fórmula para calcular la tasa efectiva es r_{ef} = _______.
3. Una serie de pagos efectuados a intervalos regulares se denomina _______; si los pagos se hacen al final de cada periodo de pago, se llama _______ _______; si el periodo de pago coincide con el periodo de conversión del interés, entonces se llama _______ _______.
4. La fórmula para el valor futuro de una anualidad es S = _______. La fórmula para el valor presente de una anualidad es P = _______.
5. El pago periódico R sobre un préstamo de P dólares para ser amortizado en n periodos con un cargo por intereses a la tasa i por periodo es R = _______.
6. Un fondo de amortización es una cuenta que está configurada para un propósito específico en una fecha _______. El pago periódico R requerido para acumular una suma de S dólares durante n periodos con un cargo por intereses a la tasa de i por periodo es R = _______.
7. Una progresión aritmética es una serie de números en la que cada término después del primero se obtiene sumando un/una _______ _______ al término anterior. El n-ésimo término de una progresión aritmética es a_n = _______. La suma de los primeros n términos de una progresión aritmética es S_n = _______.
8. Una progresión geométrica es una serie de números en la que cada término después del primero se obtiene multiplicando el término anterior por un/una _______ _______. El n-ésimo término de una progresión geométrica es a_n = _______. Si $r \neq 1$, la suma de los primeros n términos de una progresión geométrica es S_n = _______.

CAPÍTULO 4 Ejercicios de revisión

1. Calcule el monto acumulado después de 4 años si se invierten \$5000 al 10% anual compuesto en forma (a) anual, (b) semestral, (c) trimestral y (d) mensual.

2. Calcule el monto acumulado después de 8 años si se invierten \$12,000 al 6.5% anual compuesto en forma (a) anual, (b) semestral, (c) trimestral y (d) mensual.

3. Calcule la tasa de interés efectiva correspondiente a una tasa nominal de 12% anual compuesta en forma (a) anual, (b) semestral, (c) trimestral y (d) mensual.

4. Calcule la tasa de interés efectiva correspondiente a una tasa nominal de 11.5% anual compuesta en forma (a) anual, (b) semestral, (c) trimestral y (d) mensual.

5. Calcule el valor presente de \$41,413 a pagar dentro de 5 años a una tasa de interés de 6.5% anual compuesta trimestralmente.

6. Calcule el valor presente de \$64,540 a pagar dentro de 6 años a una tasa de interés de 8% anual compuesta mensualmente.

7. Calcule el monto (valor futuro) de una anualidad ordinaria de \$150 por trimestre durante 7 años a 8% anual compuesto trimestralmente.

8. Calcule el valor futuro de una anualidad ordinaria de \$120 por mes durante 10 años a 9% anual compuesto mensualmente.

9. Calcule el valor presente de una anualidad ordinaria de 36 pagos mensuales de \$250 cada uno y que genera intereses a 9% anual compuesto mensualmente.

10. Calcule el valor presente de una anualidad ordinaria de 60 pagos trimestrales de \$5000 cada uno y que genera intereses a 8% anual compuesto trimestralmente.

11. Calcule el pago R necesario para amortizar un préstamo de \$22,000 a 8.5% anual compuesto mensualmente con 36 cuotas mensuales durante un periodo de 3 años.

12. Calcule el pago R necesario para amortizar un préstamo de \$10,000 a 9.2% anual compuesto mensualmente con 36 cuotas mensuales durante un periodo de 3 años.

13. Calcule el pago R necesario para acumular \$18,000 con 48 cuotas mensuales durante un periodo de 4 años a una tasa de interés de 6% anual compuesto mensualmente.

14. Calcule el pago R necesario para acumular \$15,000 con 60 cuotas mensuales durante un periodo de 5 años a una tasa de interés de 7.2% anual compuesta mensualmente.

15. Calcule la tasa de interés efectiva correspondiente a una tasa nominal de 7.2% anual compuesta mensualmente.

16. Calcule la tasa de interés efectiva correspondiente a una tasa nominal de 9.6% anual compuesta mensualmente.

17. Calcule el valor presente de \$119,346 a pagar en 4 años a una tasa de interés de 10% anual compuesta en forma continua.

18. **Ventas de una compañía** JCN Media tuvo ventas por \$1,750,000 en el primer año de funcionamiento. Si las ventas aumentaron 14% anual a partir de entonces, calcule las ventas de la empresa en el cuarto año y las ventas totales durante los primeros 4 años de operación.

19. **Certificados de depósito** El administrador de un fondo del mercado de dinero ha invertido \$4.2 millones en certificados de depósito que pagan intereses a una tasa de 5.4% anual compuesto trimestralmente durante un periodo de 5 años. ¿Cuál será el valor de la inversión al final de 5 años?

20. **Cuentas de ahorros** Emily depositó \$2000 en una cuenta bancaria hace 5 años. El banco paga intereses a una tasa de 8% anual compuesto semanalmente. ¿Cuál es el valor de la cuenta de Emily hoy?

21. **Cuentas de ahorros** Kim invirtió una suma de dinero hace 4 años en una cuenta de ahorros que ha pagado intereses a una tasa de 6.5% anual compuesto mensualmente. Su inversión tiene ahora un valor de \$19,440.31. ¿Cuánto invirtió originalmente?

22. **Cuentas de ahorros** Andrew retiró \$5986.09 de una cuenta de ahorros, que cerró esta mañana. La cuenta devengó intereses a una tasa de 6% anual compuesto en forma continua durante el periodo de 3 años que el dinero fue depositado. ¿Cuánto depositó Andrew originalmente en la cuenta?

23. **Sociedades de inversión** Juan invirtió \$24,000 en una sociedad de inversión hace 5 años. Hoy su inversión vale \$34.616. Calcule la tasa de rendimiento anual efectiva de su inversión durante el periodo de 5 años.

24. **Programa de ahorro para la universidad** Los Blake han decidido iniciar un programa de ahorro mensual con el fin de prever la educación universitaria de su hijo. ¿Cuánto deben depositar al final de cada mes en una cuenta de ahorros que genera intereses a una tasa de 8% anual compuesto mensualmente, para que, al final del décimo año, el monto acumulado sea de \$40,000?

25. **Retiro de cuentas** Mai Lee ha aportado \$200 al final de cada mes en su cuenta de retiro para empleados de su empresa durante los últimos 10 años. Su empleador ha igualado su aportación de cada mes. Si la cuenta ha ganado intereses a una tasa de 8% anual compuesto mensualmente durante el periodo de 10 años, determine la cantidad que Mai Lee tiene ahora en su cuenta de retiro.

26. **Arrendamiento de automóviles** María ha alquilado un automóvil por 4 años a razón de \$300 al mes. Si el dinero tiene un valor de 5% anual compuesto mensualmente, ¿cuál es el pago en efectivo equivalente (valor presente) de esta anualidad? (Suponga que los pagos se hacen al final de cada mes.)

27. **Plazos de financiamiento** Peggy hizo un pago inicial de \$400 para la compra de muebles nuevos. Para pagar el saldo del precio de compra, ha obtenido un préstamo de su banco a 12% anual compuesto mensualmente. Bajo los términos de su acuerdo de financiamiento, está obligada a hacer pagos de \$75.32 al final de cada mes durante 24 meses. ¿Cuál fue el precio de compra de los muebles?

28. **FINANCIAMIENTO DE UNA CASA** Los Turner compraron una casa por $150,000. Hicieron un pago inicial de $30,000 y obtuvieron una hipoteca con intereses que se cobran a razón de 9% anual sobre el saldo insoluto. (El cálculo de intereses se hace al final de cada mes.) Suponga que el préstamo se amortiza en 30 años.
a. ¿Qué pago mensual deberán hacer los Turner?
b. ¿Cuál será el pago total de intereses?
c. ¿Cuál será su capital (sin tomar en cuenta la depreciación) después de 10 años?

29. **FINANCIAMIENTO DE UNA CASA** Remítase al ejercicio 28. Si el préstamo se amortiza en 15 años:
a. ¿Qué pago mensual deberán hacer los Turner?
b. ¿Cuál será el pago total de intereses?
c. ¿Cuál será su capital (sin tomar en cuenta la depreciación) después de 10 años?

30. **FONDOS DE AMORTIZACIÓN** La gerencia de una empresa prevé un gasto de capital de $500,000 en 5 años con el propósito de comprar maquinaria de repuesto. Para financiar esta compra, se creará un fondo de amortización que devenga intereses a una tasa de 10% anual compuesto trimestralmente. Determinar la cantidad de cada una de las cuotas (iguales) trimestrales que deben ser depositadas en el fondo. (Suponga que los pagos se hacen al final de cada trimestre.)

31. **FONDOS DE AMORTIZACIÓN** La gerencia de una asociación de condóminos prevé un gasto de capital de $120,000 en 2 años con el propósito de pintar el exterior del condominio. Para pagar este mantenimiento, se establecerá un fondo de amortización que devenga intereses a una tasa de 5.8% anual compuesto mensualmente. Determine la cantidad de cada uno de los plazos mensuales (iguales) que la asociación deberá depositar en el fondo al final de cada mes durante los próximos 2 años.

32. **PAGOS DE TARJETAS DE CRÉDITO** El saldo pendiente en la cuenta de la tarjeta de crédito de Bill es de $3200. El banco emisor de la tarjeta de crédito hace cargos por interés de 18.6% anual compuesto mensualmente. Si Bill decide pagar este saldo en cuotas mensuales iguales al final de cada mes durante los próximos 18 meses, ¿de cuánto será su pago mensual? ¿Cuál es la tasa de interés efectiva que el banco carga a Bill?

33. **PLANEACIÓN FINANCIERA** Los padres de Matt han acordado aportar $250 por mes para el alquiler de su departamento en su primer año en la universidad. El plan es que los padres de Matt depositen la suma total en la cuenta bancaria de Matt el 1 de agosto y luego él retirará $250 el primer día de cada mes a partir del 1 de septiembre y hasta el 1 de mayo del año siguiente. Si el banco paga intereses sobre el saldo a una tasa de 5% anual compuesto mensualmente, ¿cuánto deben depositar los padres de Matt en su cuenta?

CAPÍTULO 4 Antes de continuar . . .

1. Calcule la cantidad acumulada al final de 3 años si se depositan $2000 en una cuenta que paga intereses a una tasa de 8% anual compuesta mensualmente.

2. Calcule la tasa de interés efectiva correspondiente a una tasa nominal de 6% anual compuesta diariamente.

3. Calcule el valor futuro de una anualidad ordinaria de $800 por semana por 10 años al 6% anual compuesto semanalmente.

4. Calcule el pago mensual necesario para amortizar un préstamo de $100,000 durante 10 años con interés devengado a una tasa de 8% anual compuesta mensualmente.

5. Calcule el pago semanal necesario para acumular una suma de $15,000 durante 6 años con interés devengados a una tasa de 10% anual compuesta semanalmente.

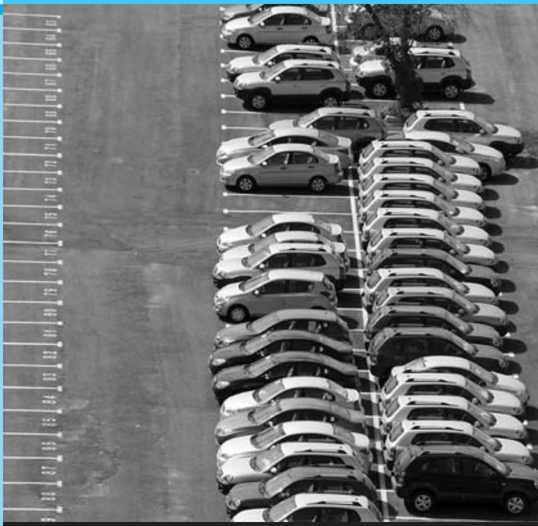
6. **a.** Calcule la suma de los 10 primeros términos de la progresión aritmética 3, 7, 11, 15, 19, ...
b. Calcule la suma de los 8 primeros términos de la progresión geométrica $\frac{1}{2}$, 1, 2, 4, 8, ...

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES Y MATRICES

5

LAS ECUACIONES LINEALES con dos variables, estudiadas en el capítulo 2, pueden fácilmente extenderse al caso que involucra más de dos variables. Por ejemplo, una ecuación lineal con tres variables representa un plano en el espacio. En este capítulo vemos cómo algunos problemas del mundo real pueden formularse en términos de sistemas de ecuaciones lineales, y también desarrollamos dos métodos para resolverlos.

Además vemos cómo las *matrices* (arreglos rectangulares de números) se pueden utilizar para escribir sistemas de ecuaciones lineales en forma compacta. A continuación consideramos algunas aplicaciones de las matrices a la vida real.



Checkers Rent-A-Car planea ampliar su flotilla de automóviles el próximo trimestre. ¿Cómo deberían utilizar su presupuesto de 12 millones de dólares para satisfacer la demanda adicional esperada de automóviles compactos y grandes? En el ejemplo 5, de la página 307, veremos cómo encontrar la solución a este problema resolviendo un sistema de ecuaciones.

5.1 Sistemas de ecuaciones lineales: una introducción

Sistemas de ecuaciones

Recuerde que en las secciones 2.4 y 2.5 tuvimos que resolver dos ecuaciones lineales simultáneas con el fin de encontrar el *punto de equilibrio*. Estos son ejemplos de problemas del mundo real que exigen la solución de un **sistema de ecuaciones lineales** con dos o más variables. En este capítulo abordamos un estudio más estructurado de esos sistemas.

Comenzamos considerando un sistema de dos ecuaciones lineales con dos variables. Recuerde que este sistema se puede escribir en la forma general

$$\begin{aligned} ax + by &= h \\ cx + dy &= k \end{aligned} \qquad \textbf{(1)}$$

donde a, b, c, d, h y k son constantes reales y ni a y b, ni c y d son ambos cero.

Ahora estudiaremos la naturaleza de la **solución de un sistema de ecuaciones lineales** con más detalle. Recuerde que la gráfica de cada ecuación en el sistema (1) es una línea recta en el plano, de modo que geométricamente la solución del sistema es el (los) punto(s) de intersección de las dos rectas L_1 y L_2, representada por la primera y segunda ecuaciones del sistema.

Dadas dos rectas L_1 y L_2, *uno y sólo uno* de los siguientes eventos puede ocurrir:

a. L_1 y L_2 se cortan exactamente en un punto.
b. L_1 y L_2 son paralelas y coincidentes.
c. L_1 y L_2 son paralelas y distintas.

(Vea la figura 1.) En el primer caso, el sistema tiene una solución única que corresponde al único punto de intersección de las dos rectas. En el segundo caso, el sistema tiene una infinidad de soluciones correspondientes a los puntos que se encuentran en la misma recta. Por último, en el tercer caso, el sistema no tiene solución porque las dos rectas no se intersecan.

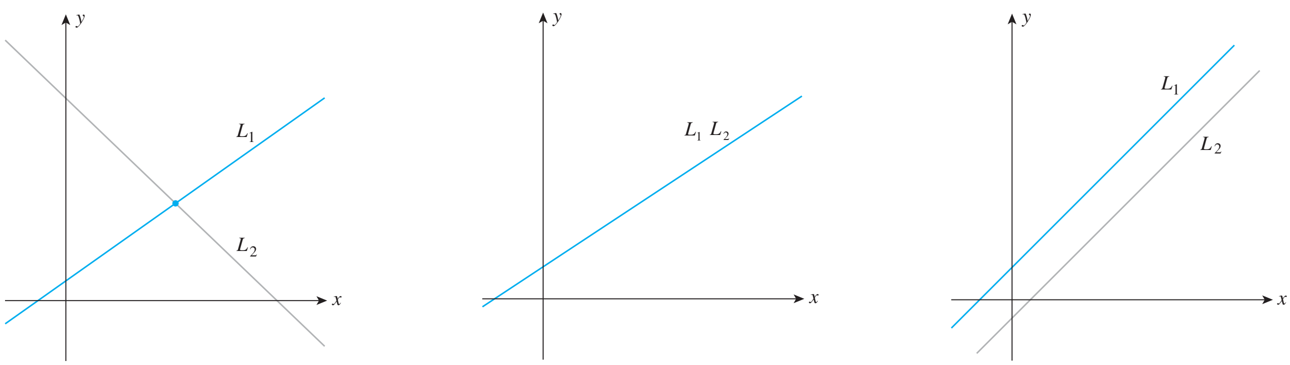


FIGURA **1**
(a) Solución única **(b)** Una infinidad de soluciones **(c)** No tiene solución

Explore y analice

Generalizar la discusión de esta página para el caso donde hay tres líneas rectas en el plano definido por tres ecuaciones lineales. ¿Qué pasa si hay n rectas definidas por n ecuaciones?

Ilustremos cada una de estas posibilidades considerando algunos ejemplos específicos.

1. Un sistema de ecuaciones con exactamente una solución Tómese el sistema

$$\begin{aligned} 2x - y &= 1 \\ 3x + 2y &= 12 \end{aligned}$$

Al resolver la primera ecuación para y en términos de x, se obtiene la ecuación

$$y = 2x - 1$$

Al sustituir esta expresión para y en la segunda ecuación da

$$\begin{aligned} 3x + 2(2x - 1) &= 12 \\ 3x + 4x - 2 &= 12 \\ 7x &= 14 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

Por último, al sustituir este valor de x en la expresión de y obtenida antes da

$$y = 2(2) - 1 = 3$$

Por tanto, la única solución del sistema está dada por $x = 2$ y $y = 3$. Geométricamente, las dos rectas representadas por las dos ecuaciones lineales que componen el sistema se intersecan en el punto (2, 3) (figura 2).

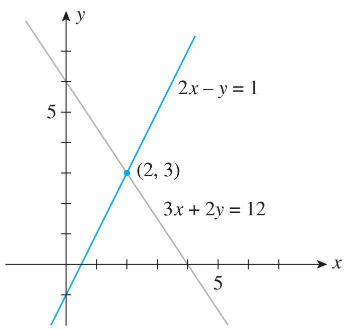


FIGURA **2**
Un sistema de ecuaciones con una solución.

Nota Podemos comprobar nuestro resultado al sustituir los valores $x = 2$ y $y = 3$ en las ecuaciones. Por tanto,

$$\begin{aligned} 2(2) - (3) &= 1 \quad ✓ \\ 3(2) + 2(3) &= 12 \quad ✓ \end{aligned}$$

Desde el punto de vista geométrico, acabamos de verificar que el punto (2, 3) se encuentra en ambas líneas. ■

2. Un sistema de ecuaciones con una infinidad de soluciones Tómese el sistema

$$\begin{aligned} 2x - y &= 1 \\ 6x - 3y &= 3 \end{aligned}$$

Al resolver la primera ecuación para y en términos de x, se obtiene la ecuación

$$y = 2x - 1$$

Al sustituir esta expresión para y en la segunda ecuación da

$$\begin{aligned} 6x - 3(2x - 1) &= 3 \\ 6x - 6x + 3 &= 3 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

que es una expresión verdadera. Este resultado se deriva del hecho de que la segunda ecuación es equivalente a la primera. (Para ver esto, sólo se multiplican ambos lados de la primera ecuación por 3.) Nuestros cálculos han puesto de manifiesto que el sistema de dos ecuaciones es equivalente a la ecuación $2x - y = 1$. Así, cualquier par ordenado de números (x, y) que satisfaga la ecuación $2x - y = 1$ (o $y = 2x - 1$) constituye una solución para el sistema.

En particular, mediante la asignación del valor de t a x, donde t es cualquier número real, nos encontramos con que $y = 2t - 1$ y que el par ordenado $(t, 2t - 1)$ es una solución del sistema. La variable t se llama **parámetro**. Por ejemplo, poner $t = 0$ da el punto $(0, -1)$ como solución del sistema y poner $t = 1$ da el punto $(1, 1)$ como otra solución. Ya que t representa cualquier número real, hay una infinidad de soluciones del sistema.

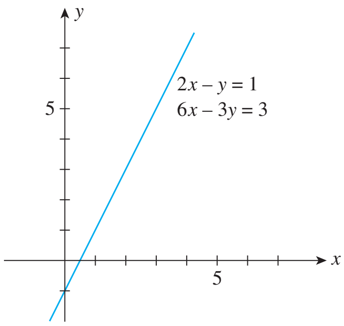


FIGURA 3
Un sistema de ecuaciones con una infinidad de soluciones, cada punto de la línea es una solución.

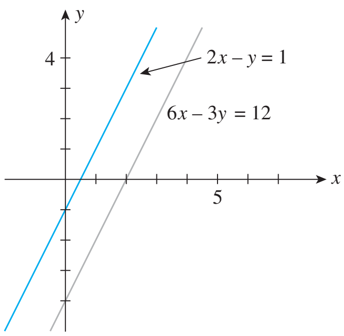


FIGURA 4
Un sistema de ecuaciones que no tiene solución.

Geométricamente, las dos ecuaciones en el sistema representan la misma recta y todas las soluciones del sistema son puntos que están sobre la recta (figura 3). Se dice que este sistema es **dependiente**.

3. Un sistema de ecuaciones que no tiene solución Tómese el sistema

$$\begin{aligned} 2x - y &= 1 \\ 6x - 3y &= 12 \end{aligned}$$

La primera ecuación es equivalente a $y = 2x - 1$. Al sustituir esta expresión para y en la segunda ecuación da

$$\begin{aligned} 6x - 3(2x - 1) &= 12 \\ 6x - 6x + 3 &= 12 \\ 0 &= 9 \end{aligned}$$

que es a todas luces imposible. Por tanto, no existe una solución para el sistema de ecuaciones. Para interpretar esta situación geométricamente, escribimos ambas ecuaciones en la forma pendiente – ordenada al origen

$$\begin{aligned} y &= 2x - 1 \\ y &= 2x - 4 \end{aligned}$$

Vemos a la primera que las rectas que representan estas ecuaciones son paralelas (cada una tiene pendiente 2) y distintas puesto que la primera interseca el eje y en -1 y la segunda interseca el eje y en -4 (figura 4). Se dice que los sistemas que no tienen solución, como éste, se llaman **inconsistentes**.

Explore y analice

1. Piense en un sistema compuesto de dos ecuaciones lineales con dos variables. ¿El sistema puede tener exactamente dos soluciones? ¿Exactamente tres soluciones? ¿Exactamente un número finito de soluciones?
2. Suponga que al menos una de las ecuaciones en un sistema compuesto de dos ecuaciones con dos variables es no lineal. ¿El sistema puede no tener solución? ¿Exactamente una solución? ¿Exactamente dos soluciones? ¿Exactamente un número finito de soluciones? ¿Una infinidad de soluciones? Ilustre cada respuesta con un esquema.

Nota Hemos utilizado el método de sustitución en la solución de estos sistemas. Si está familiarizado con el método de eliminación, tal vez desee volver a resolver cada uno de estos sistemas utilizando este método. Estudiaremos el método de eliminación en detalle en la sección 5.2. ■

En la sección 2.5 se presentan algunas aplicaciones del mundo real de los sistemas que involucran dos ecuaciones lineales con dos variables. He aquí un ejemplo que involucra un sistema de tres ecuaciones lineales con tres variables.

VIDEO

EJEMPLO DE APLICACIÓN 1 Programación de la producción-manufactura Ace Novelty quiere fabricar tres tipos de souvenirs: los tipos B y C. Fabricar un souvenir tipo A requiere 2 minutos en la máquina I, 1 minuto en la máquina II y 2 minutos en la máquina III. Un souvenir tipo B requiere 1 minuto en la máquina I, 3 minutos en la máquina II y 1 minuto en la máquina III. Un souvenir tipo C requiere 1 minuto en la máquina I y 2 minutos en cada una de las máquinas II y III. Hay 3 horas disponibles en la máquina I, 5 horas disponibles en la máquina II y 4 horas disponibles en la máquina III para procesar la orden. ¿Cuántos souvenirs de cada tipo debe fabricar Ace Novelty para utilizar todo el tiempo disponible? Formule, pero no resuelva el problema. (Resolveremos este problema en el ejemplo 7, sección 5.2.)

Solución La información dada puede ser tabulada de la siguiente manera:

	Tipo A	Tipo B	Tipo C	Tiempo disponible (min)
Máquina I	2	1	1	180
Máquina II	1	3	2	300
Máquina III	2	1	2	240

Tenemos que determinar el número de cada uno de los *tres* tipos de souvenirs que se harán. Por tanto, sean x, y y z las cantidades respectivas de souvenirs tipos A, B y C que se producirán. La cantidad total de tiempo que se utiliza la máquina I está dada por $2x + y + z$ minutos y debe ser igual a 180 minutos. Esto conduce a la ecuación

$$2x + y + z = 180 \qquad \text{Tiempo empleado en la máquina I}$$

Similares consideraciones sobre el uso de las máquinas II y III llevan a las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} x + 3y + 2z &= 300 \qquad \text{Tiempo empleado en la máquina II} \\ 2x + y + 2z &= 240 \qquad \text{Tiempo empleado en la máquina III} \end{aligned}$$

Dado que las variables x, y y z deben cumplir simultáneamente las condiciones representadas por las tres ecuaciones, la solución al problema se encuentra al resolver el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{aligned} 2x + y + z &= 180 \\ x + 3y + 2z &= 300 \\ 2x + y + 2z &= 24 \end{aligned}$$

■

Soluciones de sistemas de ecuaciones

Completaremos la solución del problema planteado en el ejemplo 1 más adelante en la página 258. Por el momento, sólo se verá la interpretación geométrica de un sistema de ecuaciones lineales, como el sistema en el ejemplo 1, con el fin de hacerse una idea sobre la naturaleza de la solución.

Un sistema lineal compuesto de tres ecuaciones lineales con tres variables x, y y z tiene la forma general

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z &= d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z &= d_3 \end{aligned} \tag{2}$$

Así como una ecuación lineal con dos variables representa una línea recta en el plano, se puede demostrar que una ecuación lineal $ax + by + cz = d$ (a, b y c no todos iguales a cero) con tres variables representa un plano en un espacio. Por tanto, cada ecuación en el sistema (2) representa un *plano* en un espacio, y la(s) *solución(es) del sistema* es (son) precisamente el (los) punto(s) de intersección de los tres planos definidos por los tres ecuaciones lineales que forman el sistema. Como antes, el sistema puede tener una y sólo una solución, una infinidad de soluciones o no tiene solución, dependiendo de si los planos se intersecan o no entre sí. La figura 5 ilustra cada una de estas posibilidades.

En la figura 5a, los tres planos se intersecan en un punto que corresponde a la situación en la que el sistema (2) tiene una solución única. La figura 5b representa una situación en la que hay una infinidad de soluciones al sistema. Aquí, los tres planos se intersecan a lo largo de una recta, y las soluciones están representadas por la infinidad de puntos que se encuentran sobre esta recta. En la figura 5c, los tres planos son paralelos y distintos, así que no hay punto en común a los tres planos; el sistema (2) no tiene solución en este caso.

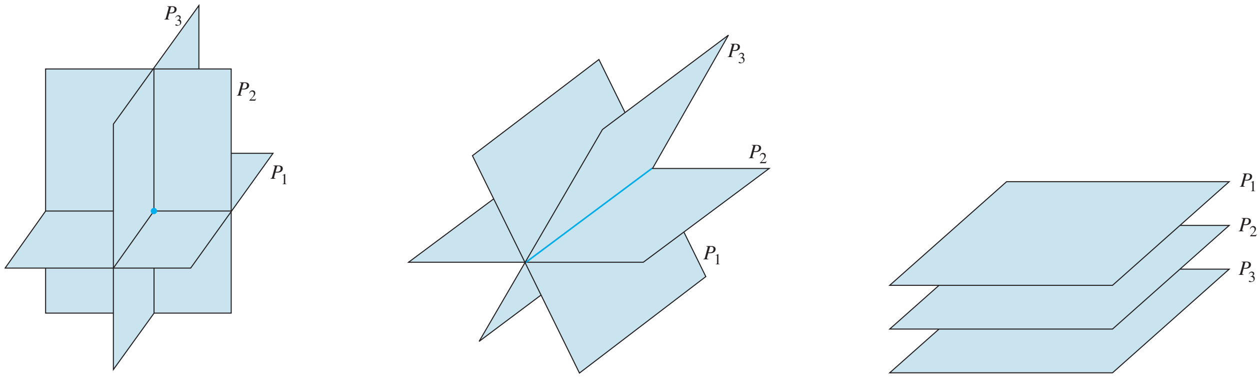


FIGURA 5
(a) Una solución única
(b) Una infinidad de soluciones
(c) No tiene solución

Nota La situación representada en la figura 5 no es de ninguna manera exhaustiva. Usted puede considerar varias otras orientaciones de los tres planos para ilustrar los tres posibles resultados en la solución de un sistema de ecuaciones lineales con tres variables. ■

Ecuaciones lineales con *n* variables

Una ecuación lineal con n variables, $x_1 + x_2, \ldots, x_n$ es una ecuación de la forma

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = c$$

donde $a_1 + a_2, \ldots, a_n$ (no todos iguales a cero) y c son constantes.

Por ejemplo, la ecuación

$$3x_1 + 2x_2 - 4x_3 + 6x_4 = 8$$

es una ecuación lineal con cuatro variables, x_1, x_2, x_3 y x_4.

Cuando el número de variables que intervienen en una ecuación lineal es superior a tres, ya no tenemos la interpretación geométrica que teníamos para los espacios dimensionales inferiores. Sin embargo, los conceptos algebraicos de los espacios dimensionales inferiores se generalizan para las dimensiones más altas. Por esta razón, una ecuación lineal con n variables, $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = c$, donde $a_1, a_2, \ldots, a_n$ son no todos iguales a cero, se conoce como *hiperplano n-dimensional*. Podemos interpretar la(s) solución(es) a un sistema que abarca un número finito de tales ecuaciones lineales para ser el (los) *punto(s) de intersección* de los hiperplanos definidos por las ecuaciones que componen el sistema. Como en el caso de los sistemas que incluyen dos o tres variables, se puede demostrar que sólo existen tres posibilidades con respecto a la naturaleza de la solución de un sistema como éste: (1) una solución única, (2) una infinidad de soluciones o (3) no tiene solución.

Explore y analice

Consulte la nota anterior.

Usando la orientación de tres planos, ilustre los resultados en la solución de un sistema de tres ecuaciones lineales con tres variables que puede ser sin solución o una infinidad de soluciones.

5.1 Ejercicios de autoevaluación

1. Determine si el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{aligned} 2x - 3y &= 12 \\ x + 2y &= 6 \end{aligned}$$

tiene (a) una solución única, (b) una infinidad de soluciones o (c) no tiene solución. Encuentre todas las soluciones toda vez que existan. Realice un esquema del conjunto de rectas descrito por el sistema.

2. Un granjero tiene 200 acres de tierras aptas para los cultivos A, B y C. El costo por acre de realizar los cultivos A, B y C es de \$40, \$60 y \$80, respectivamente. El agricultor tiene \$12,600 disponibles para el cultivo. Cada acre del cultivo A requiere 20 horas de trabajo, cada acre del cultivo B requiere 25 horas de trabajo y cada acre del cultivo C requiere 40 horas de trabajo. El agricultor tiene un máximo de 5950 horas de trabajo disponibles. Si desea utilizar toda su tierra cultivable, la totalidad del presupuesto y todo el trabajo disponibles, ¿cuántos acres de cada cultivo debe sembrar? Formule el problema, pero no lo resuelva.

Las soluciones a los ejercicios de autoevaluación 5.1 se encuentran en la página 249.

5.1 Preguntas de concepto

1. Suponga que le dan un sistema de dos ecuaciones lineales con dos variables.
   a. ¿Qué puede decir acerca de la(s) solución(es) del sistema de ecuaciones?
   b. Dé una interpretación geométrica de sus respuestas a la pregunta del inciso (a).

2. Suponga que le dan un sistema de dos ecuaciones lineales con dos variables.
   a. Explique lo que significa que el sistema sea dependiente.
   b. Explique lo que significa que el sistema sea inconsistente.

5.1 Ejercicios

En los ejercicios 1 a 12, determine si cada sistema de ecuaciones lineales tiene (a) una solución única, (b) una infinidad de soluciones o (c) no tiene solución. Encuentra todas las soluciones cuando existan.

1. $\begin{aligned} x - 3y &= -1 \\ 4x + 3y &= 11 \end{aligned}$

2. $\begin{aligned} 2x - 4y &= 5 \\ 3x + 2y &= 6 \end{aligned}$

3. $\begin{aligned} x + 4y &= 7 \\ \frac{1}{2}x + 2y &= 5 \end{aligned}$

4. $\begin{aligned} 3x - 4y &= 7 \\ 9x - 12y &= 14 \end{aligned}$

5. $\begin{aligned} x + 2y &= 7 \\ 2x - y &= 4 \end{aligned}$

6. $\begin{aligned} \frac{3}{2}x - 2y &= 4 \\ x + \frac{1}{3}y &= 2 \end{aligned}$

7. $\begin{aligned} 2x - 5y &= 10 \\ 6x - 15y &= 30 \end{aligned}$

8. $\begin{aligned} 5x - 6y &= 8 \\ 10x - 12y &= 16 \end{aligned}$

9. $\begin{aligned} 4x - 5y &= 14 \\ 2x + 3y &= -4 \end{aligned}$

10. $\begin{aligned} \frac{5}{4}x - \frac{2}{3}y &= 3 \\ \frac{1}{4}x + \frac{5}{3}y &= 6 \end{aligned}$

11. $\begin{aligned} 2x - 3y &= 6 \\ 6x - 9y &= 12 \end{aligned}$

12. $\begin{aligned} \frac{2}{3}x + y &= 5 \\ \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}y &= \frac{15}{4} \end{aligned}$

13. Determine el valor de k para el cual el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{aligned} 2x - y &= 3 \\ 4x + ky &= 4 \end{aligned}$$

no tiene solución.

14. Determine el valor de k para el cual el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{aligned} 3x + 4y &= 12 \\ x + ky &= 4 \end{aligned}$$

tiene una infinidad de soluciones. Luego encuentre todas las soluciones que corresponden a este valor de k.

En los ejercicios 15 a 27, formule pero no resuelva el problema. Se le pedirá resolver estos problemas en la siguiente sección.

15. AGRICULTURA La granja Johnson cuenta con 500 acres de tierra asignada para el cultivo de maíz y trigo. El costo de cultivar el maíz y el trigo (incluidas las semillas y la mano de obra) es de \$42 y \$30 por acre, respectivamente. Jacob Johnson tiene \$18,600 disponibles para realizar estos cultivos. Si desea utilizar todas las tierras asignadas y todo el presupuesto asignado para estos dos cultivos, ¿cuántos acres de cada cultivo debe sembrar?

16. **INVERSIONES** Michael Pérez tiene un total de \$2000 depositados en dos instituciones de ahorro. Una paga intereses a una tasa de 6% anual, mientras que la otra paga intereses a una tasa de 8% anual. Si Michael obtuvo un total de \$144 en intereses durante un año, ¿cuánto se ha depositado en cada institución?

17. **MEZCLAS** Cofee Shoppe vende una mezcla de café a partir de dos tipos de café, uno cuesta \$5 la libra y el otro, \$6. Si el café mezclado se vende a \$5.60 la libra, encuentre la cantidad de cada tipo de café que se utiliza para obtener la mezcla deseada. Suponga que el peso del café mezclado es de 100 libras.

18. **INVERSIONES** Kelly Fisher tiene un total de \$30,000 invertidos en dos bonos municipales que tienen un rendimiento de 8% y 10% de interés anual, respectivamente. Si el interés que recibe Kelly de los bonos en un año es de \$2640, ¿cuánto ha invertido en cada bono?

19. **NÚMERO DE PASAJEROS** El número total de pasajeros que viajan en un autobús urbano durante el turno matutino es de 1000. Si la tarifa infantil es de \$0.50, la tarifa para adultos es de \$1.50 y el total de ingresos de los pasajes en ese turno es de \$1300, ¿cuántos niños y cuántos adultos viajaron en el autobús durante el turno de la mañana?

20. **BIENES RAÍCES** Cantwell Associates, un desarrollador de bienes raíces, tiene previsto construir un nuevo complejo de apartamentos compuesto por departamentos de una, dos y tres recámaras. Está previsto un total de 192 departamentos y el número de departamentos de dos y tres recámaras será igual al número de departamentos de una recámara. Si el número de departamentos de una recámara será tres veces el número de departamentos de tres recámaras, encuentre el número de departamentos de cada tipo que habrá en el complejo.

21. **PLANEACIÓN DE INVERSIONES** Los rendimientos anuales de tres inversiones de Carrington Sid ascendieron a \$21,600: 6% en una cuenta de ahorros, 8% en fondos de inversión y 12% en bonos. El importe de la inversión de Sid en bonos fue el doble de la cantidad de su inversión en la cuenta de ahorros y los intereses devengados por su inversión en bonos fue igual a los dividendos que recibió por su inversión en fondos de inversión. Calcule la cantidad de dinero que depositó en cada tipo de inversión.

22. **CLUB DE INVERSIÓN** Un club privado de inversión tiene \$200,000 destinados a la inversión en acciones. Para llegar a un nivel de riesgo total aceptable, las acciones que la gerencia está considerando han sido clasificadas en tres categorías: alto riesgo, riesgo medio y bajo riesgo. La gerencia estima que las acciones de alto riesgo tendrán una tasa de rendimiento de 15% anual; las acciones de riesgo medio, l0% anual, y las acciones de bajo riesgo, 6% anual. Los miembros han decidido que la inversión en acciones de bajo riesgo debe ser igual a la suma de las inversiones en acciones de las otras dos categorías. Determine cuánto debe invertir el club en cada tipo de acciones si el objetivo de inversión es tener un rendimiento de \$20,000 anual sobre la inversión total. (Suponga que se invierte todo el dinero disponible para la inversión.)

23. **MEZCLA DE FERTILIZANTES** Lawnco produce tres grados de fertilizantes comerciales. Un saco de 100 libras de fertilizante grado A contiene 18 libras de nitrógeno, 4 libras de fosfato y 5 libras de potasio. Un saco de 100 libras de fertilizante grado B contiene 20 libras de nitrógeno y 4 libras tanto de fosfato como de potasio. Un saco de 100 libras de fertilizante grado C contiene 24 libras de nitrógeno, 3 libras de fosfato y 6 libras de potasio. Cuántos sacos de 100 libras de cada uno de los tres grados de fertilizante debe producir Lawnco si están disponibles 26,400 libras de nitrógeno, 4900 libras de fosfato y 6200 libras de potasio, y se utilizan todos los nutrientes?

24. **INGRESOS DE TAQUILLA** Un teatro tiene un aforo de 900 espectadores y sus tarifas son de \$4 para niños, \$6 para estudiantes y \$8 para adultos. En determinada función con asistencia completa, había la mitad de adultos que la cantidad de niños y estudiantes combinados. Los ingresos ascendieron a \$5600. ¿Cuántos niños asistieron al teatro?

25. **DECISIONES GERENCIALES** La gerencia de Hartman Rent-A-Car ha asignado \$1.5 millones para comprar una flotilla de automóviles nuevos que consiste en vehículos compactos, medianos y grandes. Los compactos cuestan \$12,000 cada uno, los medianos tienen un costo de \$18,000 cada uno y los grandes cuestan \$24,000 cada uno. Si Hartman compra el doble de automóviles compactos que el total de medianos y el número total de automóviles que se comprarán es de 100, determine la cantidad de automóviles de cada tipo que se comprarán. (Suponga que se utilizará todo el presupuesto.)

26. **CLUBES DE INVERSIÓN** La gerencia de un club de inversión privado tiene un fondo de \$200,000 destinados a la inversión en acciones. Para alcanzar un nivel general aceptable de riesgo, las acciones que la gerencia está considerando se han clasificado en tres categorías: alto riesgo, riesgo medio y bajo riesgo. La gerencia estima que las acciones de alto riesgo tendrán una tasa de rendimiento de 15% anual; las acciones de riesgo medio, 10% anual, y las acciones de bajo riesgo, 6% anual. La inversión en acciones de bajo riesgo debe ser el doble de la suma de las inversiones en acciones de las otras dos categorías. Si el objetivo de inversión es tener una tasa de rendimiento promedio de 9% anual sobre la inversión total, determine la cantidad que el club debe invertir en cada tipo de acción. (Suponga que se utiliza todo el dinero disponible para invertir.)

27. **PLANEACIÓN DE DIETA** Un nutriólogo desea establecer una dieta en torno a tres comidas. El porcentaje de los requerimientos diarios de proteínas, carbohidratos y hierro contenido en cada onza de las tres comidas se resume en la siguiente tabla:

	Comida I	Comida II	Comida III
Proteínas (%)	10	6	8
Carbohidratos (%)	10	12	6
Hierro (%)	5	4	12

Determine cuántas onzas de cada comida debe incluir el nutriólogo en la dieta para satisfacer exactamente las necesidades diarias de proteínas, carbohidratos y hierro (100% de cada uno).

En los ejercicios 28 a 30 determine si la afirmación es verdadera o falsa. Si es verdadera, explique por qué. Si es falsa, dé un ejemplo para mostrar por qué lo es.

28. Un sistema compuesto de dos ecuaciones lineales debe tener por lo menos una solución si las líneas rectas que representan estas ecuaciones no son paralelas.

29. Suponga que las líneas rectas representadas por un sistema de tres ecuaciones lineales con dos variables son paralelas entre sí. Entonces el sistema no tiene solución o tiene infinidad de soluciones.

30. Si por lo menos dos de las tres rectas representadas por un sistema compuesto de tres ecuaciones lineales con dos variables son paralelas, entonces el sistema no tiene solución.

5.1 Soluciones de los ejercicios de autoevaluación

1. Al resolver la primera ecuación para y en términos de x, tenemos

$$y = \frac{2}{3}x - 4$$

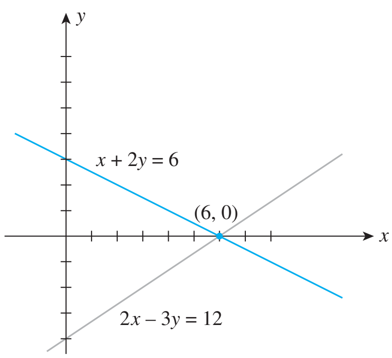
A continuación, al sustituir este resultado en la segunda ecuación del sistema, encontramos

$$\begin{aligned} x + 2\left(\frac{2}{3}x - 4\right) &= 6 \\ x + \frac{4}{3}x - 8 &= 6 \\ \frac{7}{3}x &= 14 \\ x &= 6 \end{aligned}$$

Al sustituir este valor de x en la expresión de y obtenida antes, tenemos

$$y = \frac{2}{3}(6) - 4 = 0$$

Por tanto, el sistema tiene la solución única $x = 6$ y $y = 0$. Ambas líneas se muestran en la figura adjunta.



2. Sean x, y y z el número de acres del cultivo A, cultivo B y cultivo C, respectivamente, para ser cultivadas. Entonces, la condición de que se utilice toda la tierra cultivable se traduce en la ecuación

$$x + y + z = 200$$

A continuación, el costo total incurrido en el cultivo de los tres cultivos es $40x + 60y + 80z$, y puesto que todo el presupuesto debe ser gastado, tenemos

$$40x + 60y + 80z = 12{,}600$$

Por último, la cantidad de mano de obra necesaria para los tres cultivos es de $20x + 25y + 40z$ horas, y puesto que toda la mano de obra disponible se utilizará, tenemos

$$20x + 25y + 40z = 5950$$

Por tanto, la solución se encuentra al resolver el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{aligned} x + y + z &= 200 \\ 40x + 60y + 80z &= 12{,}600 \\ 20x + 25y + 40z &= 5{,}950 \end{aligned}$$

5.2 Sistemas de ecuaciones lineales: soluciones únicas

El método de Gauss-Jordan

El método de sustitución utilizado en la sección 5.1 se adapta bien a la solución de un sistema de ecuaciones lineales cuando el número de ecuaciones lineales y de variables es pequeño. Sin embargo, para sistemas grandes, los pasos a seguir en el procedimiento se vuelven difíciles de manejar.

El **método de eliminación de Gauss-Jordan** es una técnica adecuada para resolver sistemas de ecuaciones lineales de cualquier tamaño. Una de las ventajas de esta técnica es su capacidad de adaptación a la computadora. Este método consiste en una secuencia de operaciones en un sistema de ecuaciones lineales para obtener en cada etapa un **sistema equivalente**; es decir, un sistema que tiene la misma solución que el sistema original. La reducción es completa cuando el sistema original se ha transformado a cierta forma estándar cuya solución puede ser fácil de leer.

Las operaciones del método de eliminación de Gauss-Jordan son

1. Intercambie dos ecuaciones cualesquiera.
2. Sustituya una ecuación por un múltiplo (diferente de cero) de ella misma.
3. Sustituya una ecuación por la suma de ella misma con un múltiplo de cualquier otra ecuación.

Para ilustrar el método de eliminación de Gauss-Jordan para resolver sistemas de ecuaciones lineales, apliquémoslo a la solución del siguiente sistema:

$$\begin{aligned} 2x + 4y &= 8 \\ 3x - 2y &= 4 \end{aligned}$$

Comenzamos trabajando con la primera columna, o x. En primer lugar, transformamos el sistema en un sistema equivalente en el cual el coeficiente de x en la primera ecuación es 1:

$$\begin{aligned} 2x + 4y &= 8 \\ 3x - 2y &= 4 \end{aligned} \tag{3a}$$

$$\begin{aligned} x + 2y &= 4 \\ 3x - 2y &= 4 \end{aligned} \tag{3b}$$

Se multiplica la primera ecuación en (3a) por ½ (operación 2).

A continuación eliminamos x de la segunda ecuación:

$$\begin{aligned} x + 2y &= 4 \\ -8y &= -8 \end{aligned} \tag{3c}$$

Se reemplaza la segunda ecuación en (3b) por la suma de $-3 \times$ la primera ecuación + la segunda ecuación (operación 3):

$$\begin{array}{r} -3x - 6y = -12 \\ 3x - 2y = 4 \\ \hline -8y = -8 \end{array}$$

Luego, obtenemos el siguiente sistema equivalente en los que el coeficiente de y en la segunda ecuación es de 1:

$$\begin{aligned} x + 2y &= 4 \\ y &= 1 \end{aligned} \tag{3d}$$

Se multiplica la segunda ecuación en (3c) por $-\frac{1}{8}$ (operación 2).

A continuación eliminamos y en la primera ecuación:

$$\begin{aligned} x \qquad &= 2 \\ y &= 1 \end{aligned}$$

Se reemplaza la primera ecuación en (3d) por la suma de $-2 \times$ la segunda ecuación + la primera ecuación (operación 3):

$$\begin{array}{r} x + 2y = -4 \\ -2y = -2 \\ \hline x \qquad = 2 \end{array}$$

Este sistema ya está en forma estándar, y se puede leer la solución del sistema (3a) como $x = 2$ y $y = 1$. También podemos expresar esta solución como (2, 1) e interpretarla geométricamente como el punto de intersección de las dos rectas representadas por las dos ecuaciones lineales que componen el sistema de ecuaciones dado.

Veamos otro ejemplo, relacionado con un sistema de tres ecuaciones lineales y tres variables.

EJEMPLO 1 Resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} 2x + 4y + 6z &= 22 \\ 3x + 8y + 5z &= 27 \\ -x + y + 2z &= 2 \end{aligned}$$

Solución En primer lugar, transformamos este sistema en un sistema equivalente donde el coeficiente de x en la primera ecuación es 1:

$$\begin{aligned} 2x + 4y + 6z &= 22 \\ 3x + 8y + 5z &= 27 \\ -x + y + 2z &= 2 \end{aligned} \tag{4a}$$

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 11 \\ 3x + 8y + 5z &= 27 \\ -x + y + 2z &= 2 \end{aligned} \tag{4b}$$

Se multiplica la primera ecuación en (4a) por $\frac{1}{2}$.

A continuación eliminamos la variable x de todas las ecuaciones, excepto de la primera:

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 11 \\ 2y - 4z &= -6 \\ -x + y + 2z &= 2 \end{aligned} \tag{4c}$$

Se reemplaza la segunda ecuación en (4b) por la suma de $-3 \times$ la primera ecuación + la segunda ecuación:

$$\begin{array}{r} -3x - 6y - 9z = -33 \\ 3x + 8y + 5z = 27 \\ \hline 2y - 4z = -6 \end{array}$$

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 11 \\ 2y - 4z &= -6 \\ 3y + 5z &= 13 \end{aligned} \tag{4d}$$

Se reemplaza la tercera ecuación en (4c) por la suma de la primera ecuación +la tercera ecuación:

$$\begin{array}{r} x + 2y + 3z = 11 \\ -x + y + 2z = 2 \\ \hline 3y + 5z = 13 \end{array}$$

Luego transformamos el sistema (4d) en otro sistema equivalente, en el cual el coeficiente de y en la segunda ecuación sea 1:

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 11 \\ y - 2z &= -3 \\ 3y + 5z &= 13 \end{aligned} \tag{4e}$$

Se multiplica la segunda ecuación en (4d) por $\frac{1}{2}$.

Ahora eliminamos y de todas las ecuaciones, excepto de la segunda, utilizando la operación 3 del método de eliminación:

$$\begin{aligned} x \quad + 7z &= 17 \\ y - 2z &= -3 \\ 3y + 5z &= 13 \end{aligned} \tag{4f}$$

Se reemplaza la primera ecuación de (4e) por la suma de la primera ecuación + (-2) $\times$ la segunda ecuación:

$$\begin{array}{r} x + 2y + 3z = 11 \\ -2y + 4z = 6 \\ \hline x \quad + 7z = 17 \end{array}$$

$$\begin{aligned} x \quad + 7z &= 17 \\ y - 2z &= -3 \\ 11z &= 22 \end{aligned} \tag{4g}$$

Se reemplaza la tercera ecuación en (4f) por la suma de $(-3) \times$ la segunda ecuación + la tercera ecuación:

$$\begin{array}{r} -3y + 6z = 9 \\ 3y + 5z = 13 \\ \hline 11z = 22 \end{array}$$

Multiplicar la tercera ecuación por $\frac{1}{11}$ en (4g) da como resultado el sistema

$$\begin{aligned} x \qquad + 7z &= 17 \\ y - 2z &= -3 \\ z &= 2 \end{aligned}$$

Eliminar z en todas las ecuaciones, excepto en la tercera (¡inténtelo!), da como resultado el sistema

$$\begin{aligned} x \qquad &= 3 \\ y \quad &= 1 \\ z &= 2 \end{aligned} \tag{4h}$$

En su forma final, la solución del sistema dado de ecuaciones ¡se puede leer fácilmente! Tenemos que $x = 3$, $y = 1$ y $z = 2$. Geométricamente, el punto (3, 1, 2) es la intersección de los tres planos descritos por las tres ecuaciones que componen el sistema dado. ■

Matrices aumentadas

Observe en el ejemplo anterior que las variables x, y y z no desempeñan ningún papel importante en cada paso del proceso de reducción, excepto como un recordatorio de la posición de cada coeficiente en el sistema. Con la ayuda de las **matrices**, que son arreglos rectangulares de números, podemos eliminar la escritura de las variables en cada paso de la reducción y así ahorrarnos una gran cantidad de trabajo. Por ejemplo, el sistema

$$\begin{aligned} 2x + 4y + 6z &= 22 \\ 3x + 8y + 5z &= 27 \\ -x + y + 2z &= 2 \end{aligned} \tag{5}$$

puede ser representado por la matriz

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 2 & 4 & 6 & 22 \\ 3 & 8 & 5 & 27 \\ -1 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right] \tag{6}$$

Matriz aumentada que representa el sistema (5)

La submatriz conformada por las tres primeras columnas de la matriz (6) se llama **matriz de coeficientes** del sistema (5). La matriz en sí, (6), se conoce como **matriz aumentada** del sistema (5), ya que se obtiene al unirse a la matriz de coeficientes, la columna (matriz) de constantes. La línea vertical separa la columna de las constantes de la matriz de coeficientes.

El siguiente ejemplo muestra la cantidad de trabajo que se puede ahorrar mediante el uso de matrices en lugar de la representación estándar de los sistemas de ecuaciones lineales.

EJEMPLO 2 Escribir la matriz aumentada correspondiente a cada sistema equivalente dado de (4a) a (4h).

Solución La secuencia de matrices aumentadas es la siguiente.

Sistema equivalente	Matriz aumentada	
a. $\begin{aligned} 2x + 4y + 6z &= 22 \\ 3x + 8y + 5z &= 27 \\ -x + y + 2z &= 2 \end{aligned}$	$\left[\begin{array}{rrr\|r} 2 & 4 & 6 & 22 \\ 3 & 8 & 5 & 27 \\ -1 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right]$	**(7a)**
b. $\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 11 \\ 3x + 8y + 5z &= 27 \\ -x + y + 2z &= 2 \end{aligned}$	$\left[\begin{array}{rrr\|r} 1 & 2 & 3 & 11 \\ 3 & 8 & 5 & 27 \\ -1 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right]$	**(7b)**

c.
$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 11 \\ 2y - 4z &= -6 \\ -x + y + 2z &= 2 \end{aligned} \qquad \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 3 & 11 \\ 0 & 2 & -4 & -6 \\ -1 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right] \tag{7c}$$

d.
$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 11 \\ 2y - 4z &= -6 \\ 3y + 5z &= 13 \end{aligned} \qquad \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 3 & 11 \\ 0 & 2 & -4 & -6 \\ 0 & 3 & 5 & 13 \end{array}\right] \tag{7d}$$

e.
$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 11 \\ y - 2z &= -3 \\ 3y + 5z &= 13 \end{aligned} \qquad \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 3 & 11 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 3 & 5 & 13 \end{array}\right] \tag{7e}$$

f.
$$\begin{aligned} x \qquad + 7z &= 17 \\ y - 2z &= -3 \\ 3y + 5z &= 13 \end{aligned} \qquad \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 7 & 17 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 3 & 5 & 13 \end{array}\right] \tag{7f}$$

g.
$$\begin{aligned} x \qquad + 7z &= 17 \\ y - 2z &= -3 \\ 11z &= 22 \end{aligned} \qquad \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 7 & 17 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 11 & 22 \end{array}\right] \tag{7g}$$

h.
$$\begin{aligned} x &= 3 \\ y &= 1 \\ z &= 2 \end{aligned} \qquad \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \tag{7h}$$

La matriz aumentada en (7h) es un ejemplo de una matriz en forma escalonada reducida. En general, una matriz aumentada con m renglones y n columnas (llamada matriz $m \times n$) está en **forma escalonada reducida** siempre que cumpla las siguientes condiciones.

Forma escalonada reducida de una matriz

1. Cada renglón compuesto enteramente de ceros se encuentra por debajo de todos los renglones con entradas diferentes de cero.
2. La primera entrada distinta de cero en cada renglón (distinto de cero) es 1 (denominado **entrada principal 1**).
3. En cualquiera de los dos renglones sucesivos (distinto de cero), la entrada principal 1 en el renglón inferior se encuentra a la derecha de la entrada principal 1 en la fila superior.
4. Si una columna de la matriz de coeficientes contiene la entrada principal 1, entonces las otras entradas de esa columna son ceros.

EJEMPLO 3 Determinar cuál de las siguientes matrices están en forma escalonada reducida. Si una matriz no está en dicha forma, establecer la condición que se viola.

a. $\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$ **b.** $\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$ **c.** $\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$

d. $\left[\begin{array}{rrr|r} 0 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$ **e.** $\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right]$ **f.** $\left[\begin{array}{rr|r} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

g. $\left[\begin{array}{rrr|r} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right]$

Solución Las matrices de los incisos (a)-(c) están en forma escalonada reducida.

d. Esta matriz no está en forma escalonada reducida. Se violan las condiciones 3 y 4: la entrada principal 1 en el renglón 2 se encuentra a la izquierda de la entrada principal 1 en el renglón 1. Además, la columna 3 contiene una entrada principal 1 en el renglón 3 y un elemento distinto de cero por encima de ella.

e. Esta matriz no está en forma escalonada reducida. Se violan las condiciones 2 y 4: la primera entrada distinta de cero en el renglón 3 es un 2, no un 1. Además, la columna 3 contiene una entrada principal 1 y tiene una entrada distinta de cero por debajo de ella.

f. Esta matriz no está en forma escalonada reducida. Se viola la condición 2: la primera entrada distinta de cero en el renglón 2 no es una entrada principal 1.

g. Esta matriz no está en forma escalonada reducida. Se viola la condición 1: el renglón 1 consta totalmente de ceros y no se encuentra debajo de los renglones distintas de cero. ■

La discusión anterior sugiere la siguiente adaptación del método de eliminación de Gauss-Jordan en la solución de sistemas de ecuaciones lineales usando matrices. En primer lugar, las tres operaciones en las ecuaciones de un sistema (vea la página 250) se traducen en las siguientes **operaciones por renglón** sobre las matrices aumentadas correspondientes.

Operaciones por renglón

1. Intercambie dos renglones cualesquiera.
2. Sustituya cualquier renglón por un múltiplo (diferente de cero) de él mismo.
3. Sustituya cualquier renglón por la suma de ese renglón con el múltiplo de cualquier otro renglón.

Obtuvimos las matrices aumentadas en el ejemplo 2 utilizando las mismas operaciones que en el sistema de ecuaciones equivalente en el ejemplo 1.

Para ayudarnos a describir el método de eliminación de Gauss-Jordan utilizando matrices, definiremos algunos términos. Empezamos por definir qué se entiende por una **columna unitaria**.

Columna unitaria

Una columna en una matriz de coeficientes se denomina **columna unitaria** si una de las entradas en la columna es 1 y las otras entradas son ceros.

Por ejemplo, en la matriz de coeficientes de (7d), sólo la primera columna tiene forma unitaria; en la matriz de coeficientes de (7h), las tres columnas tienen forma unitaria. Ahora, la secuencia de las operaciones por renglón que transforma la matriz aumentada (7a) en la matriz equivalente (7d) donde la primera columna

$$\begin{matrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{matrix}$$

de (7a) se transforma en la columna unitaria

$$\begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}$$

se dice que **pivotea** la matriz alrededor del elemento (número) 2. Del mismo modo, hemos pivoteado alrededor del elemento 2 en la segunda columna de (7d), que se muestra en un círculo,

$$\begin{matrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{matrix}$$

con el fin de obtener la matriz aumentada (7g). Por último, al pivotear sobre el elemento 11 en la columna 3 (7g)

$$\begin{matrix} 7 \\ -2 \\ 11 \end{matrix}$$

conduce a la matriz aumentada (7h), en la que todas las columnas a la izquierda de la línea vertical tienen forma unitaria. El elemento sobre el que se pivotea una matriz se llama *elemento pivote.*

Antes de ver el siguiente ejemplo, introduciremos la siguiente notación para los tres tipos de operaciones por renglón.

Notación para las operaciones por renglón

Sea R_i que denota el *i*ésimo renglón de una matriz, escribimos:

Operación 1 $R_i \leftrightarrow R_j$ que significa: intercambiar el renglón i con el renglón j.

Operación 2 cR_i que significa: sustituir el renglón i con c veces el renglón i.

Operación 3 $R_i + aR_j$ que significa: sustituir el renglón i con la suma del renglón i y a veces el renglón j.

EJEMPLO 4 Pivotear la matriz sobre el elemento circulado.

$$\left[\begin{array}{cc|c} 3 & 5 & 9 \\ 2 & 3 & 5 \end{array}\right]$$

Solución Usando la notación recién presentada, obtenemos

$$\left[\begin{array}{cc|c} 3 & 5 & 9 \\ 2 & 3 & 5 \end{array}\right] \xrightarrow{\frac{1}{3}R_1} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{5}{3} & 3 \\ 2 & 3 & 5 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2 - 2R_1} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{5}{3} & 3 \\ 0 & -\frac{1}{3} & -1 \end{array}\right]$$

La primera columna, que originalmente contenía la entrada 3, se encuentra ahora en forma unitaria, con un 1 donde estaba el elemento pivote, con lo que hemos concluido.

Solución alterna En la primera solución utilizamos la operación 2 para obtener un 1 donde estaba originalmente el elemento pivote. Alternativamente, podemos usar la operación 3 como sigue:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 3 & 5 & 9 \\ 2 & 3 & 5 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1 - R_2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 5 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2 - 2R_1} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -3 \end{array}\right]$$

■

Nota En el ejemplo 4, las dos matrices

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{5}{3} & 3 \\ 0 & -\frac{1}{3} & -1 \end{array}\right] \quad \text{y} \quad \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -3 \end{array}\right]$$

se ven muy diferentes, pero en realidad son equivalentes. Puede comprobar esto observando que ambas representan los sistemas de ecuaciones

$$\begin{aligned} x + \frac{5}{3}y &= 3 \\ -\frac{1}{3}y &= -1 \end{aligned} \qquad \text{y} \qquad \begin{aligned} x + 2y &= 4 \\ -y &= -3 \end{aligned}$$

respectivamente, y ambas tienen la misma solución: $x = -2$ y $y = 3$. El ejemplo 4 también muestra que a veces podemos evitar trabajar con fracciones utilizando una operación por renglón apropiada. ■

Un resumen del método de Gauss-Jordan es el siguiente.

El método de eliminación Gauss-Jordan

1. Escribir la matriz aumentada correspondiente al sistema lineal.
2. Intercambiar renglones (operación 1), si es necesario, para obtener una matriz aumentada en el que la primera entrada en el primer renglón sea distinta de cero. A continuación, pivotear la matriz sobre esta entrada.
3. Intercambiar el segundo renglón con cualquier renglón debajo de ella, si es necesario, para obtener una matriz aumentada donde la segunda entrada en el segundo renglón sea distinto de cero. Pivotear la matriz sobre esta entrada.
4. Continúe hasta que la matriz final esté en forma escalonada reducida.

Antes de escribir la matriz aumentada, asegúrese de escribir todas las ecuaciones con las variables a la izquierda y los términos constantes a la derecha del signo de igual. Además, asegúrese de que las variables están en el mismo orden en todas las ecuaciones.

EJEMPLO 5 Resolver el sistema de ecuaciones lineales dado por

$$\begin{aligned} 3x - 2y + 8z &= 9 \\ -2x + 2y + z &= 3 \\ x + 2y - 3z &= 8 \end{aligned} \tag{8}$$

Solución Utilizando el método de eliminación de Gauss-Jordan, se obtiene la siguiente secuencia de matrices aumentadas equivalentes:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 3 & -2 & 8 & 9 \\ -2 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -3 & 8 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1 + R_2} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 9 & 12 \\ -2 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -3 & 8 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[R_3 - R_1]{R_2 + 2R_1} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 9 & 12 \\ 0 & 2 & 19 & 27 \\ 0 & 2 & -12 & -4 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 9 & 12 \\ 0 & 2 & -12 & -4 \\ 0 & 2 & 19 & 27 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{2}R_2} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 9 & 12 \\ 0 & 1 & -6 & -2 \\ 0 & 2 & 19 & 27 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_3 - 2R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 9 & 12 \\ 0 & 1 & -6 & -2 \\ 0 & 0 & 31 & 31 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{31}R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 9 & 12 \\ 0 & 1 & -6 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[R_2 + 6R_3]{R_1 - 9R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

La solución del sistema (8) está dada por $x = 3$, $y = 4$ y $z = 1$. Esto puede verificarse por sustitución en el sistema (8) de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} 3(3) - 2(4) + 8(1) &= 9 \quad \checkmark \\ -2(3) + 2(4) + 1 &= 3 \quad \checkmark \\ 3 + 2(4) - 3(1) &= 8 \quad \checkmark \end{aligned}$$

■

Durante la búsqueda de un elemento que sirva de pivote, es importante tener en cuenta que usted puede trabajar sólo con el renglón que contiene el potencial pivote o cualquier renglón debajo de él. Para ver qué puede salir mal si esta advertencia no es tomada en cuenta, considere la siguiente matriz aumentada para algún sistema lineal:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \end{array}\right]$$

Observe que la columna 1 está en forma unitaria. El siguiente paso en el procedimiento de eliminación de Gauss-Jordan pide que se obtenga un elemento distinto de cero en la segunda posición del renglón 2. Si utiliza el renglón 1 (que está por encima del renglón en cuestión) para ayudarle a obtener el pivote, podría proceder de la siguiente manera:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \end{array}\right]$$

Como puede ver, no sólo hemos obtenido un elemento distinto de cero para servir como el siguiente pivote, además ya es un 1, evitando así el paso siguiente. Esto parece un buen movimiento. Pero cuidado, queda por hacer parte de nuestro trabajo anterior: la columna 1 ya no es una columna unitaria donde aparece un 1 en primer lugar. La decisión correcta en este caso es intercambiar el renglón 2 con el 3 en la primera matriz aumentada.

Explore y analice

1. ¿Puede la frase "un múltiplo (diferente de cero) de sí mismo" en una operación por renglón de tipo 2 ser sustituida por "un múltiplo de sí mismo"? Explique.
2. ¿Un renglón de una matriz aumentada puede ser sustituido por un renglón obtenido mediante la adición de una constante para cada elemento del renglón sin cambiar la solución del sistema de ecuaciones lineales? Explique.

El siguiente ejemplo ilustra cómo manejar una situación en la que la primera entrada en el renglón 1 de la matriz aumentada es cero.

EJEMPLO 6 Resolver el sistema de ecuaciones lineales dado por

$$\begin{aligned} 2y + 3z &= 7 \\ 3x + 6y - 12z &= -3 \\ 5x - 2y + 2z &= -7 \end{aligned}$$

Solución Utilizando el método de eliminación de Gauss-Jordan, se obtiene la siguiente secuencia de matrices aumentadas equivalentes:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 0 & 2 & 3 & 7 \\ 3 & 6 & -12 & -3 \\ 5 & -2 & 2 & -7 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \left[\begin{array}{rrr|r} 3 & 6 & -12 & -3 \\ 0 & 2 & 3 & 7 \\ 5 & -2 & 2 & -7 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{3}R_1} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -4 & -1 \\ 0 & 2 & 3 & 7 \\ 5 & -2 & 2 & -7 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_3 - 5R_1} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -4 & -1 \\ 0 & 2 & 3 & 7 \\ 0 & -12 & 22 & -2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{2}R_2} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -4 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & \frac{7}{2} \\ 0 & -12 & 22 & -2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[R_3 + 12R_2]{R_1 - 2R_2} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -7 & -8 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & \frac{7}{2} \\ 0 & 0 & 40 & 40 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{40}R_3} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -7 & -8 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & \frac{7}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[R_2 - \frac{3}{2}R_3]{R_1 + 7R_3} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

La solución del sistema está dada por $x = -1$, $y = 2$ y $z = 1$, lo que puede comprobarse sustituyendo en el sistema. ■

EJEMPLO DE APLICACIÓN 7 Programación de la producción-manufactura Completar la solución al ejemplo 1 en la sección 5.1, página 245.

Solución Para completar la solución del problema planteado en el ejemplo 1, recordar que la formulación matemática del problema llevó a los siguientes sistemas de ecuaciones lineales:

$$\begin{aligned} 2x + y + z &= 180 \\ x + 3y + 2z &= 300 \\ 2x + y + 2z &= 180 \end{aligned}$$

donde x, y y z representan la cantidad respectiva de souvenirs tipo A, tipo B y tipo C que se harán.

Al resolver el sistema anterior de ecuaciones lineales por el método de eliminación de Gauss-Jordan, se obtiene la siguiente secuencia de matrices aumentadas equivalentes:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 180 \\ 1 & 3 & 2 & 300 \\ 2 & 1 & 2 & 240 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 300 \\ 2 & 1 & 1 & 180 \\ 2 & 1 & 2 & 240 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[R_3 - 2R_1]{R_2 - 2R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 300 \\ 0 & -5 & -3 & -420 \\ 0 & -5 & -2 & -360 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{-\frac{1}{5}R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 300 \\ 0 & 1 & \frac{3}{5} & 84 \\ 0 & -5 & -2 & -360 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[R_3 + 5R_2]{R_1 - 3R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{5} & 48 \\ 0 & 1 & \frac{3}{5} & 84 \\ 0 & 0 & 1 & 60 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[R_2 - \frac{3}{5}R_3]{R_1 - \frac{1}{5}R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 36 \\ 0 & 1 & 0 & 48 \\ 0 & 0 & 1 & 60 \end{array}\right]$$

Por tanto, $x = 36$, $y = 48$ y $z = 60$; es decir, Ace Novelty debe fabricar 36 souvenirs de tipo A, 48 de tipo B y 60 de tipo C para poder utilizar todo el tiempo de máquina disponible. ■

5.2 Ejercicios de autoevaluación

1. Resuelva el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{aligned} 2x + 3y + z &= 6 \\ x - 2y + 3z &= -3 \\ 3x + 2y - 4z &= 12 \end{aligned}$$

utilizando el método de eliminación de Gauss-Jordan.

2. Un granjero tiene 200 acres de tierras aptas para sembrar los cultivos A, B y C. El costo por acre de sembrar el cultivo A, el cultivo B y el cultivo C es de \$40, \$60 y \$80, respectivamente. El agricultor tiene \$12,600 para la tierra cultivable. Cada acre del cultivo A requiere 20 horas de trabajo, cada acre del cultivo B requiere 25 horas de trabajo y cada acre del cultivo C requiere 40 horas de trabajo. El agricultor tiene un máximo de 5950 horas de trabajo disponibles. Si desea utilizar toda su tierra cultivable, la totalidad del presupuesto y todo el tiempo laboral disponibles, ¿cuántos acres de cada cultivo debe sembrar?

Las soluciones a los ejercicios de autoevaluación 5.2 se pueden encontrar en la página 263.

5.2 Preguntas de concepto

1. a. Explique lo que significa que dos sistemas de ecuaciones lineales sean equivalentes entre sí.

b. Dar el significado de la siguiente notación utilizada para las operaciones por renglón en el método de eliminación de Gauss-Jordan:

i. $R_i \leftrightarrow R_j$ **ii.** cR_i **iii.** $R_i + aR_j$

2. a. ¿Qué es una matriz aumentada? ¿Una matriz de coeficientes? ¿Una columna unitaria?

b. Explique qué se entiende por una operación pivote.

3. Suponga que una matriz tiene forma escalonada reducida.

a. ¿Cuál es la posición de un renglón compuesta por completo de ceros en relación con los renglones que tienen entradas distintas de cero?

b. ¿Cuál es la primera entrada distinta de cero en cada renglón?

c. ¿Cuál es la posición de la entrada principal 1 en renglones sucesivos distintos de cero?

d. Si una columna contiene una entrada principal 1, entonces ¿cuál es el valor de las otras entradas en esa columna?

5.2 Ejercicios

En los ejercicios 1 a 4 escriba la matriz aumentada correspondiente a cada sistema de ecuaciones.

1. $\begin{aligned} 2x - 3y &= 7 \\ 3x + y &= 4 \end{aligned}$

2. $\begin{aligned} 3x + 7y - 8z &= 5 \\ x + 3z &= -2 \\ 4x - 3y &= 7 \end{aligned}$

3. $\begin{aligned} -y + 2z &= 6 \\ 2x + 2y - 8z &= 7 \\ 3y + 4z &= 0 \end{aligned}$

4. $\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 &= 0 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 &= 4 \\ 2x_2 - 3x_3 &= 5 \end{aligned}$

En los ejercicios 5 a 8 escriba el sistema de ecuaciones correspondiente a cada matriz aumentada.

5. $\left[\begin{array}{cc|c} 3 & 2 & -4 \\ 1 & -1 & 5 \end{array}\right]$

6. $\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 3 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & -2 & -3 \\ 4 & 0 & 3 & 2 \end{array}\right]$

7. $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 0 & 5 \\ 3 & -3 & 2 & 6 \end{array}\right]$

8. $\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 6 \\ 4 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

En los ejercicios 9 a 18 indique si la matriz está en forma escalonada reducida.

9. $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{array}\right]$

10. $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

11. $\left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 5 \end{array}\right]$

12. $\left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \end{array}\right]$

13. $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right]$

14. $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \end{array}\right]$

15. $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 6 \end{array}\right]$

16. $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -10 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

17. $\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

18. $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right]$

En los ejercicios 19 a 26 realice el pivoteo del sistema en torno al elemento circulado.

19. $\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 4 & 8 \\ 3 & 1 & 2 \end{array}\right]$

20. $\left[\begin{array}{cc|c} 3 & 2 & 6 \\ 4 & 2 & 5 \end{array}\right]$

21. $\left[\begin{array}{cc|c} -1 & 2 & 3 \\ 6 & 4 & 2 \end{array}\right]$

22. $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 \end{array}\right]$

23. $\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 6 & 12 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 3 & -1 & 2 & 4 \end{array}\right]$

24. $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 8 & 6 \\ -1 & 2 & 3 & 4 \end{array}\right]$

25. $\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ 5 & 6 & 2 & -4 \end{array}\right]$

26. $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & -3 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & -1 & 3 \end{array}\right]$

En los ejercicios 27 a 30 rellene las entradas que faltan realizando las operaciones por renglón indicadas para obtener las matrices escalonadas reducidas.

27. $$\left[\begin{array}{cc|c} 3 & 9 & 6 \\ 2 & 1 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow{\frac{1}{3}R_1} \left[\begin{array}{cc|c} \cdot & \cdot & \cdot \\ 2 & 1 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2 - 2R_1}$$
$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 2 \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{array}\right] \xrightarrow{-\frac{1}{5}R_2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 2 \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{array}\right] \xrightarrow{R_1 - 3R_2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

28. $$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2 - 2R_1} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{array}\right] \xrightarrow{-R_2}$$
$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{array}\right] \xrightarrow{R_1 - 2R_2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

29. $$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 3 \\ 3 & 8 & 3 & 7 \\ 2 & -3 & 1 & -10 \end{array}\right] \xrightarrow[R_3 - 2R_1]{R_2 - 3R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 3 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array}\right] \xrightarrow{-R_2}$$
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 3 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & -9 & -1 & -16 \end{array}\right] \xrightarrow[R_3 + 9R_2]{R_1 - 3R_2}$$
$$\left[\begin{array}{ccc|c} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array}\right] \xrightarrow[-R_3]{R_1 + R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right]$$

30. $$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 3 & -4 \\ 1 & 2 & 1 & 7 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right]$$
$$\xrightarrow{R_3 - R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 3 & -4 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array}\right] \xrightarrow[R_3 + 4R_2]{R_1 + \frac{1}{2}R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 1 & 3 & -4 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array}\right]$$
$$\xrightarrow{\frac{1}{11}R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 4 \\ 0 & 1 & 3 & -4 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array}\right] \xrightarrow[R_2 - 3R_3]{R_1 - \frac{1}{2}R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right]$$

31. Escriba un sistema de ecuaciones lineales para la matriz aumentada del ejercicio 27. Utilizando los resultados de este ejercicio, determine la solución del sistema.

32. Repita el ejercicio 31 para la matriz aumentada del ejercicio 28.

33. Repita el ejercicio 31 para la matriz aumentada del ejercicio 29.

34. Repita el ejercicio 31 para la matriz aumentada del ejercicio 30.

En los ejercicios 35 a 50 resuelva el sistema de ecuaciones lineales por el método de eliminación de Gauss-Jordan.

35. $\begin{aligned} x - 2y &= 8 \\ 3x + 4y &= 4 \end{aligned}$

36. $\begin{aligned} 3x + y &= 1 \\ -7x - 2y &= -1 \end{aligned}$

37. $\begin{aligned} 2x - 3y &= -8 \\ 4x + y &= -2 \end{aligned}$

38. $\begin{aligned} 5x + 3y &= 9 \\ -2x + y &= -8 \end{aligned}$

39. $\begin{aligned} x + y + z &= 0 \\ 2x - y + z &= 1 \\ x + y - 2z &= 2 \end{aligned}$

40. $\begin{aligned} 2x + y - 2z &= 4 \\ x + 3y - z &= -3 \\ 3x + 4y - z &= 7 \end{aligned}$

41. $\begin{aligned} 2x + 2y + z &= 9 \\ x + z &= 4 \\ 4y - 3z &= 17 \end{aligned}$

42. $\begin{aligned} 2x + 3y - 2z &= 10 \\ 3x - 2y + 2z &= 0 \\ 4x - y + 3z &= -1 \end{aligned}$

43. $\begin{aligned} - x_2 + x_3 &= 2 \\ 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 &= 16 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 &= 11 \end{aligned}$

44. $\begin{aligned} 2x + 4y - 6z &= 38 \\ x + 2y + 3z &= 7 \\ 3x - 4y + 4z &= -19 \end{aligned}$

45. $\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 &= 6 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 &= -3 \\ x_1 - 3x_2 + 3x_3 &= 10 \end{aligned}$

46. $\begin{aligned} 2x + 3y - 6z &= -11 \\ x - 2y + 3z &= 9 \\ 3x + y &= 7 \end{aligned}$

47. $\begin{aligned} 2x + 3z &= -1 \\ 3x - 2y + z &= 9 \\ x + y + 4z &= 4 \end{aligned}$

48. $\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 3x_3 &= -4 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 &= -1 \\ x_1 - 5x_2 + 2x_3 &= -3 \end{aligned}$

49. $\begin{aligned} x_1 - x_2 + 3x_3 &= 14 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 6 \\ -2x_1 - x_2 + x_3 &= -4 \end{aligned}$

50. $\begin{aligned} 2x_1 - x_2 - x_3 &= 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 &= 7 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 5 \end{aligned}$

Los problemas en los ejercicios 51 a 63 corresponden a los ejercicios 15 a 27, de la sección 5.1. Utilice los resultados de su trabajo anterior para ayudarse a resolver estos problemas.

51. **Agricultura** La granja Johnson tiene 500 acres de tierra apta para el cultivo de maíz y trigo. El costo de cultivar el maíz y el trigo (incluidas las semillas y la mano de obra) es de \$42 y \$30 por acre, respectivamente. Jacob Johnson tiene \$18,600 disponibles para la siembra de estos cultivos. Si desea utilizar todas las tierras aptas y todo el presupuesto asignado para sembrar estos dos cultivos, ¿cuántos acres de cada cultivo debe sembrar?

52. **Inversiones** Michael Pérez tiene un total de \$2000 depositados en dos instituciones de ahorro. Uno paga intereses a una tasa de 6% anual, mientras que el otro paga intereses a una tasa de 8% anual. Si Michael obtuvo un total de \$144 en intereses durante un año, ¿cuánto ha depositado en cada institución?

53. **Mezclas** Coffe Shoppe vende una mezcla de café a partir de dos tipos de café, uno cuesta \$5 por libra y el otro, \$6. Si la mezcla de café se vende a \$5.60 por libra, calcule qué cantidad de cada café se utiliza para obtener la mezcla deseada. Suponga que el peso del café mezclado es de 100 libras.

54. **Inversiones** Kelly Fisher tiene un total de \$30,000 invertidos en dos bonos municipales que tienen un rendimiento de 8% y 10% de interés anual, respectivamente. Si el interés que recibe Kelly de los bonos en un año es de \$2640, ¿cuánto ha invertido en cada bono?

55. **Número de pasajeros** El número total de pasajeros que viaja en un autobús urbano durante el turno matutino es de 1000. Si la tarifa infantil es de \$0.50, la tarifa para adultos es \$1.50 y el total de ingresos de los pasajes en ese turno es \$1300, ¿cuántos niños y cuántos adultos viajaron en el autobús durante el turno de la mañana?

56. **Bienes raíces** Cantwell Associates, un desarrollador de bienes raíces, tiene previsto construir un nuevo complejo de apartamentos compuesto por departamentos de una, dos y tres recámaras. Está previsto un total de 192 departamentos y el número de departamentos de dos y tres recámaras será igual al número de departamentos de una recámara. Si el número de departamentos de una recámara será tres veces el número de departamentos de tres recámaras, encuentre el número de departamentos de cada tipo que habrá en el complejo.

57. **Planeación de inversiones** Los rendimientos anuales de tres inversiones de Carrington Sid ascendieron a \$21,600: 6% en una cuenta de ahorros, 8% en fondos de inversión y 12% en bonos. El importe de la inversión de Sid en bonos fue el doble de la cantidad de su inversión en la cuenta de ahorros y los intereses devengados por su inversión en bonos fue igual a los dividendos que recibió por su inversión en fondos de inversión. Calcule la cantidad de dinero que depositó en cada tipo de inversión.

58. **Club de inversión** Un club privado de inversión tiene \$200,000 destinados a la inversión en acciones. Para llegar a un nivel total aceptable de riesgo, las acciones que la gerencia está considerando han sido clasificadas en tres categorías: alto riesgo, riesgo medio y bajo riesgo. La gerencia estima que las acciones de alto riesgo tendrán una tasa de rendimiento de 15% anual; las acciones de riesgo medio, 10% anual, y las acciones de bajo riesgo, 6% anual. Los miembros han decidido que la inversión en acciones de bajo riesgo debe ser igual a la suma de las inversiones en acciones de las otras dos categorías. Determine cuánto debe invertir el club en cada tipo de acciones si el objetivo de inversión es tener un rendimiento de \$20,000 anual sobre la inversión total. (Suponga que se invierte todo el dinero disponible para la inversión.)

59. **Mezclas de fertilizantes** Lawnco produce tres grados de fertilizantes comerciales. Un saco de 100 libras de fertilizante grado A contiene 18 libras de nitrógeno, 4 libras de fosfato y 5 libras de potasio. Un saco de 100 libras de fertilizante grado B contiene 20 libras de nitrógeno y 4 libras tanto de fosfato como de potasio. Un saco de 100 libras de fertilizante de grado C contiene 24 libras de nitrógeno, 3 libras de fosfato y 6 libras de potasio. ¿Cuántos sacos de 100 libras de cada uno de los tres grados de fertilizante debe producir Lawnco si están disponibles 26,400 libras de nitrógeno, 4900 libras de fosfato y 6200 libras de potasio, y se utilizan todos los nutrientes?

60. **Ingresos de taquilla** Un teatro tiene un aforo de 900 espectadores y sus tarifas son de \$4 para niños, \$6 para estudiantes y \$8 para adultos. En determinada función con asistencia completa, había la mitad de adultos que la cantidad de niños y estudiantes combinados. Los ingresos ascendieron a \$5600. ¿Cuántos niños asistieron al teatro?

61. **Decisiones gerenciales** La gerencia de Hartman Rent-A-Car ha asignado \$1.5 millones para comprar una flotilla de automóviles nuevos que consiste en vehículos compactos, medianos y grandes. Los automóviles compactos cuestan \$12,000 cada uno, los medianos \$18,000 y los grandes \$24,000. Si Hartman compra el doble de automóviles compactos que el total de medianos y el número total de automóviles que se comprarán es de 100, determine la cantidad de automóviles de cada tipo que se comprará. (Suponga que se utilizará todo el presupuesto.)

62. **Clubes de inversión** La gerencia de un club de inversión privado tiene un fondo de \$200,000 destinados a la inversión en acciones. Para llegar a un nivel general aceptable de riesgo, las acciones que la gerencia está considerando se han clasificado en tres categorías: alto riesgo, riesgo medio y bajo riesgo. La gerencia estima que las acciones de alto riesgo tienen una tasa de rendimiento de 15% anual; las acciones de riesgo medio, 10% anual, y las acciones de bajo riesgo, 6% anual. La inversión en acciones de bajo riesgo debe ser el doble de la suma de las inversiones en acciones de las otras dos categorías. Si el objetivo de inversión es tener una tasa de rendimiento promedio de 9% anual sobre la inversión total, determine la cantidad que el club debe invertir en cada tipo de acción. (Suponga que se utiliza todo el dinero disponible para invertir.)

63. **Planeación de la dieta** Un nutriólogo desea establecer una dieta en torno a tres comidas. El porcentaje de los requerimientos diarios de proteínas, carbohidratos y hierro contenido en cada onza de las tres comidas se resume en la siguiente tabla:

	Comida I	Comida II	Comida III
Proteínas (%)	10	6	8
Carbohidratos (%)	10	12	6
Hierro (%)	5	4	12

Determine cuántas onzas de cada comida debe incluir el nutriólogo en la dieta para satisfacer exactamente las necesidades diarias de proteínas, carbohidratos y hierro (100% de cada uno).

64. **Inversiones** El señor y la señora García tienen un total de \$100,000 para ser invertidos en acciones, bonos y una cuenta en el mercado de dinero. Las acciones tienen una tasa de rendimiento de 12% anual, mientras que los bonos y la cuenta en el mercado de dinero pagan 8 y 4% anual, respectivamente. Los García han estipulado que la cantidad invertida en la cuenta en el mercado de dinero debe ser igual a la suma de 20% de la cantidad invertida en acciones y 10% de la cantidad invertida en bonos. ¿Cómo deben asignar sus recursos los García si requieren un ingreso anual de \$10,000 por sus inversiones?

65. **Ingresos de taquilla** Para la noche de apertura en el Teatro de la Ópera, se ha vendido un total de 1000 boletos. Los asientos frente a la orquesta cuestan \$80 cada uno, los asientos detrás de la orquesta cuestan \$60 y los asientos del balcón frontal cuestan \$50. El número combinado de boletos vendidos de los asientos delante y detrás de la orquesta superan el doble del número de boletos vendidos en el balcón frontal en 400. Los ingresos totales por la presentación fueron \$62,800. Determine cuántos boletos de cada tipo se vendieron.

66. **Programación de la producción** Un fabricante de blusas de mujer hace tres tipos: sin mangas, manga corta y manga larga. El tiempo (en minutos) requerido por cada departamento para producir una docena de blusas de cada tipo se muestra en la siguiente tabla:

	Sin mangas	Manga corta	Manga-larga
Corte	9	12	15
Costura	22	24	28
Empaque	6	8	8

Los departamentos de corte, costura y empaque disponen de un máximo de 80, 160 y 48 horas de trabajo, respectivamente, por día. ¿Cuántas docenas de cada tipo de blusa se pueden producir todos los días si la planta funciona a capacidad total?

67. **Gastos de viaje de negocios** Un ejecutivo de Trident Communications viajó recientemente a Londres, París y Roma. Pagó \$180, \$230 y \$160 por noche de alojamiento respectivamente, y sus facturas de hotel fueron por un total de \$2660. Gastó \$110, \$120 y \$90 por día para sus comidas en Londres, París y Roma, respectivamente, y dichos gastos totalizaron \$1520. Si pasó tantos días en Londres como lo hizo en París y Roma combinados, ¿cuántos días permaneció en cada ciudad?

68. **Costos de vacaciones** Joan y Dick pasaron 2 semanas (14 noches) recorriendo cuatro ciudades en la costa este: Boston, Nueva York, Filadelfia y Washington. Pagaron \$120, \$200, \$80 y \$100 por noche de alojamiento en cada ciudad, respectivamente, y su factura total por hospedaje fue de \$2020. El número de días que pasaron en Nueva York fue el mismo que el número total de días que pasaron en Boston y Washington, y la pareja pasó tres veces la cantidad de días en Nueva York de lo que lo hicieron en Philadelphia. ¿Cuántos días estuvieron Joan y Dick en cada ciudad?

En los ejercicios 69 y 70 determine si la afirmación es verdadera o falsa. Si es verdadera, explique por qué. Si es falsa, dé un ejemplo para mostrar por qué lo es.

69. Un sistema de ecuaciones lineales equivalente se puede obtener de un sistema de ecuaciones mediante la sustitución de una de sus ecuaciones por cualquier constante múltiplo de sí mismo.

70. Si la matriz aumentada que corresponde a un sistema de tres ecuaciones lineales con tres variables tiene una fila de la forma $[0 \quad 0 \quad 0 \mid a]$, donde a es un número distinto de cero, entonces el sistema no tiene solución.

5.2 Soluciones de los ejercicios de autoevaluación

1. Obtenemos la siguiente secuencia de matrices aumentadas equivalentes:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 2 & 3 & 1 & 6 \\ 1 & -2 & 3 & -3 \\ 3 & 2 & -4 & 12 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 3 & -3 \\ 2 & 3 & 1 & 6 \\ 3 & 2 & -4 & 12 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[R_3 - 3R_1]{R_2 - 2R_1} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 3 & -3 \\ 0 & 7 & -5 & 12 \\ 0 & 8 & -13 & 21 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3}$$

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 3 & -3 \\ 0 & 8 & -13 & 21 \\ 0 & 7 & -5 & 12 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2 - R_3} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & -8 & 9 \\ 0 & 7 & -5 & 12 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[R_3 - 7R_2]{R_1 + 2R_2} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -13 & 15 \\ 0 & 1 & -8 & 9 \\ 0 & 0 & 51 & -51 \end{array}\right] \xrightarrow{\frac{1}{51}R_3} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -13 & 15 \\ 0 & 1 & -8 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[R_2 + 8R_3]{R_1 + 13R_3} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

La solución del sistema es $x = 2$, $y = 1$ y $z = -1$.

2. Refiriéndose a la solución del ejercicio 2 de los ejercicios de autoevaluación 5.1, vemos que el problema se reduce a resolver el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{aligned} x + y + z &= 200 \\ 40x + 60y + 80z &= 12{,}600 \\ 20x + 25y + 40z &= 5950 \end{aligned}$$

Utilizando el método de eliminación de Gauss-Jordan, tenemos

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 200 \\ 40 & 60 & 80 & 12{,}600 \\ 20 & 25 & 40 & 5950 \end{array}\right] \xrightarrow[R_3 - 20R_1]{R_2 - 40R_1} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 200 \\ 0 & 20 & 40 & 4600 \\ 0 & 5 & 20 & 1950 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{20}R_2} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 200 \\ 0 & 1 & 2 & 230 \\ 0 & 5 & 20 & 1950 \end{array}\right] \xrightarrow[R_3 - 5R_2]{R_1 - R_2} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -1 & -30 \\ 0 & 1 & 2 & 230 \\ 0 & 0 & 10 & 800 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{10}R_3} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -1 & -30 \\ 0 & 1 & 2 & 230 \\ 0 & 0 & 1 & 80 \end{array}\right] \xrightarrow[R - 2R_3]{R_1 + R_3} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 50 \\ 0 & 1 & 0 & 70 \\ 0 & 0 & 1 & 80 \end{array}\right]$$

De la última matriz aumentada en forma reducida, vemos que $x = 50$, $y = 70$ y $z = 80$. Por tanto, el agricultor debe plantar 50 acres del cultivo A, 70 acres del cultivo B y 80 acres del cultivo C.

USO DE LA TECNOLOGÍA

Sistemas de ecuaciones lineales: soluciones únicas

Solución de sistemas de ecuaciones lineales por el método de Gauss-Jordan

Las tres operaciones matriciales se pueden realizar en una matriz utilizando una calculadora graficadora. Los comandos se resumen en la tabla siguiente.

	Función de calculadora		
Operación	**TI-83/84**	**TI-86**	
$R_i \leftrightarrow R_j$	**rowSwap**([A], i, j)	**rSwap**(A, i, j)	o equivalente
cR_i	***row**(c, [A], i)	**multR**(c, A, i)	o equivalente
$R_i + aR_j$	***row+**(a, [A], j, i)	**mRAdd**(a, A, j, i)	o equivalente

Cuando una operación por renglón se realiza en una matriz, el resultado se almacena en la calculadora como una respuesta. Si se realiza otra operación en esta matriz, la matriz se borra. En caso de cometer un error en la operación, la matriz anterior se puede perder. Por esta razón, usted debe almacenar los resultados en cada operación. Esto lo hacemos presionando **STO**, seguido por el nombre de una matriz, y luego **ENTER**. Usamos este proceso en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 1 Use una calculadora gráficadora para resolver el siguiente sistema de ecuaciones lineales por el método de Gauss-Jordan (vea el ejemplo 5 en la sección 5.2):

$$\begin{aligned} 3x - 2y + 8z &= 9 \\ -2x + 2y + z &= 3 \\ x + 2y - 3z &= 8 \end{aligned}$$

(continúa)

Solución Utilizando el método de Gauss-Jordan, obtenemos la siguiente secuencia de matrices equivalentes.

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 3 & -2 & 8 & 9 \\ -2 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -3 & 8 \end{array}\right] \xrightarrow{{}^{*}\textbf{renglón} + (1,\ [\text{A}],\ 2,\ 1) \blacktriangleright B}$$

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 9 & 12 \\ -2 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -3 & 8 \end{array}\right] \xrightarrow{{}^{*}\textbf{renglón} + (2,\ [\text{B}],\ 1,\ 2) \blacktriangleright C}$$

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 9 & 12 \\ 0 & 2 & 19 & 27 \\ 1 & 2 & -3 & 8 \end{array}\right] \xrightarrow{{}^{*}\textbf{renglón} + (-1,\ [\text{C}],\ 1,\ 3) \blacktriangleright B}$$

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 9 & 12 \\ 0 & 2 & 19 & 27 \\ 0 & 2 & -12 & -4 \end{array}\right] \xrightarrow{{}^{*}\textbf{renglón}\ (\frac{1}{2},\ [\text{B}],\ 2) \blacktriangleright C}$$

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 9 & 12 \\ 0 & 1 & 9.5 & 13.5 \\ 0 & 2 & -12 & -4 \end{array}\right] \xrightarrow{{}^{*}\textbf{renglón} + (-2,\ [\text{C}],\ 2,\ 3) \blacktriangleright B}$$

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 9 & 12 \\ 0 & 1 & 9.5 & 13.5 \\ 0 & 0 & -31 & -31 \end{array}\right] \xrightarrow{{}^{*}\textbf{renglón}\ (-\frac{1}{31},\ [\text{B}],\ 3) \blacktriangleright C}$$

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 9 & 12 \\ 0 & 1 & 9.5 & 13.5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{{}^{*}\textbf{renglón} + (-9,\ [\text{C}],\ 3,\ 1) \blacktriangleright B}$$

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 9.5 & 13.5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{{}^{*}\textbf{renglón} + (-9.5,\ [\text{B}],\ 3,\ 2) \blacktriangleright C} \left[\begin{array}{rrr|} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right.$$

La última matriz está en forma escalonada reducida, y vemos que la solución del sistema es $x = 3$, $y = 4$ y $z = 1$. ■

Usando rref (TI-83/84 y TI-86) para resolver un sistema de ecuaciones lineales

La operación **rref** (o la función equivalente en su calculadora, si la tiene) transformará una matriz aumentada en una de forma escalonada reducida. Por ejemplo, utilizando **rref**, encontramos

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 3 & -2 & 8 & 9 \\ -2 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -3 & 8 \end{array}\right] \xrightarrow{\textbf{rref}} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

¡como se obtuvo antes!

Usando SIMULT (TI-86) para resolver un sistema de ecuaciones

La operación **SIMULT** (o la operación equivalente en su calculadora, si la tiene) de una herramienta gráfica se puede utilizar para resolver un sistema de n ecuaciones lineales con n variables, donde n es un entero entre 2 y 30, ambos incluidos.

EJEMPLO 2 Use la operación SIMULT para resolver el sistema del ejemplo 1.

Solución Llame la operación SIMULT. Dado que el sistema en cuestión tiene tres ecuaciones con tres variables, escriba $n = 3$. A continuación introduzca a1, 1 = 3, a1, 2 = −2, a1, 3 = 8, b1 = 9, a2, 1 = −2, . . . , b3 = 8. Seleccione <SOLVE> y se desplegará

```
x1 = 3
x2 = 4
x3 = 1
```

en la pantalla, lo que da $x = 3$, $y = 4$ y $z = 1$ la solución requerida. ■

EJERCICIOS CON TECNOLOGÍA

Use una calculadora graficadora para resolver el sistema de ecuaciones (a) por el método de Gauss-Jordan, (b) mediante la operación rref y (c) utilizar SIMULT.

1. $$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 &= -7\\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 5x_4 &= 22\\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 - x_4 &= -3\\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 + 2x_4 &= 12 \end{aligned}$$

2. $$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 &= -2\\ x_1 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 &= 2\\ x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= -6\\ -3x_1 + 3x_2 - 4x_3 - 4x_4 &= 9 \end{aligned}$$

3. $$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 &= 9\\ -x_1 - 2x_2 \qquad\quad - 3x_4 &= -1\\ x_1 \qquad\quad - 3x_3 + x_4 &= 10\\ x_1 - x_2 - x_3 - x_4 &= 8 \end{aligned}$$

4. $$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 - 2x_3 + x_4 &= 1\\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= -2\\ -x_1 - 5x_2 + 7x_3 - 2x_4 &= 3\\ 3x_1 - 4x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= -4 \end{aligned}$$

5. $$\begin{aligned} 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 + 2x_5 &= 16\\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 - 3x_5 &= -11\\ x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 3x_4 - x_5 &= -13\\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 2x_5 &= 15\\ 3x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 5x_4 - x_5 &= -10 \end{aligned}$$

6. $$\begin{aligned} 2.1x_1 - 3.2x_2 + 6.4x_3 + 7x_4 - 3.2x_5 &= 54.3\\ 4.1x_1 + 2.2x_2 - 3.1x_3 - 4.2x_4 + 3.3x_5 &= -20.81\\ 3.4x_1 - 6.2x_2 + 4.7x_3 + 2.1x_4 - 5.3x_5 &= 24.7\\ 4.1x_1 + 7.3x_2 + 5.2x_3 + 6.1x_4 - 8.2x_5 &= 29.25\\ 2.8x_1 + 5.2x_2 + 3.1x_3 + 5.4x_4 + 3.8x_5 &= 43.72 \end{aligned}$$

5.3 Sistemas de ecuaciones lineales: sistemas sobredeterminados e indeterminados

En esta sección continuamos nuestro estudio de los sistemas de ecuaciones lineales. Específicamente se analizarán los sistemas que tienen una infinidad de soluciones y los que no tienen solución. También se estudian los sistemas de ecuaciones lineales en los que el número de variables no es igual al número de ecuaciones en el sistema.

Solución(es) de ecuaciones lineales

Nuestro primer ejemplo ilustra la situación en la que un sistema de ecuaciones lineales tiene una infinidad de soluciones.

EJEMPLO 1 Un sistema de ecuaciones con una infinidad de soluciones Resolver el sistema de ecuaciones lineales dado por

$$\begin{aligned} x + 2y - 3z &= -2\\ 3x - y - 2z &= 1\\ 2x + 3y - 5z &= -3 \end{aligned} \tag{9}$$

Solución Utilizando el método de eliminación de Gauss-Jordan, obtenemos la siguiente secuencia de matrices aumentadas equivalentes:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -3 & -2 \\ 3 & -1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & -5 & -3 \end{array}\right] \xrightarrow[R_3 - 2R_1]{R_2 - 3R_1} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -3 & -2 \\ 0 & -7 & 7 & 7 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{-\frac{1}{7}R_2}$$

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[R_3 + R_2]{R_1 - 2R_2} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

La última matriz aumentada está en forma escalonada reducida. Al interpretarla como un sistema de ecuaciones lineales se tiene

$$\begin{aligned} x - z &= 0 \\ y - z &= -1 \end{aligned}$$

un sistema de dos ecuaciones con tres variables x, y y z.

Ahora despejaremos una variable (digamos, z) y a resolver para x y y en términos de la misma. Obtenemos

$$\begin{aligned} x &= z \\ y &= z - 1 \end{aligned}$$

Si le asignamos un valor específico a z (por ejemplo, $z = 0$) obtenemos $x = 0$ y $y = -1$, se tiene la solución $(0, -1, 0)$ del sistema (9). Al establecer $z = 1$, obtenemos la solución (l, 0, 1). En general, si establecemos $z = t$, donde t representa un número real (llamado parámetro), obtenemos una solución dada por $(t, t - 1, t)$. Dado que el parámetro t puede ser cualquier número real, podemos ver que el sistema (9) tiene una infinidad de soluciones. Geométricamente, las soluciones del sistema (9) se encuentran en la línea recta en el espacio dado por la intersección de los tres planos determinados por las tres ecuaciones del sistema. ■

Nota En el ejemplo 1 elegimos como parámetro a z, porque es más conveniente para resolver para x y y (las columnas x y y están en forma unitaria) en términos de z. ■

El siguiente ejemplo muestra lo que sucede en el procedimiento de eliminación cuando el sistema no tiene solución.

EJEMPLO 2 Un sistema de ecuaciones que no tiene solución Resolver el sistema de ecuaciones lineales dado por

$$\begin{aligned} x + y + z &= 1 \\ 3x - y - z &= 4 \\ x + 5y + 5z &= -1 \end{aligned} \qquad \textbf{(10)}$$

Solución Utilizando el método de eliminación de Gauss-Jordan, obtenemos la siguiente secuencia de matrices aumentadas equivalentes:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & 4 \\ 1 & 5 & 5 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow[R_3 - R_1]{R_2 - 3R_1} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & -4 & 1 \\ 0 & 4 & 4 & -2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_3 + R_2} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right]$$

Observe que el renglón 3 en la última matriz se lee $0x + 0y + 0z = -1$, es decir, ¡$0 = -1$! Por consiguiente concluimos que el sistema (10) es inconsistente y no tiene solución. Geométricamente, tenemos una situación en la que dos de los planos se cruzan en una recta, pero el tercer plano es paralelo a esta recta de intersección de los dos planos y no la interseca. En consecuencia, no hay punto de intersección de los tres planos. ■

El ejemplo 2 ilustra el siguiente resultado más general al utilizar el procedimiento de eliminación de Gauss-Jordan.

Sistemas sin solución

Si hay un renglón en una matriz aumentada que contiene todos los ceros a la izquierda de la línea vertical y una entrada diferente de cero a la derecha de la línea, entonces el sistema de ecuaciones no tiene solución.

Puede haber advertido que en todos los ejemplos anteriores hemos tratado sólo con sistemas que implican exactamente el mismo número de ecuaciones lineales que el de variables. Sin embargo, los sistemas en los que el número de ecuaciones es diferente del número de variables también aparecen en la práctica. De hecho, consideraremos estos sistemas en los ejemplos 3 y 4.

El siguiente teorema nos proporciona alguna información preliminar sobre un sistema de ecuaciones lineales.

TEOREMA 1:

a. Si el número de ecuaciones es mayor o igual al número de variables en un sistema lineal, entonces una de las siguientes afirmaciones es verdadera:
   i. El sistema no tiene solución.
   ii. El sistema tiene exactamente una solución.
   iii. El sistema tiene una infinidad de soluciones.

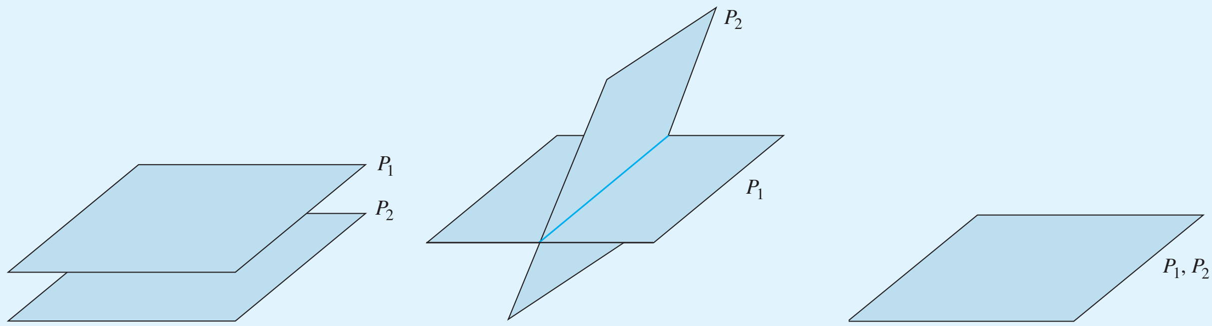
b. Si hay menos ecuaciones que variables en un sistema lineal, entonces el sistema o no tiene solución o tiene infinidad de soluciones.

Nota El teorema 1 se puede utilizar para decirnos, antes de siquiera comenzar a resolver un problema, la naturaleza de la solución. ■

Aunque no probaremos este teorema, se debe recordar que hemos ilustrado geométricamente la parte (a) para el caso en el que hay exactamente tantas ecuaciones (tres), como variables. Para mostrar la validez de la parte (b), tomemos en cuenta una vez más el caso en que un sistema tiene tres variables. Ahora, si sólo hay una ecuación en el sistema, entonces es claro que hay una infinidad de soluciones correspondientes geométricamente a todos los puntos que se encuentran en el plano representado por la ecuación.

A continuación, si hay dos ecuaciones en el sistema, sólo existen las posibilidades siguientes:

1. Los dos planos son paralelos y distintos.
2. Los dos planos se cruzan en una línea recta.
3. Los dos planos son coincidentes (las dos ecuaciones definen el mismo plano) (figura 6).



(a) No tiene solución **(b)** Una infinidad de soluciones **(c)** Una infinidad de soluciones

FIGURA **6**

Por tanto, puede ocurrir que el sistema no tenga solución o que tenga una infinidad de soluciones correspondientes a los puntos que se encuentran sobre la recta de intersección de los dos planos o en un solo plano determinado por las dos ecuaciones. En el caso de que dos planos se intersecan en una recta, las soluciones implicarán un parámetro, y en el caso de que los dos planos sean coincidentes, las soluciones implicarán dos parámetros.

Explore y analice

Dé una interpretación geométrica del teorema 1 para un sistema lineal compuesto de ecuaciones con dos variables. En concreto, ilustre lo que puede suceder si hay tres ecuaciones lineales en el sistema (el caso de dos ecuaciones lineales ya ha sido discutido en la sección 5.1). ¿Qué pasa si hay cuatro ecuaciones lineales? ¿Qué pasa si sólo hay una ecuación lineal en el sistema?

EJEMPLO 3 Un sistema con más ecuaciones que variables Resolver el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{aligned} x + 2y &= 4 \\ x - 2y &= 0 \\ 4x + 3y &= 12 \end{aligned}$$

Solución Obtenemos la siguiente secuencia de matrices aumentadas equivalentes:

$$\left[\begin{array}{rr|r} 1 & 2 & 4 \\ 1 & -2 & 0 \\ 4 & 3 & 12 \end{array}\right] \xrightarrow[R_3 - 4R_1]{R_2 - R_1} \left[\begin{array}{rr|r} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -4 & -4 \\ 0 & -5 & -4 \end{array}\right] \xrightarrow{-\frac{1}{4}R_2}$$

$$\left[\begin{array}{rr|r} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & -4 \end{array}\right] \xrightarrow[R_3 + 5R_2]{R_1 - 2R_2} \left[\begin{array}{rr|r} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

El último renglón de la matriz aumentada en forma escalonada reducida implica que $0 = 1$, lo cual es imposible, así que llegamos a la conclusión de que el sistema no tiene solución. Geométricamente, las tres líneas definidas por las tres ecuaciones en el sistema no se intersecan en un punto. (Para ver esto por sí mismo, trace las gráficas de estas ecuaciones.) ■

EJEMPLO 4 Un sistema con más variables que ecuaciones Resolver el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{aligned} x + 2y - 3z + w &= -2 \\ 3x - y - 2z - 4w &= 1 \\ 2x + 3y - 5z + w &= -3 \end{aligned}$$

Solución En primer lugar observamos que el sistema dado consta de tres ecuaciones con cuatro variables y así, según el teorema 1b, puede ser que el sistema no tenga solución o que tenga una infinidad de soluciones. Para resolverlo se utiliza el método de Gauss-Jordan y se obtiene la siguiente secuencia de matrices aumentadas equivalentes:

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & -3 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & -2 & -4 & 1 \\ 2 & 3 & -5 & 1 & -3 \end{array}\right] \xrightarrow[R_3 - 2R_1]{R_2 - 3R_1} \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & -3 & 1 & -2 \\ 0 & -7 & 7 & -7 & 7 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{-\frac{1}{7}R_2}$$

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & -3 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[R_3 + R_2]{R_1 - 2R_2} \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

La última matriz aumentada está en forma escalonada reducida. Observe que el sistema dado es equivalente al sistema

$$\begin{aligned} x - z - w &= 0 \\ y - z + w &= -1 \end{aligned}$$

de dos ecuaciones con cuatro variables. Por tanto, podemos resolver para dos de las variables en términos de los otros dos. Sean $z = s$ y $w = t$ (donde s y t son números reales), encontramos que

$$\begin{aligned} x &= s + t \\ y &= s - t - 1 \\ z &= s \\ w &= t \end{aligned}$$

Las soluciones pueden ser escritas en la forma $(s + t, s - t - 1, s, t)$. Geométricamente, las tres ecuaciones en el sistema representan tres hiperplanos en el espacio de cuatro dimensiones (ya que hay cuatro variables) y sus “puntos” de intersección se encuentran en un subespacio bidimensional del espacio de cuatro dimensiones (ya que hay dos parámetros). ■

Nota En el ejemplo 4 hemos asignado a los parámetros z y w en lugar de x y y pues x y y son fáciles de resolver en términos de z y w. ■

El siguiente ejemplo ilustra una situación en la que un sistema de ecuaciones lineales tiene una infinidad de soluciones.

VIDEO

EJEMPLO DE APLICACIÓN 5 Control de tráfico La figura 7 muestra el flujo del tráfico en el centro en una ciudad durante las horas pico en un día normal. Las flechas indican la dirección del flujo en cada sentido vial, y el número medio de vehículos por hora que entran y salen de cada intersección aparece al lado de cada calle. Las avenidas 5a y 6a pueden manejar cada una hasta 2000 vehículos por hora sin causar congestionamiento, mientras que la capacidad máxima de las calles 4a y 5a es de 1000 vehículos por hora. El flujo del tráfico está controlado por semáforos instalados en cada una de las cuatro intersecciones.

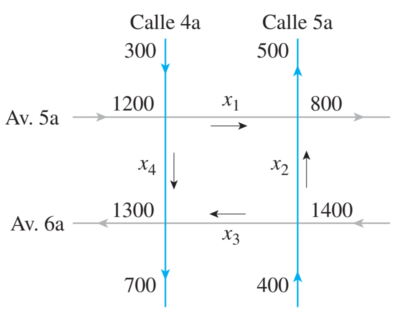


FIGURA 7

a. Escriba una expresión general que incluya las tasas de flujo (x_1, x_2, x_3, x_4) y sugiera dos posibles patrones de flujo que aseguren que no habrá congestionamiento de tráfico.

b. Suponga que la parte de la calle 4a entre la avenida 5a y la avenida 6a será reasfaltada y que el flujo del tráfico entre las dos uniones debe reducirse a un máximo de 300 vehículos por hora. Encuentre dos patrones de flujo posibles que den como resultado un flujo de tráfico continuo.

Solución

a. Para evitar el congestionamiento, todo el tráfico que entra a una intersección debe abandonar también esa intersección. Al aplicar esta condición a cada una de las cuatro intersecciones en el sentido de las agujas del reloj a partir de la intersección de la avenida 5a y la calle 4a, se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned}1500 &= x_1 + x_4\\ 1300 &= x_1 + x_2\\ 1800 &= x_2 + x_3\\ 2000 &= x_3 + x_4\end{aligned}$$

Este sistema de cuatro ecuaciones lineales con las cuatro variables x_1, x_2, x_3, x_4 se puede volver a escribir en la forma más estándar

$$\begin{aligned}x_1 \qquad\qquad + x_4 &= 1500\\ x_1 + x_2 \qquad\qquad &= 1300\\ x_2 + x_3 \qquad &= 1800\\ x_3 + x_4 &= 2000\end{aligned}$$

Utilizando el método de eliminación de Gauss-Jordan para resolver el sistema, obtenemos

$$\left[\begin{array}{cccc|c}1&0&0&1&1500\\1&1&0&0&1300\\0&1&1&0&1800\\0&0&1&1&2000\end{array}\right] \xrightarrow{R_2 - R_1} \left[\begin{array}{cccc|c}1&0&0&1&1500\\0&1&0&-1&-200\\0&1&1&0&1800\\0&0&1&1&2000\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_3 - R_2} \left[\begin{array}{cccc|c}1&0&0&1&1500\\0&1&0&-1&-200\\0&0&1&1&2000\\0&0&1&1&2000\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_4 - R_3} \left[\begin{array}{cccc|c}1&0&0&1&1500\\0&1&0&-1&-200\\0&0&1&1&2000\\0&0&0&0&0\end{array}\right]$$

La última matriz aumentada está en forma escalonada reducida y es equivalente a un sistema de tres ecuaciones lineales con cuatro variables x_1, x_2, x_3, x_4. Por tanto, podemos expresar tres de las variables (digamos x_1, x_2, x_3) en términos de x_4. Sea $x_4 = t$ (t un parámetro), podemos escribir la infinidad de soluciones del sistema como

$$\begin{aligned}x_1 &= 1500 - t\\ x_2 &= -200 + t\\ x_3 &= 2000 - t\\ x_4 &= t\end{aligned}$$

Observe que para una solución significativa debemos tener $200 \leq t \leq 1000$ ya que x_1, x_2, x_3 y x_4 todos deben ser no negativos y la capacidad máxima de una calle es de 1000. Por ejemplo, designar $t = 300$ da el patrón de flujo

$$x_1 = 1200 \qquad x_2 = 100 \qquad x_3 = 1700 \qquad x_4 = 300$$

Seleccionar $t = 500$ da el patrón de flujo

$$x_1 = 1000 \qquad x_2 = 300 \qquad x_3 = 1500 \qquad x_4 = 500$$

b. En este caso, x_4 no debe superar los 300. Una vez más, utilizando los resultados del inciso (a), encontramos, al establecer $x_4 = t = 300$, el patrón de flujo

$$x_1 = 1200 \qquad x_2 = 100 \qquad x_3 = 1700 \qquad x_4 = 300$$

obtenidos antes. Designar $t = 250$ da el patrón de flujo

$$x_1 = 1250 \qquad x_2 = 50 \qquad x_3 = 1750 \qquad x_4 = 250$$

■

5.3 Ejercicios de autoevaluación

1. La siguiente matriz aumentada en forma escalonada reducida es equivalente a la matriz aumentada de cierto sistema de ecuaciones lineales. Utilice este resultado para resolver el sistema de ecuaciones.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

2. Resuelva el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{aligned} 2x + 3y + z &= 6 \\ x + 2y + 4z &= -4 \\ x - 5y - 3z &= 10 \end{aligned}$$

utilizando el método de eliminación de Gauss-Jordan.

3. Resuelva el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{aligned} x - 2y + 3z &= 9 \\ 2x + 3y - z &= 4 \\ x + 5y - 4z &= 2 \end{aligned}$$

utilizando el método de eliminación de Gauss-Jordan.

Las soluciones de los ejercicios de autoevaluación 5.3 se pueden encontrar en la página 273.

5.3 Preguntas de concepto

1. a. Si un sistema de ecuaciones lineales tiene el mismo número de ecuaciones o más ecuaciones que variables, ¿qué puede decir sobre la naturaleza de su(s) solución(es)?

b. Si un sistema de ecuaciones lineales tiene menos ecuaciones que variables, ¿qué puede decir sobre la naturaleza de su(s) solución(es)?

2. Un sistema consta de tres ecuaciones lineales con cuatro variables. ¿Puede el sistema tener solución única?

5.3 Ejercicios

En los ejercicios 1-12, dado que la matriz aumentada en forma escalonada reducida es equivalente a la matriz aumentada de un sistema de ecuaciones lineales, (a) determinar si el sistema tiene una solución y (b) encontrar la solución o las soluciones a los sistemas, si es que existen.

1. $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$

2. $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$

3. $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

4. $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

5. $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \end{array}\right]$

6. $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$

7. $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$

8. $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$

9. $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

10. $\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

11. $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

12. $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

En los ejercicios 13 a 32, resuelva el sistema de ecuaciones lineales, utilizando el método de eliminación de Gauss-Jordan.

13. $\begin{aligned} 2x - y &= 3 \\ x + 2y &= 4 \\ 2x + 3y &= 7 \end{aligned}$

14. $\begin{aligned} x + 2y &= 3 \\ 2x - 3y &= -8 \\ x - 4y &= -9 \end{aligned}$

15. $\begin{aligned} 3x - 2y &= -3 \\ 2x + y &= 3 \\ x - 2y &= -5 \end{aligned}$

16. $\begin{aligned} 2x + 3y &= 2 \\ x + 3y &= -2 \\ x - y &= 3 \end{aligned}$

17. $\begin{aligned} 3x - 2y &= 5 \\ -x + 3y &= -4 \\ 2x - 4y &= 6 \end{aligned}$

18. $\begin{aligned} 4x + 6y &= 8 \\ 3x - 2y &= -7 \\ x + 3y &= 5 \end{aligned}$

19. $\begin{aligned} x - 2y &= 2 \\ 7x - 14y &= 14 \\ 3x - 6y &= 6 \end{aligned}$

20. $\begin{aligned} x + 2y + z &= -2 \\ -2x - 3y - z &= 1 \\ 2x + 4y + 2z &= -4 \end{aligned}$

21. $\begin{aligned} 3x + 2y &= 4 \\ -\tfrac{3}{2}x - y &= -2 \\ 6x + 4y &= 8 \end{aligned}$

22. $\begin{aligned} 3y + 2z &= 4 \\ 2x - y - 3z &= 3 \\ 2x + 2y - z &= 7 \end{aligned}$

23. $\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + x_3 &= -4 \\ 3x_1 - \tfrac{3}{2}x_2 + \tfrac{3}{2}x_3 &= -6 \\ -6x_1 + 3x_2 - 3x_3 &= 12 \end{aligned}$

24. $\begin{aligned} x + y - 2z &= -3 \\ 2x - y + 3z &= 7 \\ x - 2y + 5z &= 0 \end{aligned}$

25. $\begin{aligned} x - 2y + 3z &= 4 \\ 2x + 3y - z &= 2 \\ x + 2y - 3z &= -6 \end{aligned}$

26. $\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 &= -3 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 &= 2 \\ x_1 + 3x_2 - 3x_3 &= 5 \end{aligned}$

27. $\begin{aligned} 4x + y - z &= 4 \\ 8x + 2y - 2z &= 8 \end{aligned}$

28. $\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 2 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 &= 1 \end{aligned}$

29. $\begin{aligned} 2x + y - 3z &= 1 \\ x - y + 2z &= 1 \\ 5x - 2y + 3z &= 6 \end{aligned}$

30. $\begin{aligned} 3x - 9y + 6z &= -12 \\ x - 3y + 2z &= -4 \\ 2x - 6y + 4z &= 8 \end{aligned}$

31. $\begin{aligned} x + 2y - z &= -4 \\ 2x + y + z &= 7 \\ x + 3y + 2z &= 7 \\ x - 3y + z &= 9 \end{aligned}$

32. $\begin{aligned} 3x - 2y + z &= 4 \\ x + 3y - 4z &= -3 \\ 2x - 3y + 5z &= 7 \\ x - 8y + 9z &= 10 \end{aligned}$

33. Decisiones gerenciales La gerencia de Hartman Rent-A-Car ha asignado $1,008,000 para comprar 60 automóviles nuevos para añadir a su flotilla actual de vehículos de alquiler. La empresa elegirá entre automóviles compactos, medianos y grandes, que cuestan $12,000, $19,200 y $26,400 cada uno, respectivamente. Encuentre fórmulas dando las opciones disponibles a la empresa. Proporcione dos opciones específicas. (*Nota*: Sus respuestas *no* serán únicas.)

34. Nutrición Un nutriólogo desea establecer una dieta en torno a tres comidas. La dieta incluirá 8800 unidades de vitamina A, 3380 de vitamina C y 1020 de calcio. El número de unidades de las vitaminas y del calcio en cada onza de las comidas se resume en la tabla siguiente:

	Comida I	Comida II	Comida III
Vitamina A	400	1200	800
Vitamina C	110	570	340
Calcio	90	30	60

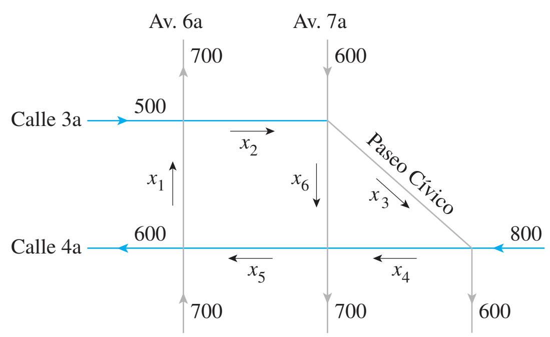
Determine la cantidad de cada comida que el nutriólogo debe incluir en los alimentos para satisfacer los requerimientos de vitaminas y calcio.

35. Nutrición Remítase al ejercicio 34. En la planeación de otra dieta, el nutriólogo cambia el requerimiento de vitamina C de 3380 a 2160 unidades. Todos los demás requerimientos siguen siendo los mismos. Demuestre que una dieta así no se puede planear con los mismos alimentos.

36. Programación de la producción Ace Novelty fabrica animales de felpa: pandas gigantes, perros San Bernardo y pájaros grandes. Cada panda requiere 1.5 yardas cuadradas de felpa, 30 pies cúbicos de relleno y 5 piezas de adorno; cada perro requiere 2 yardas cuadradas de felpa, 35 yardas cúbicas de relleno y 8 piezas de adorno, y cada pájaro requiere 2.5 yardas cuadradas de felpa, 25 pies cúbicos de relleno y 15 piezas de adorno. Si tiene a su disposición 4700 yardas cuadradas de felpa, 65,000 yardas cúbicas de relleno y 23,400 piezas de adorno, ¿cuántos animales de felpa de cada tipo deberá fabricar la empresa si utilizará todo el material? Proporcione dos opciones específicas.

37. Inversiones El señor y la señora García tienen un total de $100,000 para invertir en acciones, bonos y en el mercado de dinero. Las acciones tienen una tasa de rendimiento de 12% anual, mientras que los bonos y la cuenta en el mercado de dinero pagan 8 y 4% anual, respectivamente. Los García han estipulado que la cantidad invertida en acciones debe ser igual a la suma de la cantidad invertida en bonos y tres veces la cantidad invertida en la cuenta del mercado de dinero. ¿Cómo deben asignar sus recursos los García si requieren un ingreso anual de $10,000 por sus inversiones? Proporcione dos opciones específicas.

38. Control del tráfico La figura adjunta muestra el flujo de tráfico cerca del Centro Cívico de la ciudad durante las horas pico en un día normal. Cada calle puede manejar un máximo de 1000 vehículos por hora, sin causar congestionamiento. El flujo del tráfico está controlado por semáforos en cada una de las cinco intersecciones.

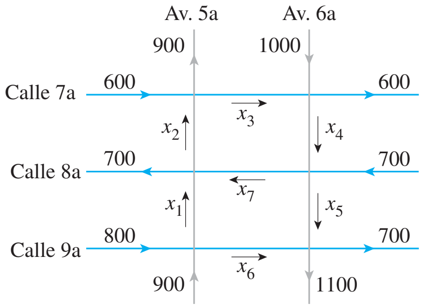


a. Establezca un sistema de ecuaciones lineales que describa el flujo del tráfico.

b. Resuelva el sistema diseñado en la parte (a) y sugiera dos patrones de flujo del tráfico que aseguran que no habrá congestionamiento vial.

c. Suponga que la avenida 7a pronto estará cerrada entre las calles 3 y 4 por mantenimiento. Busque un patrón de flujo posible que lleve a un flujo de tráfico sin congestionamiento.

39. Control del tráfico La figura adjunta muestra el flujo del tráfico en el centro durante las horas pico en un día normal. Cada avenida puede manejar hasta 1500 vehículos por hora, sin causar congestionamiento, mientras que la capacidad máxima de cada calle es de 1000 vehículos por hora. El flujo del tráfico es controlado por semáforos en cada una de las seis intersecciones.



a. Establezca un sistema de ecuaciones lineales que describa el flujo del tráfico.

b. Resuelva el sistema diseñado en la parte (a) y sugiera dos patrones de flujo del tráfico que aseguran que no habrá congestionamiento vial.

c. Suponga que el flujo del tráfico a lo largo de la calle 9 entre las avenidas 5a y 6a, x_6, está restringido debido a la construcción de alcantarillado. ¿Cuál es el flujo del tráfico mínimo permitido a lo largo de este camino para impedir un congestionamiento de tráfico?

40. Determine el valor de k tal que el siguiente sistema de ecuaciones lineales tiene una solución, y luego encontrar la solución:

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 2 \\ x + 4y &= 6 \\ 5x + ky &= 2 \end{aligned}$$

41. Determinar el valor de k tal que el siguiente sistema de ecuaciones lineales tiene una infinidad de soluciones, y luego encontrar las soluciones:

$$\begin{aligned} 3x - 2y + 4z &= 12 \\ -9x + 6y - 12z &= k \end{aligned}$$

42. Resolver el sistema:

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} &= -1 \\ \frac{2}{x} + \frac{3}{y} + \frac{2}{z} &= 3 \\ \frac{2}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{z} &= -7 \end{aligned}$$

En los ejercicios 43 y 44, determine si los enunciados son verdaderos o falsos. Si es verdadero, explique por qué lo es. Si es falso, proporcione un ejemplo para mostrar por qué lo es.

43. Un sistema de ecuaciones lineales que presenta menor número de ecuaciones que variables no tiene solución, tiene solución única o infinidad de soluciones.

44. Un sistema de ecuaciones lineales con más ecuaciones que variables no tiene solución, tiene solución única o infinidad de soluciones.

5.3 Soluciones de los ejercicios de autoevaluación

1. Sean x, y y z las variables. La matriz aumentada en forma escalonada reducida indica que el sistema de ecuaciones lineales es equivalente a las dos ecuaciones

$$\begin{aligned} x - z &= 3 \\ y + 5z &= -2 \end{aligned}$$

Sea $z = t$, donde t es un parámetro, se tiene una infinidad de soluciones dadas por

$$\begin{aligned} x &= t + 3 \\ y &= -5t - 2 \\ z &= t \end{aligned}$$

2. Obtenemos la siguiente secuencia de matrices aumentadas equivalentes:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 2 & -3 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & 4 & -4 \\ 1 & -5 & -3 & 10 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2}$$

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 4 & -4 \\ 2 & -3 & 1 & 6 \\ 1 & -5 & -3 & 10 \end{array}\right] \xrightarrow[R_3 - R_1]{R_2 - 2R_1}$$

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 4 & -4 \\ 0 & -7 & -7 & 14 \\ 0 & -7 & -7 & 14 \end{array}\right] \xrightarrow{-\frac{1}{7}R_2}$$

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 4 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & -7 & -7 & 14 \end{array}\right] \xrightarrow[R_3 + 7R_2]{R_1 - 2R_2} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

La última matriz aumentada, que está en forma escalonada reducida, indica que el sistema de ecuaciones lineales es equivalente al siguiente sistema de dos ecuaciones:

$$\begin{aligned} x + 2z &= 0 \\ y + z &= -2 \end{aligned}$$

Sea $z = t$, donde t es un parámetro, se tiene una infinidad de soluciones dada por

$$\begin{aligned} x &= -2t \\ y &= -t - 2 \\ z &= t \end{aligned}$$

3. Obtenemos la siguiente secuencia de matrices aumentadas equivalentes:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 3 & 9 \\ 2 & 3 & -1 & 4 \\ 1 & 5 & -4 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow[R_3 - R_1]{R_2 - 2R_1}$$

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 3 & 9 \\ 0 & 7 & -7 & -14 \\ 0 & 7 & -7 & -7 \end{array}\right] \xrightarrow{R_3 - R_2} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 3 & 9 \\ 0 & 7 & -7 & -14 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{array}\right]$$

Ya que el último renglón de la matriz aumentada final es equivalente a la ecuación $0 = 7$, una contradicción, se concluye que el sistema no tiene solución.

USO DE LA TECNOLOGÍA

Sistemas de ecuaciones lineales: indeterminados y sobredeterminados

Podemos utilizar las operaciones con renglones de una calculadora graficadora para resolver un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas por el método de Gauss-Jordan, como lo hicimos en la sección de tecnología anterior. También podemos utilizar la operación **rref** o su equivalente para obtener la forma escalonada reducida sin tener que pasar por todos los pasos del método de Gauss-Jordan. La función SIMULT, sin embargo, no se puede utilizar para resolver un sistema donde el número de ecuaciones y el número de variables no son las mismas.

EJEMPLO 1 Resuelva el sistema

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 4x_3 &= 2 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 &= -1 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 &= 1 \\ 2x_1 + 6x_2 - 12x_3 &= -6 \end{aligned}$$

Solución Primero introducimos la matriz aumentada A en la calculadora como

$$A = \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & -2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 6 & -12 & -6 \end{array}\right]$$

Luego utilizamos la operación **rref** o su equivalente para obtener la matriz equivalente

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

en forma reducida. Así, el sistema dado es equivalente a

$$\begin{aligned} x_1 &= 0 \\ x_2 - 2x_3 &= -1 \end{aligned}$$

Si dejamos que $x_3 = t$, donde t es un parámetro, entonces encontramos que las soluciones son $(0, 2t - 1, t)$. ■

EJERCICIOS CON TECNOLOGÍA

Utilice una calculadora graficadora para resolver el sistema de ecuaciones utilizando la operación rref o su equivalente.

1. $$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 - x_3 &= 0 \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 &= -1 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 &= 3 \\ 2x_2 - 2x_3 &= 4 \end{aligned}$$

2. $$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 - 4x_3 &= 5 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 &= -4 \\ -x_1 - 2x_2 + 4x_3 &= 6 \\ 4x_1 + 3x_2 - 5x_3 &= 9 \end{aligned}$$

3. $$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 &= -1 \\ x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 &= -8 \\ 5x_1 + 6x_2 - 2x_3 + 2x_4 &= 11 \\ x_1 + 3x_2 + 8x_3 + x_4 &= -14 \end{aligned}$$

4. $$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 3x_3 - 6x_4 &= 2 \\ x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 &= 2 \\ -2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 &= 0 \end{aligned}$$

5. $$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 &= -1 \\ x_1 - x_2 + x_3 + 4x_4 &= -6 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 &= -4 \\ 5x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 &= -9 \end{aligned}$$

6. $$\begin{aligned} 1.2x_1 - 2.3x_2 + 4.2x_3 + 5.4x_4 - 1.6x_5 &= 4.2 \\ 2.3x_1 + 1.4x_2 - 3.1x_3 + 3.3x_4 - 2.4x_5 &= 6.3 \\ 1.7x_1 + 2.6x_2 - 4.3x_3 + 7.2x_4 - 1.8x_5 &= 7.8 \\ 2.6x_1 - 4.2x_2 + 8.3x_3 - 1.6x_4 + 2.5x_5 &= 6.4 \end{aligned}$$

5.4 Matrices

Uso de matrices para representar datos

Muchos problemas prácticos se resuelven mediante el uso de operaciones aritméticas de los datos asociados a los problemas. Al organizar adecuadamente los datos en *bloques* de números, podemos llevar a cabo estas operaciones aritméticas de manera ordenada y eficiente. En particular, este enfoque sistemático nos permite usar la computadora para el máximo provecho.

Comencemos por considerar cómo pueden ser organizados los datos de producción mensual de un fabricante. Acrosonic Company fabrica cuatro diferentes sistemas de sonido en tres lugares distintos. La producción de mayo de la empresa se describe en la tabla l.

TABLA **1**

	Modelo A	Modelo B	Modelo C	Modelo D
Ubicación I	320	280	460	280
Ubicación II	480	360	580	0
Ubicación III	540	420	200	880

Ahora bien, si estamos de acuerdo en preservar la ubicación relativa de cada entrada en la tabla 1, podemos resumir el conjunto de datos de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} 320 & 280 & 460 & 280 \\ 480 & 360 & 580 & 0 \\ 540 & 420 & 200 & 880 \end{bmatrix}$$

Matriz con el resumen de los datos de la tabla 1

El arreglo de números que aparece aquí es un ejemplo de una matriz. Observe que los números en el primer renglón muestran la producción de los modelos A, B, C y D de los sistemas de sonido de Acrosonic fabricados en la ubicación I; igualmente, los números en los renglones 2 y 3 muestran las producciones respectivas de los sistemas de sonido en las ubicaciones II y III. Los números en cada columna de la matriz dan la producción de un modelo determinado de sistema de sonido fabricado en cada una de las tres plantas de manufactura de la empresa.

De manera más general, una matriz es un arreglo rectangular de números reales. Por ejemplo, cada uno de los siguientes arreglos es una matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Los números reales que componen el arreglo se llaman **entradas**, o *elementos*, de la matriz. Las entradas de un renglón del arreglo se conoce como **renglón** de la matriz, mientras que las entradas en una columna del arreglo se conoce como **columna** de la matriz. La matriz A, por ejemplo, tiene dos renglones y tres columnas, que pueden ser identificados de la siguiente manera:

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} \text{Columna 1} & \text{Columna 2} & \text{Columna 3} \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{Renglón 1} \\ \text{Renglón 2} \end{array} & \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix} \end{array}$$

Una matriz 2×3

El **tamaño**, o *dimensión,* **de una matriz** se describe en términos del número de renglones y columnas de la matriz. Por ejemplo, la matriz A tiene dos renglones y tres columnas y se dice que tiene un tamaño de 2 por 3, que se denota 2×3. En general, una matriz que tiene m renglones y n columnas se dice que tiene un tamaño de $m \times n$.

Matriz

Una **matriz** es un arreglo rectangular ordenado de números. Una matriz con m renglones y n columnas es de tamaño $m \times n$. La entrada en el renglón i-ésimo y la columna j-ésima de *una* matriz A se denota por a_{ij}.

Una matriz de tamaño $1 \times n$ (una matriz con un renglón y n columnas) se conoce como **matriz renglón** o *vector renglón,* de dimensión n. Por ejemplo, la matriz D es un vector renglón de dimensión 4. Del mismo modo, una matriz que tiene m renglones y una columna se conoce como **matriz columna** o *vector columna,* de dimensión m. La matriz C es un vector columna de dimensión 4. Por último, una matriz de $n \times n$, es decir, una matriz que tiene el mismo número de renglones como columnas, se llama **matriz cuadrada**. Por ejemplo, la matriz

$$\begin{bmatrix} -3 & 8 & 6 \\ 2 & \frac{1}{4} & 4 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Una matriz cuadrada 3×3

es una matriz cuadrada de tamaño 3×3, o simplemente de tamaño 3.

EJEMPLO DE APLICACIÓN 1 Organización de los datos de producción Considere la matriz

$$P = \begin{bmatrix} 320 & 280 & 460 & 280 \\ 480 & 360 & 580 & 0 \\ 540 & 420 & 200 & 880 \end{bmatrix}$$

que representa la producción de los sistemas de sonido de Acrosonic Company discutido antes (vea la tabla 1).

a. ¿Cuál es el tamaño de la matriz P?

b. Encuentre p_{24} (la entrada en el renglón 2 y la columna 4 de la matriz P) y dé una interpretación de este número.

c. Calcule la suma de las entradas que componen el renglón 1 de P e interprete el resultado.
d. Calcule la suma de las entradas que componen la columna 4 de P e interprete el resultado.

Solución

a. La matriz P tiene tres renglones y cuatro columnas y por tanto tiene un tamaño de 3×4.
b. La entrada requerida se encuentra en el renglón 2 y la columna 4, y es el número 0. Esto significa que ningún modelo de sistemas de sonido D fue fabricado en mayo en la ubicación II.
c. La suma requerida está dada por

$$320 + 280 + 460 + 280 = 1340$$

que da el número total de sistemas de sonido fabricados en mayo en la ubicación I que es de 1340 unidades.
d. La suma requerida está dada por

$$280 + 0 + 880 = 1160$$

dando la producción del modelo D de sistemas de sonido en mayo en todas las ubicaciones de la empresa, que es de 1160 unidades. ■

Igualdad de matrices

Se dice que dos matrices son *iguales* si tienen el mismo tamaño y sus entradas correspondientes son iguales. Por ejemplo,

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 6 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (3-1) & 3 & 1 \\ 4 & (4+2) & 2 \end{bmatrix}$$

También,

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 3 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$$

dado que la matriz de la izquierda tiene un tamaño de 2×3, mientras que la matriz de la derecha tiene un tamaño de 3×2, y

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$$

ya que los elementos correspondientes en el renglón 2 y la columna 2 de las dos matrices no son iguales.

Igualdad de matrices

Dos matrices son iguales si tienen el mismo tamaño y sus entradas correspondientes son iguales.

VIDEO

EJEMPLO 2 Resuelva la siguiente ecuación de matrices para x, y y z:

$$\begin{bmatrix} 1 & x & 3 \\ 2 & y-1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & z \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Solución Puesto que los elementos correspondientes de las dos matrices deben ser iguales, encontramos que $x = 4$, $z = 3$ y $y - 1 = 1$, o $y = 2$. ■

Suma y resta

Dos matrices A y B del *mismo tamaño* se pueden sumar o restar para producir una matriz del mismo tamaño. Esto se hace sumando o restando las entradas correspondientes de las dos matrices. Por ejemplo,

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 6 & 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+1 & 3+4 & 4+3 \\ -1+6 & 2+1 & 0+(-2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 7 \\ 5 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$

Suma de dos matrices del mismo tamaño

$$\text{y} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-2 & 2-(-1) \\ -1-3 & 3-2 \\ 4-(-1) & 0-0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -4 & 1 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$$

Resta de dos matrices del mismo tamaño

Suma y resta de matrices

Si A y B son dos matrices del mismo tamaño, entonces:

1. La *suma* $A + B$ es la matriz que se obtiene mediante la suma de las entradas correspondientes de las dos matrices.
2. La *diferencia* $A - B$ es la matriz que se obtiene al restar las entradas correspondientes en B de las de A.

EJEMPLO DE APLICACIÓN 3 Organización de los datos de producción La producción total de Acrosonic para junio se muestra en la tabla 2.

TABLA **2**

	Modelo A	Modelo B	Modelo C	Modelo D
Ubicación I	210	180	330	180
Ubicación II	400	300	450	40
Ubicación III	420	280	180	740

La producción de mayo fue dada antes en la tabla 1. Encontrar la producción total de la empresa para mayo y junio.

Solución Como se vio antes, la matriz de producción de Acrosonic para mayo está dada por

$$A = \begin{bmatrix} 320 & 280 & 460 & 280 \\ 480 & 360 & 580 & 0 \\ 540 & 420 & 200 & 880 \end{bmatrix}$$

Enseguida, de la tabla 2, vemos que la matriz de producción para junio está dada por

$$B = \begin{bmatrix} 210 & 180 & 330 & 180 \\ 400 & 300 & 450 & 40 \\ 420 & 280 & 180 & 740 \end{bmatrix}$$

Por último, la producción total de Acrosonic para mayo y junio está dada por la matriz

$$A + B = \begin{bmatrix} 320 & 280 & 460 & 280 \\ 480 & 360 & 580 & 0 \\ 540 & 420 & 200 & 880 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 210 & 180 & 330 & 180 \\ 400 & 300 & 450 & 40 \\ 420 & 280 & 180 & 740 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 530 & 460 & 790 & 460 \\ 880 & 660 & 1030 & 40 \\ 960 & 700 & 380 & 1620 \end{bmatrix}$$

Las siguientes leyes sustentan la suma de matrices.

Leyes para la suma de matrices

Si A, B y C son matrices del mismo tamaño, entonces

1. $A + B = B + A$ Ley conmutativa

2. $(A + B) + C = A + (B + C)$ Ley asociativa

La *ley conmutativa* de la suma de matrices establece que el orden en que se realiza la adición de la matriz no tiene importancia. La *ley asociativa* establece que, al sumar tres matrices juntas, podemos sumar primero A y B y luego agregar la cantidad resultante a C. De manera equivalente, podemos sumar A a la suma de B y C.

Una *matriz cero* es aquella en la que todas las entradas son iguales a cero. Una matriz cero O tiene la característica de que

$$A + O = O + A = A$$

para cualquier matriz A que tiene el mismo tamaño que la de O. Por ejemplo, la matriz cero de tamaño 3×2 es

$$O = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Si A es cualquier matriz de 3×2, entonces

$$A + O = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} = A$$

donde a_{ij} denota la entrada en el renglón i-ésimo y en la columna j-ésima de la matriz A.

La matriz que se obtiene al intercambiar los renglones y columnas de una matriz A se llama *transpuesta* de A y se denota A^T. Por ejemplo, si

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

entonces

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$$

> **Transpuesta de una matriz**
> Si A es una matriz $m \times n$ con elementos a_{ij}, entonces la **transpuesta** de A es la matriz $n \times m$ A^T con elementos a_{ji}.

Multiplicación por un escalar

Una matriz A puede ser multiplicada por un número real, llamado **escalar** en el contexto del álgebra matricial. El producto por un escalar, denotada por cA, es una matriz que se obtiene al multiplicar cada entrada de A por c. Por ejemplo, el producto de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

y el escalar 3 es la matriz

$$3A = 3\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & -3 & 6 \\ 0 & 3 & 12 \end{bmatrix}$$

> **Producto por un escalar**
> Si A es una matriz y c es un número real, entonces el **producto por un escalar** cA es la matriz que se obtiene al multiplicar cada entrada de A por c.

EJEMPLO 4 Tenemos

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

encontrar la matriz X que satisface la *ecuación matricial* $2X + B = 3A$.

Solución De la ecuación dada $2X + B = 3A$, encontramos que

$$\begin{aligned} 2X &= 3A - B \\ &= 3\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 9 & 12 \\ -3 & 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 10 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \\ X &= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 6 & 10 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

■

EJEMPLO DE APLICACIÓN 5 Planeación de la producción La dirección de Acrosonic ha decidido incrementar 10% su producción de julio de los sistemas de sonido (sobre su producción de junio). Encontrar una matriz dando la producción buscada para el mes de julio.

Solución De los resultados del ejemplo 3, vemos que la producción total de Acrosonic para junio puede ser representada por la matriz

$$B = \begin{bmatrix} 210 & 180 & 330 & 180 \\ 400 & 300 & 450 & 40 \\ 420 & 280 & 180 & 740 \end{bmatrix}$$

La matriz requerida está dada por

$$(1.1)B = 1.1\begin{bmatrix} 210 & 180 & 330 & 180 \\ 400 & 300 & 450 & 40 \\ 420 & 280 & 180 & 740 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 231 & 198 & 363 & 198 \\ 440 & 330 & 495 & 44 \\ 462 & 308 & 198 & 814 \end{bmatrix}$$

y se interpreta en la forma usual. ■

5.4 Ejercicios de autoevaluación

1. Realice las operaciones indicadas:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 4 & 7 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

2. Resuelva la siguiente ecuación matricial para x, y y z:

$$\begin{bmatrix} x & 3 \\ z & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2-y & z \\ 2-z & -x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

3. Jack es propietario de dos estaciones de servicio, una en el centro de la ciudad y la otra en el distrito Wilshire. Durante 2 días consecutivos sus estaciones de servicio registraron las ventas de gasolina representadas por las matrices siguientes:

$$A = \begin{array}{l} \\ \text{Centro} \\ \text{Wilshire} \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{Regular} & \text{Regular plus} & \text{Premium} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1200 & 750 & 650 \\ 1100 & 850 & 600 \end{bmatrix} \end{array}$$

y

$$B = \begin{array}{l} \\ \text{Centro} \\ \text{Wilshire} \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{Regular} & \text{Regular plus} & \text{Premium} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1250 & 825 & 550 \\ 1150 & 750 & 750 \end{bmatrix} \end{array}$$

Encontrar una matriz que represente las ventas totales de las dos estaciones de servicio en el plazo de 2 días.

Las soluciones de los ejercicios de autoevaluación 5.4 se pueden encontrar en la página 284.

5.4 Ejercicios de autoevaluación

1. Defina (a) matriz, (b) tamaño de una matriz, (c) matriz renglón, (d) matriz columna y (e) matriz cuadrada.
2. ¿Cuándo son iguales dos matrices? Dé un ejemplo de dos matrices que son iguales.
3. Construya una matriz A de 3×3 que tiene la propiedad de que $A = A^T$. ¿Qué características especiales tiene A?

5.4 Ejercicios

En los ejercicios 1 a 6, remítase a las siguientes matrices:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 9 & -4 \\ -11 & 2 & 6 & 7 \\ 6 & 0 & 2 & 9 \\ 5 & 1 & 5 & -8 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

1. ¿Cuál es el tamaño de A? ¿De B? ¿De C? ¿De D?
2. Encuentre a_{14}, a_{21}, a_{31} y a_{43}.
3. Encuentre b_{13}, b_{31} y b_{43}.
4. Identifique la matriz renglón. ¿Cuál es su transpuesta?

5. Identifique la matriz columna ¿Cuál es su transpuesta?

6. Identifique la matriz cuadrada. ¿Cuál es su transpuesta?

En los ejercicios 7 a 12, remítase a las siguientes matrices:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -2 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 3 \\ 4 & 6 & 2 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 3 & 6 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

7. ¿Cuál es el tamaño de A? ¿De B? ¿De C? ¿De D?

8. Explique por qué la matriz $A + C$ *no* existe.

9. Calcule $A + B$.

10. Calcule $2A - 3B$.

11. Calcule $C - D$.

12. Calcule $4D - 2C$.

En los ejercicios 13-20, realice las operaciones indicadas.

13. $\begin{bmatrix} 6 & 3 & 8 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 0 & -5 & -7 \end{bmatrix}$

14. $\begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 & -1 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 3 & -2 & -4 \\ 6 & 2 & 0 & -3 \end{bmatrix}$

15. $\begin{bmatrix} 1 & 4 & -5 \\ 3 & -8 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 3 & 6 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 8 & 9 \\ -11 & 2 & -5 \end{bmatrix}$

16. $3\begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 3 & 2 & 3 \\ 7 & -1 & 6 \end{bmatrix} + 4\begin{bmatrix} -2 & -1 & 8 \\ 4 & 2 & 2 \\ 3 & 6 & 3 \end{bmatrix}$

17. $\begin{bmatrix} 1.2 & 4.5 & -4.2 \\ 8.2 & 6.3 & -3.2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3.1 & 1.5 & -3.6 \\ 2.2 & -3.3 & -4.4 \end{bmatrix}$

18. $\begin{bmatrix} 0.06 & 0.12 \\ 0.43 & 1.11 \\ 1.55 & -0.43 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.77 & -0.75 \\ 0.22 & -0.65 \\ 1.09 & -0.57 \end{bmatrix}$

19. $\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -4 \\ 3 & 0 & -1 & 6 \\ -2 & 1 & -4 & 2 \end{bmatrix} + \frac{4}{3}\begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 & 4 \\ -2 & 1 & -6 & 2 \\ 8 & 2 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

$$- \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 3 & -9 & -1 & 0 \\ 6 & 2 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

20. $0.5\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 5 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} - 0.2\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -1 & 1 & -4 \\ 3 & 5 & -5 \end{bmatrix}$

$$+ 0.6\begin{bmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 4 & 5 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

En los ejercicios 21 a 24, resuelva para *u*, *x*, *y* y *z* en la matriz de la ecuación dada.

21. $\begin{bmatrix} 2x - 2 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & y - 2 \\ 2z & -3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & u & 2 \\ 2 & 4 & 5 \\ 4 & -3 & 2 \end{bmatrix}$

22. $\begin{bmatrix} x & -2 \\ 3 & y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & z \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 2u & 4 \end{bmatrix}$

23. $\begin{bmatrix} 1 & x \\ 2y & -3 \end{bmatrix} - 4\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3z & 10 \\ 4 & -u \end{bmatrix}$

24. $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ x & -1 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} y - 1 & 2 \\ 1 & 2 \\ 4 & 2z + 1 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} -4 & -u \\ 0 & -1 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$

En los ejercicios 25 y 26, sean

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 4 & -3 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

25. Verifique mediante un cálculo directo la validez de la ley conmutativa para la suma de matrices

26. Verifique mediante un cálculo directo la validez de la ley asociativa para la suma de matrices.

En los ejercicios 27 y 30, sean

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \\ -4 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Compruebe cada ecuación mediante un cálculo directo.

27. $(3 + 5)A = 3A + 5A$

28. $2(4A) = (2 \cdot 4)A = 8A$

29. $4(A + B) = 4A + 4B$

30. $2(A - 3B) = 2A - 6B$

En los ejercicios 31 a 34, encuentre la transpuesta de cada matriz.

31. $\begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 & 5 \end{bmatrix}$

32. $\begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 & -1 \\ 3 & 4 & -1 & 5 \end{bmatrix}$

33. $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

34. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 & 4 \\ 2 & 3 & 2 & 5 \\ 6 & 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

35. **NIVELES DE COLESTEROL** Los señores Cruz, Jones y Smith padecen todos de una enfermedad coronaria. Como parte de su tratamiento, fueron puestos a dietas especiales bajas en colesterol: Cruz en la dieta I, Jones en la II y Smith en la III. Se mantuvieron registros progresivos del nivel de colesterol de cada paciente. Al inicio del primero, segundo, tercero y cuarto meses, los niveles de colesterol de los tres pacientes fueron:

Cruz: 220, 215, 210 y 205
Jones: 220, 210, 200 y 195
Smith: 215, 205, 195 y 190

Represente esta información en una matriz de 3×4.

36. **Portafolios de inversión** La siguiente tabla muestra el número de acciones de algunas empresas en manos de Leslie y Tom en sus respectivas cuentas de retiro a principios de año:

	IBM	GE	Ford	Wal-Mart
Leslie	500	350	200	400
Tom	400	450	300	200

Durante el año, añadieron más acciones a sus cuentas, como se muestra en la siguiente tabla:

	IBM	GE	Ford	Wal-Mart
Leslie	50	50	0	100
Tom	0	80	100	50

a. Escriba una matriz A dando las participaciones de Leslie y Tom al principio del año y una matriz B dando las acciones que se han añadido a sus portafolios.
b. Encuentre una matriz C dando sus participaciones totales al final del año.

37. **Ventas de casas** K & R Builders construye tres modelos de casas, M_1, M_2 y M_3, en tres subdivisiones I, II y III, ubicados en tres zonas diferentes de una ciudad. Los precios de las casas (en miles de dólares) se dan en la matriz A:

$$A = \begin{array}{c} \\ \text{I} \\ \text{II} \\ \text{III} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} M_1 & M_2 & M_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 340 & 360 & 380 \\ 410 & 430 & 440 \\ 620 & 660 & 700 \end{bmatrix} \end{array}$$

K & R Builders ha decidido aumentar el precio de cada casa 3% el próximo año. Escriba una matriz S dando los nuevos precios de las casas.

38. **Ventas de casas** K & R Builders construye tres modelos de casas, M_1, M_2 y M_3, en tres subdivisiones I, II y III, ubicados en tres zonas diferentes de una ciudad. Los precios de las casas (en miles de dólares) se dan en la matriz A:

$$A = \begin{array}{c} \\ \text{I} \\ \text{II} \\ \text{III} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} M_1 & M_2 & M_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 340 & 360 & 380 \\ 410 & 430 & 440 \\ 620 & 660 & 700 \end{bmatrix} \end{array}$$

La nueva lista de precios para el próximo año, que refleja un porcentaje de incremento uniforme para cada casa, está dada por la matriz B:

$$B = \begin{array}{c} \\ \text{I} \\ \text{II} \\ \text{III} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} M_1 & M_2 & M_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 357 & 378 & 399 \\ 430.5 & 451.5 & 462 \\ 651 & 693 & 735 \end{bmatrix} \end{array}$$

¿Cuál fue el porcentaje de incremento en los precios de las casas?
Sugerencia: Encuentre r tal que $(1 + 0.01r)A = B$.

39. **Banca** Las cantidades de tres tipos de cuentas bancarias el 1 de enero en el Banco Central y sus sucursales están representadas en la matriz A:

$$A = \begin{array}{r} \\ \text{Oficina principal} \\ \text{Sucursal Westside} \\ \text{Sucursal Eastside} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{Cuentas de cheques} & \text{Cuentas de ahorro} & \text{Cuentas de depósito fijo} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 2820 & 1470 & 1120 \\ 1030 & 520 & 480 \\ 1170 & 540 & 460 \end{bmatrix} \end{array}$$

La cantidad y los tipos de cuentas abiertas en el primer trimestre están representados en la matriz B, y la cantidad y los tipos de cuentas cerradas durante el mismo periodo están representadas por la matriz C. Por tanto,

$$B = \begin{bmatrix} 260 & 120 & 110 \\ 140 & 60 & 50 \\ 120 & 70 & 50 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad C = \begin{bmatrix} 120 & 80 & 80 \\ 70 & 30 & 40 \\ 60 & 20 & 40 \end{bmatrix}$$

a. Encuentre la matriz D, que representa la cantidad de cada tipo de cuenta al final del primer trimestre en cada ubicación.
b. Debido a que se está abriendo una nueva planta de fabricación en el área inmediata, se prevé que habrá un aumento de 10% en el número de cuentas en cada ubicación durante el segundo trimestre. Escriba una matriz $E = 1.1\ D$ para reflejar este aumento previsto.

40. **Inventarios de librerías** El inventario de libros de The Campus Bookstore es

Tapa dura: libros de texto, 5280; ficción, 1680; no ficción, 2320; referencia, 1890

Rústica: ficción, 2810; no ficción, 1490; referencia, 2070; libros de texto, 1940

El inventario de libros de The College Bookstore es

Tapa dura: libros de texto, 6340; ficción, 2220; no ficción, 1790; referencia, 1980

Rústica: ficción, 3100; no ficción, 1720; referencia, 2710; libros de texto, 2050

a. Representar el inventario de Campus como una matriz A.
b. Representar el inventario de College como una matriz B
c. Las dos empresas deciden fusionarse, así que establezca una matriz C que represente el inventario total de la nueva empresa unida.

41. **Reclamaciones de seguros** Las frecuencias de reclamación por daños a la propiedad por cada 100 automóviles en Massachusetts en los años 2000, 2001 y 2002 son 6.88, 7.05 y 7.18, respectivamente. Las frecuencias de reclamación correspondiente en Estados Unidos son 4.13, 4.09 y 4.06, respectivamente. Exprese esta información con una matriz 2×3.
Fuente: Registry of Motor Vehicles; Federal Highway Administration

42. Tasas de mortalidad Las tablas actuariales de mortalidad en Estados Unidos fueron revisadas en 2001, la cuarta vez desde 1858. Con base en las nuevas tasas de mortalidad de los seguros de vida, 1% de los hombres de 60 años de edad, 2.6% de los hombres de 70 años de edad, 7% de los hombres de 80 años de edad, 18.8% de los hombres de 90 años de edad y 36.3% de los hombres de 100 años de edad morirán dentro del plazo de un año. Las tasas correspondientes para las mujeres son 0.8%, 1.8%, 4.4%, 12.2% y 27.6%, respectivamente. Exprese esta información utilizando una matriz de 2×5.
Fuente: Society of Actuaries

43. Esperanza de vida Las cifras de esperanza de vida al nacer de los residentes de Massachusetts en 2002 son 81.0, 76.1 y 82.2 años para mujeres blancas, negras e hispanas, respectivamente, y 76.0, 69.9 y 75.9 años para hombres blancos, negros e hispanos, respectivamente. Exprese esta información utilizando una matriz de 2×3 y otra de 3×2.
Fuente: Massachusetts Department of Public Health

44. Participación del mercado de motocicletas La participación en el mercado de motocicletas en Estados Unidos en 2001 fue la siguiente: Honda 27.9%, Harley-Davidson 21.9%, Yamaha 19.2%, Suzuki 11.0%, Kawasaki 9.1% y otros 10.9%. Las cifras correspondientes a 2002 son 27.6%, 23.3%, 18.2%, 10.5%, 8.8% y 11.6%, respectivamente. Exprese esta información utilizando una matriz de 2×6. ¿Cuál es la suma de todos los elementos en el primer renglón? ¿En el segundo renglón? ¿Es lo que se esperaba? ¿Qué empresa ganó mayor participación de mercado entre 2001 y 2002?
Fuente: Motorcycle Industry Council

En los ejercicios 45 a 48 determine si la afirmación es verdadera o falsa. Si es verdadera, explique por qué lo es. Si es falsa, dé un ejemplo para mostrar por qué lo es.

45. Si A y B son matrices del mismo tamaño y c es un escalar, entonces $c(A + B) = cA + cB$.

46. Si A y B son matrices del mismo tamaño, entonces $A - B = A + (-1)B$.

47. Si A es una matriz y c es un escalar distinto de cero, entonces $(cA)^T = (1/c)A^T$.

48. Si A es una matriz, entonces $(A^T)^T = A$.

5.4 Soluciones de los ejercicios de autoevaluación

1. $$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 4 & 7 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 4 & 7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6 & 3 & 0 \\ 3 & 9 & 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 0 & 2 \\ -4 & -5 & -5 \end{bmatrix}$$

2. Tenemos

$$\begin{bmatrix} x & 3 \\ z & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2-y & z \\ 2-z & -x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Al realizar la operación indicada en el lado izquierdo, obtenemos

$$\begin{bmatrix} 2+x-y & 3+z \\ 2 & 2-x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Por igualdad de matrices, tenemos

$$\begin{aligned} 2 + x - y &= 3 \\ 3 + z &= 7 \\ 2 - x &= 0 \end{aligned}$$

de lo cual deducimos que $x = 2$, $y = 1$ y $z = 4$.

3. La matriz requerida es

$$A + B = \begin{bmatrix} 1200 & 750 & 650 \\ 1100 & 850 & 600 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1250 & 825 & 550 \\ 1150 & 750 & 750 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2450 & 1575 & 1200 \\ 2250 & 1600 & 1350 \end{bmatrix}$$

USO DE LA TECNOLOGÍA

Operaciones con matrices

Calculadora graficadora

Se puede usar una calculadora graficadora para realizar sumas y restas de matrices y multiplicaciones escalares. También se puede usar para encontrar la transpuesta de una matriz.

EJEMPLO 1 Sea

$$A = \begin{bmatrix} 1.2 & 3.1 \\ -2.1 & 4.2 \\ 3.1 & 4.8 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} 4.1 & 3.2 \\ 1.3 & 6.4 \\ 1.7 & 0.8 \end{bmatrix}$$

Encontrar (a) $A + B$, (b) $2.1A - 3.2B$ y (c) $(2.1A + 3.2B)^T$.

Solución En primer lugar, introducimos las matrices A y B en la calculadora.

a. Utilizando operaciones con matrices, introducimos la expresión $A + B$ y obtenemos

$$A + B = \begin{bmatrix} 5.3 & 6.3 \\ -0.8 & 10.6 \\ 4.8 & 5.6 \end{bmatrix}$$

b. Utilizando operaciones con matrices, introducimos la expresión $2.1A - 3.2B$ y obtenemos

$$2.1A - 3.2B = \begin{bmatrix} -10.6 & -3.73 \\ -8.57 & -11.66 \\ 1.07 & 7.52 \end{bmatrix}$$

c. Utilizando operaciones con matrices, introducimos la expresión $(2.1A + 3.2B)^T$ y obtenemos

$$(2.1A + 3.2B)^T = \begin{bmatrix} 15.64 & -0.25 & 11.95 \\ 16.75 & 29.3 & 12.64 \end{bmatrix}$$

■

EJEMPLO DE APLICACIÓN 2 John opera tres estaciones de servicio en tres ubicaciones, I, II y III. Durante 2 días consecutivos, sus estaciones de servicio registraron las siguientes ventas de combustible (en galones):

Día 1

	Regular	Regular Plus	Premium	Diesel
Ubicación I	1400	1200	1100	200
Ubicación II	1600	900	1200	300
Ubicación III	1200	1500	800	500

Día 2

	Regular	Regular Plus	Premium	Diesel
Ubicación I	1000	900	800	150
Ubicación II	1800	1200	1100	250
Ubicación III	800	1000	700	400

Encuentre una matriz que represente el total de ventas de combustible en las estaciones de servicio de John.

Solución Las ventas de combustible pueden ser representadas por la matriz A (día 1) y la matriz B (día 2):

$$A = \begin{bmatrix} 1400 & 1200 & 1100 & 200 \\ 1600 & 900 & 1200 & 300 \\ 1200 & 1500 & 800 & 500 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} 1000 & 900 & 800 & 150 \\ 1800 & 1200 & 1100 & 250 \\ 800 & 1000 & 700 & 400 \end{bmatrix}$$

Introducimos las matrices A y B en la calculadora. Uso de operaciones con matrices, introducimos la expresión $A + B$ y obtenemos

$$A + B = \begin{bmatrix} 2400 & 2100 & 1900 & 350 \\ 3400 & 2100 & 2300 & 550 \\ 2000 & 2500 & 1500 & 900 \end{bmatrix}$$

■

Excel

En primer lugar, se muestra cómo se pueden realizar las operaciones básicas de matrices con Excel.

EJEMPLO 3 Dadas las siguientes matrices,

$$A = \begin{bmatrix} 1.2 & 3.1 \\ -2.1 & 4.2 \\ 3.1 & 4.8 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} 4.1 & 3.2 \\ 1.3 & 6.4 \\ 1.7 & 0.8 \end{bmatrix}$$

a. Calcule $A + B$. **b.** Calcule $2.1A - 3.2B$.

(continúa)

Solución

a. *En primer lugar, representar las matrices A y B en una hoja de cálculo.* Introduzca los elementos de cada matriz en un bloque de celdas, como se muestra en la figura T1.

	A	B	C	D	E
1		A			B
2	1.2	3.1		4.1	3.2
3	–2.1	4.2		1.3	6.4
4	3.1	4.8		1.7	0.8

FIGURA **T1**
Los elementos de la matriz ***A*** y de la matriz ***B*** en una hoja de cálculo.

En segundo lugar, calcular la suma de la matriz A y la matriz B. Seleccione las celdas que contendrá la matriz $A + B$, escriba $=$, seleccione las celdas de la matriz A, escriba $+$, seleccione las celdas en la matriz B y presione **Ctrl-Shift-Enter**. La matriz resultante $A + B$ se muestra en la figura T2.

	A	B
8		A + B
9	5.3	6.3
10	–0.8	10.6
11	4.8	5.6

FIGURA **T2**
La matriz $A + B$.

b. *Resaltar las celdas que contendrá la matriz* $2.1A - 3.2B$. Escriba `=2.1*`, resalte la matriz A, escriba `-3.2*`, resalte las celdas de la matriz B, y presione **Ctrl-Shift-Enter**. La matriz resultante $2.1A – 3.2B$ se muestra en la figura T3.

	A	B
13		2.1A - 3.2B
14	–10.6	–3.73
15	–8.57	–11.66
16	1.07	7.52

FIGURA **T3**
La matriz $2.1A - 3.2B$.

■

EJEMPLO DE APLICACIÓN 4 John opera tres estaciones de servicio en tres ubicaciones, I, II y III. Durante 2 días consecutivos, sus estaciones registraron las siguientes ventas de combustible (en galones):

Día 1

	Regular	**Regular Plus**	**Premium**	**Diesel**
Ubicación I	1400	1200	1100	200
Ubicación II	1600	900	1200	300
Ubicación III	1200	1500	800	500

Día 2

	Regular	**Regular Plus**	**Premium**	**Diesel**
Ubicación I	1000	900	800	150
Ubicación II	1800	1200	1100	250
Ubicación III	800	1000	700	400

Encuentre una matriz que represente el total de ventas de combustible en las estaciones de servicio de John.

Solución Las ventas de combustible pueden ser representadas por la matriz A (día 1) y la matriz B (día 2):

$$A = \begin{bmatrix} 1400 & 1200 & 1100 & 200 \\ 1600 & 900 & 1200 & 300 \\ 1200 & 1500 & 800 & 500 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} 1000 & 900 & 800 & 150 \\ 1800 & 1200 & 1100 & 250 \\ 800 & 1000 & 700 & 400 \end{bmatrix}$$

Nota: Las palabras y los caracteres en negrita y encerrados en un recuadro (por ejemplo, **Enter**) indican que se requiere una acción (*clic*, seleccionar o presionar). Las palabras y los caracteres impresos en azul (por ejemplo, Chart sub-type:) indican palabras y caracteres que aparecen en la pantalla. Las palabras y los caracteres de imprenta en una fuente de máquina de escribir (por ejemplo, `=(-2/3)*A2l2)` indican palabras o caracteres que deben ser escritos e introducidos.

En primer lugar, introducimos los elementos de las matrices A y B en una hoja de cálculo. A continuación resaltamos las celdas que contendrán la matriz $A + B$, escriba =, resalte A, escriba +, resalte B, a continuación, presione **Ctrl-Shift-Enter**. La matriz resultante $A + B$ se muestra en la figura T4.

	A	B	C	D
23		A + B		
24	2400	2100	1900	350
25	3400	2100	2300	550
26	2000	2500	1500	900

FIGURA T4
La matriz $A + B$.

EJERCICIOS CON TECNOLOGÍA

Utilizando las siguientes matrices realice las operaciones indicadas.

$$A = \begin{bmatrix} 1.2 & 3.1 & -5.4 & 2.7 \\ 4.1 & 3.2 & 4.2 & -3.1 \\ 1.7 & 2.8 & -5.2 & 8.4 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 6.2 & -3.2 & 1.4 & -1.2 \\ 3.1 & 2.7 & -1.2 & 1.7 \\ 1.2 & -1.4 & -1.7 & 2.8 \end{bmatrix}$$

1. $12.5A$

2. $-8.4B$

3. $A - B$

4. $B - A$

5. $1.3A + 2.4B$

6. $2.1A - 1.7B$

7. $3(A + B)$

8. $1.3(4.1A - 2.3B)$

5.5 Multiplicación de matrices

El producto de matrices

En la sección 5.4 vimos cómo las matrices del mismo tamaño se pueden sumar o restar y cómo una matriz puede ser multiplicada por un escalar (número real), una operación que se conoce como multiplicación por un escalar. En esta sección se verá cómo, con ciertas restricciones, una matriz puede ser multiplicada por otra.

Para definir la multiplicación de matrices, consideraremos el siguiente problema. En un día determinado, la estación de servicio de Al vendió 1600 galones de gasolina regular, 1000 galones de gasolina regular plus y 800 galones de gasolina premium. Si el precio de la gasolina en este día fue \$3.09 para la regular, \$3.29 para la regular plus y \$3.45 para la premium, calcule los ingresos totales de Al para ese día.

La venta de gasolina del día puede ser representada por la matriz

$$A = [1600 \quad 1000 \quad 800] \qquad \text{Matriz renglón } (1 \times 3)$$

A continuación, los precios unitarios de venta de la gasolina regular, la regular plus y la premium son las entradas de la matriz

$$B = \begin{bmatrix} 3.09 \\ 3.29 \\ 3.45 \end{bmatrix} \qquad \text{Matriz columna } (3 \times 1)$$

La primera entrada en la matriz A indica el número de galones vendidos de gasolina regular y la primera entrada en la matriz B da el precio de venta de cada galón de gasolina regular, por lo que su producto (1600)(3.09) proporciona los ingresos obtenidos de la venta de gasolina regular durante el día. Una interpretación similar de la segunda y tercera entradas en las dos matrices sugiere que se multipliquen las entradas correspondientes para obtener los ingresos respectivos obtenidos de la venta de gasolina regular, regular plus y premium. Por último, los ingresos totales de Al procedentes de la venta de gasolina se obtienen por la suma de estos productos para obtener

$$(1600)(3.09) + (1000)(3.29) + (800)(3.45) = 10{,}994$$

o \$10,994.

Este ejemplo sugiere que si tenemos una matriz fila de tamaño $1 \times n$,

$$A = [a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad \cdots \quad a_n]$$

y una matriz columna de tamaño $n \times 1$,

$$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

entonces podemos definir el **producto matricial** de A y B, que se escribe AB, como

$$AB = [a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad \cdots \quad a_n]\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + \cdots + a_nb_n \tag{11}$$

EJEMPLO 1 Sea

$$A = [1 \quad -2 \quad 3 \quad 5] \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Entonces

$$AB = [1 \quad -2 \quad 3 \quad 5]\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = (1)(2) + (-2)(3) + (3)(0) + (5)(-1) = -9$$

■

EJEMPLO DE APLICACIÓN 2 Operaciones con acciones El número de acciones que Judy tiene está dado por la matriz

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} \text{GM} & \text{IBM} & \text{BAC} \end{array} \\ A = & \begin{bmatrix} 700 & 400 & 200 \end{bmatrix} \end{array}$$

Al cierre de las operaciones en un día determinado, los precios (en dólares por acción) de estas acciones son

$$B = \begin{array}{c} \text{GM} \\ \text{IBM} \\ \text{BAC} \end{array} \begin{bmatrix} 50 \\ 120 \\ 42 \end{bmatrix}$$

¿Cuál es el valor total de las acciones de Judy al final de ese día?

Solución Las acciones de Judy valen

$$AB = [700 \quad 400 \quad 200]\begin{bmatrix} 50 \\ 120 \\ 42 \end{bmatrix} = (700)(50) + (400)(120) + (200)(42)$$

o $91,400. ■

De vuelta al producto matricial AB en la ecuación (11), observamos que el número de columnas de la matriz renglón A es *igual* al número de renglones de la matriz columna B. Observe, además, que la matriz producto AB tiene el tamaño de 1×1 (un número real puede ser pensado como una matriz 1×1). Esquemáticamente,

$$\underset{\text{Tamaño de } A}{1 \times n} \qquad \underset{\text{Tamaño de } B}{n \times 1}$$

$$\underset{\text{Tamaño de } AB}{(1 \times 1)}$$

De manera más general, si A es una matriz de tamaño $n \times m$ y B es una matriz de tamaño $n \times p$ (el número de columnas de A es igual al número de renglones de B), entonces el *producto matricial* de A y B, AB, está definido y es una matriz de tamaño $m \times p$. Esquemáticamente,

$$\underset{\text{Tamaño de } A}{m \times n} \qquad \underset{\text{Tamaño de } B}{n \times p}$$

$$\underset{\text{Tamaño de } AB}{(m \times p)}$$

A continuación ilustramos la mecánica de la multiplicación de matrices calculando el producto de una matriz A de 2×3 y una matriz B de 3×4. Suponga

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} \end{bmatrix}$$

Del esquema

El mismo

$$\text{Tamaño de } A \quad 2 \times 3 \qquad 3 \times 4 \quad \text{Tamaño de } B$$

$$\underset{\text{Tamaño de } AB}{(2 \times 4)}$$

vemos que la matriz producto $C = AB$ está definida (pues el número de columnas de A es igual al número de renglones de B) y tiene un tamaño de 2×4. Por tanto,

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} \end{bmatrix}$$

Las entradas de C se calculan de la siguiente manera: la entrada c_{11} (la entrada en el *primer* renglón, *primera* columna de C) es el producto de la matriz renglón compuesta por las entradas del *primer* renglón de A y la matriz columna compuesta por la *primera* columna de B. Así,

$$c_{11} = [a_{11} \quad a_{12} \quad a_{13}]\begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \end{bmatrix} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31}$$

La entrada c_{12} (la entrada en el *primer* renglón, *segunda* columna de C) es el producto de la matriz renglón compuesta del *primer* renglón de A y la matriz columna compuesta de la *segunda* columna de B. Por tanto,

$$c_{12} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{12} \\ b_{22} \\ b_{32} \end{bmatrix} = a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32}$$

Las otras entradas de C se calculan de igual manera.

VIDEO

EJEMPLO 3 Sea

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 4 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

Calcular AB.

Solución El tamaño de la matriz A es de 2×3, y el tamaño de la matriz B es de 3×3. Dado que el número de columnas de la matriz A es igual al número de renglones de la matriz B, la matriz producto $C = AB$ está definida. Además, el tamaño de la matriz C es de 2×3. Por tanto,

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 4 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \end{bmatrix}$$

Ahora, sólo queda determinar las entradas c_{11}, c_{12}, c_{13}, c_{21}, c_{22} y c_{23}. Tenemos

$$c_{11} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} = (3)(1) + (1)(4) + (4)(2) = 15$$

$$c_{12} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix} = (3)(3) + (1)(-1) + (4)(4) = 24$$

$$c_{13} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = (3)(-3) + (1)(2) + (4)(1) = -3$$

$$c_{21} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} = (-1)(1) + (2)(4) + (3)(2) = 13$$

$$c_{22} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix} = (-1)(3) + (2)(-1) + (3)(4) = 7$$

$$c_{23} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = (-1)(-3) + (2)(2) + (3)(1) = 10$$

así el producto requerido AB está dado por

$$AB = \begin{bmatrix} 15 & 24 & -3 \\ 13 & 7 & 10 \end{bmatrix}$$

■

EJEMPLO 4 Sea

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Entonces

$$\begin{aligned} AB &= \begin{bmatrix} 3 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 1 \cdot (-1) & 3 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 1 \cdot 2 & 3 \cdot 4 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 3 \\ (-1) \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot (-1) & (-1) \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 2 & (-1) \cdot 4 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 3 \\ 3 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 4 \cdot (-1) & 3 \cdot 3 + 1 \cdot 4 + 4 \cdot 2 & 3 \cdot 4 + 1 \cdot 1 + 4 \cdot 3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 6 & 19 & 17 \\ 0 & 11 & 7 \\ 1 & 21 & 25 \end{bmatrix} \\ BA &= \begin{bmatrix} 1 \cdot 3 + 3 \cdot (-1) + 4 \cdot 3 & 1 \cdot 2 + 3 \cdot 2 + 4 \cdot 1 & 1 \cdot 1 + 3 \cdot 3 + 4 \cdot 4 \\ 2 \cdot 3 + 4 \cdot (-1) + 1 \cdot 3 & 2 \cdot 2 + 4 \cdot 2 + 1 \cdot 1 & 2 \cdot 1 + 4 \cdot 3 + 1 \cdot 4 \\ (-1) \cdot 3 + 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 3 & (-1) \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 & (-1) \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 12 & 12 & 26 \\ 5 & 13 & 18 \\ 4 & 5 & 17 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

■

El ejemplo anterior muestra que, en general, $AB \neq BA$ para dos matrices cuadradas A y B. Sin embargo, las siguientes leyes son válidas para la multiplicación de matrices.

Leyes para la multiplicación de matrices

Si los productos y las sumas están definidas para las matrices A, B y C, entonces

1. $(AB)C = A(BC)$ Ley asociativa

2. $A(B + C) = AB + AC$ Ley distributiva

La matriz cuadrada de tamaño n que tiene unos a lo largo de la diagonal principal y ceros en otro lugar se llama matriz identidad de tamaño n.

Matriz identidad

La **matriz identidad** de tamaño n está dada por

$$I_n = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{bmatrix}}_{n \text{ columnas}} \quad n \text{ filas}$$

La matriz identidad tiene las propiedades que $I_nA = A$ para toda matriz A de $n \times r$ y $BI_n = B$ para toda matriz B de $s \times n$. En particular, si A es una matriz cuadrada de tamaño n, entonces

$$I_nA = AI_n = A$$

EJEMPLO 5 Sea

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Entonces

$$I_3A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = A$$

$$AI_3 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = A$$

así que $I_3A = AI_3 = A$, lo que confirma nuestro resultado para este caso particular. ■

VIDEO

EJEMPLO DE APLICACIÓN 6 Planeación de la producción Ace Novelty recibió un pedido del Magic World Amusement Park de 900 pandas gigantes, 1200 perros San Bernardo y 2000 pájaros grandes. La dirección de Ace decidió que 500 pandas, 800 perros y 1300 pájaros pueden ser fabricados en su planta de Los Ángeles, y el resto del pedido podría realizarse en la planta de Seattle. Cada panda requiere 1.5 yardas cuadradas de felpa, 30 pies cúbicos de relleno y 5 piezas de adorno; cada perro requiere 2 yardas cuadradas de felpa, 35 pies cúbicos de relleno y 8 piezas de adorno, y cada pájaro requiere 2.5 metros cuadrados de felpa, 25 pies cúbicos de relleno y 15 piezas de adorno. La felpa cuesta $4.50 por yarda cuadrada, el relleno cuesta $0.10 por pie cúbico y las piezas de adorno cuestan $0.25 por unidad.

a. Calcule la cantidad de cada tipo de material que se debe comprar para cada planta.
b. ¿Cuál es el costo total de materiales empleados en cada planta y el costo total de los materiales usados por Ace Novelty para cubrir el pedido?

Solución Las cantidades de cada tipo de animal de felpa que se fabricarán en cada una de las plantas pueden expresarse como una *matriz de producción* P de 2×3. Por tanto,

$$P = \begin{array}{l} \\ \text{L.A.} \\ \text{Seattle} \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{Pandas} & \text{Perros} & \text{Pájaros} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 500 & 800 & 1300 \\ 400 & 400 & 700 \end{bmatrix} \end{array}$$

Del mismo modo, podemos representar la cantidad y el tipo de material necesario para fabricar cada tipo de animal por una *matriz de actividad* A de 3×3. Por tanto,

$$A = \begin{array}{l} \\ \text{Pandas} \\ \text{Perros} \\ \text{Pájaros} \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{Felpa} & \text{Relleno} & \text{Acabado} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1.5 & 30 & 5 \\ 2 & 35 & 8 \\ 2.5 & 25 & 15 \end{bmatrix} \end{array}$$

Por último, el costo unitario para cada tipo de material puede ser representada por una *matriz de costos* C de 3×1.

$$C = \begin{array}{l} \text{Felpa} \\ \text{Relleno} \\ \text{Acabado} \end{array}\begin{bmatrix} 4.50 \\ 0.10 \\ 0.25 \end{bmatrix}$$

a. La cantidad de cada tipo de material necesaria para cada planta está dada por la matriz PA. Así,

$$PA = \begin{bmatrix} 500 & 800 & 1300 \\ 400 & 400 & 700 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.5 & 30 & 5 \\ 2 & 35 & 8 \\ 2.5 & 25 & 15 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{array}{c} \\ \text{L.A.} \\ \text{Seattle} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{Felpa} & \text{Relleno} & \text{Acabado} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 5600 & 75{,}500 & 28{,}400 \\ 3150 & 43{,}500 & 15{,}700 \end{bmatrix} \end{array}$$

b. El costo total de los materiales para cada planta está dada por la matriz PAC:

$$PAC = \begin{bmatrix} 5600 & 75{,}500 & 28{,}400 \\ 3150 & 43{,}500 & 15{,}700 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4.50 \\ 0.10 \\ 0.25 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{array}{c} \text{L.A.} \\ \text{Seattle} \end{array} \begin{bmatrix} 39{,}850 \\ 22{,}450 \end{bmatrix}$$

o \$39,850 para la planta de Los Ángeles y \$22,450 para la planta de Seattle. Por tanto, el costo total de los materiales utilizados por Ace Novelty es de \$62,300. ■

Representación matricial

El ejemplo 7 muestra cómo un sistema de ecuaciones lineales se puede escribir de forma compacta con la ayuda de las matrices. (Utilizaremos esta representación de una ecuación de matrices en la sección 5.6.)

EJEMPLO 7 Escriba el siguiente sistema de ecuaciones lineales en forma matricial.

$$\begin{aligned} 2x - 4y + z &= 6 \\ -3x + 6y - 5z &= -1 \\ x - 3y + 7z &= 0 \end{aligned}$$

Solución Escribimos

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 1 \\ -3 & 6 & -5 \\ 1 & -3 & 7 \end{bmatrix} \qquad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 6 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Note que A es sólo la matriz de coeficientes 3×3 del sistema, X es la matriz columna 3×1 de incógnitas (variables) y B la matriz columna 3×1 de constantes. Mostramos ahora que la representación matricial requerida del sistema de ecuaciones lineales es

$$AX = B$$

Para ver esto, observe que

$$AX = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 1 \\ -3 & 6 & -5 \\ 1 & -3 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x - 4y + z \\ -3x + 6y - 5z \\ x - 3y + 7z \end{bmatrix}$$

Al igualar esta matriz 3×1 con la matriz B ahora da

$$\begin{bmatrix} 2x - 4y + z \\ -3x + 6y - 5z \\ x - 3y + 7z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

que, por la igualdad de la matriz, se ve fácilmente que es equivalente al sistema dado de ecuaciones lineales. ■

5.5 Ejercicios de autoevaluación

1. Calcule

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

2. Escriba el siguiente sistema de ecuaciones lineales en forma matricial:

$$\begin{aligned} y - 2z &= 1 \\ 2x - y + 3z &= 0 \\ x \quad\;\; + 4z &= 7 \end{aligned}$$

3. El 1 de junio, el número de acciones de Ash y Joan Robinson estaban dados por la matriz

$$A = \begin{array}{c} \\ \text{Ash} \\ \text{Joan} \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \text{AT\&T} & \text{TWX} & \text{IBM} & \text{GM} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 2000 & 1000 & 500 & 5000 \\ 1000 & 2500 & 2000 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

y los precios de cierre de AT&T, TWX, IBM y GM fueron de \$54, \$113, \$112 y \$70 por acción, respectivamente. Utilice la multiplicación de matrices para determinar el valor de cada una de las acciones de Ash y de Joan en esa fecha.

Las soluciones de los ejercicios de autoevaluación 5.5 se pueden encontrar en la página 298.

5.5 Preguntas de concepto

1. ¿Cuál es la diferencia entre la multiplicación escalar y la multiplicación de matrices? Dé ejemplos de cada operación.

2. a. Suponga que A y B son matrices cuyos productos AB y BA están definidos. ¿Qué puede decir acerca de las dimensiones de A y B?

b. Si A, B y C son matrices tales que $A(B + C)$ está definida, ¿qué puede decir sobre la relación entre el número de columnas de A y el número de renglones de C? Explique.

5.5 Ejercicios

En los ejercicios 1 a 4, se dan los tamaños de las matrices *A* y *B*. Encuentre el tamaño de *AB* y *BA* si el producto está definido.

1. A es de tamaño 2×3 y B es de tamaño 3×5.

2. A es de tamaño 3×4 y B es de tamaño 4×3.

3. A es de tamaño 1×7 y B es de tamaño 7×1.

4. A es de tamaño 4×4 y B es de tamaño 4×4.

5. Sea A una matriz de tamaño $m \times n$ y B una matriz de tamaño $s \times t$. Busque las condiciones de m, n, s y t tales que los productos de las matrices AB y BA estén definidos.

6. Encuentre la(s) condición(es) en el tamaño de una matriz A tal que A^2 (es decir, AA) esté definida.

En los ejercicios 7 a 24 calcule los productos indicados.

7. $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

8. $\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 7 \\ 2 \end{bmatrix}$

9. $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$

10. $\begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 4 & -1 & 0 \\ -5 & 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$

11. $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

12. $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

13. $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

14. $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}$

15. $\begin{bmatrix} 0.1 & 0.9 \\ 0.2 & 0.8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1.2 & 0.4 \\ 0.5 & 2.1 \end{bmatrix}$

16. $\begin{bmatrix} 1.2 & 0.3 \\ 0.4 & 0.5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0.2 & 0.6 \\ 0.4 & -0.5 \end{bmatrix}$

17. $\begin{bmatrix} 6 & -3 & 0 \\ -2 & 1 & -8 \\ 4 & -4 & 9 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

18. $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -5 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$

19. $\begin{bmatrix} 3 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$

20. $\begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 & 0 \\ 4 & -2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \\ 3 & -3 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}$

21. $4\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$

22. $3\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

23. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & -3 & 2 \\ 7 & 1 & -5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

24. $2\begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

En los ejercicios 25 y 26, sean

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & -3 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & -3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

25. Verifique la validez de la ley asociativa para la multiplicación de matrices.

26. Verifique la validez de la ley distributiva para la multiplicación de matrices.

27. Sean

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

Calcular AB y BA y, a partir de ahí, deducir que la multiplicación de matrices, en general, no es conmutativa.

28. Sean

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 3 & -1 & -6 \\ 4 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 3 & -1 & -6 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

a. Calcule AB.
b. Calcule AC.
c. Utilizando los resultados de los incisos (a) y (b) concluya que $AB = AC$ *no* implica que $B = C$.

29. Sean

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$$

Muestre que $AB = 0$, lo que demuestra que para la multiplicación de matrices la ecuación $AB = 0$ no implica que una o ambas de las matrices A y B deban ser matriz cero.

30. Sea

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$$

Demuestre que $A^2 = 0$. Compare esto con la ecuación $a^2 = 0$, donde a es un número real.

31. Encuentre la matriz A tal que

$$A\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

Sugerencia: Sea $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$.

32. Sea

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

a. Calcule $(A + B)^2$.
b. Calcule $A^2 + 2AB + B^2$.
c. De los resultados de los incisos (a) y b) se muestre que, en general, $(A + B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$.

33. Sean

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & -6 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 8 \\ -7 & 3 \end{bmatrix}$$

a. Encuentre A^T y muestre que $(A^T)^T = A$.
b. Muestre que $(A + B)^T = A^T + B^T$.
c. Muestre que $(AB)^T = B^TA^T$.

34. Sean

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$$

a. Encuentre A^T y muestre que $(A^T)^T = A$
b. Muestre que $(A + B)^T = A^T + B^T$.
c. Muestre que $(AB)^T = B^TA^T$.

En los ejercicios 35 a 40 escriba el sistema de ecuaciones lineales dado en forma matricial.

35. $\begin{aligned} 2x - 3y &= 7 \\ 3x - 4y &= 8 \end{aligned}$

36. $\begin{aligned} 2x \phantom{{}-2y} &= 7 \\ 3x - 2y &= 12 \end{aligned}$

37. $\begin{aligned} 2x - 3y + 4z &= 6 \\ 2y - 3z &= 7 \\ x - y + 2z &= 4 \end{aligned}$

38. $\begin{aligned} x - 2y + 3z &= -1 \\ 3x + 4y - 2z &= 1 \\ 2x - 3y + 7z &= 6 \end{aligned}$

39. $\begin{aligned} -x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 &= 2 \\ -3x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 4 \end{aligned}$

40. $\begin{aligned} 3x_1 - 5x_2 + 4x_3 &= 10 \\ 4x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= -12 \\ -x_1 \phantom{{}+2x_2} + x_3 &= -2 \end{aligned}$

41. **INVERSIONES** El número de acciones de William y Michael está dado por la matriz

$$A = \begin{array}{c} \\ \text{William} \\ \text{Michael} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \text{BAC} & \text{GM} & \text{IBM} & \text{TRW} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 200 & 300 & 100 & 200 \\ 100 & 200 & 400 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Al cierre de operaciones en un día determinado, los precios (en dólares por acción) de las acciones están dados por la matriz

$$B = \begin{array}{c} \text{BAC} \\ \text{GM} \\ \text{IBM} \\ \text{TRW} \end{array} \begin{bmatrix} 54 \\ 48 \\ 98 \\ 82 \end{bmatrix}$$

a. Calcule AB.
b. Explique el significado de las entradas de la matriz AB.

42. **DIVISAS** Ethan acaba de regresar a Estados Unidos de un viaje por el sudeste asiático y desea cambiar distintas monedas extranjeras que ha acumulado por dólares estadounidenses. Tiene 1200 bahts tailandeses, 80,000 rupias indonesias, 42 ringgits malasios y 36 dólares de Singapur. Suponga que los tipos de cambio son \$0.03 por un baht, \$0.00011 por una rupia indonesia, \$0.294 por un ringgit de Malasia y \$0.656 por un dólar de Singapur.
   a. Escriba una matriz renglón A con el valor de las distintas monedas que tiene Ethan. (*Nota:* la respuesta *no* es única.)
   b. Escriba una matriz columna B con los tipos de cambio de las distintas monedas.
   c. Si Ethan intercambia todas sus divisas por dólares estadounidenses, ¿cuántos dólares tendrá?

43. **DIVISAS** Kaitlin y su amiga Emma regresaron a Estados Unidos de un viaje por cuatro ciudades: Oslo, Estocolmo, Copenhague y San Petersburgo. Ahora quieren cambiar las monedas extranjeras que han acumulado por dólares estadounidenses. Kaitlin tiene 82 coronas noruegas, 68 coronas suecas, 62 coronas danesas y 1200 rublos rusos. Emma tiene 64 coronas noruegas, 74 coronas suecas, 44 coronas danesas y 1600 rublos rusos. Suponga que los tipos de cambio son en dólares estadounidenses \$0.1651 por una corona noruega, \$0.1462 por una corona sueca, \$0.1811 por una corona danesa y \$0.0387 por un rublo ruso.
   a. Escriba una matriz A de 2×4 con los valores de las diversas monedas extranjeras en poder de Kaitlin y Emma. (*Nota:* la respuesta *no* es única.)
   b. Escriba una matriz columna B dando el tipo de cambio de las distintas monedas.
   c. Si tanto Emma como Kaitlin cambian todas sus monedas extranjeras por dólares estadounidenses, ¿cuántos dólares tiene cada una?

44. **BIENES RAÍCES** Bond Brothers, un desarrollador de bienes raíces, construye casas en tres estados. El número previsto de unidades de cada modelo que se construirá en cada estado está determinado por la matriz

$$A = \begin{array}{c} \\ \\ \text{NY} \\ \text{CT} \\ \text{MA} \end{array} \begin{array}{c} \text{Modelo} \\ \begin{array}{cccc} \text{I} & \text{II} & \text{III} & \text{IV} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 60 & 80 & 120 & 40 \\ 20 & 30 & 60 & 10 \\ 10 & 15 & 30 & 5 \end{bmatrix} \end{array}$$

Las utilidades a obtener son de \$20,000, \$22,000, \$25,000 y \$30,000, respectivamente, para cada modelo I, II, III y IV de casa vendida.
   a. Escriba una matriz columna B que representa la utilidad para cada tipo de casa.
   b. Calcule la ganancia total que Bond Brothers espera obtener en cada estado, si todas las casas se venden.

45. **CARIDAD** La cantidad de dinero recaudada por la beneficencia I, la beneficencia II y la beneficencia III (en millones de dólares) en cada uno de los años 2006, 2007 y 2008 está representada por la matriz A:

$$A = \begin{array}{c} \\ \\ 2006 \\ 2007 \\ 2008 \end{array} \begin{array}{c} \text{Beneficencia} \\ \begin{array}{ccc} \text{I} & \text{II} & \text{III} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 18.2 & 28.2 & 40.5 \\ 19.6 & 28.6 & 42.6 \\ 20.8 & 30.4 & 46.4 \end{bmatrix} \end{array}$$

En promedio, la beneficencia I dedica 78% al costo del programa, la II 88% y la III 80%. Escriba una matriz B de 3×1 que refleje el porcentaje dedicado al costo del programa por las beneficencias. A continuación, utilice la multiplicación de matrices para encontrar la cantidad total de dinero dedicada al costo del programa en cada uno de los 3 años por las organizaciones de beneficencia consideradas.

46. **INGRESOS DE TAQUILLA** El Cinema Center se compone de cuatro salas: cine I, II, III y IV. El precio de la entrada para una función en el Center es de \$4 para niños, \$6 para estudiantes y \$8 para adultos. La asistencia para la matinée del domingo está dada por la matriz

$$A = \begin{array}{c} \\ \text{Cine I} \\ \text{Cine II} \\ \text{Cine III} \\ \text{Cine IV} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{Niños} & \text{Estudiantes} & \text{Adultos} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 225 & 110 & 50 \\ 75 & 180 & 225 \\ 280 & 85 & 110 \\ 0 & 250 & 225 \end{bmatrix} \end{array}$$

Escriba un vector columna B que represente el precio de admisión. Luego calcule AB, el vector columna que muestra los ingresos brutos de cada cine. Por último, calcule el ingreso total recaudado en el Cinema Center por la asistencia del domingo por la tarde.

47. **POLÍTICA: AFILIACIÓN DE VOTANTES** La matriz A se obtiene del porcentaje de votantes elegible en la ciudad de Newton, clasificados con base en su afiliación de partido y grupo de edad.

$$A = \begin{array}{c} \\ \text{Menores de 30} \\ \text{30 a 50} \\ \text{Más de 50} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{Dem.} & \text{Rep.} & \text{Ind.} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.50 & 0.30 & 0.20 \\ 0.45 & 0.40 & 0.15 \\ 0.40 & 0.50 & 0.10 \end{bmatrix} \end{array}$$

La población de votantes elegibles en la ciudad por grupos de edad está dada por la matriz B:

$$B = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{Menores de 30} & \text{30 a 50} & \text{Más de 50} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 30{,}000 & 40{,}000 & 20{,}000 \end{bmatrix} \end{array}$$

Encuentre una matriz que proporcione el número total de votantes elegibles en la ciudad que votarán por los demócratas, republicanos e independientes.

48. **PLANES DE RETIRO 401(K)** Tres consultores en redes, Alan, María y Steven, recibieron un aguinaldo de \$10,000 cada uno, el cual decidieron invertir en un plan de retiro ofrecido por la empresa en que laboran. Bajo este plan, a los empleados se les permite colocar sus inversiones en tres fondos: un fondo de capital indexado (I), un fondo de crecimiento (II) y un fondo de capital global (III). Las distribuciones de las inversiones (en dólares) de los tres empleados a principios del año se resumen en la matriz

$$A = \begin{array}{c} \\ \text{Alan} \\ \text{María} \\ \text{Steven} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{I} & \text{II} & \text{III} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 4000 & 3000 & 3000 \\ 2000 & 5000 & 3000 \\ 2000 & 3000 & 5000 \end{bmatrix} \end{array}$$

Los rendimientos de los tres fondos después de 1 año se dan en la matriz

$$B = \begin{array}{c} \text{I} \\ \text{II} \\ \text{III} \end{array} \begin{bmatrix} 0.18 \\ 0.24 \\ 0.12 \end{bmatrix}$$

¿Cuál de los empleados obtuvo el mejor rendimiento de su inversión para el año en cuestión? ¿Cuál el peor rendimiento?

49. Ingreso a la universidad Un comité de admisión a la universidad prevé una matrícula de 8000 estudiantes en su clase de primer año del próximo ciclo. Para satisfacer las cuotas de admisión, se ha clasificado a los estudiantes aspirantes con base en su sexo y lugar de residencia. El número de estudiantes en cada categoría está dado por la matriz

$$A = \begin{array}{c} \\ \text{Del estado} \\ \text{Fuera del estado} \\ \text{Extranjeros} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{Hombre} & \text{Mujer} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 2700 & 3000 \\ 800 & 700 \\ 500 & 300 \end{bmatrix} \end{array}$$

Utilizando los datos acumulados en años anteriores, el comité de admisiones ha determinado que estos estudiantes elegirán ingresar en la Facultad de Letras y Ciencias, la Facultad de Bellas Artes, la Escuela de Administración de Empresas y la Escuela de Ingeniería, con base en los porcentajes que aparecen en la matriz siguiente:

$$B = \begin{array}{c} \\ \text{Hombre} \\ \text{Mujer} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \text{FLC} & \text{FBA} & \text{EAE} & \text{EI} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.25 & 0.20 & 0.30 & 0.25 \\ 0.30 & 0.35 & 0.25 & 0.10 \end{bmatrix} \end{array}$$

Encuentre la matriz AB que muestre el número de residentes del estado, de fuera del estado y estudiantes extranjeros que esperan entrar en cada disciplina.

50. Planeación de la producción Consulte el ejemplo 6 en esta sección. Suponga que Ace Novelty recibió un pedido de otro parque de diversiones para 1200 panteras rosas, 1800 pandas gigantes y 1400 pájaros grandes. La cantidad de cada tipo de animal de felpa que se fabricará en cada planta se muestra en la siguiente matriz de producción:

$$P = \begin{array}{c} \\ \text{L.A.} \\ \text{Seattle} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{Panteras} & \text{Pandas} & \text{Pájaros} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 700 & 1000 & 800 \\ 500 & 800 & 600 \end{bmatrix} \end{array}$$

Cada pantera requiere 1.3 yardas cuadradas de felpa, 20 pies cúbicos de relleno y 12 piezas de adorno. Suponga que los materiales requeridos para producir los otros dos animales de felpa y el costo unitario para cada tipo de material es el que aparece en el ejemplo 6.

a. ¿Cuánto material de cada tipo debe ser adquirido por cada planta?

b. ¿Cuál es el costo total de los materiales en que incurrirá cada planta?

c. ¿Cuál es el costo total de los materiales en que incurrió Ace Novelty para cumplir el pedido?

51. Cálculo de facturas telefónicas Cindy hace llamadas de larga distancia regularmente a tres ciudades del extranjero: Londres, Tokio y Hong Kong. Las matrices A y B dan las duraciones (en minutos) de sus llamadas durante las horas pico y no pico, respectivamente, a cada una de estas tres ciudades durante el mes de junio.

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{Londres} & \text{Tokio} & \text{Hong Kong} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 80 & 60 & 40 \end{bmatrix} \end{array}$$

y

$$B = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{Londres} & \text{Tokio} & \text{Hong Kong} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 300 & 150 & 250 \end{bmatrix} \end{array}$$

Los costos de las llamadas (en dólares por minuto) para el periodo pico y no pico en el mes en cuestión se dan, respectivamente, por las matrices

$$C = \begin{array}{c} \text{Londres} \\ \text{Tokio} \\ \text{Hong Kong} \end{array} \begin{bmatrix} 0.34 \\ 0.42 \\ 0.48 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad D = \begin{array}{c} \text{Londres} \\ \text{Tokio} \\ \text{Hong Kong} \end{array} \begin{bmatrix} 0.24 \\ 0.31 \\ 0.35 \end{bmatrix}$$

Calcule la matriz $AC + BD$ y explique lo que representa.

52. Planeación de la producción La producción total de los sistemas de sonido de Acrosonic Company en sus tres instalaciones de producción de mayo y junio está dada por las matrices A y B, respectivamente, donde

$$A = \begin{array}{c} \\ \text{Ubicación I} \\ \text{Ubicación II} \\ \text{Ubicación III} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \text{Modelo A} & \text{Modelo B} & \text{Modelo C} & \text{Modelo D} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 320 & 280 & 460 & 280 \\ 480 & 360 & 580 & 0 \\ 540 & 420 & 200 & 880 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$B = \begin{array}{c} \\ \text{Ubicación I} \\ \text{Ubicación II} \\ \text{Ubicación III} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \text{Modelo A} & \text{Modelo B} & \text{Modelo C} & \text{Modelo D} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 210 & 180 & 330 & 180 \\ 400 & 300 & 450 & 40 \\ 420 & 280 & 180 & 740 \end{bmatrix} \end{array}$$

Los costos unitarios de producción y precios de venta para estos altavoces se dan en las matrices C y D, respectivamente, donde

$$C = \begin{array}{c} \text{Modelo A} \\ \text{Modelo B} \\ \text{Modelo C} \\ \text{Modelo D} \end{array} \begin{bmatrix} 120 \\ 180 \\ 260 \\ 500 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad D = \begin{array}{c} \text{Modelo A} \\ \text{Modelo B} \\ \text{Modelo C} \\ \text{Modelo D} \end{array} \begin{bmatrix} 160 \\ 250 \\ 350 \\ 700 \end{bmatrix}$$

Calcule las siguientes matrices y explique el significado de las entradas en cada matriz.

a. AC **b.** AD **c.** BC **d.** BD **e.** $(A + B)C$
f. $(A + B)D$ **g.** $A(D - C)$
h. $B(D - C)$ **i.** $(A + B)(D - C)$

53. Planeación de la dieta Un nutriólogo desea establecer una dieta en torno a tres comidas. El número de unidades de vitamina A, vitamina C y calcio en cada onza de estas comidas está representada por la matriz M, donde

$$M = \begin{array}{l} \\ \text{Vitamina A} \\ \text{Vitamina C} \\ \text{Calcio} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{Comida I} & \text{Comida II} & \text{Comida III} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 400 & 1200 & 800 \\ 110 & 570 & 340 \\ 90 & 30 & 60 \end{bmatrix} \end{array}$$

Las matrices A y B representan la cantidad de cada alimento (en onzas) consumida por una niña de dos comidas diferentes, donde

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{Comida I} & \text{Comida II} & \text{Comida III} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 7 & 1 & 6 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$B = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{Comida I} & \text{Comida II} & \text{Comida III} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 9 & 3 & 2 \end{bmatrix} \end{array}$$

Calcule las siguientes matrices y explique el significado de las entradas en cada matriz.

a. MA^T **b.** MB^T **c.** $M(A + B)^T$

54. Planeación de la producción Hartman Lumber Company tiene dos sucursales en la ciudad. Las ventas de cuatro de sus productos durante el último año (en miles de dólares) están representadas por la matriz

$$B = \begin{array}{l} \\ \\ \text{Sucursal I} \\ \text{Sucursal II} \end{array} \begin{array}{c} \text{Producto} \\ \begin{array}{cccc} A & B & C & D \end{array} \\ \begin{bmatrix} 5 & 2 & 8 & 10 \\ 3 & 4 & 6 & 8 \end{bmatrix} \end{array}$$

Para el presente año, la gerencia ha proyectado que las ventas de los cuatro productos en la sucursal I serán 10% mayores que las ventas correspondientes del año pasado y las ventas de los cuatro productos en la sucursal II serán 15% mayores que las ventas correspondientes al año pasado.

a. Demuestre que las ventas de los cuatro productos en las dos sucursales del año en curso están dadas por la matriz AB, donde

$$A = \begin{bmatrix} 1.1 & 0 \\ 0 & 1.15 \end{bmatrix}$$

Calcule AB.

b. Hartman tiene m sucursales en todo el país y las ventas de n de sus productos (en miles de dólares) el año pasado están representados por la matriz

$$B = \begin{array}{l} \\ \\ \text{Sucursal 1} \\ \text{Sucursal 2} \\ \vdots \\ \text{Sucursal } m \end{array} \begin{array}{c} \text{Producto} \\ \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \end{array} \\ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \end{array}$$

Además, la gerencia ha proyectado que las ventas de los productos n en la sucursal 1, la sucursal 2, . . . , la sucursal m será del r_1%, r_2%, . . . , r_m%, respectivamente, más de las ventas correspondientes para el año pasado. Escriba la matriz A tal que AB represente la venta de los productos n en las sucursales m para el año en curso.

En los ejercicios 55 a 58 determine si la afirmación es verdadera o falsa. Si es verdadera, explique por qué. Si es falsa, dé un ejemplo para mostrar por qué lo es.

55. Si A y B son matrices tales que AB y BA están ambas definidas, entonces A y B deben ser matrices cuadradas del mismo orden.

56. Si A y B son matrices tales que AB está definida y si c es un escalar, entonces $(cA)B = A(cB) = cAB$.

57. Si A, B y C son matrices y $A(B + C)$ está definida, entonces B debe tener el mismo tamaño que C y el número de columnas de A debe ser igual al número de renglones de B.

58. Si A es una matriz de 2×4 y B es una matriz tal que ABA está definida, entonces el tamaño de B debe ser de 4×2.

5.5 Soluciones a los ejercicios de autoevaluación

1. Calculamos

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1(3) + 3(2) + 0(1) & 1(1) + 3(0) + 0(2) & 1(4) + 3(3) + 0(-1) \\ 2(3) + 4(2) - 1(1) & 2(1) + 4(0) - 1(2) & 2(4) + 4(3) - 1(-1) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 9 & 1 & 13 \\ 13 & 0 & 21 \end{bmatrix}$$

2. Sea

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 7 \end{bmatrix}$$

Entonces el sistema dado puede escribirse como la ecuación matricial

$$AX = B$$

3. Escriba

$$B = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} 54 \\ 113 \\ 112 \\ 70 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \text{AT\&T} \\ \text{TWX} \\ \text{IBM} \\ \text{GM} \end{array} \end{array}$$

y calcule lo siguiente:

$$AB = \begin{array}{l} \text{Ash} \\ \text{Joan} \end{array} \begin{bmatrix} 2000 & 1000 & 500 & 5000 \\ 1000 & 2500 & 2000 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 54 \\ 113 \\ 112 \\ 70 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 627{,}000 \\ 560{,}500 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{Ash} \\ \text{Joan} \end{array}$$

Concluimos que las acciones de Ash valían \$627,000 y las de Joan \$560,500 el 1 de junio.

USO DE LA TECNOLOGÍA

Multiplicación de matrices

Calculadora graficadora

Se puede utilizar una calculadora graficadora para realizar la multiplicación de matrices.

EJEMPLO 1 Sea

$$A = \begin{bmatrix} 1.2 & 3.1 & -1.4 \\ 2.7 & 4.2 & 3.4 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0.8 & 1.2 & 3.7 \\ 6.2 & -0.4 & 3.3 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1.2 & 2.1 & 1.3 \\ 4.2 & -1.2 & 0.6 \\ 1.4 & 3.2 & 0.7 \end{bmatrix}$$

Encuentre (a) AC y (b) $(1.1A + 2.3B)C$.

Solución En primer lugar, introducimos las matrices A, B y C en la calculadora.

a. Utilizando operaciones con matrices, introducimos la expresión $A*C$. Obtenemos la matriz

$$\begin{bmatrix} 12.5 & -5.68 & 2.44 \\ 25.64 & 11.51 & 8.41 \end{bmatrix}$$

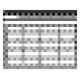
(Puede que tenga que recorrer la pantalla para ver la matriz completa.)

b. Usando las operaciones con matrices, introducir la expresión $(1.1A + 2.3B)C$. Obtenemos la matriz

$$\begin{bmatrix} 39.464 & 21.536 & 12.689 \\ 52.078 & 67.999 & 32.55 \end{bmatrix}$$

■

Excel



Usamos la función **MMULT** en Excel para realizar la multiplicación de matrices.

Nota: Las palabras y los caracteres en negrita y encerrados en un recuadro (por ejemplo, $\boxed{\textbf{Enter}}$) indican que se requiere una acción (*clic*, seleccionar o presionar). Las palabras y los caracteres impresos en azul (por ejemplo, Chart sub-type:) indican palabras y caracteres que aparecen en la pantalla. Las palabras y los caracteres de imprenta en una fuente de máquina de escribir (por ejemplo, `=(-2/3)*A212)` indican palabras o caracteres que deben ser escritos e introducidos.

(*continúa*)

EJEMPLO 2 Sea

$$A = \begin{bmatrix} 1.2 & 3.1 & -1.4 \\ 2.7 & 4.2 & 3.4 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0.8 & 1.2 & 3.7 \\ 6.2 & -0.4 & 3.3 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1.2 & 2.1 & 1.3 \\ 4.2 & -1.2 & 0.6 \\ 1.4 & 3.2 & 0.7 \end{bmatrix}$$

Encuentre (a) AC y (b) $(1.1A + 2.3B)C$.

Solución

a. *En primer lugar, introducir las matrices A, B y C en una hoja de cálculo* (figura T1).

	A	B	C	D	E	F	G
1		A				B	
2	1.2	3.1	–1.4		0.8	1.2	3.7
3	2.7	4.2	3.4		6.2	–0.4	3.3
4							
5		C					
6	1.2	2.1	1.3				
7	4.2	–1.2	0.6				
8	1.4	3.2	0.7				

FIGURA T1
Hoja de cálculo mostrando las matrices *A, B* y *C*.

En segundo lugar, calcular AC. Resalte las celdas que contendrán el producto matricial AC, que tiene un orden de 2×3. Escriba `=MMULT(`, resalte las celdas de la matriz A, escriba `,`, resalte las celdas de la matriz C, escriba `)`, y presione **Ctrl-Shift-Enter**. El producto matricial AC mostrado en la figura T2 aparecerá en la hoja de cálculo.

	A	B	C
10		AC	
11	12.5	–5.68	2.44
12	25.64	11.51	8.41

FIGURA T2
El producto matricial *AC*.

b. *Calcular* $(1.1A + 2.3B)C$. Resalte las celdas que contendrán el producto matricial $(1.1A + 2.3B)C$. A continuación escriba `=MMULT(1.1*`, resalte las celdas de la matriz A, escriba `+2.3*`, resalte las celdas de la matriz B, escriba `,`, resalte las celdas de la matriz C, escriba `)`, a continuación presione **Ctrl-Shift-Enter**. El producto matricial mostrado en la figura T3 aparecerá en su hoja de cálculo.

	A	B	C
13		(1.1A+2.3B)C	
14	39.464	21.536	12.689
15	52.078	67.999	32.55

FIGURA T3
El producto matricial $(1.1A + 2.3B)C$.

EJERCICIOS CON TECNOLOGÍA

En los ejercicios 1 a 8, utilizando a las siguientes matrices, realice las operaciones indicadas. Redondee sus respuestas a dos decimales.

$$A = \begin{bmatrix} 1.2 & 3.1 & -1.2 & 4.3 \\ 7.2 & 6.3 & 1.8 & -2.1 \\ 0.8 & 3.2 & -1.3 & 2.8 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.3 & 1.2 & -0.8 \\ 1.2 & 1.7 & 3.5 & 4.2 \\ -3.3 & -1.2 & 4.2 & 3.2 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0.8 & 7.1 & 6.2 \\ 3.3 & -1.2 & 4.8 \\ 1.3 & 2.8 & -1.5 \\ 2.1 & 3.2 & -8.4 \end{bmatrix}$$

1. AC

2. CB

3. $(A + B)C$

4. $(2A + 3B)C$

5. $(2A - 3.1B)C$

6. $C(2.1A + 3.2B)$

7. $(4.1A + 2.7B)1.6C$

8. $2.5C(1.8A - 4.3B)$

En los ejercicios 9 a 12, utilizando las siguientes matrices, realice las operaciones indicadas. Redondee sus respuestas a dos decimales.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & -4 & 2 & 8 \\ 6 & 7 & 2 & 9 & 6 \\ 4 & 5 & 4 & 4 & 4 \\ 9 & 6 & 8 & 3 & 2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 7 & 5 \\ 3 & 4 & 6 & 2 \\ -5 & 8 & 4 & 3 \\ 8 & 6 & 9 & 5 \\ 4 & 7 & 8 & 8 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 6.2 & 7.3 & -4.0 & 7.1 & 9.3 \\ 4.8 & 6.5 & 8.4 & -6.3 & 8.4 \\ 5.4 & 3.2 & 6.3 & 9.1 & -2.8 \\ 8.2 & 7.3 & 6.5 & 4.1 & 9.8 \\ 10.3 & 6.8 & 4.8 & -9.1 & 20.4 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 4.6 & 3.9 & 8.4 & 6.1 & 9.8 \\ 2.4 & -6.8 & 7.9 & 11.4 & 2.9 \\ 7.1 & 9.4 & 6.3 & 5.7 & 4.2 \\ 3.4 & 6.1 & 5.3 & 8.4 & 6.3 \\ 7.1 & -4.2 & 3.9 & -6.4 & 7.1 \end{bmatrix}$$

9. Encuentre AB y BA.

10. Encuentre CD y DC. ¿Es $CD = DC$?

11. Encuentre $AC + AD$.

12. Encuentre
  a. AC
  b. AD
  c. $A(C + D)$
  d. ¿Es $A(C + D) = AC + AD$?

5.6 La inversa de una matriz cuadrada

La inversa de una matriz cuadrada

En esta sección analizaremos un procedimiento para encontrar la inversa de una matriz y mostrar cómo la inversa se puede utilizar para ayudar a resolver un sistema de ecuaciones lineales.

Recuerde que si a es un número real distinto de cero, entonces existe un número real único a^{-1} (es decir, $\frac{1}{a}$) tal que

$$a^{-1}a = \left(\frac{1}{a}\right)(a) = 1$$

El uso del inverso (multiplicativo) de un número real permite resolver ecuaciones algebraicas de la forma

$$ax = b \tag{12}$$

Al multiplicar ambos lados de (12) por a^{-1}, tenemos

$$a^{-1}(ax) = a^{-1}b$$

$$\left(\frac{1}{a}\right)(ax) = \frac{1}{a}(b)$$

$$x = \frac{b}{a}$$

Por ejemplo, ya que el inverso de 2 es $2^{-1} = \frac{1}{2}$, podemos resolver la ecuación

$$2x = 5$$

Al multiplicar ambos lados de la ecuación por $2^{-1} = \frac{1}{2}$, dando

$$2^{-1}(2x) = 2^{-1} \cdot 5$$

$$x = \frac{5}{2}$$

Podemos utilizar un procedimiento similar para resolver la ecuación matricial

$$AX = B$$

donde A, X y B son matrices de los tamaños adecuados. Para hacerlo necesitamos el equivalente matricial al inverso de un número real. Esta matriz, toda vez que exista, se llama **inversa de una matriz**.

Inversa de una matriz

Sea A una matriz cuadrada de tamaño n. Una matriz cuadrada A^{-1} de tamaño n tal que

$$A^{-1}A = AA^{-1} = I_n$$

se llama inversa de A.

Mostremos que la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

tiene como inversa la matriz

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Puesto que

$$AA^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

$$A^{-1}A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

vemos que A^{-1} es la inversa de A, como se afirma.

No todas las matrices cuadradas tienen una inversa. Una matriz cuadrada que tiene inversa se dice que es **no singular**. Una matriz que no tiene inversa se dice que es **singular**. Un ejemplo de una matriz singular está dada por

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Si B tiene una inversa dada por

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

donde a, b, c y d son algunos números apropiados, entonces por la definición de inversa tendríamos $BB^{-1} = I$; es decir,

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

lo que implica que $0 = 1$ ¡imposible! Esta contradicción demuestra que B no tiene inversa.

Explore y analice

En la definición de la inversa de una matriz A, ¿por qué es necesario exigir que A sea una matriz cuadrada?

Método para encontrar la inversa de una matriz cuadrada

Los métodos de la sección 5.5 se pueden utilizar para encontrar la inversa de una ma-triz no singular. Para descubrir ese algoritmo, encontraremos la inversa de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

Suponga que existe A^{-1} y está dada por

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

donde se determinarán a, b, c y d. Por la definición de una inversa, tenemos $AA^{-1} = I$; es decir,

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

lo cual se reduce a

$$\begin{bmatrix} a + 2c & b + 2d \\ -a + 3c & -b + 3d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Sin embargo, esta ecuación matricial es equivalente a los dos sistemas de ecuaciones lineales

$$\left.\begin{aligned} a + 2c &= 1 \\ -a + 3c &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{y} \quad \left.\begin{aligned} b + 2d &= 0 \\ -b + 3d &= 1 \end{aligned}\right\}$$

con matrices aumentadas dadas por

$$\left[\begin{array}{rr|r} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \end{array}\right] \quad \text{y} \quad \left[\begin{array}{rr|r} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{array}\right]$$

Observe que las matrices de coeficientes de los dos sistemas son idénticas. Esto sugiere resolver los dos sistemas de ecuaciones lineales simultáneas escribiendo la si-guiente matriz aumentada, que se obtiene al unirse a la matriz de coeficientes y las dos columnas de constantes:

$$\left[\begin{array}{rr|rr} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Utilizando el método de eliminación de Gauss-Jordan, se obtiene la siguiente secuencia de matrices equivalentes:

$$\left[\begin{array}{rr|rr} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2 + R_1} \left[\begin{array}{rr|rr} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\frac{1}{5}R_2}$$

$$\left[\begin{array}{rr|rr} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{array}\right] \xrightarrow{R_1 - 2R_2} \left[\begin{array}{rr|rr} 1 & 0 & \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{array}\right]$$

Así, $a = \frac{3}{5}$, $b = -\frac{2}{5}$, $c = \frac{1}{5}$ y $d = \frac{1}{5}$, dando

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

Los cálculos siguientes verifican que A^{-1} es de hecho la inversa de A:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

El ejemplo anterior sugiere un algoritmo general para calcular la inversa de una matriz cuadrada de tamaño n cuando existe.

Encontrar la inversa de una matriz

Dada la matriz A de $n \times n$:

1. Agregar la matriz identidad I de $n \times n$ para obtener la matriz aumentada
$$[A \mid I]$$
2. Utilice una serie de operaciones por renglón para reducir $[A \mid I]$ a la forma
$$[I \mid B]$$
si es posible.

Entonces la matriz B es la inversa de A.

Nota A pesar de que la multiplicación de matrices en general no es conmutativa, es posible probar que si A tiene una inversa y $AB = I$, entonces $BA = I$ también. Por tanto, comprobar que B es la inversa de A, es suficiente para demostrar que $AB = I$. ■

EJEMPLO 1 Encuentre la inversa de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Solución Formamos la matriz aumentada

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

y utilizamos el método de eliminación de Gauss-Jordan para reducirla a la forma $[I \mid B]$:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1 - R_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[\substack{R_2 + 3R_1 \\ R_3 + 2R_1}]{-R_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 2 & -2 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[\substack{-R_2 \\ R_3 - R_2}]{R_1 + R_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[R_2 + R_3]{R_1 - R_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

La inversa de A es la matriz

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -4 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La verificación de estos resultados se lo dejamos a usted. ■

El ejemplo 2 ilustra lo que ocurre con el proceso de reducción, cuando una matriz A *no* tiene inversa.

EJEMPLO 2 Encuentre la inversa de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

Solución Formamos la matriz aumentada

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

y utilizamos el método de eliminación de Gauss-Jordan:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[R_3 - 3R_1]{R_2 - 2R_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -4 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -4 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[R_3 - R_2]{-R_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

Ya que las entradas del último renglón de la submatriz 3×3 que comprende el lado izquierdo de la matriz aumentada recién obtenida son todas iguales a cero, ésta no puede reducirse a la forma $[I \mid B]$. En consecuencia, llegamos a la conclusión de que A es singular; es decir, no tiene inversa. ■

Explore y analice

Explique en términos de soluciones a los sistemas de ecuaciones lineales por la matriz aumentada final en el ejemplo 2 implica que A no tiene inversa. *Sugerencia:* vea la discusión en la página 302.

En términos más generales, tenemos el siguiente criterio para determinar cuándo la inversa de una matriz no existe.

Matrices que no tienen inversas

Si hay un renglón a la izquierda de la línea vertical en la matriz aumentada que contiene sólo ceros, entonces la matriz no tiene inversa.

Una fórmula para la inversa de una matriz 2 × 2

Antes de pasar a algunas aplicaciones, se muestra un método alterno que utiliza una fórmula para encontrar la inversa de una matriz 2×2. Este método probará ser útil en muchas situaciones, veremos una aplicación en el ejemplo 5. Se deja como ejercicio la obtención de esta fórmula (ejercicio 50).

Fórmula para la inversa de una matriz 2 × 2

Sea

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

Suponga que $D = ad - bc$ no es igual a cero. Entonces A^{-1} existe y está dada por

$$A^{-1} = \frac{1}{D} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \tag{13}$$

Nota Como una ayuda para la memorización de la fórmula, tenga en cuenta que D es el producto de los elementos a lo largo de la diagonal principal menos el producto de los elementos a lo largo de la otra diagonal:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \qquad D = ad - bc$$

Diagonal principal

Luego, la matriz

$$\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

se obtiene al intercambiar a y d y cambiando los signos de b y c. Por último, A^{-1} se obtiene al dividir esta matriz entre D. ■

Explore y analice

Suponga que A es una matriz cuadrada con la propiedad de que uno de sus renglones es una constante diferente de cero múltiplo de otro renglón. ¿Qué puede decir acerca de la existencia o inexistencia de A^{-1}? Explique su respuesta.

EJEMPLO 3 Encuentre la inversa de

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Solución En primer lugar, calculamos $D = (1)(4) - (2)(3) = 4 - 6 = -2$. A continuación, escribimos la matriz

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

Por último, al dividir esta matriz entre D, obtenemos

$$A^{-1} = \frac{1}{-2}\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$ ■

Solución de sistemas de ecuaciones con inversas

Ahora mostramos cómo la inversa de una matriz se puede utilizar para resolver determinados sistemas de ecuaciones lineales en los que el número de ecuaciones en el sistema es igual al número de variables. Para simplificar, ilustraremos el proceso para un sistema de tres ecuaciones lineales con tres variables:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= b_3 \end{aligned} \tag{14}$$

Escribimos

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \qquad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

Usted debe verificar que el sistema (14) de ecuaciones lineales se puede escribir en la forma de ecuación matricial

$$AX = B \tag{15}$$

Si A es no singular, entonces el método de esta sección puede ser utilizado para calcular A^{-1}. Enseguida, al multiplicar ambos lados de la ecuación (15) por A^{-1} (a la izquierda), obtenemos

$$A^{-1}AX = A^{-1}B \quad \text{o} \quad IX = A^{-1}B \quad \text{o} \quad X = A^{-1}B$$

que es la solución al problema.

En el caso de un sistema de n ecuaciones con n incógnitas, tenemos el siguiente resultado más general.

Uso de inversas para resolver sistemas de ecuaciones

Si $AX = B$ es un sistema lineal de n ecuaciones con n incógnitas, y si A^{-1} existe, entonces

$$X = A^{-1}B$$

es la única solución del sistema.

El uso de inversas para resolver sistemas de ecuaciones es particularmente ventajoso cuando requerimos resolver más de un sistema de ecuaciones, $AX = B$, que implican la misma matriz de coeficientes, A, y diferentes matrices de constantes, B. Como puede ver en los ejemplos 4 y 5, necesitamos calcular A^{-1} sólo una vez en cada caso.

EJEMPLO 4 Resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones lineales:

a. $\begin{aligned} 2x + y + z &= 1 \\ 3x + 2y + z &= 2 \\ 2x + y + 2z &= -1 \end{aligned}$ **b.** $\begin{aligned} 2x + y + z &= 2 \\ 3x + 2y + z &= -3 \\ 2x + y + 2z &= 1 \end{aligned}$

Solución Podemos escribir los sistemas de ecuaciones en la forma

$$AX = B \quad \text{y} \quad AX = C$$

respectivamente, donde

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

La inversa de la matriz A,

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -4 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

que se encontró en el ejemplo 1. Utilizando este resultado encontramos que la solución del primer sistema (a) es

$$X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -4 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (3)(1) + (-1)(2) + (-1)(-1) \\ (-4)(1) + (2)(2) + (1)(-1) \\ (-1)(1) + (0)(2) + (1)(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

o $x = 2$, $y = -1$ y $z = -2$.

La solución del segundo sistema (b) es

$$X = A^{-1}C = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -4 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ -13 \\ -1 \end{bmatrix}$$

o $x = 8$, $y = -13$ y $z = -1$. ■

EJEMPLO DE APLICACIÓN 5 Planeación de los gastos de capital La gerencia de Checkers Rent-A-Car planea ampliar su flotilla de automóviles de alquiler para el próximo trimestre, adquiriendo vehículos compactos y grandes. El costo promedio de un automóvil compacto es de \$10,000, y el de uno grande es de \$24,000.

a. Si se comprará un total de 800 vehículos con un presupuesto de \$12 millones, ¿cuántos automóviles de cada tamaño serán adquiridos?
b. Si la demanda prevista indica que debe adquirirse un total de 1000 automóviles, con un presupuesto de \$14 millones, ¿cuántos automóviles de cada tipo serán adquiridos?

Solución Sean x y y las variables que denotan el número de automóviles compactos y grandes que se puede comprar. Por otra parte, sea n el número total de vehículos a adquirir y b la cantidad de dinero presupuestado para la compra de los mismos. Entonces,

$$\begin{aligned} x + y &= n \\ 10,000x + 24,000y &= b \end{aligned}$$

Este sistema de dos ecuaciones con dos variables se puede escribir en forma matricial

$$AX = B$$

donde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 10,000 & 24,000 \end{bmatrix} \qquad X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} n \\ b \end{bmatrix}$$

Por consiguiente,

$$X = A^{-1}B$$

Como A es una matriz 2×2, su inversa se puede encontrar utilizando la fórmula (13). Encontramos $D = (1)(24,000) - (1)(10,000) = 14,000$, por lo que

$$A^{-1} = \frac{1}{14,000}\begin{bmatrix} 24,000 & -1 \\ -10,000 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{24,000}{14,000} & -\frac{1}{14,000} \\ -\frac{10,000}{14,000} & \frac{1}{14,000} \end{bmatrix}$$

Por tanto,

$$X = \begin{bmatrix} \frac{12}{7} & -\frac{1}{14,000} \\ -\frac{5}{7} & \frac{1}{14,000} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} n \\ b \end{bmatrix}$$

a. Aquí, $n = 800$ y $b = 12,000,000$, por lo que

$$X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} \frac{12}{7} & -\frac{1}{14,000} \\ -\frac{5}{7} & \frac{1}{14,000} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 800 \\ 12,000,000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 514.3 \\ 285.7 \end{bmatrix}$$

Por tanto, se adquirirán 514 automóviles compactos y 286 grandes en este caso.

b. Aquí, $n = 1000$ y $b = 14,000,000$, por lo que

$$X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} \frac{12}{7} & -\frac{1}{14,000} \\ -\frac{5}{7} & \frac{1}{14,000} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1000 \\ 14,000,000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 714.3 \\ 285.7 \end{bmatrix}$$

Por tanto, se adquirirán 714 automóviles compactos y 286 grandes.

5.6 Ejercicios de autoevaluación

1. Encuentre la inversa de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

si existe.

2. Resuelva el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{aligned} 2x + y - z &= b_1 \\ x + y - z &= b_2 \\ -x - 2y + 3z &= b_3 \end{aligned}$$

donde (a) $b_1 = 5$, $b_2 = 4$, $b_3 = -8$ y (b) $b_1 = 2$, $b_2 = 0$, $b_3 = 5$, encontrando la inversa de la matriz de coeficientes.

3. Grand Canyon Tours ofrece paseos escénicos por aire y por tierra del Gran Cañón. Los boletos para el tour de $7\frac{1}{2}$ horas cuestan \$169 por un adulto y \$129 por un niño, y cada grupo de turistas se limita a 19 personas. En tres viajes recientes con lleno completo, los ingresos totales fueron \$2931 para el primer viaje, \$3011 para el segundo y \$2771 para el tercero. Determinar cuántos adultos y cuántos niños estuvieron en cada viaje.

Las soluciones de los ejercicios de autoevaluación 5.6 se pueden encontrar en la página 312.

5.6 Preguntas de concepto

1. ¿Cuál es la inversa de una matriz A?
2. Explique cómo podría encontrar la inversa de una matriz no singular.
3. Dé la fórmula para la inversa de una matriz 2×2

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

4. Explique cómo se puede utilizar la inversa de una matriz para resolver un sistema de n ecuaciones lineales con n incógnitas. ¿Puede funcionar el método para un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas con $m \neq n$? Explique.

5.6 Ejercicios

En los ejercicios 1 a 4 demuestre que las matrices son inversas entre sí, demostrando que su producto es la matriz identidad *I*.

1. $\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

2. $\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{5}{2} \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

3. $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & 1 & -1 \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}$

4. $\begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 \\ -4 & -6 & 1 \\ 3 & 5 & -1 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -3 & -4 \\ -\frac{1}{2} & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

En los ejercicios 5 a 16 encuentre la inversa de la matriz, si existe. Verifique su respuesta.

5. $\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

6. $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$

7. $\begin{bmatrix} 3 & -3 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$

8. $\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$

9. $\begin{bmatrix} 2 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$

10. $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$

11. $\begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ -1 & -3 & 4 \\ 3 & -1 & 6 \end{bmatrix}$

12. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -3 & 4 & -2 \\ -5 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

13. $\begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

14. $\begin{bmatrix} 3 & -2 & 7 \\ -2 & 1 & 4 \\ 6 & -5 & 8 \end{bmatrix}$

15. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$

16. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

En los ejercicios 17 a 24, (a) escriba una ecuación matricial equivalente al sistema de ecuaciones lineales y (b) resuelva el sistema utilizando las inversas que se encontraron en los ejercicios 5 a 16.

17. $\begin{aligned} 2x + 5y &= 3 \\ x + 3y &= 2 \end{aligned}$
(Ver el ejercicio 5.)

18. $\begin{aligned} 2x + 3y &= 5 \\ 3x + 5y &= 8 \end{aligned}$
(Ver el ejercicio 6.)

19. $\begin{aligned} 2x - 3y - 4z &= 4 \\ -z &= 3 \\ x - 2y + z &= -8 \end{aligned}$
(Ver el ejercicio 9.)

20. $\begin{aligned} x_1 - x_2 + 3x_3 &= 2 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 &= 2 \\ -2x_1 - 2x_2 + x_3 &= 3 \end{aligned}$
(Ver el ejercicio 10.)

21. $\begin{aligned} x + 4y - z &= 3 \\ 2x + 3y - 2z &= 1 \\ -x + 2y + 3z &= 7 \end{aligned}$
(Ver el ejercicio 13.)

22. $\begin{aligned} 3x_1 - 2x_2 + 7x_3 &= 6 \\ -2x_1 + x_2 + 4x_3 &= 4 \\ 6x_1 - 5x_2 + 8x_3 &= 4 \end{aligned}$
(Ver el ejercicio 14.)

23. $\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= 6 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &= 4 \\ 2x_1 + x_2 + x_4 &= 7 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4 &= 9 \end{aligned}$
(Ver el ejercicio 15.)

24. $\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 4 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_4 &= 11 \\ 2x_2 - x_3 + x_4 &= 7 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 &= 6 \end{aligned}$
(Vea el ejercicio 16.)

En los ejercicios 25 a 32, (a) escriba cada sistema de ecuaciones como una ecuación matricial y (b) resuelva el sistema de ecuaciones utilizando la inversa de la matriz de coeficientes.

25.
$$\begin{aligned} x + 2y &= b_1 \\ 2x - y &= b_2 \end{aligned}$$
donde (i) $b_1 = 14, b_2 = 5$
y (ii) $b_1 = 4, b_2 = -1$

26.
$$\begin{aligned} 3x - 2y &= b_1 \\ 4x + 3y &= b_2 \end{aligned}$$
donde (i) $b_1 = -6, b_2 = 10$
y (ii) $b_1 = 3, b_2 = -2$

27.
$$\begin{aligned} x + 2y + z &= b_1 \\ x + y + z &= b_2 \\ 3x + y + z &= b_3 \end{aligned}$$
donde (i) $b_1 = 7, b_2 = 4, b_3 = 2$
y (ii) $b_1 = 5, b_2 = -3, b_3 = -1$

28.
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= b_1 \\ x_1 - x_2 + x_3 &= b_2 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 &= b_3 \end{aligned}$$
donde (i) $b_1 = 5, b_2 = -3, b_3 = -1$
y (ii) $b_1 = 1, b_2 = 4, b_3 = -2$

29.
$$\begin{aligned} 3x + 2y - z &= b_1 \\ 2x - 3y + z &= b_2 \\ x - y - z &= b_3 \end{aligned}$$
donde (i) $b_1 = 2, b_2 = -2, b_3 = 4$
y (ii) $b_1 = 8, b_2 = -3, b_3 = 6$

30.
$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 &= b_1 \\ x_1 - 3x_2 + 4x_3 &= b_2 \\ -x_1 + x_3 &= b_3 \end{aligned}$$
donde (i) $b_1 = 1, b_2 = 4, b_3 = -3$
y (ii) $b_1 = 2, b_2 = -5, b_3 = 0$

31.
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= b_1 \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 &= b_2 \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 &= b_3 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 &= b_4 \end{aligned}$$
donde (i) $b_1 = 1, b_2 = -1, b_3 = 4, b_4 = 0$
y (ii) $b_1 = 2, b_2 = 8, b_3 = 4, b_4 = -1$

32.
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 &= b_1 \\ 4x_1 + 5x_2 + 9x_3 + x_4 &= b_2 \\ 3x_1 + 4x_2 + 7x_3 + x_4 &= b_3 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 &= b_4 \end{aligned}$$
donde (i) $b_1 = 3, b_2 = 6, b_3 = 5, b_4 = 7$
y (ii) $b_1 = 1, b_2 = -1, b_3 = 0, b_4 = -4$

33. Sea
$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -4 & -5 \end{bmatrix}$$
a. Encuentre A^{-1}. **b.** Demuestre que $(A^{-1})^{-1} = A$.

34. Sea
$$A = \begin{bmatrix} 6 & -4 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 4 & -7 \end{bmatrix}$$
a. Encuentre AB, A^{-1} y B^{-1}.
b. Muestre que $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

35. Sea
$$A = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$
a. Encuentre ABC, A^{-1} B^{-1} y C^{-1}.
b. Muestre que $(ABC)^{-1} = C^{-1}B^{-1}A^{-1}$.

36. Encuentre la matriz A si
$$\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

37. Encuentre la matriz A si
$$A \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$$

38. **INGRESOS POR CONCEPTO ENTRADAS** Rainbow Harbor Cruises cobra \$16 por adulto y \$8 por niño por un boleto de viaje redondo. Los registros muestran que, en un fin de semana determinado, 1000 personas tomaron el crucero el sábado y 800 lo hicieron el domingo. Los ingresos totales para el sábado fueron \$12,800 y para el domingo \$9600. Determine cuántos adultos y niños tomaron el crucero el sábado y cuántos el domingo.

39. **FIJACIÓN DE PRECIOS** BelAir Publishing publica una edición de lujo en piel y una edición estándar de su agenda-calendario. El departamento de marketing de la empresa estima que la demanda por mes será de x copias de la edición de lujo y de y copias de la edición estándar cuando los precios unitarios son p dólares y q dólares, respectivamente, donde x, y, p y q están relacionados por el siguiente sistema de ecuaciones lineales:
$$\begin{aligned} 5x + y &= 1000(70 - p) \\ x + 3y &= 1000(40 - q) \end{aligned}$$
Calcule la demanda mensual de la edición de lujo y de la edición estándar cuando los precios unitarios se establecen de la siguiente forma:
a. $p = 50$ y $q = 25$ **b.** $p = 45$ y $q = 25$
c. $p = 45$ y $q = 20$

40. **NUTRICIÓN/PLANEACIÓN DE LA DIETA** Se le ha pedido a Bob, un nutriólogo que trabaja para el Centro Médico de la universidad, que prepare dietas especiales para dos pacientes, Susan y Tom. Bob ha decidido que los alimentos de Susan deben contener por lo menos 400 mg de calcio, 20 mg de hierro y 50 mg de vitamina C, mientras que los alimentos de Tom deben contener por lo menos 350 mg de calcio, 15 mg de hierro y 40 mg de vitamina C. Bob también ha decidido que los alimentos deben ser preparados a partir de tres comidas básicas: comida A, comida B y comida C. El contenido nutricional especial de estas comidas se resume en la tabla adjunta. Calcule cuántas onzas de cada tipo de alimento se deben utilizar en una comida de modo que se cumplan los requerimientos mínimos de calcio, hierro y vitamina C en las comidas de cada paciente.

	Contenido (mg/oz)		
	Calcio	**Hierro**	**Vitamina C**
Comida A	30	1	2
Comida B	25	1	5
Comida C	20	2	4

41. Agricultura Jackson Farms asignó cierta cantidad de tierra para el cultivo de soya, maíz y trigo. Cultivar un acre de soya requiere 2 horas de trabajo, y el cultivo de un acre de maíz o de trigo requiere 6 horas de trabajo. El costo de las semillas para un acre de soya es de \$12, para un acre de maíz es de \$20 y para un acre de trigo es de \$8. Si se utilizarán todos los recursos, ¿cuántos acres de cada cultivo deben ser trabajados, si se tiene lo siguiente?

a. Se asignan 1000 acres de tierra y se tienen disponibles 4400 horas de trabajo y \$13,200 para semillas.

b. Se asignan 1200 acres de tierra y se tienen disponibles 5200 horas de trabajo y \$16,400 para semillas.

42. Problema de mezcla de fertilizantes Lawnco produce tres grados de fertilizantes comerciales. Un saco de 100 libras de fertilizante grado A contiene 18 libras de nitrógeno, 4 libras de fosfato y 5 libras de potasio. Un saco de 100 libras de fertilizante grado B contiene 20 libras de nitrógeno y 4 libras tanto de fosfato como de potasio. Un saco de 100 libras de fertilizante grado C contiene 24 libras de nitrógeno, 3 libras de fosfato y 6 libras de potasio. ¿Cuántos sacos de 100 libras de cada uno de los tres grados de fertilizante debe producir Lawnco si

a. están disponibles 26,400 libras de nitrógeno, 4900 libras de fosfato y 6200 libras de potasio, y se utilizan todos los nutrientes?

b. están disponibles 21,800 libras de nitrógeno, 4200 libras de fosfato y 5300 libras de potasio, y se utilizan todos los nutrientes?

43. Clubes de inversión Un club de inversión privado tiene cierta cantidad de dinero destinado a la inversión en acciones. Para alcanzar un nivel general aceptable de riesgo, las acciones que la gerencia está considerando se han clasificado en tres categorías: riesgo alto, riesgo medio y riesgo bajo. La gerencia estima que las acciones de riesgo alto tendrán una tasa de rendimiento de 15% anual; las acciones de riesgo medio, 10% anual, y las acciones de bajo riesgo, 6% anual. Los miembros han decidido que la inversión en acciones de riesgo bajo debe ser igual a la suma de las inversiones en acciones de las otras dos categorías. Determine cuánto debe invertir el club en cada tipo de acción en cada uno de los siguientes escenarios. (En todos los casos, suponga que se invierte la suma total disponible para la inversión.)

a. El club cuenta con \$200,000 para invertir y la meta de la inversión es tener un rendimiento de \$20,000 anual sobre la inversión total.

b. El club cuenta con \$220,000 para invertir y la meta de la inversión es tener un rendimiento de \$22,000 anual sobre la inversión total.

c. El club cuenta con \$240,000 para invertir y la meta de inversión es tener un rendimiento de \$22,000 anual sobre la inversión total.

44. Recursos para la investigación Carver Foundation patrocina tres organizaciones sin fines de lucro dedicadas a actividades de investigación de energía alternativa. De los datos anteriores se tiene que, la proporción de los fondos gastados por cada organización en la investigación sobre energía solar, energía eólica y energía mareomotriz se dan en la tabla adjunta.

	Proporción de dinero gastado		
	Solar	**Eólica**	**Mareomotriz**
Organización I	0.6	0.3	0.1
Organización II	0.4	0.3	0.3
Organización III	0.2	0.6	0.2

Calcule el monto concedido a cada organización si la cantidad total gastada por las tres organizaciones en investigación de energía solar, eólica y mareomotriz es

a. \$9.2 millones, \$9.6 millones y \$5.2 millones, respectivamente.

b. \$8.2 millones, \$7.2 millones y \$3.6 millones, respectivamente.

45. Calcule el (los) valor(es) de k tal que

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ k & 3 \end{bmatrix}$$

tiene una inversa. ¿Cuál es la inversa de A?

Sugerencia: Utilice la fórmula 13.

46. Calcule el (los) valor(es) de k tal que

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & k \\ -1 & 2 & k^2 \end{bmatrix}$$

tiene una inversa.

Sugerencia: Calcule el (los) valor(es) de k tal que la matriz aumentada $[A \mid I]$ se puede reducir a la forma $[I \mid B]$.

En los ejercicios 47 a 49 determine si la afirmación es verdadera o falsa. Si es verdadera, explique por qué. Si es falsa, dé un ejemplo para mostrar por qué lo es.

47. Si A es una matriz cuadrada con inversa A^{-1} y c es un número real distinto de cero, entonces

$$(cA)^{-1} = \left(\frac{1}{c}\right)A^{-1}$$

48. La matriz

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

tiene una inversa si y sólo si $ad - bc = 0$.

49. Si A^{-1} no existe, entonces el sistema $AX = B$ de n ecuaciones lineales con n incógnitas no tiene una solución única.

50. Sea

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

a. Encuentre A^{-1} si es que existe.

b. Encuentre una condición necesaria para que A sea no singular.

c. Compruebe que $AA^{-1} = A^{-1}A = I$.

5.6 Soluciones de los ejercicios de autoevaluación

1. Formamos la matriz aumentada

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

y reducimos de forma escalonada como sigue:

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2}$$

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[R_3 + R_1]{R_2 - 2R_1}$$

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{-R_2 \\ R_3 - R_2}]{R_1 + R_2}$$

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2 + R_3}$$

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \end{array}\right]$$

De los resultados anteriores, vemos que

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 5 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

2. a. Escribimos los sistemas de ecuaciones lineales en forma matricial

$$AX = B_1$$

donde

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & 3 \end{bmatrix} \qquad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \qquad B_1 = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ -8 \end{bmatrix}$$

Ahora, usando los resultados del ejercicio 1, tenemos

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = A^{-1}B_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 5 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ -8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Por tanto, $x = 1$, $y = 2$ y $z = -1$.

b. Aquí A y X son como el inciso (a), pero

$$B_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Por tanto,

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = A^{-1}B_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 5 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

o $x = 2$, $y = 1$ y $z = 3$.

3. Sea x el número de adultos y y el número de niños en un viaje. Dado que los recorridos están llenos a su capacidad, tenemos

$$x + y = 19$$

Como los ingresos totales del primer viaje fueron \$2931 tenemos

$$169x + 129y = 2931$$

Por tanto, el número de adultos y niños en el primer viaje se encuentra al resolver el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{aligned} x + \quad y &= \quad 19 \\ 169x + 129y &= 2931 \end{aligned} \qquad \textbf{(a)}$$

Del mismo modo, vemos que el número de adultos y el número de niños en el segundo y tercer viajes se encuentran por la solución de los sistemas

$$\begin{aligned} x + \quad y &= \quad 19 \\ 169x + 129y &= 3011 \end{aligned} \qquad \textbf{(b)}$$

$$\begin{aligned} x + \quad y &= \quad 19 \\ 169x + 129y &= 2771 \end{aligned} \qquad \textbf{(c)}$$

Estos sistemas se pueden escribir en la forma

$$AX = B_1 \qquad AX = B_2 \qquad AX = B_3$$

donde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 169 & 129 \end{bmatrix} \qquad X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 19 \\ 2931 \end{bmatrix} \qquad B_2 = \begin{bmatrix} 19 \\ 3011 \end{bmatrix} \qquad B_3 = \begin{bmatrix} 19 \\ 2771 \end{bmatrix}$$

Para resolver estos sistemas, en primer lugar encontramos A^{-1}. Utilizando la fórmula (13), obtenemos

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{129}{40} & \frac{1}{40} \\ \frac{169}{40} & -\frac{1}{40} \end{bmatrix}$$

Entonces, al resolver cada sistema, encontramos

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = A^{-1}B_1$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{129}{40} & \frac{1}{40} \\ \frac{169}{40} & -\frac{1}{40} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 19 \\ 2931 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 7 \end{bmatrix} \qquad \textbf{(a)}$$

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = A^{-1}B_2$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{129}{40} & \frac{1}{40} \\ \frac{169}{40} & -\frac{1}{40} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 19 \\ 3011 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 14 \\ 5 \end{bmatrix} \qquad \textbf{(b)}$$

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = A^{-1}B_3$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{129}{40} & \frac{1}{40} \\ \frac{169}{40} & -\frac{1}{40} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 19 \\ 2771 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 11 \end{bmatrix} \qquad \textbf{(c)}$$

Llegamos a la conclusión de que había

a. 12 adultos y 7 niños en el primer viaje.
b. 14 adultos y 5 niños en el segundo viaje.
c. 8 adultos y 11 niños en el tercer viaje.

USO DE LA TECNOLOGÍA

Encontrar la inversa de una matriz cuadrada

Calculadora graficadora

Se puede utilizar una calculadora graficadora para encontrar la inversa de una matriz cuadrada.

EJEMPLO 1 Utilice una calculadora graficadora para encontrar la inversa de

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ -2 & 2 & 4 \\ 5 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Solución En primer lugar introducimos la matriz dada como

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ -2 & 2 & 4 \\ 5 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Luego, recuperando la matriz A y usando la tecla $\boxed{\mathbf{x^{-1}}}$ encontramos

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0.1 & -0.2 & 0.1 \\ 1.3 & -1.1 & -0.7 \\ -0.6 & 0.7 & 0.4 \end{bmatrix}$$

■

EJEMPLO 2 Utilice una calculadora graficadora para resolver el sistema

$$\begin{aligned} x + 3y + 5z &= 4 \\ -2y + 2y + 4z &= 3 \\ 5x + y + 3z &= 2 \end{aligned}$$

utilizando la inversa de la matriz de coeficientes.

Solución El sistema dado puede escribirse en la forma matricial $AX = B$, donde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ -2 & 2 & 4 \\ 5 & 1 & 3 \end{bmatrix} \qquad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

La solución es $X = A^{-1}B$. Introducimos las matrices A y B en la calculadora graficadora y usando la capacidad de multiplicación de la matriz de la calculadora da el resultado que se muestra en la figura T1, es decir, $x = 0$, $y = 0.5$ y $z = 0.5$.

(continúa)

[A]$^{-1}$ [B]

[[0]
[.5]
[.5]]

Ans →

FIGURA **T1**
La pantalla de la TI-83/84 muestra $A^{-1}B$.

Excel

Usamos la función **MINVERSE** para encontrar la inversa de una matriz cuadrada con Excel.

EJEMPLO 3 Encuentre la inversa de

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ -2 & 2 & 4 \\ 5 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Solución

1. Introduzca los elementos de la matriz A en una hoja de cálculo (figura T2).
2. Calcule la inversa de la matriz A: resalte las celdas que contendrán la matriz inversa A^{-1}, escriba `=MINVERSE(`, resalte las celdas que contienen la matriz A, escriba `)`, y presione **Ctrl-Shift-Enter**. Aparecerá la matriz deseada en su hoja de cálculo (figura T2).

	A	B	C
1		Matriz A	
2	1	3	5
3	–2	2	4
5	5	1	3
6			
7		Matriz A^{-1}	
8	0.1	−0.2	0.1
9	1.3	–1.1	−0.7
10	–0.6	0.7	0.4

FIGURA **T2**
Matriz de A y su inversa, matrix A^{-1}.

EJEMPLO 4 Resuelva el sistema

$$\begin{aligned} x + 3y + 5z &= 4 \\ -2x + 2y + 4z &= 3 \\ 5x + y + 3z &= 2 \end{aligned}$$

utilizando la inversa de la matriz de coeficientes.

Solución Se puede escribir el sistema dado en la forma matricial $AX = B$, donde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ -2 & 2 & 4 \\ 5 & 1 & 3 \end{bmatrix} \qquad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

La solución es $X = A^{-1}B$.

Nota: las palabras y los caracteres en negrita y encerrados en un recuadro (por ejemplo, **Enter**) indican que se requiere una acción (*clic*, seleccionar o presionar). Las palabras y los caracteres impresos en azul (por ejemplo, Chart sub-type:) indican palabras y caracteres que aparecen en la pantalla. Las palabras y los caracteres de imprenta en una fuente de máquina de escribir (por ejemplo, `=(-2/3)*A2+2)`) indican palabras o caracteres que deben ser escritos e introducidos.

	A
12	Matrix X
13	5.55112E−17
14	0.5
15	0.5

FIGURA **T3**
La matriz X ofrece la solución al problema.

1. *Introducir la matriz B en una hoja de cálculo.*
2. *Calcular* $A^{-1}B$. Resalte las celdas que contendrá la matriz X, y luego escriba `=MMULT(`, resalte las celdas de la matriz A^{-1}, escriba `,`, resalte las celdas de la matriz B, escriba `)`, y presione **Ctrl-Shift-Enter**. (*Nota*: la matriz A^{-1} que se encuentra en el ejemplo 3.) La matriz X que se muestra en la figura T3 aparecerá en su hoja de cálculo. Entonces, $x = 0$, $y = 0.5$ y $z = 0.5$. ■

EJERCICIOS CON TECNOLOGÍA

En los ejercicios 1 a 6, encuentre la inversa de la matriz. Redondee sus respuestas a dos decimales.

1. $\begin{bmatrix} 1.2 & 3.1 & -2.1 \\ 3.4 & 2.6 & 7.3 \\ -1.2 & 3.4 & -1.3 \end{bmatrix}$

2. $\begin{bmatrix} 4.2 & 3.7 & 4.6 \\ 2.1 & -1.3 & -2.3 \\ 1.8 & 7.6 & -2.3 \end{bmatrix}$

3. $\begin{bmatrix} 1.1 & 2.3 & 3.1 & 4.2 \\ 1.6 & 3.2 & 1.8 & 2.9 \\ 4.2 & 1.6 & 1.4 & 3.2 \\ 1.6 & 2.1 & 2.8 & 7.2 \end{bmatrix}$

4. $\begin{bmatrix} 2.1 & 3.2 & -1.4 & -3.2 \\ 6.2 & 7.3 & 8.4 & 1.6 \\ 2.3 & 7.1 & 2.4 & -1.3 \\ -2.1 & 3.1 & 4.6 & 3.7 \end{bmatrix}$

5. $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & -1 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 6 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 4 & 2 \\ 3 & 4 & 2 & 5 & 6 \end{bmatrix}$

6. $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & 3 & 1.4 \\ 6 & 2.4 & 5 & 1.2 & 3 \\ 4 & 1 & 2 & 3 & 1.2 \\ -1 & 2 & -3 & 4 & 2 \\ 1.1 & 2.2 & 3 & 5.1 & 4 \end{bmatrix}$

En los ejercicios 7 a 10 resuelva el sistema de ecuaciones lineales escribiendo primero el sistema en la forma $AX = B$ y luego resolviendo el sistema resultante utilizando A^{-1}. Redondee sus respuestas a dos decimales.

7. $\begin{aligned} 2x - 3y + 4z &= 2.4 \\ 3x + 2y - 7z &= -8.1 \\ x + 4y - 2z &= 10.2 \end{aligned}$

8. $\begin{aligned} 3.2x - 4.7y + 3.2z &= 7.1 \\ 2.1x + 2.6y + 6.2z &= 8.2 \\ 5.1x - 3.1y - 2.6z &= -6.5 \end{aligned}$

9. $\begin{aligned} 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 - 8x_4 &= 8 \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 6x_4 &= 4 \\ 3x_1 + 2x_2 - 6x_3 - 7x_4 &= -2 \\ 4x_1 - 7x_2 + 4x_3 + 6x_4 &= 22 \end{aligned}$

10. $\begin{aligned} 1.2x_1 + 2.1x_2 - 3.2x_3 + 4.6x_4 &= 6.2 \\ 3.1x_1 - 1.2x_2 + 4.1x_3 - 3.6x_4 &= -2.2 \\ 1.8x_1 + 3.1x_2 - 2.4x_3 + 8.1x_4 &= 6.2 \\ 2.6x_1 - 2.4x_2 + 3.6x_3 - 4.6x_4 &= 3.6 \end{aligned}$

CAPÍTULO 5 Resumen de las fórmulas y términos principales

FÓRMULAS

1. Leyes para la suma de matrices	
a. Ley conmutativa	$A + B = B + A$
b. Ley asociativa	$(A + B) + C = A + (B + C)$
2. Leyes para la multiplicación de matrices	
a. Ley asociativa	$(AB)C = A(BC)$
b. Ley distributiva	$A(B + C) = AB + AC$
3. Inversa de una matriz 2×2	Si $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ y $D = ad - bc \neq 0$ entonces $A^{-1} = \frac{1}{D}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$
4. Solución del sistema $AX = B$ (A no es singular)	$X = A^{-1}B$

TÉRMINOS

columna unitaria (254)
escalar (280)
forma escalonada reducida de una matriz (253)
inversa de una matriz (302)
matriz (276)
matriz aumentada (252)
matriz columna (276)
matriz cuadrada (276)
matriz de coeficientes (252)
matriz identidad (291)
matriz no singular (302)
matriz renglón (276)
matriz singular (302)
método de eliminación de Gauss-Jordan (250)
operaciones por renglón (254)
parámetro (243)
pivotear (255)
producto matricial (288)
producto por un escalar (280)
sistema de ecuaciones lineales (242)
sistema dependiente (244)
sistema equivalente (250)
sistema inconsistente (244)
solución de un sistema de ecuaciones lineales (242)
tamaño de una matriz (276)
transpuesta de una matriz (280)

CAPÍTULO 5 Preguntas de revisión de conceptos

Llene los espacios en blanco.

1. **a.** Dos líneas pueden intersecar el plano en (a) exactamente ____ punto, (b) _____ puntos infinitos o (c) _____ punto.
b. Un sistema de dos ecuaciones lineales con dos variables pueden tener: (a) una solución _____, (b) una _____ infinidad de soluciones o (c) _____ solución.

2. Para encontrar el (los) punto(s) de intersección de dos líneas, resolvemos el sistema de _____ que describe las dos líneas.

3. Las operaciones por renglón utilizadas en el método de eliminación Gauss-Jordan se denotan por _____, _____y _____. El uso de cada una de estas operaciones no altera el _____ del sistema de ecuaciones lineales.

4. **a.** Un sistema de ecuaciones lineales con menos ecuaciones que variables no pueden tener una solución _____.
b. Un sistema de ecuaciones lineales con al menos tantas ecuaciones como variables pueden tener _____ solución, _____ soluciones o una solución _____.

5. Dos matrices son iguales siempre que tengan el mismo _____ y sus correspondientes _____ son iguales.

6. Dos matrices se pueden sumar (restar) si ambos tienen el mismo _____. Para sumar o restar dos matrices, se deben sumar o restar sus entradas _____.

7. La transpuesta de una matriz _____ con elementos a_{ij} es la matriz de tamaño _____ con elementos _____.

8. El producto por un escalar de una matriz A por el escalar C es la matriz _____ obtenida al multiplicar cada entrada de A por _____.

9. a. Para que el producto AB de dos matrices A y B esté definido, el número de ______ de A debe ser igual al número de ______ de B.

b. Si A es una matriz $m \times n$ y b es una matriz $n \times p$, entonces el tamaño de AB es ______.

10. a. Si los productos y las sumas están definidas para las matrices A, B y C, entonces la ley asociativa establece que $(AB)C$ = ______; la ley distributiva establece que $A(B + C)$ = ______ .

b. Si I es una matriz identidad de tamaño n, entonces $IA = A$ si A es cualquier matriz de tamaño ______.

11. Una matriz A es no singular si existe una matriz A^{-1} tal que ______ = ______ $= I$. Si A^{-1} no existe, entonces se dice que A es ______.

12. Un sistema de n ecuaciones lineales con n variables escrito en la forma $AX = B$ tiene una solución única dada por $X =$ ______ si A tiene una inversa.

CAPÍTULO 5 Ejercicios de revisión

En los ejercicios 1 a 4 realice las operaciones si es posible.

1. $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

2. $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$

3. $\begin{bmatrix} -3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

4. $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$

En los ejercicios 5 a 8 calcule los valores de las variables.

5. $\begin{bmatrix} 1 & x \\ y & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z & 2 \\ 3 & w \end{bmatrix}$

6. $\begin{bmatrix} 3 & x \\ y & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \end{bmatrix}$

7. $\begin{bmatrix} 3 & a+3 \\ -1 & b \\ c+1 & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ e+2 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

8. $\begin{bmatrix} x & 3 & 1 \\ 0 & y & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & z \\ 4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 4 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$

En los ejercicios 9 a 16 calcule las expresiones, si es posible, dado que

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -2 & -1 & -1 \\ 1 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 6 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

9. $2A + 3B$

10. $3A - 2B$

11. $2(3A)$

12. $2(3A - 4B)$

13. $A(B - C)$

14. $AB + AC$

15. $A(BC)$

16. $\frac{1}{2}(CA - CB)$

En los ejercicios 17 a 24 resuelva el sistema de ecuaciones lineales por el método de eliminación de Gauss-Jordan.

17. $\begin{aligned} 2x - 3y &= 5 \\ 3x + 4y &= -1 \end{aligned}$

18. $\begin{aligned} 3x + 2y &= 3 \\ 2x - 4y &= -14 \end{aligned}$

19. $\begin{aligned} x - y + 2z &= 5 \\ 3x + 2y + z &= 10 \\ 2x - 3y - 2z &= -10 \end{aligned}$

20. $\begin{aligned} 3x - 2y + 4z &= 16 \\ 2x + y - 2z &= -1 \\ x + 4y - 8z &= -18 \end{aligned}$

21. $\begin{aligned} 3x - 2y + 4z &= 11 \\ 2x - 4y + 5z &= 4 \\ x + 2y - z &= 10 \end{aligned}$

22. $\begin{aligned} x - 2y + 3z + 4w &= 17 \\ 2x + y - 2z - 3w &= -9 \\ 3x - y + 2z - 4w &= 0 \\ 4x + 2y - 3z + w &= -2 \end{aligned}$

23. $\begin{aligned} 3x - 2y + z &= 4 \\ x + 3y - 4z &= -3 \\ 2x - 3y + 5z &= 7 \\ x - 8y + 9z &= 10 \end{aligned}$

24. $\begin{aligned} 2x - 3y + z &= 10 \\ 3x + 2y - 2z &= -2 \\ x - 3y - 4z &= -7 \\ 4x + y - z &= 4 \end{aligned}$

En los ejercicios 25 a 32 encuentre la inversa de la matriz (si es que existe).

25. $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

26. $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}$

27. $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$

28. $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$

29. $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

30. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

31. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -6 \end{bmatrix}$

32. $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & -4 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix}$

En los ejercicios 33 a 36 calcule el valor de las expresiones, si es posible, dado que

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

33. $(A^{-1}B)^{-1}$ **34.** $(ABC)^{-1}$

35. $(2A - C)^{-1}$ **36.** $(A + B)^{-1}$

En los ejercicios 37 a 40 escriba cada sistema de ecuaciones lineales en la forma $AX = C$. Encuentre A^{-1} y utilice el resultado para resolver el sistema.

37. $\begin{aligned} 2x + 3y &= -8 \\ x - 2y &= 3 \end{aligned}$ **38.** $\begin{aligned} x - 3y &= -1 \\ 2x + 4y &= 8 \end{aligned}$

39. $\begin{aligned} x - 2y + 4z &= 13 \\ 2x + 3y - 2z &= 0 \\ x + 4y - 6z &= -15 \end{aligned}$ **40.** $\begin{aligned} 2x - 3y + 4z &= 17 \\ x + 2y - 4z &= -7 \\ 3x - y + 2z &= 14 \end{aligned}$

41. VENTA DE GASOLINA Gloria Newburg opera tres estaciones de autoservicio de gasolina en diferentes partes de la ciudad. Cierto día la estación A vende 600 galones de premium, 800 de super, 1000 de regular y 700 de diesel; la estación B vendió 700 galones de premium, 600 de super, 1200 de gasolina regular y 400 de diesel; la estación C vendió 900 galones de premium, 700 de super, 1400 de regular y 800 de diesel. Suponga que el precio de la gasolina por galón fue de \$3.20 de premium, \$2.98 de super y \$2.80 de la regular y que el diesel se vende en \$3.10 por galón. Utilice álgebra de matrices para encontrar el total de ingresos en cada estación.

42. TRANSACCIONES DE ACCIONES COMUNES Jack Spaulding compró 10,000 acciones X, 20,000 acciones Y y 30,000 acciones Z a un precio de \$20, \$30 y \$50 por acción, respectivamente. Seis meses más tarde, los precios de cierre de las acciones de X, Y y Z fueron de \$22, \$35 y \$51 por acción, respectivamente. Jack no hizo otras transacciones durante el periodo en cuestión. Compare el valor de las acciones de Jack en el momento de la compra y 6 meses después.

43. INVERSIONES El número de acciones que poseen William y Michael se dan en la tabla siguiente:

	BAC	GM	IBM	TRW
William	800	1200	400	1500
Michael	600	1400	600	2000

Los precios (en dólares por acción) de las acciones de BAC, GM, IBM y TRW al cierre del mercado de valores en un día determinado son \$50.26, \$31.00, \$103.07 y \$38.67, respectivamente.

a. Escriba una matriz A de 2×4 dando valor de las acciones de William y Michael.

b. Escriba una matriz A de 4×1 indicando los precios de cierre de las acciones de BAC, GM, IBM y TRW.

c. Utilice la multiplicación de matrices para encontrar el valor total de las participaciones de William y Michael al cierre del mercado.

44. PORTAFOLIOS DE INVERSIÓN La siguiente tabla muestra el número de acciones de algunas empresas en manos de Olivia y Max en sus portafolios de acciones a principios de septiembre y a principios de octubre:

Septiembre

	IBM	Google	Boeing	GM
Olivia	800	500	1200	1500
Max	500	600	2000	800

Octubre

	IBM	Google	Boeing	GM
Olivia	900	600	1000	1200
Max	700	500	2100	900

a. Escriba las matrices A y B dando los portafolios de acciones de Olivia y Max a principios de septiembre y a principios de octubre, respectivamente.

b. Encuentre una matriz C que refleja el cambio en los portafolios de acciones de Olivia y Max entre principios de septiembre y principios de octubre.

45. PROGRAMACIÓN DE MÁQUINA Desmond Jewelry desea producir tres tipos de pendientes: tipo A, tipo B y tipo C. Para la fabricación de un pendiente tipo A se requieren 2 minutos en las máquinas I y II y 3 minutos en la máquina III. Un pendiente tipo B requiere 2 minutos en la máquina I, 3 en la II y 4 en la III. Un pendiente tipo C requiere de 3 minutos en la máquina I, 4 en la II y 3 en la III. Hay $3\frac{1}{2}$ horas disponibles en la máquina I, $4\frac{1}{2}$ en la 11 y 5 en la III. ¿Cuántos pendientes de cada tipo debe fabricar Desmond para emplear todo el tiempo disponible?

46. PRODUCCIÓN DE PETRÓLEO Wildcat Oil Company tiene dos refinerías, una en Houston y otra en Tulsa. La refinería de Houston embarca 60% de su petróleo a un distribuidor de Chicago y 40% a uno de Los Ángeles. La refinería de Tulsa embarca 30% de su petróleo al distribuidor de Chicago y 70% al de Los Ángeles. Suponga que, durante todo el año, el distribuidor de Chicago recibió 240,000 galones de petróleo y el de Los Ángeles 460,000. Calcule la cantidad de petróleo producido en cada una de las refinerías de Wildcat.

CAPÍTULO 5 Antes de continuar . . .

1. Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones lineales, utilizando el método de eliminación de Gauss-Jordan:

$$\begin{aligned} 2x + y - z &= -1 \\ x + 3y + 2z &= 2 \\ 3x + 3y - 3z &= -5 \end{aligned}$$

2. Encuentre la(s) solución(es), si existe, del sistema de ecuaciones lineales cuya matriz aumentada en forma reducida es la siguiente.

a. $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$ **b.** $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$

c. $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$ **d.** $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$

e. $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right]$

3. Resuelva cada sistema de ecuaciones lineales por el método de eliminación de Gauss-Jordan.

a. $\begin{aligned} x + 2y &= 3 \\ 3x - y &= -5 \\ 4x + y &= -2 \end{aligned}$ **b.** $\begin{aligned} x - 2y + 4z &= 2 \\ 3x + y - 2z &= 1 \end{aligned}$

4. Sea

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Encuentre (a) AB, (b) $(A + C^T)B$ y (c) $C^TB - AB^T$.

5. Encuentre A^{-1} si

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

6. Resuelva el sistema

$$\begin{aligned} 2x \phantom{{}+y} + z &= 4 \\ 2x + y - z &= -1 \\ 3x + y - z &= 0 \end{aligned}$$

en primer lugar, escríbalo en la forma matricial $AX = B$ y luego encuentre A^{-1}.

6 PROGRAMACIÓN LINEAL

NUMEROSOS PROBLEMAS PRÁCTICOS implican maximizar o minimizar una función sujeta a ciertas restricciones. Por ejemplo, es posible que deseemos maximizar una función de utilidades sujeta a ciertas limitaciones en la cantidad de material y mano de obra disponibles. La maximización o minimización de los problemas que se pueden formular en términos de una función objetivo *lineal* y restricciones en forma de desigualdades lineales se denominan *problemas de programación lineal*. En este capítulo atendemos a los problemas de programación lineal con dos variables. Estos problemas son susceptibles de análisis geométrico, y el método de solución presentado aquí arrojará mucha luz sobre la naturaleza básica de un problema de programación lineal. Resolver problemas de programación lineal con más de dos variables requiere de técnicas algebraicas. Una de estas técnicas, el *método simplex*, fue desarrollado por George Dantzig en la década de 1940 y sigue siendo de uso generalizado en la actualidad.

¿Cuántos souvenirs debe fabricar Ace Novelty a fin de maximizar sus utilidades? La empresa produce dos tipos de souvenirs, cada uno de ellos requiere cierta cantidad de tiempo en dos máquinas diferentes. Cada máquina puede ser operada sólo durante cierto número de horas por día. En el ejemplo 1 de la página 330 se muestra cómo se puede formular este problema de producción como un problema de programación lineal, y en el ejemplo 1 de la página 341 resolvemos este problema de programación lineal.

6.1 Graficación de sistemas de desigualdades lineales con dos variables

Graficación de desigualdades lineales

En el capítulo 2 se vio que una ecuación lineal con dos variables x y y

$$ax + by + c = 0 \qquad a, b, \text{ no son ambas iguales a cero}$$

tiene un *conjunto solución* que puede ser mostrado gráficamente como puntos en una línea recta en el plano xy. Mostraremos ahora que también hay una representación gráfica sencilla de las **desigualdades lineales** con dos variables:

$$ax + by + c < 0 \qquad ax + by + c \le 0$$
$$ax + by + c > 0 \qquad ax + by + c \ge 0$$

Antes de pasar a un procedimiento general para graficar estas desigualdades, veremos un ejemplo concreto. Suponga que queremos representar gráficamente

$$2x + 3y < 6 \tag{1}$$

Primero graficamos la ecuación $2x + 3y = 6$, que se obtiene mediante la sustitución de la desigualdad dada "<" con una igualdad "=" (figura 1).

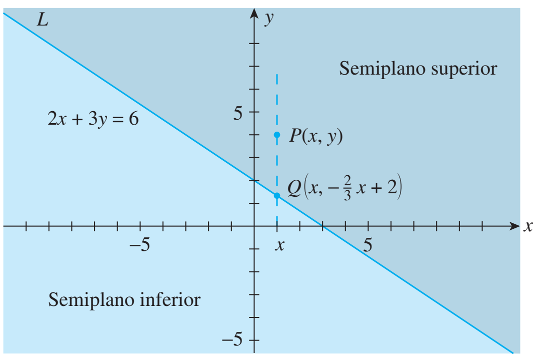


FIGURA 1
Una línea recta divide el plano xy en dos semiplanos.

Observe que esta línea divide el plano xy en dos semiplanos: un semiplano superior y un semiplano inferior. Demostremos que el semiplano superior es la gráfica de la desigualdad lineal

$$2x + 3y > 6 \tag{2}$$

mientras que el semiplano inferior es la gráfica de la desigualdad lineal

$$2x + 3y < 6 \tag{3}$$

Para ver esto escribiremos las desigualdades (2) y (3) en las formas equivalentes

$$y > -\frac{2}{3}x + 2 \tag{4}$$

y

$$y < -\frac{2}{3}x + 2 \tag{5}$$

La ecuación de la línea en sí es

$$y = -\frac{2}{3}x + 2 \tag{6}$$

Ahora se toma cualquier punto $P(x, y)$ arriba de la recta L. Sea Q el punto sobre L y directamente debajo de P (figura 1). Puesto que Q se encuentra en L, sus coordenadas deben satisfacer la ecuación (6). En otras palabras, Q tiene representación $Q\left(x, -\frac{2}{3}x + 2\right)$. Al comparar las coordenadas en y de P y Q, y recordar que P está localizado arriba de Q, de modo que su coordenada y debe ser mayor que la de Q, tenemos

$$y > -\frac{2}{3}x + 2$$

Pero ésta es la desigualdad (4) o, en forma equivalente, la desigualdad (2). Del mismo modo, podemos demostrar que cada punto por debajo de L debe satisfacer la desigualdad (5) y, por tanto, la (3).

Este análisis muestra que el semiplano inferior ofrece una solución a nuestro problema (figura 2). (Por convención, trazamos la línea en forma discontinua para mostrar que los puntos en L no pertenecen al conjunto solución.) Observe que los dos semiplanos en cuestión son disjuntos, es decir, no tienen ningún punto en común.

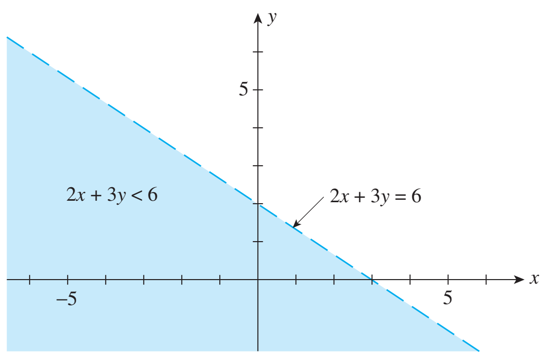


FIGURA 2 El conjunto de puntos debajo de la línea discontinua satisface la desigualdad dada.

En forma alterna, existe un método más sencillo para determinar el semiplano que ofrece la solución al problema. Para determinar el semiplano requerido, elegimos *cualquier* punto en uno de los semiplanos. Para simplificar, tomamos el origen (0, 0), que se encuentra en el semiplano inferior. Al sustituir $x = 0$ y $y = 0$ (las coordenadas de este punto) en la desigualdad (1) proporcionada, encontramos

$$2(0) + 3(0) < 6$$

o $0 < 6$, que es cierto. Esto indica que el semiplano requerido es el que contiene el punto de prueba, es decir, el semiplano inferior.

A continuación veremos qué sucede si elegimos el punto (2, 3), que se encuentra en el semiplano superior. Al sustituir $x = 2$ y $y = 3$ en la desigualdad dada, nos encontramos con

$$2(2) + 3(3) < 6$$

o $13 < 6$, lo cual es falso. Esto indica que el semiplano superior *no* es el semiplano requerido, como se esperaba. Observe también que ningún punto $P(x, y)$, situado en la línea constituye una solución a nuestro problema, dada la *estricta* desigualdad $<$.

Este análisis sugiere el siguiente procedimiento para graficar una desigualdad lineal con dos variables.

Procedimiento para graficar desigualdades lineales

1. Trace la gráfica de la ecuación obtenida de la desigualdad dada al sustituir el signo de desigualdad con un signo de igual. Utilice una línea discontinua o de puntos si el problema implica una desigualdad estricta, $<$ o $>$. De lo contrario, utilice una línea continua para indicar que la recta en sí constituye parte de la solución.
2. Elija un punto de prueba situado en uno de los semiplanos determinados por la línea que trazó en el paso 1 y sustituya los valores de x y y en la desigualdad. Para simplificar, utilice el origen siempre que sea posible.
3. Si la desigualdad se cumple, la gráfica de la solución de la desigualdad es la mitad del plano que contiene el punto de prueba. De lo contrario, la solución es el semiplano que no contiene el punto de prueba.

EJEMPLO 1 Determine el conjunto solución de la desigualdad $2x + 3y \geq 6$.

Solución Al sustituir la desigualdad $\geq$ con una igualdad $=$, se obtiene la ecuación $2x + 3y = 6$, cuya gráfica es la recta que se muestra en la figura 3.

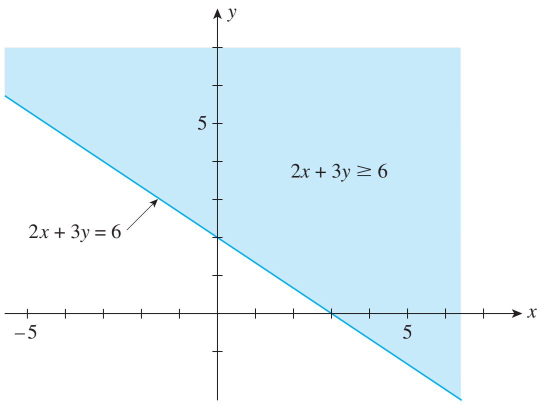


FIGURA **3**
El conjunto de puntos que se encuentran en la recta y en el semiplano superior satisfacen la desigualdad dada.

En lugar de una línea discontinua, como antes, usamos una línea sólida para demostrar que todos los puntos sobre la recta son también soluciones a la desigualdad. Elegimos el origen como punto de prueba, nos encontramos con $2(0) + 3(0) \geq 6$, o $0 \geq 6$, lo cual es falso. Así llegamos a la conclusión de que el conjunto solución formado por el semiplano que no contiene el origen, incluida (en este caso) la recta propuesta por $2x + 3y = 6$. ■

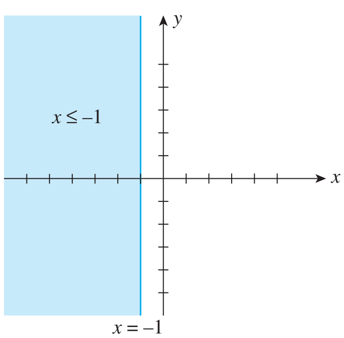


FIGURA **4**
El conjunto de puntos que están en la recta x = −1 y en el semiplano izquierdo satisface la desigualdad dada.

EJEMPLO 2 Grafique $x \leq -1$.

Solución La gráfica de $x = -1$ es la línea vertical que se muestra en la figura 4. Al elegir el origen (0, 0) como un punto de prueba, encontramos con $0 \leq -1$, lo cual es falso. Por tanto, la solución requerida es el semiplano *izquierdo*, que no contiene el origen. ■

EJEMPLO 3 Grafique $x - 2y > 0$.

Solución Primero graficamos la ecuación $x - 2y = 0$ o $y = \frac{1}{2}x$ (figura 5). Puesto que el origen se encuentra en la línea, no se puede utilizar como punto de prueba (¿por qué?). Elegiremos (1, 2) como punto de prueba. Al sustituir $x = 1$ y $y = 2$ en la desigualdad dada, encontramos $1 - 2(2) > 0$, o $-3 > 0$, lo cual es falso. Por tanto, la solución requerida es el semiplano que no contiene el punto de prueba; es decir, el semiplano inferior.

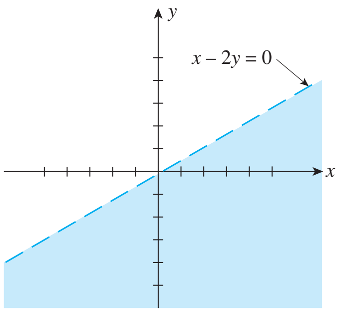


FIGURA 5
El conjunto de puntos en el semiplano inferior satisface $x - 2y > 0$.

■

Exploración con TECNOLOGÍA

Se puede utilizar una calculadora graficadora para trazar la gráfica de una desigualdad lineal. Por ejemplo, para graficar el conjunto solución del ejemplo 1, en primer lugar se reescribe la ecuación $2x + 3y = 6$ en la forma $y = 2 - \frac{2}{3}x$. Luego se introduce esta expresión para Y_1 en la calculadora y se mueve el cursor a la izquierda de Y_1. A continuación presione **ENTER** varias veces y seleccione el icono que indica la opción de sombreado que desee (figura a). La gráfica requerida aparece enseguida (figura b).

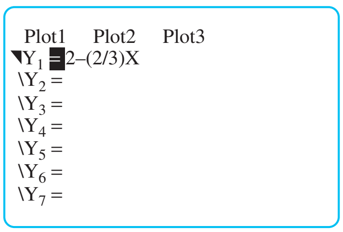


FIGURA a
Pantalla de la TI 83/84.

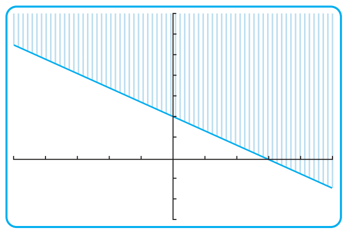


FIGURA b
Gráfica de la desigualdad $2x + 3y \geq 6$.

Graficación de sistemas de desigualdades lineales

Por **conjunto solución de un sistema de desigualdades lineales** con dos variables x y y nos referimos al conjunto de todos los puntos (x, y) que satisfacen cada desigualdad del sistema. La solución gráfica de este sistema se puede obtener al graficar el conjunto solución para cada desigualdad de forma independiente y luego determinando la región en común de todos los conjuntos solución.

EJEMPLO 4 Determine el conjunto solución para el sistema

$$\begin{aligned} 4x + 3y &\geq 12 \\ x - y &\leq 0 \end{aligned}$$

Solución Al proceder como en los ejemplos anteriores, usted no debería tener dificultades para localizar los semiplanos determinados por cada una de las desigualdades lineales que componen el sistema. Estos semiplanos se muestran en la figura 6. La intersección de los dos semiplanos es la región sombreada. Un punto en esta región es un elemento del conjunto solución para el sistema dado. El punto P, la intersección de las dos rectas determinadas por las ecuaciones, se encuentra al resolver las ecuaciones simultáneas

$$\begin{aligned} 4x + 3y &= 12 \\ x - y &= 0 \end{aligned}$$

■

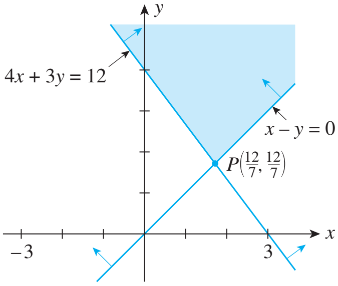


FIGURA 6
El conjunto de puntos en el área sombreada satisface el sistema

$$\begin{aligned} 4x + 3y &\geq 12 \\ x - y &\leq 0 \end{aligned}$$

EJEMPLO 5 Trace la solución prevista para el sistema

$$\begin{aligned} x &\geq 0 \\ y &\geq 0 \\ x + y - 6 &\leq 0 \\ 2x + y - 8 &\leq 0 \end{aligned}$$

Solución La primera desigualdad en el sistema define el semiplano derecho, todos los puntos a la derecha del eje y más todos los puntos que se encuentran en el eje y mismo. La segunda desigualdad en el sistema define el semiplano superior, incluido el eje x. Los semiplanos definidos por la tercera y cuarta desigualdades están indicados con flechas en la figura 7. Por tanto, la región requerida (la intersección de los cuatro semiplanos definidos por las cuatro desigualdades en el sistema de desigualdades lineales dado) es la región sombreada. El punto P se encuentra al resolver las ecuaciones simultáneas $x + y - 6 = 0$ y $2x + y - 8 = 0$.

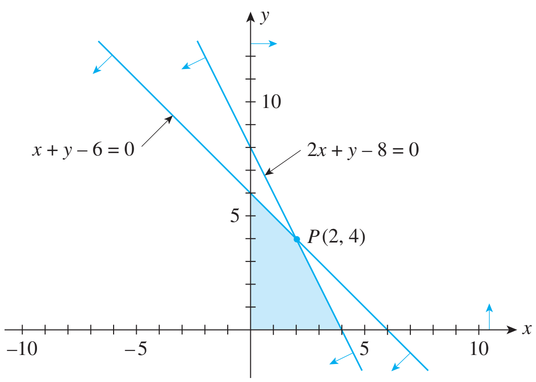


FIGURA 7
El conjunto de puntos en la región sombreada, incluidos los ejes x y y, satisface las desigualdades dadas.

El conjunto solución encontrado en el ejemplo 5 es un ejemplo de un conjunto acotado. Observe que el conjunto puede ser encerrado en un círculo. Por ejemplo, si dibuja un círculo de radio 10 con centro en el origen, verá que el conjunto se encuentra totalmente dentro del círculo. Por otra parte, el conjunto solución del ejemplo 4 no puede ser encerrado en un círculo y se dice que es no acotado.

Conjuntos solución acotados y no acotados

El conjunto solución de un sistema de desigualdades lineales es **acotado** si se puede encerrar en un círculo. De lo contrario es **no acotado**.

EJEMPLO 6 Determine gráficamente el conjunto solución para el siguiente sistema de desigualdades lineales:

$$\begin{aligned} 2x + y &\geq 50 \\ x + 2y &\geq 40 \\ x &\geq 0 \\ y &\geq 0 \end{aligned}$$

Solución El conjunto solución requerido es la región no acotada que se muestra en la figura 8.

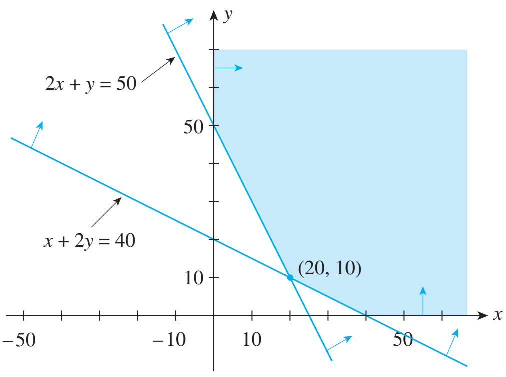


FIGURA 8
El conjunto solución es una región no acotada.

6.1 Ejercicios de autoevaluación

1. Determinar gráficamente el conjunto solución para el siguiente sistema de desigualdades:

$$x + 2y \leq 10$$
$$5x + 3y \leq 30$$
$$x \geq 0,\ y \geq 0$$

2. Determinar gráficamente el conjunto solución para el siguiente sistema de desigualdades:

$$5x + 3y \geq 30$$
$$x - 3y \leq 0$$
$$x \geq 2$$

Las soluciones de los ejercicios de autoevaluación 6.1 se pueden encontrar en la página 329.

6.1 Preguntas de concepto

1. **a.** ¿Cuál es la diferencia, geométricamente, entre el conjunto solución de $ax + by < c$ y el conjunto solución de $ax + by \leq c$?
   b. Describa el conjunto que se obtiene con la intersección del conjunto solución de $ax + by \leq c$ y el conjunto solución de $ax + by \geq c$.

2. **a.** ¿Cuál es el conjunto solución de un sistema de desigualdades lineales?
   b. ¿Cómo podría encontrar gráficamente la solución de un sistema de desigualdades lineales?

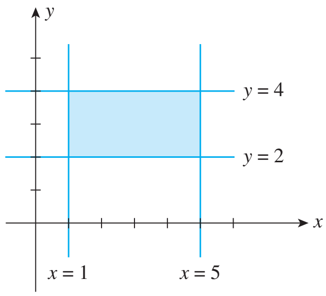
6.1 Ejercicios

En los ejercicios 1 a 10 encuentre la solución gráfica de cada desigualdad.

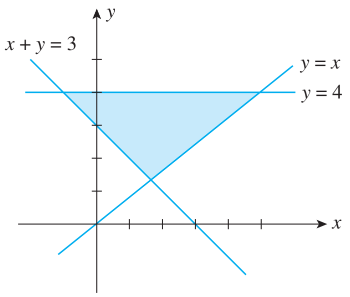
1. $4x - 8 < 0$
2. $3y + 2 > 0$
3. $x - y \leq 0$
4. $3x + 4y \leq -2$
5. $x \leq -3$
6. $y \geq -1$
7. $2x + y \leq 4$
8. $-3x + 6y \geq 12$
9. $4x - 3y \leq -24$
10. $5x - 3y \geq 15$

En los ejercicios 11 a 18 escriba un sistema de desigualdades lineales que describa la región sombreada.

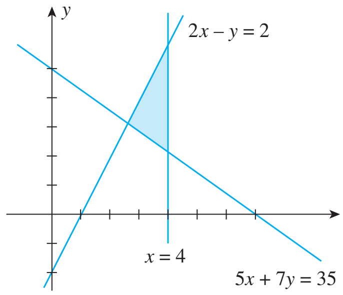
11.



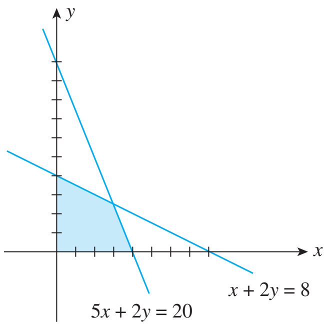
12.



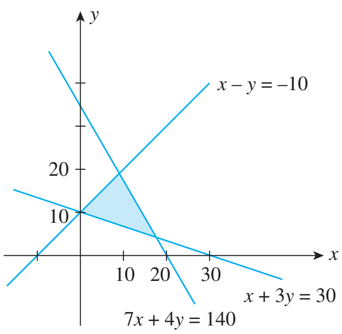
13.



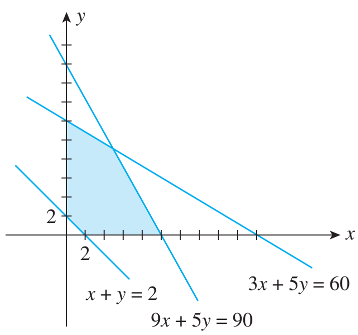
14.



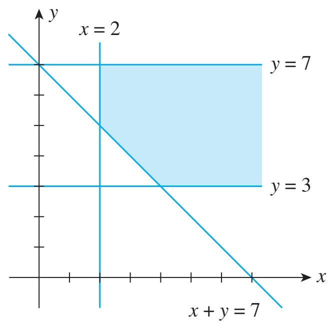
15.



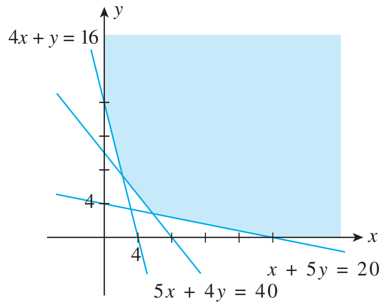
16.



17.



18.



En los ejercicios 19 a 36 determine gráficamente el conjunto solución para cada sistema de desigualdades e indique si el conjunto solución es acotado o no acotado.

19. $2x + 4y > 16$
$-x + 3y \geq 7$

20. $3x - 2y > -13$
$-x + 2y > 5$

21. $x - y \leq 0$
$2x + 3y \geq 10$

22. $x + y \geq -2$
$3x - y \leq 6$

23. $x + 2y \geq 3$
$2x + 4y \leq -2$

24. $2x - y \geq 4$
$4x - 2y < -2$

25. $x + y \leq 6$
$0 \leq x \leq 3$
$y \geq 0$

26. $4x - 3y \leq 12$
$5x + 2y \leq 10$
$x \geq 0, y \geq 0$

27. $3x - 6y \leq 12$
$-x + 2y \leq 4$
$x \geq 0, y \geq 0$

28. $x + y \geq 20$
$x + 2y \geq 40$
$x \geq 0, y \geq 0$

29. $3x - 7y \geq -24$
$x + 3y \geq 8$
$x \geq 0, y \geq 0$

30. $3x + 4y \geq 12$
$2x - y \geq -2$
$0 \leq y \leq 3$
$x \geq 0$

31. $x + 2y \geq 3$
$5x - 4y \leq 16$
$0 \leq y \leq 2$
$x \geq 0$

32. $x + y \leq 4$
$2x + y \leq 6$
$2x - y \geq -1$
$x \geq 0, y \geq 0$

33. $6x + 5y \leq 30$
$3x + y \geq 6$
$x + y \geq 4$
$x \geq 0, y \geq 0$

34. $6x + 7y \leq 84$
$12x - 11y \leq 18$
$6x - 7y \leq 28$
$x \geq 0, y \geq 0$

35.
$$\begin{aligned} x - y &\geq -6 \\ x - 2y &\leq -2 \\ x + 2y &\geq 6 \\ x - 2y &\geq -14 \\ x \geq 0&, y \geq 0 \end{aligned}$$

36.
$$\begin{aligned} x - 3y &\geq -18 \\ 3x - 2y &\geq 2 \\ x - 3y &\leq -4 \\ 3x - 2y &\leq 16 \\ x \geq 0&, y \geq 0 \end{aligned}$$

En los ejercicios 37 a 40 determine si la afirmación es verdadera o falsa. Si es verdadera, explique por qué lo es. Si es falsa, dé un ejemplo para demostrar por qué lo es.

37. El conjunto solución de una desigualdad lineal con dos variables es un semiplano o una línea recta.

38. El conjunto solución de la desigualdad $ax + by + c \leq 0$ es un semiplano izquierdo o un semiplano inferior.

39. El conjunto solución de un sistema de desigualdades lineales con dos variables es acotado si puede ser encerrado en un rectángulo.

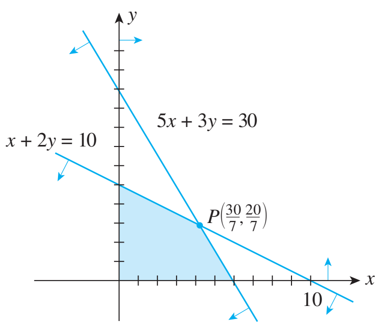
40. El conjunto solución del sistema

$$\begin{aligned} ax + by &\leq e \\ cx + dy &\leq f \\ x \geq 0&, y \geq 0 \end{aligned}$$

donde a, b, c, d, e y f son números reales positivos, es un conjunto acotado.

6.1 Soluciones de los ejercicios de autoevaluación

1. El conjunto solución requerido se muestra en la figura siguiente:



El punto P se encuentra al resolver el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} x + 2y &= 10 \\ 5x + 3y &= 30 \end{aligned}$$

Al resolver la primera ecuación para x en términos de y da

$$x = 10 - 2y$$

Al sustituir este valor de x en la segunda ecuación del sistema da

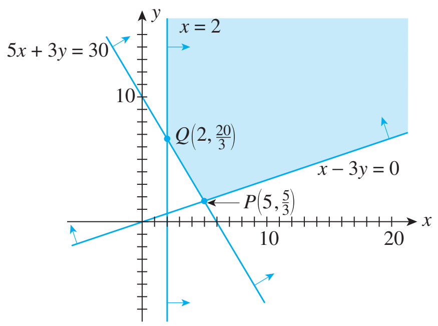
$$\begin{aligned} 5(10 - 2y) + 3y &= 30 \\ 50 - 10y) + 3y &= 30 \\ -7y &= -20 \end{aligned}$$

así $y = \frac{20}{7}$. Al sustituir este valor de y en la expresión de x encontrada previamente, obtenemos

$$x = 10 - 2\left(\frac{20}{7}\right) = \frac{30}{7}$$

quedando el punto de intersección como $\left(\frac{30}{7}, \frac{20}{7}\right)$.

2. El conjunto solución requerido se muestra en la figura siguiente:



Para encontrar las coordenadas de P, resolvemos el sistema

$$\begin{aligned} 5x + 3y &= 30 \\ x - 3y &= 0 \end{aligned}$$

Al resolver la segunda ecuación para x en términos de y y sustituir este valor de x en la primera ecuación da

$$5(3y) + 3y = 30$$

o $y = \frac{5}{3}$. Al sustituir este valor de y en la segunda ecuación da $x = 5$. A continuación las coordenadas de Q se encuentran al resolver el sistema

$$\begin{aligned} 5x + 3y &= 30 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

resultando $x = 2$ y $y = \frac{20}{3}$.

6.2 Problemas de programación lineal

En numerosos problemas de negocios y de economía se nos pide optimizar (maximizar o minimizar) una función sujeta a un sistema de igualdades o desigualdades. La función a optimizar se llama **función objetivo**. Las funciones de utilidades y de costos son ejemplos de funciones objetivo. El sistema de igualdades o desigualdades a la que está sujeta la función objetivo refleja las restricciones (por ejemplo, las limitaciones en los recursos como materiales y mano de obra), impuestas en la(s) solución(es) del problema. Este tipo de problemas se llaman **problemas de programación matemática**. En particular, los problemas en los que tanto la función objetivo como las restricciones son expresadas en forma de ecuaciones lineales o desigualdades se llaman problemas de programación lineal.

Problema de programación lineal

Un **problema de programación lineal** consiste en una función objetivo lineal que será maximizada o minimizada sujeta a ciertas restricciones en forma de ecuaciones lineales o desigualdades.

Un problema de maximización

Como ejemplo de un problema de programación lineal en el que la función objetivo será maximizada, consideramos la siguiente versión simplificada de un problema de producción que implica dos variables.

VIDEO

EJEMPLO DE APLICACIÓN 1 **Un problema de producción** Ace Novelty desea fabricar dos tipos de souvenirs: el tipo A y tipo B. Cada souvenir tipo A se traducirá en una utilidad de \$1 y cada souvenir tipo B dará una utilidad de \$1.20. Para fabricar un souvenir tipo A se requieren 2 minutos en la máquina I y 1 minuto en la máquina II. Un souvenir tipo B requiere 1 minuto en la máquina I y 3 en la máquina II. Se tienen disponibles 3 horas en la máquina I y 5 en la máquina II. ¿Cuántos souvenirs de cada tipo debe fabricar Ace para maximizar su utilidad?

Solución Como primer paso hacia la formulación matemática de este problema, tabulamos la información dada (tabla 1).

TABLA **1**

	Tipo A	Tipo B	Tiempo disponible
Máquina I	2 min	1 min	180 min
Máquina II	1 min	3 min	300 min
Utilidad/unidad	\$1	\$1.20	

Sea x el número de souvenirs tipo A y y el número de souvenirs tipo B a fabricar. Entonces, la utilidad total P (en dólares) está dada por

$$P = x + 1.2y$$

que es la función objetivo a maximizar.

La cantidad total de tiempo que se utiliza la máquina I está dada por $2x + y$ minutos y no debe superar 180 minutos. Por tanto, tenemos la desigualdad

$$2x + y \leq 180$$

Del mismo modo, la cantidad total de tiempo que utiliza la máquina II es $x + 3y$ minutos, y no puede exceder de 300 minutos, lo que lleva a la desigualdad

$$x + 3y \leq 300$$

Por último, ni x ni y pueden ser negativos, por lo que

$$x \geq 0$$
$$y \geq 0$$

En resumen, el problema en cuestión es uno de maximizar la función objetivo $P = x + 1.2y$ sujeto al sistema de las desigualdades

$$\begin{aligned} 2x + y &\leq 180 \\ x + 3y &\leq 300 \\ x &\geq 0 \\ y &\geq 0 \end{aligned}$$

La solución a este problema se completará en el ejemplo 1 de la sección 6.3. ■

Problemas de minimización

En el siguiente problema de programación lineal se minimizará la función objetivo.

VIDEO

EJEMPLO DE APLICACIÓN 2 Una problema de nutrición Un nutriólogo asesora a un individuo que sufre de deficiencia de hierro y de vitamina B para tomar por lo menos 2400 miligramos (mg) de hierro, 2100 mg de vitamina B_1 (tiamina) y 1500 mg de vitamina B_2 (riboflavina) durante cierto periodo. Dos píldoras de vitaminas son adecuadas, la marca A y la marca B. Cada píldora de la marca A cuesta 6 centavos y contiene 40 mg de hierro, 10 mg de vitamina B_1 y 5 mg de vitamina B_2. Cada píldora de la marca B cuesta 8 centavos y contiene 10 mg de hierro y 15 mg cada una de las vitaminas B_1 y B_2 (tabla 2). ¿Qué combinación de píldoras debe adquirir el individuo a fin de cumplir con los requerimientos mínimos de hierro y vitaminas al menor costo?

TABLA **2**

	Marca A	Marca B	Requerimiento mínimo
Hierro	40 mg	10 mg	2400 mg
Vitamina B_1	10 mg	15 mg	2100 mg
Vitamina B_2	5 mg	15 mg	1500 mg
Costo/píldora	6¢	8¢	

Solución Sea x el número de píldoras de la marca A y y el número de píldoras de la marca B que se van a comprar. El costo C (en centavos) está dado por

$$C = 6x + 8y$$

y es la función objetivo a minimizar.

La cantidad de hierro contenida en x píldoras de la marca A y y píldoras de la marca B está dada por $40x + 10y$ mg, y esto debe ser mayor o igual a 2400 mg. Lo que se traduce en la desigualdad

$$40x + 10y \geq 2400$$

Las mismas consideraciones relacionadas con los requerimientos mínimos de vitaminas B_1 y B_2 llevan a las desigualdades

$$10x + 15y \geq 2100$$
$$5x + 15y \geq 1500$$

respectivamente. Por tanto, el problema aquí es minimizar $C = 6x + 8y$ sujeto a

$$\begin{aligned} 40x + 10y &\geq 2400 \\ 10x + 15y &\geq 2100 \\ 5x + 15y &\geq 1500 \\ x \geq 0,\ y &\geq 0 \end{aligned}$$

La solución de este problema se completará en el ejemplo 2 de la sección 6.3. ■

EJEMPLO DE APLICACIÓN 3 Un problema de transporte Curtis-Roe Aviation Industries cuenta con dos plantas de producción, I y II, que fabrican los motores a reacción Zephyr utilizado en sus aviones comerciales ligeros. Hay 100 unidades de los motores en la planta I y 110 unidades en la planta II. Los motores se embarcan a dos de las principales plantas de ensamble Curtis-Roe, A y B. Los costos de envío (en dólares) por motor de las plantas I y II a las principales plantas de ensamble A y B son los siguientes:

Desde	A la planta de ensamble A	B
Planta I	100	60
Planta II	120	70

En un mes determinado, la planta de ensamble A necesita 80 motores, mientras que la planta de ensamble B necesita 70 motores. Calcule cuántos motores deberá enviar cada planta de producción a cada planta principal de ensamble si los gastos de envío se mantienen al mínimo.

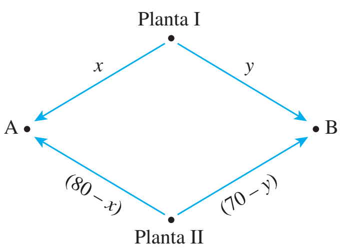


FIGURA 9

Solución Sea x el número de motores enviados desde la planta I a la planta de ensamble A, y sea y el número de motores enviados desde la planta I a la planta de ensamble B. Dado que los requerimientos de las plantas de ensamble A y B son 80 y 70 motores, respectivamente, el número de motores enviados desde la planta II a las plantas de ensamble A y B $(80 - x)$ y $(70 - y)$, respectivamente. Estos números se pueden mostrar en un esquema. Con la ayuda del esquema adjunto (figura 9) y los costos de envío, encontramos que el costo total de envío en que incurrirá Curtis-Roe está dado por

$$\begin{aligned} C &= 100x + 60y + 120(80 - x) + 70(70 - y) \\ &= 14{,}500 - 20x - 10y \end{aligned}$$

Luego, las limitaciones de producción en las plantas I y II llevan a las desigualdades

$$x + y \leq 100$$
$$(80 - x) + 70(70 - y) \leq 110$$

La última desigualdad se simplifica a

$$x + y \geq 40$$

Además, los requerimientos de las dos plantas principales de ensamble dan lugar a las desigualdades

$$x \geq 0 \qquad y \geq 0 \qquad 80 - x \geq 0 \qquad 70 - y \geq 0$$

Las dos últimas se pueden escribir como $x \leq 80$ y $y \leq 70$.

En resumen, tenemos el siguiente problema de programación lineal: minimizar la función (costo) $C = 14{,}500 - 20x - 10y$ sujeta a las limitaciones

$$\begin{aligned} x + y &\geq 40 \\ x + y &\leq 100 \\ x &\leq 40 \\ y &\leq 70 \end{aligned}$$

donde $x \geq 0$ y $y \geq 0$.

Se le pedirá que complete la solución a este problema en el ejercicio 47 de la sección 6.3. ■

EJEMPLO DE APLICACIÓN 4 Un problema de almacenamiento Acrosonic fabrica su modelo F de sistemas de sonido en dos lugares distintos, la planta I y la planta II. La producción de la planta I es de 400 por mes como máximo, mientras que la producción de la planta II es de 600 por mes como máximo. Los sistemas de sonido son enviados a tres almacenes que sirven como centros de distribución para la empresa. Para que los almacenes cumplan con sus pedidos, los requerimientos mínimos mensuales de los almacenes A, B y C son 200, 300 y 400 sistemas, respectivamente. Los gastos de envío de la planta I a los almacenes A, B y C son de \$20, \$8 y \$10 por sistema de sonido, respectivamente, y los gastos de envío de la planta II de cada uno de esos almacenes es de \$12, \$22 y \$18, respectivamente. ¿Cuál debería ser la programación de los envíos si Acrosonic desea satisfacer los requerimientos de los centros de distribución y al mismo tiempo mantener sus gastos de envío al mínimo?

TABLA 3

Planta	A	Almacén B	C
I	20	8	10
II	12	22	18

Solución Los respectivos gastos de envío (en dólares) por sistema de sonido pueden ser tabulados en la tabla 3. Sea x_1 el número de sistemas de sonido de la planta I enviados al almacén A, x_2 el número de sistemas de sonido enviados de la planta I al almacén B, y así sucesivamente conduce a la tabla 4.

TABLA 4

Planta	A	Almacén B	C	Prod. máxima
I	x_1	x_2	x_3	400
II	x_4	x_5	x_6	600
Req. mínimo	200	300	400	

De las tablas 3 y 4 vemos que el costo de envío x_1 de los sistemas de sonido de la planta I al almacén A es de $\$20x_1$, el costo de envío x_2 sistemas de sonido de la planta I al almacén B es de $\$8x_2$, y así sucesivamente. Así, el costo mensual total por envíos (en dólares) efectuado por Acrosonic está dado por

$$C = 20x_1 + 8x_2 + 10x_3 + 12x_4 + 22x_5 + 18x_6$$

A continuación las limitantes de producción en las plantas I y II llevan a las desigualdades

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &\leq 400 \\ x_4 + x_5 + x_6 &\leq 600 \end{aligned}$$

(tabla 4). Además, los requerimientos mínimos de cada uno de los tres almacenes llevan a las tres desigualdades

$$\begin{aligned} x_1 + x_4 &\geq 200 \\ x_2 + x_5 &\geq 300 \\ x_3 + x_6 &\geq 400 \end{aligned}$$

En resumen, tenemos el problema de programación lineal siguiente:

$$\begin{aligned} \text{Minimizar} \quad & C = 20x_1 + 8x_2 + 10x_3 + 12x_4 + 22x_5 + 18x_6 \\ \text{sujeto a} \quad & x_1 + x_2 + x_3 \leq 400 \\ & x_4 + x_5 + x_6 \leq 600 \\ & x_1 + x_4 \geq 200 \\ & x_2 + x_5 \geq 300 \\ & x_3 + x_6 \geq 400 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \ldots, x_6 \geq 0 \end{aligned}$$

La solución de este problema se completará en la sección 6.5, ejemplo 5. ■

6.2 Ejercicios de autoevaluación

Gino Balduzzi, propietario de Luigi's Pizza Palace, asigna \$9000 al mes para publicidad en dos periódicos, el *City Tribune* y el *Daily News*. El *City Tribune* cobra \$300 por un anuncio determinado, mientras que el *Daily News* cobra \$100 por el mismo anuncio. Gino ha estipulado que el anuncio debe aparecer en por lo menos 15, pero en no más de 30 ediciones del *Daily News* por mes. El *City Tribune* tiene una circulación diaria de 50,000, y el *Daily News* tiene un tiraje de 20,000. En estas condiciones, determine cuántos anuncios debe colocar Gino en cada diario con el fin de llegar al mayor número de lectores. Formule, pero no resuelva el problema. (La solución de este problema se puede encontrar en el ejercicio 3 de soluciones a los ejercicios de autoevaluación 6.3.)

La solución del ejercicio de autoevaluación 6.2 se puede encontrar en la página 338.

6.2 Preguntas de concepto

1. ¿Qué es un problema de programación lineal?
2. Suponga que se le pide que formule un problema de programación lineal con dos variables x y y. ¿Cómo expresar el hecho de que x y y son no negativos? ¿Por qué se requieren a menudo estas condiciones en los problemas prácticos?
3. ¿Cuál es la diferencia entre un problema de programación lineal de maximización y un problema de programación lineal de minimización?

6.2 Ejercicios

Formule, pero no resuelva cada uno de los siguientes ejercicios como problemas de programación lineal. Se le pedirá resolver estos problemas más adelante.

1. **Manufactura. Programación de la producción** Una empresa fabrica dos productos, A y B, en dos máquinas, I y II. Se ha determinado que la empresa obtendrá una utilidad de \$3 por cada unidad del producto A y una utilidad de \$4 por cada unidad del producto B. Para fabricar una unidad del producto A se requieren 6 minutos en la máquina I y 5 minutos en la máquina II. Para fabricar una unidad del producto B se requieren 9 minutos en la máquina I y 4 minutos en la máquina II. Se tienen disponibles 5 horas de tiempo en la máquina I y 3 horas de tiempo en la máquina II en cada turno de trabajo. ¿Cuántas unidades de cada producto se deben fabricar en cada turno para maximizar las utilidades de la empresa?
2. **Manufactura. Programación de la producción** National Business Machines fabrica dos modelos de máquinas de fax: A y B. Fabricar cada modelo A cuesta \$100 y cada modelo B cuesta \$150. Las utilidades son de \$30 para cada modelo A y \$40 por cada modelo B de aparatos de fax. Si la demanda total de aparatos de fax al mes no es superior a 2500 y la empresa ha destinado no más de \$600,000 por mes para los costos de fabricación, ¿cuántas unidades de cada modelo debe fabricar National cada mes con el fin de maximizar su utilidad mensual?
3. **Manufactura. Programación de la producción** Kane Manufacturing cuenta con una división que fabrica dos modelos de rejillas, el modelo A y el modelo B. Para fabricar cada rejilla modelo A requiere 3 libras de hierro fundido y 6 minutos de trabajo. Para fabricar cada rejilla modelo B requiere 4 libras

de hierro fundido y 3 minutos de trabajo. La utilidad por cada rejilla modelo A es de $2.00 y por cada rejilla modelo B es de $1.50. Si están disponibles 1000 libras de hierro fundido y 20 horas de trabajo para la fabricación de rejillas por día, ¿cuántas rejillas por día de cada modelo debe fabricar la división a fin de maximizar las utilidades de Kane?

4. **Manufactura. Programación de la producción** Remítase al ejercicio 3. Debido a los pedidos pendientes de rejillas modelo A, el gerente de Kane Manufacturing ha decidido fabricar por lo menos 150 unidades de estos modelos al día. Operando bajo esta limitante adicional, ¿cuántas rejillas de cada modelo debe fabricar Kane para maximizar las utilidades?

5. **Manufactura. Programación de la producción** Una división de Winston Furniture Company fabrica mesas y sillas. Cada mesa requiere 40 pies de tablas de madera y 3 horas de trabajo. Cada silla requiere 16 pies de tablas de madera y 4 horas de trabajo. La utilidad por cada mesa es de $45, y por cada silla es de $20. En una semana determinada, la empresa tiene 3200 pies de tablas de madera disponibles, y 520 horas de mano de obra. ¿Cuántas mesas y sillas debe fabricar Winston a fin de maximizar sus utilidades?

6. **Manufactura. Programación de la producción** Remítase al ejercicio 5. Si la utilidad por cada mesa es de $50 y por cada silla es de $18, ¿cuántas mesas y sillas debe fabricar Winston a fin de maximizar su utilidad?

7. **Finanzas. Asignación de fondos** Madison Finance cuenta con un total de $20 millones destinados a préstamos de vivienda y de automóviles. En promedio, los préstamos de vivienda tienen una tasa anual de rendimiento de 10% mientras que los préstamos automotrices generan una tasa anual de rendimiento de 12%. La gerencia también ha estipulado que la cantidad total de préstamos hipotecarios debe ser mayor o igual a 4 veces la cantidad total de préstamos automotrices. Determine la cantidad total de préstamos de cada tipo que Madison debe extender a cada categoría a fin de maximizar sus rendimientos.

8. **Inversiones. Asignación de activos** Un experto en finanzas planea invertir hasta $500,000 en dos proyectos. Del proyecto A se obtiene un rendimiento de 10% sobre la inversión, mientras que del proyecto B se obtienen un rendimiento de 15% sobre la inversión. Debido a que la inversión en el proyecto B es más riesgosa que la inversión en el proyecto A, el experto en finanzas ha decidido que la inversión en el proyecto B no debe exceder 40% de la inversión total. ¿Cuánto debe invertir en cada proyecto para maximizar el rendimiento sobre su inversión?

9. **Manufactura. Programación de la producción** Acoustical Company fabrica un gabinete para almacenar discos compactos que se puede comprar totalmente ensamblado o como un kit para armar. Cada gabinete se procesa en el departamento de manufactura y en el departamento de montaje. Si el departamento de manufactura sólo fabrica gabinetes completamente ensamblados, puede producir 200 unidades por día, y si sólo fabrica kits para armar, puede producir 200 unidades por día. Si el departamento de montaje sólo fabrica gabinetes completamente ensamblados, puede producir 100 unidades por día, pero si sólo fabrica kits para armar, puede producir 300 unidades por día. Cada gabinete totalmente ensamblado contribuye con $50 a las utilidades de la empresa, mientras que cada kit aporta $40 a sus utilidades. ¿Cuántas unidades totalmente ensambladas y cuántos kits debe producir la empresa por día a fin de maximizar sus utilidades?

10. **Agricultura. Planeación de cultivos** Un agricultor planea sembrar dos cultivos, A y B. El costo de sembrar el cultivo A es de $40/acre mientras que el cultivo B es de $60/acre. El agricultor tiene un máximo de $7400 disponible para el cultivo de la tierra. Cada acre del cultivo A requiere 20 horas de trabajo y cada acre de cultivo B requiere 25 horas de trabajo. El agricultor tiene un máximo de 3300 horas de trabajo disponibles. Si espera obtener un beneficio de $150/acre del cultivo A y $200/acre del cultivo B, ¿cuántos acres de cada cultivo debe sembrar a fin de maximizar su utilidad?

11. **Minería. Producción** Perth Mining Company opera dos minas con el fin de extraer oro y plata. Operar la mina Saddle cuesta $14,000 por día y produce 50 onzas de oro y 3000 onzas de plata cada día. Operar la mina Horseshoe cuesta $16,000/día y produce 75 onzas de oro y 1000 onzas de plata cada día. La gerencia de la empresa ha establecido un objetivo de al menos 650 onzas de oro y 18,000 onzas de plata. ¿Cuántos días debe operarse cada mina de manera que el objetivo pueda lograrse con el costo mínimo?

12. **Transporte** Deluxe River Cruises opera una flota de embarcaciones fluviales. La flota cuenta con dos tipos de buques: un buque tipo A con 60 camarotes de lujo y 160 camarotes estándar, además de un buque tipo B con 80 camarotes de lujo y 120 camarotes estándar. En virtud de un contrato de alquiler con Odyssey Travel Agency, Deluxe River Cruises proporciona a Odyssey un mínimo de 360 camarotes de lujo y 680 estándar para su crucero de 15 días en mayo. Cuesta $44,000 operar un buque tipo A y $54,000 operar uno tipo B por ese periodo. ¿Cuántos buques de cada tipo debe utilizar con el fin de mantener los costos operativos al mínimo?

13. **Suministro de agua** El encargado de abastecimiento de agua para una ciudad determinada necesita abastecer a la ciudad con por lo menos 10 millones de galones de agua potable (para beber) al día. El abastecimiento puede hacerse del embalse local o de la tubería de una ciudad adyacente. El embalse local tiene una producción máxima diaria de 5 millones de galones de agua potable y la tubería tiene un rendimiento máximo diario de 10 millones de galones. Por contrato, la tubería está obligada a suministrar un mínimo de 6 millones de galones por día. Si el costo de 1 millón de galones de agua del embalse es de $300 y de la tubería de agua es de $500, ¿qué cantidad de agua debe obtener de cada fuente de agua el administrador para reducir al mínimo los costos diarios de la ciudad?

14. **Manufactura. Programación de la producción** Ace Novelty fabrica pandas gigantes y perros San Bernardo. Cada panda requiere 1.5 yardas cuadradas de felpa, 30 pies cúbicos de relleno y 5 piezas de adorno; cada San Bernardo requiere 2 yardas cuadradas de felpa, 35 pies cúbicos de relleno y 8 piezas de adorno. La utilidad por cada panda es de $10 y por cada San Bernardo es de $15. Si tiene a su disposición 3600 yardas cuadradas de felpa, 66,000 pies cúbicos de relleno y 13,600 piezas de adorno, ¿cuántos animales de felpa de cada tipo deberá fabricar la empresa para maximizar su utilidad?

15. **Nutrición. Planeación de dieta** Se le ha pedido a una nutrióloga en el Centro Médico que prepare una dieta especial para ciertos pacientes. Ha decidido que las comidas deben contener un mínimo de 400 mg de calcio, 10 mg de hierro y 40 mg de vitamina C. Además ha decidido que las comidas deben ser preparadas a partir de los alimentos A y B. Cada onza de alimento A contiene 30 mg de calcio, 1 mg de hierro, 2 mg de vitamina C y 2 mg de colesterol. Cada onza del alimento B contiene 25 mg de calcio, 0.5 mg de hierro, 5 mg de vitamina C y 5 mg de colesterol. Calcule cuántas onzas de cada tipo de alimento se deben utilizar en una comida de modo que se reduzca al mínimo el contenido de colesterol y se cumplan los requerimientos mínimos de calcio, hierro y vitamina C.

16. **Planeación de programas sociales** AntiFam, una organización de lucha contra el hambre, ha destinado entre \$2 y \$2.5 millones (incluido) para ayuda a dos países africanos, el país A y el país B. El país A recibirá entre \$1 y \$1.5 millones (inclusive), y el país B recibirá por lo menos \$0.75 millones. Se ha calculado que cada dólar gastado en el país A producirá un rendimiento efectivo de \$0.60, mientras que un dólar gastado en el país B producirá un rendimiento efectivo de 0.80 dólares. ¿Cómo deben asignarse las ayudas para que el dinero se utilice con mayor eficacia con base en estos criterios?

    Sugerencia: Si x y y denotan la cantidad de dinero que debe darse a los países A y B, respectivamente, entonces la función objetivo a maximizar es $P = 0.6x + 0.8y$.

17. **Publicidad** Everest Deluxe World Travel ha decidido hacer publicidad en las ediciones dominicales de los dos principales periódicos de la ciudad. Estos anuncios se dirigen a tres grupos de clientes potenciales. Cada anuncio en el periódico I es visto por 70,000 clientes del grupo A, 40,000 clientes del grupo B y 20,000 clientes del grupo C. Cada anuncio en el periódico II es visto por 10,000 clientes del grupo A, 20,000 clientes del grupo B y 40,000 clientes del grupo C. Cada anuncio en el periódico I cuesta \$1000, y cada anuncio en el periódico II cuesta \$800. Everest quisiera que sus anuncios fueran leídos al menos por 2 millones de personas del grupo A, 1.4 millones de personas del grupo B y 1 millón de personas del grupo C. ¿Cuántos anuncios debe colocar Everest en cada diario para lograr sus objetivos de publicidad al mínimo costo?

18. **Manufactura. Costos de envío** TMA fabrica televisores LCD de alta definición de 37 pulgadas en dos lugares distintos, la ubicación I y la ubicación II. La producción en la ubicación I es como máximo de 6000 televisores por mes, mientras que la producción en la ubicación II es como máximo de 5000 televisores por mes. TMA es el principal proveedor de televisores de Pulsar Corporation, su empresa filial, que tiene prioridad en tener todas sus necesidades satisfechas. En un mes determinado, Pulsar hizo pedidos por 3000 y 4000 televisores para ser enviados a sus dos fábricas ubicadas en la ciudad A y en la ciudad B, respectivamente. Los costos de envío (en dólares) por televisor de cada una de las dos plantas TMA a las dos fábricas de Pulsar son los siguientes:

	A las fábricas de Pulsar	
Desde TMA	**Ciudad A**	**Ciudad B**
Ubicación I	\$6	\$4
Ubicación II	\$8	\$10

    Encuentre un esquema de envíos que cumpla con los requerimientos de ambas empresas a la vez que mantenga los costos al mínimo.

19. **Inversiones. Asignación de activos** Un experto en finanzas planea invertir hasta \$2 millones en tres proyectos. Estima que el proyecto A producirá un rendimiento de 10% sobre su inversión, el proyecto B 15% sobre su inversión y el proyecto C 20% sobre su inversión. Debido a los riesgos asociados a las inversiones, decidió no destinar más de 20% de su inversión total en el proyecto C. También decidió que sus inversiones en los proyectos B y C no deben superar 60% de su inversión total. Finalmente, decidió que su inversión en el proyecto A debe ser por lo menos 60% de sus inversiones en los proyectos B y C. ¿Cuánto debe invertir el experto en finanzas en cada proyecto si desea maximizar la rentabilidad total de sus inversiones?

20. **Inversiones. Asignación de activos** Ashley ha destinado un máximo de \$250,000 para invertir en tres fondos de inversión: un fondo del mercado de dinero, un fondo internacional de renta variable y un fondo de crecimiento y renta. El fondo del mercado de dinero tiene una tasa de rendimiento de 6% anual, el fondo de renta variable de 10% anual y el fondo de crecimiento y renta de 15% anual. Ashley ha estipulado que no más de 25% del total de su portafolio debe estar en el fondo de crecimiento y renta y que no más de 50% debe estar en el fondo de renta variable internacional. Para maximizar el rendimiento de su inversión, ¿cuánto debe invertir Ashley en cada tipo de fondo?

21. **Manufactura. Programación de la producción** Una empresa fabrica los productos A, B y C. Cada producto es procesado en tres departamentos: I, II y III. El total de horas de mano de obra disponible a la semana para los departamentos I, II y III son 900, 1080 y 840, respectivamente. Los requerimientos de tiempo (en horas por unidad) y la utilidad por unidad de cada producto son los siguientes:

	Producto A	Producto B	Producto C
Departamento I	2	1	2
Departamento II	3	1	2
Departamento III	2	2	1
Utilidad	\$18	\$12	\$15

    ¿Cuántas unidades de cada producto se deben fabricar con el fin de maximizar la utilidad?

22. **Publicidad** Como parte de una campaña para promover su venta anual de liquidación, la empresa Excélsior decidió comprar tiempo de publicidad en televisión en la estación KAOS. El presupuesto de publicidad de Excélsior es de \$102,000. El tiempo de la mañana cuesta \$3000 por minuto, el de la tarde \$1000 por minuto y el tiempo de la noche (horario estelar) \$12,000 por minuto. Debido a compromisos previos, KAOS no puede ofrecer a Excélsior más de 6 minutos del horario estelar o más de un total de 25 minutos de tiempo de publicidad durante las 2 semanas en que los comerciales saldrán al aire. KAOS estima que los comerciales en la mañana son vistos por 200,000 personas, los de la tarde son vistos por 100,000 personas y los de la noche son

vistos por 600,000 personas. ¿Cuánto tiempo de publicidad debe comprar Excélsior por la mañana, por la tarde y por la noche para maximizar la exposición de sus comerciales?

23. **Manufactura. Programación de la producción** Custom Office Furniture Company está introduciendo una nueva línea de escritorios ejecutivos fabricados con una calidad especialmente seleccionada de nogal. En principio, serán comercializados tres modelos diferentes: A, B y C. Cada escritorio modelo A requiere 1¼ horas de fabricación, 1 hora de ensamblaje y 1 hora de acabado; cada escritorio modelo B requiere 1½ horas de fabricación, 1 hora de ensamblaje y 1 hora de acabado; cada escritorio modelo C requiere 1½ horas, ¾ de hora y ½ hora para fabricación, ensamblaje y acabado, respectivamente. La utilidad por cada escritorio modelo A es de \$26, por cada escritorio modelo B es de \$28 y por cada escritorio modelo C es de \$24. El tiempo total disponible en el departamento de fabricación, el departamento de ensamble y el departamento de acabado en el primer mes de producción es de 310 horas, 205 horas y 190 horas, respectivamente. Para maximizar las utilidades de Custom, ¿cuántos escritorios de cada modelo deberán fabricarse en el mes?

24. **Manufactura. Costos de envío** Acrosonic, mencionada en el ejemplo 4, también fabrica un sistema de sonido modelo G en las plantas I y II. La producción de la planta I es como máximo de 800 por mes, mientras que la producción de la planta II es como máximo de 600 por mes. Estos sistemas de sonido también son enviados a tres almacenes A, B y C, cuyos requerimientos mínimos mensuales son de 500, 400 y 400, respectivamente. Los gastos de envío de la planta I al almacén A, al almacén B y al almacén C son de \$16, \$20 y \$22 por sistema, respectivamente, y los gastos de envío de la planta II a cada uno de estos almacenes son de \$18, \$16 y \$14 por sistema, respectivamente. ¿Qué programa de envíos permitirá a Acrosonic cumplir con los requerimientos de los almacenes y al mismo tiempo mantener sus gastos de envío al mínimo?

25. **Manufactura. Costos de envío** Steinwelt Piano fabrica pianos y consolas en dos instalaciones, la planta I y la planta II. La producción de la planta I es como máximo de 300 por mes, mientras que la producción de la planta II es como máximo de 250 por mes. Estos pianos son enviados a tres almacenes que sirven como centros de distribución para la empresa. Para surtir los pedidos actuales y futuros, el almacén A requiere un mínimo de 200 pianos por mes, el almacén B 150 pianos por mes y el almacén C 200 pianos por mes. El costo de envío de cada uno de los pianos de la planta I al almacén A, al almacén B y al almacén C es de \$60, \$60 y \$80, respectivamente, y los costos de envío de cada piano de la planta II al almacén A, al almacén B y al almacén C es de \$80, \$70 y \$50, respectivamente. ¿Qué programa de envíos permitirá a Steinwelt cumplir con los requerimientos de los almacenes al tiempo que mantiene los costos de envío al mínimo?

26. **Manufactura. Producción de casas prefabricadas** Boise Lumber ha decidido ingresar en el lucrativo negocio de las casas prefabricadas. Inicialmente planea ofrecer tres modelos: estándar, elegante y de lujo. Cada casa está parcialmente prefabricada y ensamblada en la fábrica, y el montaje final se completa en el lugar. El monto en dólares de los materiales de construcción necesarios, la cantidad de mano de obra necesaria en la planta para la prefabricación y ensamble parcial, la cantidad de mano de obra requerida en el lugar y la utilidad por unidad se muestran a continuación:

	Modelo estándar	Modelo elegante	Modelo de lujo
Materiales	\$6000	\$8000	\$10,000
Mano de obra/fábrica (h)	240	220	200
Mano de obra/en el lugar (h)	180	210	300
Utilidad	\$3400	\$4000	\$5000

Para el primer año de producción se tiene presupuestada una suma de \$8.2 millones para el material de construcción; el número de horas de mano de obra disponibles para trabajar en la fábrica (prefabricación y montaje parcial) no excede las 218,000 horas, y la cantidad de mano de obra para trabajar en el lugar debe ser menor o igual a 237,000 horas. Determine el número de viviendas de cada tipo que debe producir Boise (una investigación de mercados ha confirmado que no debería haber problemas con las ventas) con el fin de maximizar su utilidad en esta nueva empresa.

27. **Producción. Productos de jugo** CalJuice Company ha decidido introducir tres jugos de fruta a partir de una mezcla de dos o más concentrados. Estos jugos se empacarán en cajas de cartón de 64 onzas. Una caja de cartón de jugo de piña-naranja requiere de 8 onzas de cada concentrado de jugo de piña y de naranja. Una caja de cartón de jugo de naranja-plátano requiere 12 onzas de concentrado de jugo de naranja y 4 onzas de concentrado de pulpa de plátano. Por último, una caja de cartón de jugo de piña-naranja-plátano requiere 4 onzas de concentrado de jugo de piña, 8 onzas de concentrado de jugo de naranja y 4 onzas de concentrado de pulpa de plátano. La empresa ha decidido destinar 16,000 onzas de concentrado de jugo de piña, 24,000 onzas de concentrado de jugo de naranja y 5000 onzas de concentrado de pulpa de plátano para la producción inicial. La empresa también ha establecido que la producción de jugo de piña-naranja-plátano no debe exceder 800 cajas de cartón. Su utilidad en una caja de cartón de jugo de piña-naranja es de \$1.00, su utilidad en una caja de cartón de jugo de naranja-plátano es de \$0.80 y su utilidad en una caja de cartón de jugo de piña-naranja-plátano es de \$0.90. Para lograr una utilidad máxima, ¿cuántas cajas de cartón de cada mezcla debe producir la empresa?

28. **Manufactura. Producción de fórmula para el resfriado** Farmacéutica Beyer produce tres tipos de fórmula para el resfriado: la fórmula I, la fórmula II y la fórmula III. Se necesitan 2.5 horas producir 1000 botellas de la fórmula I, 3 horas producir 1000 botellas de la fórmula II y 4 horas producir 1000 botellas de la fórmula III. Las utilidades por cada 1000 botellas de la fórmula I, la fórmula II y la fórmula III, son de \$180, \$200 y \$300, respectivamente. Para una corrida de producción determinada hay suficientes ingredientes disponibles para fabricar como máximo 9000 botellas de la fórmula I, 12,000 botellas de la fórmula II y 6000 botellas de la fórmula III. Además, el tiempo para la corrida de producción se limita a un máximo de 70 horas. ¿Cuántas botellas de cada fórmula deben producirse en esta corrida de producción para que se maximice la utilidad?

En los ejercicios 29 y 30 determine si la afirmación es verdadera o falsa. Si es verdadera, explique por qué lo es. Si es falsa, dé un ejemplo para demostrar por qué es verdadera.

29. El problema

$$\begin{array}{ll} \text{Maximizar} & P = xy \\ \text{sujeto a} & 2x + 3y \leq 12 \\ & 2x + y \leq 8 \\ & x \geq 0, y \geq 0 \end{array}$$

es un problema de programación lineal.

30. El problema

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & C = 2x + 3y \\ \text{sujeto a} & 2x + 3y \leq 6 \\ & x - y = 0 \\ & x \geq 0, y \geq 0 \end{array}$$

es un problema de programación lineal.

6.2 Solución al ejercicio de autoevaluación

Sea x el número de anuncios que se colocarán en el *City Tribune* y y el número de los que se colocarán en el *Daily News*. El costo total por colocar x anuncios en el *City Tribune* y y anuncios en el *Daily News* es de $300x + 100y$ dólares, y ya que el presupuesto mensual es de \$9000, tenemos que

$$300x + 100y \leq 9000$$

A continuación, la condición de que el anuncio debe aparecer en por lo menos 15, pero no más de 30 ediciones del *Daily News* se traduce en las desigualdades

$$\begin{array}{l} y \geq 15 \\ y \leq 30 \end{array}$$

Por último, la función objetivo a maximizar es

$$P = 50{,}000x + 20{,}000y$$

En resumen, tenemos el problema de programación lineal siguiente:

$$\begin{array}{ll} \text{Maximizar} & P = 50{,}000x + 20{,}000y \\ \text{sujeto a} & 300x + 100y \leq 9000 \\ & y \geq 15 \\ & y \leq 30 \\ & y \geq 0, y \geq 0 \end{array}$$

6.3 Solución gráfica de problemas de programación lineal

El método gráfico

Los problemas de programación lineal con dos variables tienen interpretaciones geométricas relativamente simples. Por ejemplo, el sistema de restricciones lineales asociadas a un problema de programación lineal bidimensional, a menos que sea inconsistente, define una región plana o un segmento de recta cuyo límite se compone de segmentos de línea recta y/o semilíneas. Estos problemas son, por tanto, susceptibles de análisis gráfico.

Considere el siguiente problema de programación lineal en dos dimensiones:

$$\begin{array}{ll} \text{Maximizar} & P = 3x + 2y \\ \text{sujeto a} & 2x + 3y \leq 12 \\ & 2x + y \leq 8 \\ & y \geq 0, y \geq 0 \end{array} \tag{7}$$

El sistema de desigualdades lineales en (7) define la región S que se muestra en la figura 10. Cada punto de S es un candidato para la solución del problema en cuestión y se conoce como una **solución factible**. El conjunto S se conoce como un **conjunto factible**. Nuestro objetivo es encontrar, de entre todos los puntos en el conjunto S, el (los) punto(s) que optimiza(n) la función objetivo P. Esta solución factible se llama **solución óptima** y constituye la solución al problema de programación lineal en cuestión.

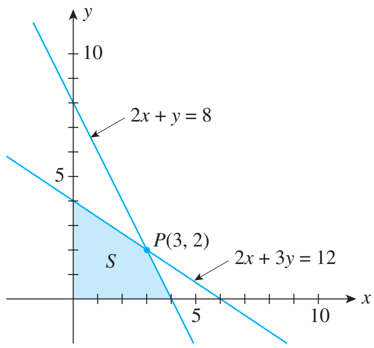


FIGURA 10
Cada punto del conjunto factible S es un candidato para la solución óptima.

Como se indicó antes, cada punto $P(x, y)$ en S es un candidato a la solución óptima para el problema en cuestión. Por ejemplo, es fácil ver que el punto (1, 3) se encuentra en S y, por tanto, es funcional. El valor de la función objetivo P en el punto (1, 3) está dado por $P = 3(1) + 2(3) = 9$. Ahora, si pudiéramos calcular el valor de P que corresponde a cada punto en S, entonces el (los) punto(s) en S que dio (dieron) el mayor valor de P constituyen el conjunto solución buscado. Por desgracia, en la mayoría de los problemas el número de candidatos es demasiado grande o, como en este problema, es infinito. Por tanto, este método es, en el mejor de los casos, difícil de manejar y, en el peor, impráctico.

Regresemos a la interrogante en cuestión. En lugar de preguntar por el valor de la función objetivo P en un punto factible, asignaremos un valor a la función objetivo P y preguntar si hay puntos factibles que corresponderían al valor dado de P. Con este fin, suponga que se le asigna un valor de 6 a P. Entonces la función objetivo P se convierte en $3x + 2y = 6$, una ecuación lineal en x y y, por lo que tiene una gráfica que es una recta L_1 en el plano. En la figura 11 hemos elaborado la gráfica de esta recta, sobrepuesta al conjunto factible S.

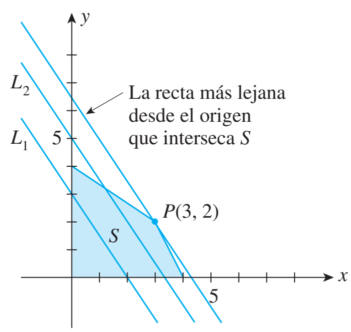


FIGURA 11
Una familia de líneas paralelas que intersecan el conjunto factible S.

Está claro que cada punto del segmento de recta determinado por la intersección de la recta L_1 y el conjunto factible S corresponde al valor dado, 6, de P. Por esta razón, la línea L_1 se llama **línea de isoutilidades**. Repetiremos el proceso, esta vez asignando un valor de 10 a P. Obtenemos la ecuación $3x + 2y = 10$ y la recta L_2 (figura 11), que sugiere que existen puntos factibles que corresponden a un valor mayor de P. Observe que la recta L_2 es paralela a la recta L_1, ya que ambas rectas tienen pendiente igual a $-\frac{3}{2}$ la que se ve fácilmente al escribir las ecuaciones correspondientes en la forma pendiente-ordenada al origen.

En general, mediante la asignación de diferentes valores a la función objetivo, se obtiene una familia de líneas paralelas, cada una con pendiente igual a $-\frac{3}{2}$. Por otra parte, una línea que corresponde a un valor mayor de P se encuentra más lejos del origen que una con un valor menor de P. La implicación es clara. Para obtener la(s) solución(es) óptima(s) del problema en cuestión, se debe encontrar entre esta familia de líneas rectas, la que esté más alejada del origen y que aún intersecte al conjunto factible S. La línea requerida es la que pasa por el punto $P(3, 2)$ (figura 11), por lo que la solución al problema está dada por $x = 3$, $y = 2$, resultando en un valor máximo de $P = 3(3) + 2(2) = 13$.

Que la solución óptima a este problema se encuentre en un vértice del conjunto factible S no es un accidente. De hecho, el resultado es una consecuencia del siguiente teorema básico de programación lineal, que establecemos sin pruebas.

TEOREMA 1
Programación lineal

Si un problema de programación lineal tiene una solución, entonces ésta debe aparecer en un vértice, o esquina, del conjunto factible S asociado con el problema.

Además, si la función objetivo P se optimiza en dos vértices adyacentes de S, entonces se optimiza en todos los puntos del segmento de recta que une estos vértices, en cuyo caso hay un número infinito de soluciones al problema.

El teorema 1 nos dice que nuestra búsqueda de la(s) solución(es) a un problema de programación lineal puede limitarse al examen del conjunto de vértices del conjunto factible S asociado con el problema. Puesto que un conjunto factible S tiene un número finito de vértices, el teorema sugiere que la(s) solución(es) del problema de programación lineal se puede(n) encontrar inspeccionando los valores de la función objetivo P en estos vértices.

Aunque el teorema 1 arroja algo de luz sobre la naturaleza de la solución de un problema de programación lineal, no señala cuando un problema de programación lineal tiene una solución. El teorema siguiente establece algunas condiciones que garantizan que un problema de programación lineal tiene una solución.

TEOREMA 2
Existencia de una solución

Suponga que se nos da un problema de programación lineal con un conjunto factible S y una función objetivo $P = ax + by$.

a. Si S está acotado, entonces P tiene tanto un valor máximo como un valor mínimo en S.

b. Si S es no acotado y tanto a como b son no negativos, entonces P tiene un valor mínimo en S a condición de que las restricciones que definen a S incluyan las desigualdades $x \geq 0$ y $y \geq 0$.

c. Si S es el conjunto vacío, entonces el problema de programación lineal no tiene solución; es decir, P no tiene un valor máximo ni un valor mínimo.

El **método de las esquinas**, un procedimiento sencillo para resolver problemas de programación lineal basado en el teorema 1, es el siguiente.

El método de las esquinas

1. Graficar el conjunto factible.
2. Encontrar las coordenadas de todas las esquinas (vértices) del conjunto factible.
3. Evaluar la función objetivo en cada esquina.
4. Encontrar el vértice que proporcione el máximo (mínimo) de la función objetivo. Si hay sólo un vértice así, entonces éste constituye una solución única al problema. Si la función objetivo se maximiza (minimiza) en dos puntos en esquinas adyacentes de S, hay un número infinito de soluciones óptimas dadas por los puntos del segmento de recta determinado por estos dos vértices.

EJEMPLO DE APLICACIÓN 1 Maximización de utilidades Ahora estamos en condiciones de completar la solución al problema de producción planteado en el ejemplo 1, sección 6.2. Recuerde que la formulación matemática llevó al problema de programación lineal siguiente:

$$\begin{array}{ll} \text{Maximizar} & P = x + 1.2y \\ \text{sujeto a} & 2x + y \leq 180 \\ & x + 3y \leq 300 \\ & x \geq 0,\ y \geq 0 \end{array}$$

Solución El conjunto factible S para el problema se muestra en la figura 12.

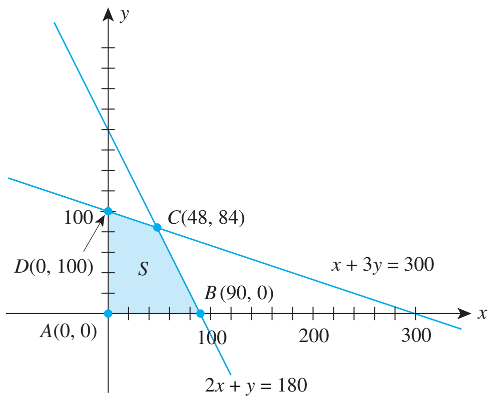


FIGURA **12**
La esquina que produce la máxima utilidad es $C(48, 84)$.

Los vértices del conjunto factible son $A(0, 0)$, $B(90, 0)$, $C(48, 84)$ y $D(0, 100)$. Los valores de P en estos vértices pueden ser tabulados de la siguiente manera:

Vértice	$P = x + 1.2y$
$A(0, 0)$	0
$B(90, 0)$	90
$C(48, 84)$	148.8
$D(0, 100)$	120

De la tabla vemos que el máximo de $P = x + 1.2y$ se produce en el vértice (48, 84) y tiene un valor de 148.8. Recordando lo que representan los símbolos x, y y P, llegamos a la conclusión que Ace Novelty podría maximizar su utilidad (una cifra de \$148.80) mediante la producción de 48 souvenirs tipo A y 84 souvenirs tipo B. ■

Explore y analice

Considere el problema de programación lineal

$$\begin{array}{ll} \text{Maximizar} & P = 4x + 3y \\ \text{sujeto a} & 2x + y \leq 10 \\ & 2x + 3y \leq 18 \\ & x \geq 0,\ y \geq 0 \end{array}$$

1. Dibuje el conjunto factible S para el problema de programación lineal.
2. Dibuje las líneas de isoutilidades sobrepuestas en S correspondientes a $P = 12$, 16, 20 y 24, y demuestre que estas líneas son paralelas entre sí.
3. Demuestre que la solución al problema de programación lineal es $x = 3$ y $y = 4$. ¿Es este resultado el mismo que se encuentra utilizando el método de las esquinas?

VIDEO

EJEMPLO DE APLICACIÓN 2 Un problema de nutrición Complete la solución del problema de nutrición que se plantea en el ejemplo 2, sección 6.2.

Solución Recuerde que la formulación matemática del problema llevó al siguiente problema de programación lineal en dos variables:

$$\begin{aligned} \text{Minimizar} \quad & C = 6x + 8y \\ \text{sujeto a} \quad & 40x + 10y \geq 2400 \\ & 10x + 15y \geq 2100 \\ & 5x + 15y \geq 1500 \\ & x \geq 0,\ y \geq 0 \end{aligned}$$

El conjunto factible S definido por el sistema de restricciones se muestra en la figura 13.

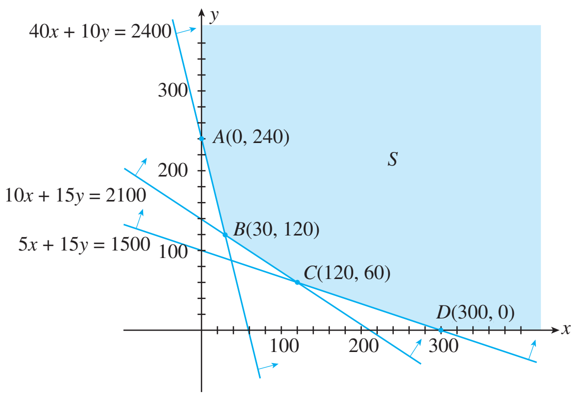


FIGURA 13
La esquina que da el costo mínimo es de $B(30, 120)$.

Los vértices del conjunto factible S son $A(0, 240)$, $B(30, 120)$, $C(120, 60)$ y $D(300, 0)$. Los valores de la función objetivo C en estos vértices se dan en la tabla siguiente:

Vértice	$C = 6x + 8y$
$A(0, 240)$	1920
$B(30, 120)$	1140
$C(120, 60)$	1200
$D(300, 0)$	1800

De la tabla podemos ver que el mínimo para la función objetivo $C = 6x + 8y$ se produce en el vértice $B(30, 120)$ y tiene un valor de 1140. Así, el individuo debe comprar 30 pastillas de la marca A y 120 de la marca B a un costo mínimo de \$11.40. ■

EJEMPLO 3 Un problema de programación lineal con soluciones múltiples Buscar el máximo y el mínimo de $P = 2x + 3y$ sujeto al siguiente sistema de desigualdades lineales:

$$\begin{aligned} 2x + 3y &\leq 30 \\ -x + y &\leq 5 \\ x + y &\geq 5 \\ x &\leq 10 \\ x \geq 0,\ y &\geq 0 \end{aligned}$$

Solución El conjunto factible S se muestra en la figura 14. Los vértices del conjunto factible S son $A(5, 0)$, $B(10, 0)$, $C(10, \frac{10}{3})$, $D(3, 8)$ y $E(0, 5)$. Los valores de la función objetivo P en estos vértices se dan en la tabla siguiente:

Vértice	$P = 2x + 3y$
$A(5, 0)$	10
$B(10, 0)$	20
$C(10, \frac{10}{3})$	30
$D(3, 8)$	30
$E(0, 5)$	15

De la tabla, vemos que el máximo de la función objetivo $P = 2x + 3y$ se produce en los vértices $C(10, \frac{10}{3})$ y $D(3, 8)$. Esto indica que todos los puntos en el segmento de línea que une los puntos $C(10, \frac{10}{3})$ y $D(3, 8)$ maximiza P, dándole un valor de 30 en cada uno de estos puntos. De la tabla, también está claro que P se reduce al mínimo en el punto $(5, 0)$, donde alcanza un valor de 10.

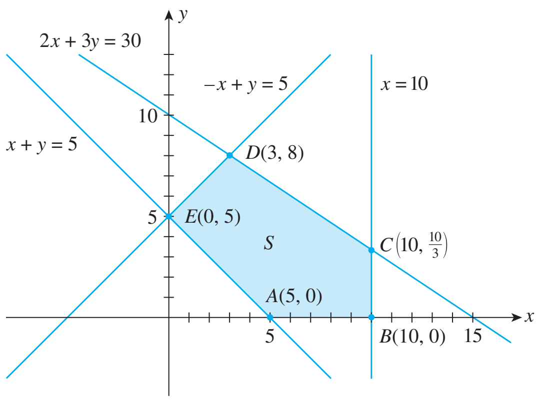


FIGURA 14
Cada punto en el segmento de línea que une C y D maximiza P.

■

Explore y analice

Considere el problema de programación lineal

$$\begin{aligned} \text{Maximizar} \quad & P = 2x + 3y \\ \text{sujeto a} \quad & 2x + y \leq 10 \\ & 2x + 3y \leq 18 \\ & x \geq 0, y \geq 0 \end{aligned}$$

1. Dibuje el conjunto factible S para el problema de programación lineal.
2. Trace las líneas de isoutilidades sobrepuestas en S correspondientes a $P = 6$, 8, 12 y 18, y demuestre que estas líneas son paralelas entre sí.
3. Demuestre que hay un número infinito de soluciones al problema. ¿Es este resultado como se predijo con el método de las esquinas?

Cerramos esta sección examinando dos situaciones en las que un problema de programación lineal puede no tener solución.

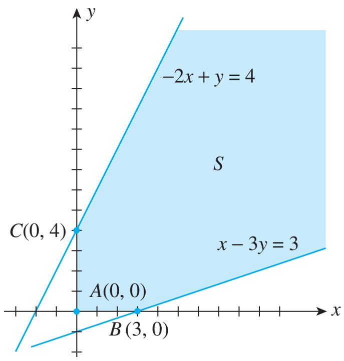


FIGURA **15**
Este problema de maximización no tiene solución porque el conjunto factible no está acotado.

EJEMPLO 4 Un problema de programación lineal no acotado sin solución Resolver el siguiente problema de programación lineal:

$$\begin{aligned}
\text{Maximizar} \quad & P = x + 2y \\
\text{sujeto a} \quad & -2x + y \le 4 \\
& x - 3y \le 3 \\
& x \ge 0,\ y \ge 0
\end{aligned}$$

Solución El conjunto factible S para este problema se muestra en la figura 15. Dado que el conjunto S no está acotado (tanto x como y pueden tomar valores positivos arbitrariamente grandes), vemos que podemos hacer P tan grande como se quiera, haciendo x y y lo suficientemente grandes. Este problema no tiene solución. Se dice que el problema no está acotado. ■

EJEMPLO 5 Un problema de programación lineal no factible Resolver el siguiente problema de programación lineal:

$$\begin{aligned}
\text{Maximizar} \quad & P = x + 2y \\
\text{sujeto a} \quad & x + 2y \le 4 \\
& 2x + 3y \ge 12 \\
& x \ge 0,\ y \ge 0
\end{aligned}$$

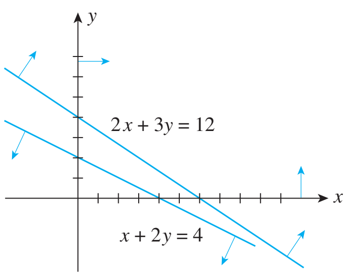


FIGURA **16**
Este problema es inconsistente porque ningún punto satisface todas las desigualdades dadas.

Solución Los semiplanos descritos por las restricciones (desigualdades) no tienen puntos en común (figura 16). Por tanto no hay puntos factibles y el problema no tiene solución. En esta situación, decimos que el problema es **no factible** o que es **inconsistente**. ■

Es poco probable que las situaciones descritas en los ejemplos 5 y 6 se produzcan en problemas bien planteados que surjan de aplicaciones prácticas de programación lineal.

El método de las esquinas es particularmente eficaz en la solución de problemas de programación lineal con dos variables con un número pequeño de restricciones, como lo demuestran ampliamente los ejemplos anteriores. Su eficacia disminuye rápidamente, sin embargo, a medida que el número de variables y/o restricciones aumenta. Por ejemplo, puede demostrarse que un problema de programación lineal con tres variables y cinco restricciones puede tener un máximo de 10 posibles esquinas. La determinación de las esquinas factibles requiere para la solución de 10 sistemas de ecuaciones lineales de 3×3 y su comprobación, por la sustitución de cada una de las soluciones en el sistema de restricciones, para ver si es, de hecho, un punto factible. Cuando el número de variables y restricciones aumenta a cinco y 10, respectivamente (un sistema aún muy pequeño desde la perspectiva de las aplicaciones en economía), el número de vértices a encontrar y analizar en busca de esquinas factibles aumenta drásticamente a 252, y cada uno de estos vértices se encuentra al resolver ¡un sistema lineal de 5×5! Por esta razón, el método de las esquinas rara vez se utiliza para resolver problemas de programación lineal; su valor de redención se encuentra en el hecho de que se logra mucha comprensión en el conocimiento de la naturaleza de las soluciones de los problemas de programación lineal mediante su uso en la solución de problemas de dos variables.

6.3 Ejercicios de autoevaluación

1. Utilice el método de esquinas para resolver el siguiente problema de programación lineal:

$$\begin{aligned}
\text{Maximizar} \quad & P = 4x + 5y \\
\text{sujeto a} \quad & x + 2y \le 10 \\
& 5x + 3y \le 30 \\
& x \ge 0,\ y \ge 0
\end{aligned}$$

2. Utilice el método de esquinas para resolver el siguiente problema de programación lineal:

$$\begin{aligned}
\text{Minimizar} \quad & C = 5x + 3y \\
\text{sujeto a} \quad & 5x + 3y \ge 30 \\
& x - 3y \le 0 \\
& x \ge 2
\end{aligned}$$

3. Gino Balduzzi, propietario de Luigi's Pizza Palace, asigna \$9000 al mes para publicidad en dos periódicos, el *City Tribune* y el *Daily News*. El *City Tribune* cobra \$300 por un anuncio determinado, mientras que el *Daily News* \$100 por el mismo anuncio. Gino ha estipulado que el anuncio debe aparecer en por lo menos 15, pero en no más de 30 ediciones del *Daily News* por mes. El *City Tribune* tiene una circulación diaria de 50,000, y el *Daily News* 20,000. En estas condiciones, determine cuántos anuncios debe colocar Gino en cada diario con el fin de llegar al mayor número de lectores.

Las soluciones de los ejercicios de autoevaluación 6.3 se pueden encontrar en la página 350.

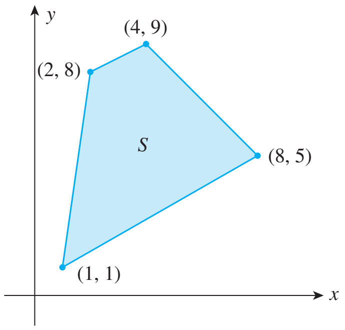
6.3 Preguntas de concepto

1. **a.** ¿Cuál es el conjunto factible asociado a un problema de programación lineal?
   b. ¿Cuál es una solución factible de un problema de programación lineal?
   c. ¿Cuál es la solución óptima de un problema de programación lineal?
2. Describa el método de las esquinas.

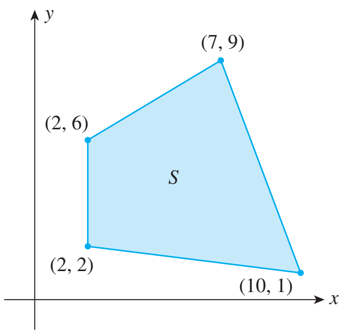
6.3 Ejercicios

En los ejercicios 1 a 6 calcule el (los) valor(es) máximo y/o mínimo de la función objetivo en el conjunto factible *S*.

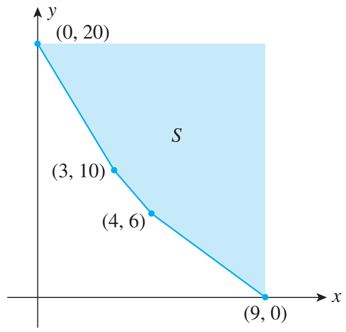
1. $Z = 2x + 3y$



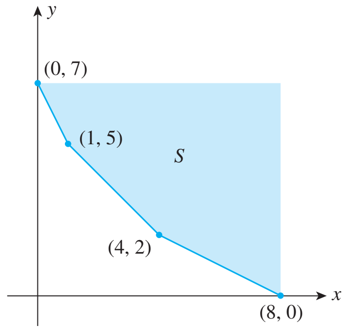
2. $Z = 3x - y$



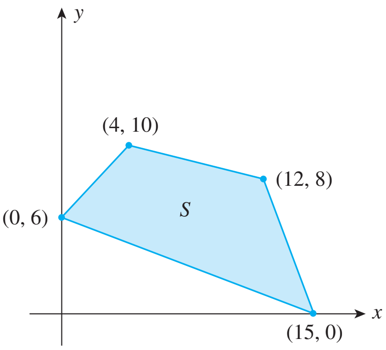
3. $Z = 3x + 4y$



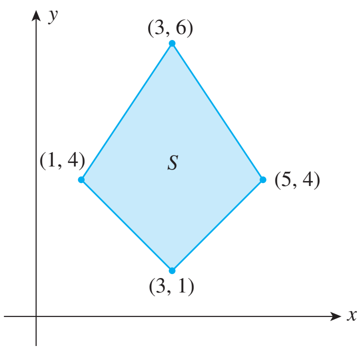
4. $Z = 7x + 9y$



5. $Z = x + 4y$



6. $Z = 3x + 2y$



En los ejercicios 7 a 28 resuelva cada problema de programación lineal por el método de las esquinas.

7. Maximizar $P = 2x + 3y$
sujeto a
$$\begin{aligned} x + y &\le 6 \\ x &\le 3 \\ x \ge 0, y &\ge 0 \end{aligned}$$

8. Maximizar $P = x + 2y$
sujeto a
$$\begin{aligned} x + y &\le 4 \\ 2x + y &\le 5 \\ x \ge 0, y &\ge 0 \end{aligned}$$

9. Maximizar $P = 2x + y$ sujeto a las restricciones del ejercicio 8.

10. Maximizar $P = 4x + 2y$
sujeto a
$$\begin{aligned} x + y &\le 8 \\ 2x + y &\le 10 \\ x \ge 0, y &\ge 0 \end{aligned}$$

11. Maximizar $P = x + 8y$ sujeto a las restricciones del ejercicio 10.

12. Maximizar $P = 3x - 4y$
sujeto a
$$\begin{aligned} x + 3y &\le 15 \\ 4x + y &\le 16 \\ x \ge 0, y &\ge 0 \end{aligned}$$

13. Maximizar $P = x + 3y$
sujeto a
$$\begin{aligned} 2x + y &\le 6 \\ x + y &\le 4 \\ x &\le 1 \\ x \ge 0, y &\ge 0 \end{aligned}$$

14. Maximizar $P = 2x + 5y$
sujeto a
$$\begin{aligned} 2x + y &\le 16 \\ 2x + 3y &\le 24 \\ y &\le 6 \\ x \ge 0, y &\ge 0 \end{aligned}$$

15. Minimizar $C = 3x + 4y$
sujeto a
$$\begin{aligned} x + y &\ge 3 \\ x + 2y &\ge 4 \\ x \ge 0, y &\ge 0 \end{aligned}$$

16. Minimizar $C = 2x + 4y$ sujeto a las restricciones del ejercicio 15.

17. Minimizar $C = 3x + 6y$
sujeto a
$$\begin{aligned} x + 2y &\ge 40 \\ x + y &\ge 30 \\ x \ge 0, y &\ge 0 \end{aligned}$$

18. Minimizar $C = 3x + y$ sujeto a las restricciones del ejercicio 17.

19. Minimizar $C = 2x + 10y$
sujeto a
$$\begin{aligned} 5x + 2y &\ge 40 \\ x + 2y &\ge 20 \\ x \ge 3, y &\ge 0 \end{aligned}$$

20. Minimizar $C = 2x + 5y$
sujeto a
$$\begin{aligned} 4x + y &\ge 40 \\ 2x + y &\ge 30 \\ x + 3y &\ge 30 \\ x \ge 0, y &\ge 0 \end{aligned}$$

21. Minimizar $C = 10x + 15y$
sujeto a
$$\begin{aligned} x + y &\le 10 \\ 3x + y &\ge 12 \\ -2x + 3y &\ge 3 \\ x \ge 0, y &\ge 0 \end{aligned}$$

22. Maximizar $P = 2x + 5y$ sujeto a las restricciones del ejercicio 21.

23. Maximizar $P = 3x + 4y$
sujeto a
$$\begin{aligned} x + 2y &\le 50 \\ 5x + 4y &\le 145 \\ 2x + y &\ge 25 \\ x \ge 5, x &\ge 0 \end{aligned}$$

24. Maximizar $P = 4x - 3y$ sujeto a las restricciones del ejercicio 23.

25. Maximizar $P = 2x + 3y$
sujeto a
$$\begin{aligned} x + y &\le 48 \\ x + 3y &\ge 60 \\ 9x + 5y &\le 320 \\ x \ge 10, y &\ge 0 \end{aligned}$$

26. Minimizar $C = 5x + 3y$ sujeto a las restricciones del ejercicio 25.

27. Calcular el máximo y el mínimo de $P = 10x + 12y$ sujeto a

$$\begin{aligned} 5x + 2y &\geq 63 \\ x + y &\geq 18 \\ 3x + 2y &\leq 51 \\ x \geq 0, y &\geq 0 \end{aligned}$$

28. Calcular el máximo y el mínimo de $P = 4x + 3y$ sujeto a

$$\begin{aligned} 3x + 5y &\geq 20 \\ 3x + y &\geq 16 \\ -2x + y &\leq 1 \\ x \geq 0, y &\geq 0 \end{aligned}$$

Los problemas en los ejercicios 29 a 46 corresponden a los ejercicios 1 a 18 de la sección 6.2. Utilice los resultados de su trabajo anterior para ayudar a resolver estos problemas.

29. **Manufactura. Programación de la producción** Una empresa fabrica dos productos, A y B, en dos máquinas, I y II. Se ha determinado que la empresa obtendrá una utilidad de $3 por cada unidad del producto A y de $4 por cada unidad del producto B. Para fabricar una unidad del producto A se requieren 6 minutos en la máquina I y 5 minutos en la máquina II. Para fabricar una unidad del producto B se requieren 9 minutos en la máquina I y 4 minutos en la máquina II. Se tienen disponibles 5 horas de tiempo en la máquina I y 3 horas en la máquina II en cada turno de trabajo. ¿Cuántas unidades de cada producto se deben fabricar en cada turno para maximizar las utilidades de la empresa? ¿Cuál es la utilidad óptima?

30. **Manufactura. Programación de la producción** National Business Machines fabrica dos modelos de máquinas de fax: A y B. Fabricar cada modelo A cuesta $100 y cada modelo B $150. Las utilidades son de $30 para cada modelo A y $40 por cada modelo B de aparatos de fax. Si la demanda total de aparatos de fax por mes no es superior a 2500 y la empresa ha destinado no más de $600,000 por mes para los costos de fabricación, ¿cuántas unidades de cada modelo debe fabricar National cada mes con el fin de maximizar su utilidad mensual? ¿Cuál es la utilidad óptima?

31. **Manufactura. Programación de la producción** Kane Manufacturing cuenta con una división que produce dos modelos de rejillas para chimenea, modelo A y modelo B. Para producir cada rejilla modelo A requiere 3 libras de hierro fundido y 6 minutos de trabajo. Para producir cada rejilla modelo B requiere 4 libras de hierro fundido y 3 minutos de trabajo. La utilidad por cada rejilla modelo A es de $2.00 y por cada rejilla modelo B es de $1.50. Si hay disponibles 1000 libras de hierro fundido y 20 horas de mano de obra para la producción de rejillas por día, ¿cuántas rejillas por día de cada modelo debe fabricar la división a fin de maximizar las utilidades de Kane? ¿Cuál es la utilidad óptima?

32. **Manufactura. Programación de la producción** Remítase al ejercicio 31. Debido a los pedidos pendientes de rejillas modelo A, el gerente de Kane Manufacturing ha decidido fabricar por lo menos 150 unidades de estos modelos al día. Operando bajo esta limitante adicional, ¿cuántas rejillas de cada modelo debe fabricar Kane para maximizar las utilidades? ¿Cuál es la utilidad óptima?

33. **Manufactura. Programación de la producción** Una división de Winston Furniture Company fabrica mesas y sillas. Cada mesa requiere 40 pies de tablas de madera y 3 horas de mano de obra. Cada silla requiere 16 pies de tablas de madera y 4 horas de mano de obra. La utilidad por cada mesa es de $45, y la utilidad por cada silla es de $20. En una semana determinada, la empresa tiene 3200 pies de tablas de madera disponible, y 520 horas de mano de obra. ¿Cuántas mesas y sillas debe fabricar Winston a fin de maximizar sus utilidades? ¿Cuál es la utilidad máxima?

34. **Manufactura. Programación de la producción** Remítase al ejercicio 33. Si la utilidad por cada mesa es de $50 y la utilidad por cada silla es de $18, ¿cuántas mesas y sillas debe fabricar Winston a fin de maximizar sus utilidades? ¿Cuál es la utilidad máxima?

35. **Finanzas. Asignación de fondos** Madison Finance cuenta con un total de $20 millones destinados a préstamos hipotecarios y automotrices. En promedio, los préstamos hipotecarios tienen una tasa anual de rendimiento de 10% mientras que los préstamos automotrices generan una tasa anual de rendimiento de 12%. La gerencia también ha estipulado que la cantidad total de préstamos hipotecarios debe ser mayor o igual a 4 veces la cantidad total de préstamos automotrices. Determine la cantidad total de préstamos de cada tipo que Madison debe extender a cada categoría a fin de maximizar sus rendimientos. ¿Cuáles son los rendimientos óptimos?

36. **Inversiones. Asignación de activos** Un experto en finanzas planea invertir hasta $500,000 en dos proyectos. Del proyecto A se obtiene un rendimiento de 10% sobre la inversión, mientras que del proyecto B se obtienen un rendimiento de 15% sobre la inversión. Debido a que la inversión en el proyecto B es más riesgosa que la inversión en el proyecto A, el experto en finanzas ha decidido que la inversión en el proyecto B no debe exceder de 40% de la inversión total. ¿Cuánto debe invertir en cada proyecto para maximizar el rendimiento sobre su inversión? ¿Cuál es el máximo rendimiento?

37. **Manufactura. Programación de la producción** Acoustical Company fabrica un gabinete para almacenar discos compactos que se puede comprar totalmente ensamblado o como un kit para armar. Cada gabinete se procesa en el departamento de manufactura y en el departamento de montaje. Si el departamento de manufactura sólo fabrica gabinetes completamente ensamblados, puede producir 200 unidades por día, y si sólo fabrica kits para armar, puede producir 200 unidades por día. Si el departamento de montaje sólo fabrica gabinetes completamente ensamblados, puede producir 100 unidades por día, pero si sólo fabrica kits para armar, puede producir 300 unidades por día. Cada gabinete totalmente ensamblado contribuye con $50 a las utilidades de la empresa, mientras que cada kit aporta $40 a sus utilidades. ¿Cuántas unidades totalmente ensambladas y cuántos kits debe producir la empresa por día a fin de maximizar sus utilidades? ¿Cuál es la utilidad óptima?

38. Agricultura. Planeación de cultivos Un agricultor planea sembrar dos cultivos, A y B. El costo del cultivo A es de \$40 por acre mientras que el cultivo B es de \$60 por acre. El agricultor tiene un máximo de \$7400 disponible para el cultivo de la tierra. Cada acre del cultivo A requiere 20 horas de trabajo o mano de obra y cada acre de cultivo B requiere 25 horas de trabajo. El agricultor tiene un máximo de 3300 horas de trabajo disponibles. Si espera obtener una utilidad de \$150 por acre del cultivo A y \$200 por acre del cultivo B, ¿cuántos acres de cada cultivo debe sembrar a fin de maximizar su utilidad? ¿Cuál es la utilidad óptima?

39. Minería. Producción Perth Mining Company opera dos minas con el fin de extraer oro y plata. Operar la mina Saddle cuesta \$14,000 por día y produce 50 onzas de oro y 3000 onzas de plata cada día. Operar la mina Horseshoe cuesta \$16,000 por día y produce 75 onzas de oro y 1000 onzas de plata cada día. La gerencia de la empresa ha establecido un objetivo de por lo menos 650 onzas de oro y 18,000 onzas de plata. ¿Cuántos días debe operarse cada mina de manera que el objetivo pueda lograrse con el costo mínimo? ¿Cuál es el costo mínimo?

40. Transporte Deluxe River Cruises opera una flota de embarcaciones fluviales. La flota cuenta con dos tipos de buques: un buque tipo A con 60 camarotes de lujo y 160 estándar, además de un buque tipo B con 80 camarotes de lujo y 120 estándar. En virtud de un contrato de arrendamiento con Odyssey Travel Agency, Deluxe River Cruises proporciona a Odyssey un mínimo de 360 camarotes de lujo y 680 estándar para su crucero de 15 días en mayo. Cuesta \$44,000 operar un buque tipo A y \$54,000 uno tipo B por ese periodo. ¿Cuántos buques de cada tipo debe utilizar con el fin de mantener los costos de operación al mínimo? ¿Cuál es el costo mínimo?

41. Suministro de agua El encargado de abastecimiento de agua para una ciudad determinada necesita abastecer a la ciudad con por lo menos 10 millones de galones de agua potable por día. El abastecimiento puede hacerse del embalse local o de la tubería de una ciudad adyacente. El embalse local tiene una producción máxima diaria de 5 millones de galones de agua potable y la tubería tiene un rendimiento máximo diario de 10 millones de galones. Por contrato, la tubería está obligada a suministrar un mínimo de 6 millones de galones por día. Si el costo de 1 millón de galones de agua del embalse es de \$300 y de la tubería de agua es de \$500, ¿qué cantidad de agua debe obtener de cada fuente el administrador para reducir al mínimo los costos diarios de la ciudad? ¿Cuál es el costo mínimo diario?

42. Manufactura. Programación de la producción Ace Novelty fabrica pandas gigantes y perros San Bernardo. Cada panda requiere 1.5 yardas cuadradas de felpa, 30 pies cúbicos de relleno y 5 piezas de adorno; cada perro requiere 2 yardas cuadradas de felpa, 35 pies cúbicos de relleno y 8 piezas de adorno. La utilidad por cada panda es de \$10 y por cada San Bernardo es de \$15. Si tiene a su disposición 3600 yardas cuadradas de felpa, 66,000 pies cúbicos de relleno y 13,600 piezas de adorno, ¿cuántos de cada uno de los animales de felpa deberá fabricar la empresa para maximizar su utilidad? ¿Cuál es la utilidad máxima?

43. Nutrición. Planeación de la dieta Se le ha pedido a una nutrióloga en el Centro Médico que prepare una dieta especial para ciertos pacientes. Ha decidido que las comidas deben contener un mínimo de 400 mg de calcio, 10 mg de hierro y 40 mg de vitamina C. Además ha decidido que las comidas deben ser preparadas a partir de los alimentos A y B. Cada onza de alimento A contiene 30 mg de calcio, 1 mg de hierro, 2 mg de vitamina C y 2 mg de colesterol. Cada onza del alimento B contiene 25 mg de calcio, 0.5 mg de hierro, 5 mg de vitamina C y 5 mg de colesterol. Calcule cuántas onzas de cada tipo de alimento se debe utilizar en una comida de modo que se reduzca al mínimo el contenido de colesterol y se cumplan los requerimientos mínimos de calcio, hierro y vitamina C.

44. Planeación de programas sociales AntiFam, una organización de lucha contra el hambre, ha destinado entre \$2 y \$2.5 millones (incluido) para ayudar a dos países africanos, el A y el B. El país A recibirá entre \$1 y \$1.5 millones (inclusive), y el país B recibirá por lo menos \$0.75 millones. Se ha calculado que cada dólar gastado en el país A producirá un rendimiento efectivo de \$0.60, mientras que \$1 gastado en el país B producirá un rendimiento efectivo de \$0.80. ¿Cómo deben asignarse las ayudas para que el dinero se utilice con mayor eficacia con base en estos criterios?

Sugerencia: Si x y y denotan la cantidad de dinero que debe darse a los países A y B, respectivamente, entonces la función objetivo a maximizar es $P = 0.6x + 0.8y$.

45. Publicidad Everest Deluxe World Travel ha decidido hacer publicidad en las ediciones dominicales de los dos principales periódicos de la ciudad. Estos anuncios se dirigen a tres grupos de clientes potenciales. Cada anuncio en el periódico I es visto por 70,000 clientes del grupo, 40,000 clientes del grupo B y 20,000 clientes del grupo C. Cada anuncio en el periódico II es visto por 10,000 clientes del grupo A, 20,000 de grupo B y 40,000 clientes del grupo C. Cada anuncio en el periódico I cuesta \$1000, y cada anuncio en el periódico II cuesta \$800. Everest quisiera que sus anuncios fueran leídos por lo menos por 2 millones de personas del grupo A, 1.4 millones de personas del grupo B y 1 millón de personas del grupo C. ¿Cuántos anuncios debe colocar Everest en cada diario para lograr sus objetivos de publicidad al costo mínimo? ¿Cuál es el costo mínimo?

Sugerencia: Utilice diferentes escalas para la elaboración del conjunto factible.

46. Manufactura. Costos de envío TMA fabrica televisores LCD de alta definición de 37 pulgadas en dos lugares distintos, la ubicación I y la ubicación II. La producción en la ubicación I es como máximo de 6000 televisores por mes, mientras que la producción en la ubicación II es como máximo de 5000 televisores por mes. TMA es el principal proveedor de televisores de Pulsar Corporation, su empresa filial, que tiene prioridad en tener todas sus necesidades satisfechas. En un mes determinado, Pulsar hizo pedidos por 3000 y 4000 televisores para ser enviados a sus dos fábricas ubicadas en la ciudad A y en la ciudad B, respectivamente. Los costos de envío (en dólares) por televisor de cada una de las dos plantas TMA a las dos fábricas de Pulsar son los siguientes:

	A las fábricas de Pulsar	
Desde TMA	**Ciudad A**	**Ciudad B**
Ubicación I	\$6	\$4
Ubicación II	\$8	\$10

Encuentre un esquema de envíos que cumpla con los requerimientos de ambas empresas, al tiempo que mantenga los costos al mínimo.

47. Complete la solución del ejemplo 3, sección 6.2.

48. **Manufactura. Programación de la producción** Bata Aerobics fabrica dos modelos de escaladoras utilizadas para ejercicios aeróbicos. La fabricación de cada modelo de lujo requiere 10 libras de plástico y 10 minutos de mano de obra. La fabricación de cada modelo estándar requiere 16 libras de plástico y 8 minutos de mano de obra. La utilidad por cada unidad del modelo de lujo es de \$40, y la utilidad por cada unidad del modelo estándar es de \$30. Si hay disponibles por día 6000 libras de plástico y 60 horas de mano de obra para la fabricación de las escaladoras, ¿cuántas escaladoras de cada modelo debe fabricar Bata por día con el fin de maximizar su utilidad? ¿Cuál es la utilidad óptima?

49. **Planeación de inversiones** Patricia tiene hasta \$30,000 para invertir en valores en forma de acciones corporativas. Ha reducido sus opciones a dos grupos de acciones: las acciones de crecimiento que se supone producirán 15% de rendimiento (dividendos y revalorización del capital) dentro de un año y acciones especulativas que se supone producirán 25% de rendimiento (sobre todo en la revalorización del capital) en un año. Determine cuánto debe invertir ella en cada grupo de acciones con el fin de maximizar el rendimiento de sus inversiones en un año si ha decidido invertir por lo menos 3 veces más en acciones de crecimiento que en acciones especulativas.

50. **Ciencias veterinarias** Se le ha pedido a un veterinario que prepare una dieta para un grupo de perros que serán utilizados en un estudio de nutrición de la Facultad de Ciencia Animal. Se ha estipulado que cada porción no debe ser mayor de 8 onzas y debe contener por lo menos 29 unidades del nutriente I y 20 del nutriente II. El veterinario ha decidido que la dieta puede ser preparada a partir de dos marcas de alimento para perro: la marca A y la marca B. Cada onza de la marca A contiene 3 unidades del nutriente I y 4 del nutriente II. Cada onza de la marca B contiene 5 unidades del nutriente I y 2 del nutriente II. La marca A cuesta 3 centavos por onza y la B 4 centavos por onza. Determine cuántas onzas de cada marca de alimento para perro deben utilizarse por porción para cumplir con los requerimientos que se indican a un costo mínimo.

51. **Investigación de mercados** Trendex, una compañía de encuestas telefónicas, ha sido contratada para llevar a cabo una encuesta de preferencias en televisión entre las familias urbanas y suburbanas del área de Los Ángeles. El cliente ha estipulado que se entreviste un máximo de 1500 familias. Deben ser entrevistadas 500 familias urbanas, por lo menos, y al menos la mitad del número total de familias entrevistadas debe ser de la zona suburbana. Para este servicio, Trendex recibirá \$6000 más \$8 por cada entrevista completa. De su experiencia previa, Trendex ha determinado que incurrirá en un gasto de \$4.40 por cada entrevista exitosa con una familia urbana y \$5 por cada entrevista exitosa con una familia suburbana. ¿Cuántas familias urbanas y cuántas suburbanas debe entrevistar Trendex con el fin de maximizar sus utilidades?

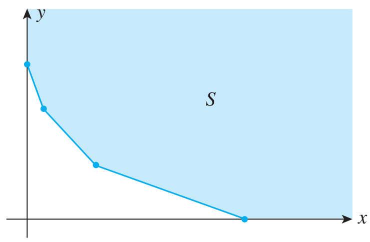
En los ejercicios 52 a 55 determine si la afirmación es verdadera o falsa. Si es verdadera, explique por qué lo es. Si es falsa, dé un ejemplo para demostrar por qué lo es.

52. Una solución óptima de un problema de programación lineal es una solución factible, pero una solución factible de un problema de programación lineal no tiene por qué ser una solución óptima.

53. Una solución óptima de un problema de programación lineal se puede producir en el interior del conjunto factible del problema.

54. Si un problema de maximización no tiene solución, entonces el conjunto factible asociado con el problema de programación lineal debe ser no acotado.

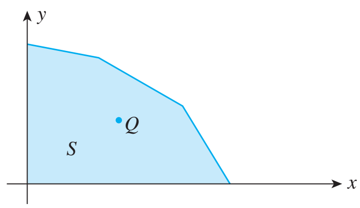
55. Suponga que se le da el siguiente problema de programación lineal: maximizar $P = ax + by$ en el conjunto factible S no acotado que se muestra en la figura adjunta.



a. Si $a > 0$ o $b > 0$, entonces el problema de programación lineal no tiene solución óptima.

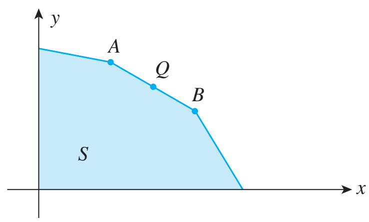
b. Si $a \leq 0$ y $b \leq 0$, entonces el problema de programación lineal tiene al menos una solución óptima.

56. Suponga que se le da el siguiente problema de programación lineal: maximizar $P = ax + by,$ donde $a > 0$ o $b > 0$, en el conjunto factible S que se muestra en la figura adjunta.



Explique, sin necesidad de utilizar el teorema 1, por qué la solución óptima del problema de programación lineal no puede darse en el punto Q.

57. Suponga que se le da el siguiente problema de programación lineal: maximizar $P = ax + by,$ donde $a > 0$ y $b > 0$, en el conjunto factible S que se muestra en la figura adjunta.



Explique, sin necesidad de utilizar el teorema 1, por qué la solución óptima del problema de programación lineal no puede ocurrir en el punto Q a menos que el problema tenga un número infinito de soluciones a lo largo del segmento de línea que une los vértices A y B.

Sugerencia: Sea $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$. Entonces $Q(\bar{x}, \bar{y})$ donde $\bar{x} = x_1 + (x_2 - x_1)t$ y $\bar{y} = y_1 + (y_2 - y_1)t$ con $0 < t < 1$. Estudie el valor de P en y cerca de Q.

58. Considere el problema de programación lineal

$$\begin{aligned} \text{Maximizar} \quad & P = 2x + 7y \\ \text{sujeto a} \quad & 2x + y \geq 8 \\ & x + y \geq 6 \\ & x \geq 0, y \geq 0 \end{aligned}$$

a. Dibuje el conjunto factible S.
b. Encuentre los puntos de S.
c. Calcule los valores de P en las esquinas de S que se encuentran en el inciso (b).
d. Demuestre que el problema de programación lineal no tiene solución (óptima). ¿Esto contradice al teorema 1?

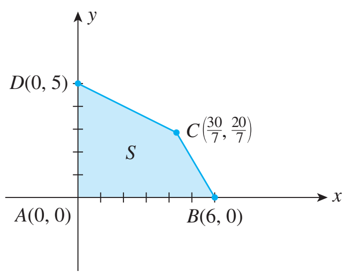
59. Considere el problema de programación lineal

$$\begin{aligned} \text{Minimizar} \quad & C = -2x + 5y \\ \text{sujeto a} \quad & x + y \leq 3 \\ & 2x + y \leq 4 \\ & 5x + 8y \geq 40 \\ & x \geq 0, y \geq 0 \end{aligned}$$

a. Dibuje el conjunto factible.
b. Encuentre la(s) solución(es) del problema de programación lineal, si existe.

6.3 Soluciones de los ejercicios de autoevaluación

1. El conjunto factible S para el problema que se graficó en la solución del ejercicio 1, de los ejercicios de autoevaluación 6.1, se reproduce en la siguiente figura.

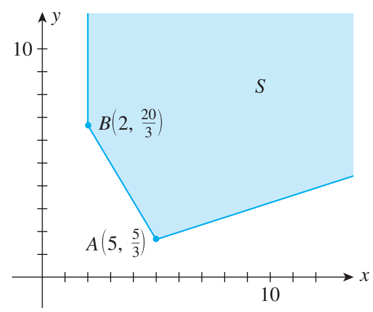


Los valores de la función objetivo P en los vértices de S se resumen en la tabla siguiente.

Vértice	$P = 4x + 5y$
$A(0, 0)$	0
$B(6, 0)$	24
$B\left(\frac{30}{7}, \frac{20}{7}\right)$	$\frac{220}{7} = 31\frac{3}{7}$
$D(0, 5)$	25

De la tabla, vemos que el máximo de la función objetivo P se alcanza en el vértice $C\left(\frac{30}{7}, \frac{20}{7}\right)$. Por tanto, la solución del problema es $x = \frac{30}{7}$, $y = \frac{20}{7}$ y $P = 31\frac{3}{7}$.

2. El conjunto factible S para el problema que se graficó en la solución del ejercicio 2, de los ejercicios de autoevaluación 6.1, se reproduce en la siguiente figura.



Evaluando la función objetivo $C = 5x + 3y$ en cada punto de la esquina, se obtiene la tabla

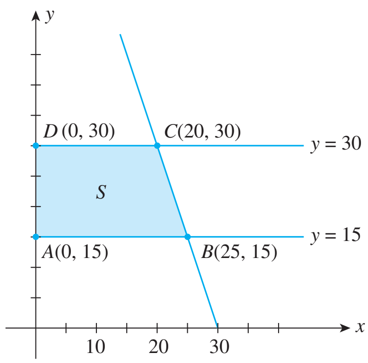
Vértice	$C = 5x + 3y$
$A\left(5, \frac{5}{3}\right)$	30
$B\left(2, \frac{20}{3}\right)$	30

Llegamos a la conclusión de que (i) la función objetivo se reduce al mínimo en cada punto en el segmento de línea que une los puntos $\left(5, \frac{5}{3}\right)$ y $\left(2, \frac{20}{3}\right)$ y (ii) el valor mínimo de C es 30.

3. Consulte el ejercicio de autoevaluación 6.2. El problema es maximizar $P = 50{,}000x + 20{,}000y$ sujeto a

$$\begin{aligned} 300x + 100y &\leq 9000 \\ y &\geq 15 \\ y &\leq 30 \\ x \geq 0, y &\geq 0 \end{aligned}$$

El conjunto factible S para el problema se muestra en la siguiente figura.



Evaluando la función objetivo $P = 50{,}000x + 20{,}000y$ en cada vértice de S, obtenemos

Vértice	$P = 50{,}000x + 20{,}000y$
$A(0, 15)$	300,000
$B(25, 15)$	1,550,000
$C(20, 30)$	1,600,000
$D(0, 30)$	600,000

De la tabla, vemos que P se maximiza cuando $x = 20$ e $y = 30$. Por tanto, Gino debe colocar 20 anuncios en el El *City Tribune* y 30 en el *Daily News*.

6.4 Método simplex: problemas de maximización estándar

El método simplex

Como se mencionó antes, el método de las esquinas no es adecuado para la solución de problemas de programación lineal cuando el número de variables o restricciones es grande. Su principal deficiencia es que se requiere el conocimiento de todas las esquinas del conjunto factible S asociadas con el problema. Lo que necesitamos es un método de solución basado en una selección juiciosa de las esquinas del conjunto factible S, reduciendo así el número de puntos a inspeccionar. Una de estas técnicas, llamado *método simplex,* fue desarrollada en la década de 1940 por George Dantzig y se basa en el método de eliminación de Gauss-Jordan. El método simplex es fácilmente adaptable a la computadora, esto lo hace ideal para la solución de problemas de programación lineal con un gran número de variables y restricciones.

Básicamente, el método simplex es un procedimiento iterativo; es decir, se repite una y otra vez. Empezando en alguna solución factible inicial (una esquina del conjunto factible S, por lo general el origen) cada iteración nos lleva a otra esquina de S, por lo general con un valor mejorado (pero con certeza nunca peor) de la función objetivo. La iteración termina cuando se alcanza la solución óptima (si existe).

En esta sección se describe el método simplex para resolver una gran clase de problemas conocidos como problemas de maximización estándar.

Antes de establecer un procedimiento formal para la solución de problemas de programación lineal estándar basado en el método simplex, considere el siguiente análisis de un problema de dos variables. El subsecuente estudio aclarará el procedimiento general y al mismo tiempo mejorará nuestra comprensión del método simplex al examinar la motivación que conduce a los pasos del procedimiento.

Un problema de programación lineal estándar

Un **problema de maximización estándar** es aquel en el que

1. La función objetivo debe ser maximizada.
2. Todas las variables involucradas en el problema son no negativas.
3. Todas las otras restricciones lineales se pueden escribir de modo que la expresión con las variables es menor o igual a una constante no negativa.

PORTAFOLIO Morgan Wilson

PUESTO Planeación del uso del suelo
INSTITUCIÓN Ciudad de Burien

Como encargado de planeación del uso del suelo en la ciudad de Burien, Washington, ayudo a los propietarios todos los días en el desarrollo de su tierra. Por definición, los encargados de la planeación del uso del suelo desarrollan planes y recomiendan políticas para la administración del uso del suelo. Para hacerlo, debo tener en cuenta muchos factores potenciales y reales, como transporte público, leyes de zonificación y municipales. Mediante el uso de las ideas básicas de la programación lineal, trabajo con los propietarios para entender los requerimientos máximo y mínimo de uso para cada situación particular. Entonces, estoy en capacidad de revisar y evaluar las propuestas de planes de uso del suelo y elaborar recomendaciones. Todo esto es necesario para procesar una solicitud de desarrollo del suelo.

Así es como funciona. Un propietario que quiere iniciar un negocio en un predio desocupado de la propiedad en una zona comercial, viene conmigo. Tenemos un debate para saber en qué tipo de zona comercial se ubica la propiedad y si se permite el uso o se requiere una revisión adicional del uso del suelo. Si el uso está permitido y no se requiere una revisión más del uso del suelo, hago que el solicitante conozca los criterios que deben cumplirse y que figuran en los planos del edificio. En este punto, el solicitante comienza a trabajar con su contratista, arquitecto o ingeniero y arquitecto de paisaje para cumplir los criterios del código de zonificación. Una vez que el solicitante ha trabajado con uno o más de estos profesionales, puede presentar sus planos de construcción para revisión. Los planos son dirigidos a varios departamentos (construcción, ingeniería, obras públicas y bomberos). Un juego de los planos llega a mi escritorio para su revisión, ya que yo soy el encargado de planeación de uso del suelo para el proyecto.

Durante esta revisión, puedo determinar si se han cumplido o no los requerimientos de zonificación con el fin de hacer un dictamen definitivo de la solicitud. Estos requerimientos de zonificación son evaluados pidiendo al solicitante que nos dé un plano del sitio que muestre las medidas de la superficie del lote, la construcción y los cálculos de cobertura de la superficie impermeable y los retranqueos de construcción, por nombrar sólo algunos. Además, tengo que determinar los requerimientos de estacionamiento. ¿Cuántos lugares se requieren? ¿Cuáles son las dimensiones por isla? ¿Hay suficiente espacio para maniobrar? Luego, veo los requerimientos de jardinería. Los planos deben ser elaborados por un arquitecto del paisaje y registrar las características sobre ubicación, tamaño y tipo de plantas que se utilizarán.

Al ponderar todos estos factores y medidas, puedo determinar la viabilidad de un proyecto de desarrollo del suelo. Las ideas básicas de la programación lineal están fundamentalmente en el centro de esta determinación y son básicas para las decisiones que debo tomar cada día en mi profesión.

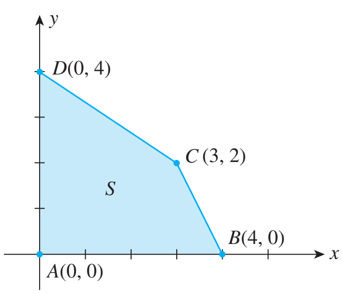


FIGURA 17
La solución óptima se produce en $C(3, 2)$.

Considere el problema de programación lineal presentado al principio de la sección 6.3:

$$\begin{aligned} \text{Maximizar} \quad & P = 3x + 2y && \textbf{(8)} \\ \text{sujeto a} \quad & 2x + 3y \le 12 && \\ & 2x + y \le 8 && \textbf{(9)} \\ & x \ge 0, y \ge 0 && \end{aligned}$$

Puede verificar con facilidad que éste es un problema de maximización estándar. El conjunto factible S asociado a este problema se reproduce en la figura 17, donde se han marcado los cuatro puntos esquina factibles $A(0, 0)$, $B(4, 0)$, $C(3, 2)$ y $D(0, 4)$. Recuerde que la solución óptima del problema se produce en la esquina $C(3, 2)$.

Para resolver este problema utilizando el método simplex, en primer lugar sustituimos el sistema de restricciones de desigualdad (9) con un sistema de restricciones de igualdad. Esto se puede lograr mediante el uso de variables no negativas llamadas **variables de holgura**. Empecemos por considerar la desigualdad

$$2x + 3y \le 12$$

Observe que el lado izquierdo de esta ecuación es siempre menor o igual al lado derecho. Por tanto, mediante la adición de una variable u no negativa al lado izquierdo para compensar esta diferencia, se obtiene la igualdad

$$2x + 3y + u = 12$$

Por ejemplo, si $x = 1$ y $y = 1$ [puede ver remitiéndose a la figura 17 que el punto (1, 1) es un punto factible de S], entonces $u = 7$, porque

$$2(1) + 3(1) + 7 = 12$$

Si $x = 2$ y $y = 1$ [el punto (2, 1) es también un punto factible de S], entonces $u = 5$, porque

$$2(2) + 3(1) + 5 = 12$$

La variable u es una variable de holgura.

Del mismo modo, la desigualdad $2x + y \leq 8$ se convierte en la ecuación $2x + y + v = 8$ a través de la introducción de la variable de holgura v. El sistema (9) de desigualdades lineales ahora se puede ver como el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{aligned} 2x + 3y + u &= 12 \\ 2x + y + v &= 8 \end{aligned}$$

donde x, y, u y v son todos no negativos.

Por último, al reescribir la función objetivo (8) en forma $-3x - 2y + P = 0$, donde el coeficiente de P es $+1$, nos lleva al siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{aligned} 2x + 3y + u &= 12 \\ 2x + y + v &= 8 \\ -3x - 2y + P &= 0 \end{aligned} \tag{10}$$

Puesto que el sistema (10) consta de tres ecuaciones lineales con cinco variables x, y, u, v y P, podemos resolver para tres de las variables en términos de las otras dos. Por tanto, hay un número infinito de soluciones a este sistema expresable en términos de dos parámetros. Nuestro problema de programación lineal se ve ahora como equivalente a lo siguiente: de entre todas las soluciones del sistema (10) para los que x, y, u y v son no negativos (tales soluciones se denominan **soluciones factibles**), determinar la(s) solución(es) que maximiza(n) P.

La matriz aumentada asociada con el sistema (10) es

Variables no básicas — Variables básicas — Columna de constantes

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc|c} x & y & u & v & P & \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccc|c} 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 12 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 8 \\ -3 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \end{array} \tag{11}$$

Observe que cada una de las columnas u, v y P de la matriz ampliada (11) es una columna unitaria (vea la página 254). Las variables asociadas con columnas unitarias se llaman **variables básicas**; todas las demás variables se denominan **variables no básicas**.

Ahora, la configuración de la matriz aumentada (11) sugiere que resolvamos para las variables básicas u, v y P en términos de las variables no básicas x y y, obteniendo

$$\begin{aligned} u &= 12 - 2x - 3y \\ v &= 8 - 2x - y \\ P &= \phantom{12 - {}} 3x + 2y \end{aligned} \tag{12}$$

Del número infinito de soluciones factibles posibles de obtener mediante la asignación arbitraria de los valores no negativos para los parámetros x y y, una solución particular se obtiene dejando $x = 0$ y $y = 0$. De hecho, esta solución está dada por

$$x = 0 \qquad y = 0 \qquad u = 12 \qquad v = 8 \qquad P = 0$$

Esta solución, obtenida mediante el ajuste de las variables no básicas iguales a cero, se denomina **solución básica** del sistema. Esta solución particular corresponde a la esquina $A(0, 0)$ del conjunto factible asociado con el problema de programación lineal (figura 17). Observe que $P = 0$ en este punto.

Ahora bien, si el valor de P no puede ser mayor, hemos encontrado la solución óptima para el problema en cuestión. Para determinar si el valor de P puede en realidad ser mejor, centraremos nuestra atención en la función objetivo en (8). Dado que los coeficientes de x y y son positivos, el valor de P puede ser mejorado mediante el aumento de x y/o y; esto es, alejándose del origen. Tenga en cuenta que llegamos a la misma conclusión al observar que la última fila de la matriz aumentada (11) contiene entradas que son *negativas*. (Compare la función objetivo original, $P = 3x + 2y$, con la función objetivo reescrita, $-3x - 2y + P = 0$.)

Continuando con la búsqueda de una solución óptima, nuestra siguiente tarea es determinar si es más rentable aumentar el valor de x o el de y (aumentar x y y al mismo tiempo es más difícil). Dado que el coeficiente de x es mayor que el de y, un incremento unitario en la dirección x se traducirá en un mayor incremento en el valor de la función objetivo P de una unidad de incremento en la dirección y. Por tanto, debemos aumentar el valor de x manteniendo y constante. ¿Cuánto puede aumentar x mientras se mantiene $y = 0$? Al establecer $y = 0$ en las dos primeras ecuaciones del sistema (12), vemos que

$$\begin{aligned} u &= 12 - 2x \\ v &= 8 - 2x \end{aligned} \tag{13}$$

Puesto que u debe ser no negativo, la primera ecuación del sistema (13) implica que x no puede ser superior a $\frac{12}{2}$, o 6. La segunda ecuación del sistema (13) y la no negatividad de v implica que x no puede exceder de $\frac{8}{2}$, o 4. Por tanto, concluimos que x se puede aumentar en un máximo de 4.

Ahora, si designamos $y = 0$ y $x = 4$ en el sistema (12), se obtiene la solución

$$x = 4 \qquad y = 0 \qquad u = 4 \qquad v = 0 \qquad P = 12$$

que es una solución básica del sistema (10), esta vez con y y v como variables no básicas. (Recuerde que las variables no básicas son precisamente las variables que son igual a cero.)

Veamos cómo se puede encontrar esta solución básica al trabajar con la matriz aumentada del sistema. Puesto que x sustituirá a v como una variable básica, nuestro objetivo es encontrar una matriz aumentada que sea equivalente a la matriz (11) y tiene una configuración donde la columna de x está en forma unitaria

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

remplazando lo que es actualmente la forma de la columna de v en la matriz aumentada (11). Ahora bien, esto se puede lograr al pivotear sobre el número 2 en círculo.

$$\begin{array}{cccccc} x & y & u & v & P & \text{Const.} \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{cccccc} x & y & u & v & P & \text{Const.} \end{array}$$
$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 12 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 8 \\ -3 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{\frac{1}{2}R_2} \left[\begin{array}{ccccc|c} 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 12 \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 4 \\ -3 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \tag{14}$$

$$\xrightarrow[R_3 + 3R_2]{R_1 - 2R_2} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} x & y & u & v & P & \text{Const.} \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccc|c} 0 & 2 & 1 & -1 & 0 & 4 \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 4 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{2} & 1 & 12 \end{array}\right] \end{array} \qquad \textbf{(15)}$$

Utilizando el sistema (15), resolvemos ahora las variables básicas x, u y P en términos de las variables no básicas y y v, obteniendo

$$\begin{aligned} x &= 4 - \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}v \\ u &= 4 - 2y + v \\ P &= 12 + \frac{1}{2}y - \frac{3}{2}v \end{aligned}$$

Al ajustar las variables no básicas y y v iguales a cero da

$$x = 4 \qquad y = 0 \qquad u = 4 \qquad v = 0 \qquad P = 12$$

como antes.

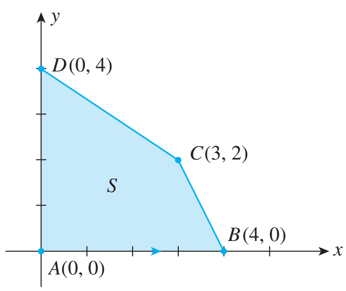


FIGURA 18
Una iteración nos ha llevado de $A(0, 0)$, donde $P = 0$, a $B(4, 0)$, donde $P = 12$.

Ahora hemos completado una iteración del procedimiento simplex, y nuestra búsqueda nos ha conducido de la esquina factible $A(0, 0)$, donde $P = 0$, a la esquina factible $B(4, 0)$, donde P alcanzó un valor de 12, ¡que sin duda es una mejora! (figura 18).

Antes de continuar, presentaremos la siguiente terminología. El elemento 2 en círculo en la primera matriz aumentada (14), que se convertiría en un 1, se llama *elemento pivote*. La columna que contiene el elemento pivote se llama la *columna pivote*. La columna pivote está asociada a una variable no básica que se convierte en una variable básica. Tenga en cuenta que *la última entrada en la columna pivote es el número negativo con el mayor valor absoluto a la izquierda de la línea vertical en el último renglón*, precisamente el criterio para la elección de la dirección del incremento máximo en P.

El renglón que contiene el elemento pivote se llama *renglón pivote*. El renglón pivote también puede encontrarse al dividir cada número positivo en la columna pivote en el número correspondiente en la última columna (la columna de constantes). *El renglón pivote es el que tiene la menor proporción.* En la matriz aumentada (14), el renglón pivote es el segundo, ya que la relación $\frac{8}{2}$, o 4, es menor que la proporción de $\frac{12}{2}$, o 6. (Compare esto con el análisis anterior relativo a la determinación del mayor incremento permitido en el valor de x).

El siguiente es un resumen del procedimiento para la selección del elemento pivote.

Selección del elemento pivote

1. *Seleccione la columna pivote:* Busque la entrada más negativa a la izquierda de la línea vertical en el último renglón. La columna que contiene esta entrada es la **columna pivote**. (Si hay más de una columna así, elija cualquiera.)
2. *Seleccione el renglón pivote:* divida cada entrada positiva de la columna pivote en su entrada correspondiente en la columna de constantes. El **renglón pivote** es el renglón correspondiente a la menor relación obtenida. (Si hay más de una entrada así, elija cualquiera.)
3. El **elemento pivote** es el elemento común tanto a la columna pivote como al renglón pivote.

Continuando con la solución a nuestro problema, observamos que el último renglón de la matriz aumentada (15) contiene un número negativo, es decir, $-\frac{1}{2}$. Esto indica que

P no se maximiza en la esquina factible $B(4, 0)$, así que se requiere otra iteración. Sin entrar en un análisis detallado una vez más, se procederá de inmediato a la selección de un elemento pivote. De conformidad con las reglas, realizamos las operaciones por renglón necesarias de la siguiente manera:

$$\begin{array}{r} \\ \text{Renglón pivote} \rightarrow \\ \\ \\ \\ \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x & y & u & v & P \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccc|c} 0 & 2 & 1 & -1 & 0 & 4 \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 4 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{2} & 1 & 12 \end{array}\right] \\ \begin{array}{c} \uparrow \\ \text{Columna pivote} \end{array} \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{Razón} \\ \frac{4}{2} = 2 \\ \frac{4}{1/2} = 8 \end{array}$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{2}R_1} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x & y & u & v & P \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccc|c} 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 2 \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 4 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{2} & 1 & 12 \end{array}\right] \end{array}$$

$$\xrightarrow[R_3 + \frac{1}{2}R_1]{R_2 - \frac{1}{2}R_1} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x & y & u & v & P \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccc|c} 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 & 3 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{5}{4} & 1 & 13 \end{array}\right] \end{array}$$

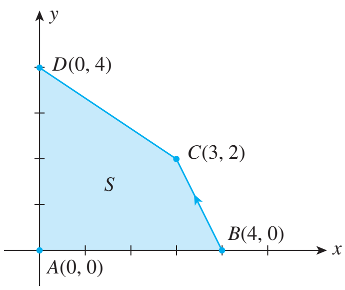


FIGURA 19
La siguiente iteración nos ha llevado de $B(4, 0)$, donde $P = 12$, hasta $C(3, 2)$, donde $P = 13$.

Al interpretar la última matriz aumentada de la manera habitual, encontramos la solución básica $x = 3$, $y = 2$ y $P = 13$. Dado que no existen valores negativos en el último renglón, la solución es óptima y P no se puede aumentar más. La solución óptima es la esquina factible $C(3, 2)$ (figura 19). Observe que esto concuerda con la solución que se encontró utilizando el método de las esquinas en la sección 6.3.

Después de haber visto cómo funciona el método simplex, enumeramos los pasos involucrados en el procedimiento. El primero es la creación de la **tabla simplex** inicial.

Creación de la tabla simplex inicial

1. Transforme el sistema de desigualdades lineales en un sistema de ecuaciones lineales, mediante la introducción de variables de holgura.
2. Vuelva a escribir la función objetivo
$$P = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$
en la forma
$$-c_1x_1 - c_2x_2 - \cdots - c_nx_n + P = 0$$
donde todas las variables están a la izquierda y el coeficiente de P es $+1$. Escriba esta ecuación por debajo de las ecuaciones del paso 1.
3. Escribir la matriz aumentada asociada a este sistema de ecuaciones lineales.

EJEMPLO 1 Configurar la tabla simplex inicial para el problema de programación lineal que se plantea en el ejemplo 1, sección 6.2.

Solución El problema en cuestión es maximizar

$$P = x + 1.2y$$

o, en forma equivalente,

$$P = x + \frac{6}{5}y$$

sujetos a

$$\begin{aligned} 2x + y &\leq 180 \\ x + 3y &\leq 300 \\ x \geq 0, y &\geq 0 \end{aligned} \tag{16}$$

Se trata de un problema de maximización estándar y puede ser resuelto por el método simplex. Puesto que el sistema (16) tiene dos desigualdades lineales (que no sean $x \geq 0$, $y \geq 0$), introducimos las dos variables de holgura u y v para convertirlo en un sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{aligned} 2x + y + u \phantom{{}+v} &= 180 \\ x + 3y \phantom{{}+u} + v &= 300 \end{aligned}$$

Luego, al volver a escribir la función objetivo en la forma

$$-x - \frac{6}{5}y + P = 0$$

donde el coeficiente de P es $+1$ y, al colocarlo debajo del sistema de ecuaciones, se obtiene el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{aligned} 2x + y + u \phantom{{}+v+P} &= 180 \\ x + 3y \phantom{{}+u} + v \phantom{{}+P} &= 300 \\ -x - \frac{6}{5}y \phantom{{}+u+v} + P &= 0 \end{aligned}$$

La tabla simplex inicial asociada con este sistema es

x	y	u	v	P	Constante
2	1	1	0	0	180
1	3	0	1	0	300
-1	$-\frac{6}{5}$	0	0	1	0

Antes de completar la solución al problema planteado en el ejemplo 1, resumiremos los principales pasos del **método simplex**.

El método simplex

1. *Elabore la tabla simplex inicial.*
2. *Determine si se ha alcanzado la solución óptima examinando todas las entradas en el último renglón a la izquierda de la línea vertical.*
   a. Si todas las entradas son no negativas, la solución óptima se ha alcanzado. Continúe con el paso 4.
   b. Si hay uno o más valores negativos, la solución óptima no se ha alcanzado. Continúe con el paso 3.
3. *Realice la operación de pivote.* Localice el elemento pivote y conviértalo en un 1 dividiendo todos los elementos del renglón pivote entre el elemento pivote. Utilizando las operaciones con renglón, convierta la columna pivote en una columna unitaria sumando múltiplos adecuados del renglón pivote a cada uno de los otros renglones como sea necesario. Vuelva al paso 2.
4. *Determine la(s) solución(es) óptima(s).* El valor de la variable inicial de cada columna unitaria está dada por la entrada situada en la columna de las constantes en el renglón que contiene el 1. A las variables iniciales de las columnas que no tienen forma unitaria se les asigna el valor cero.

EJEMPLO 2 Completar la solución para el problema descrito en el ejemplo 1.

Solución El primer paso en nuestro procedimiento, la creación de la tabla simplex inicial, se completó en el ejemplo 1. Seguimos con el paso 2.

Paso 2 *Determine si se ha alcanzado la solución óptima.* En primer lugar, refiérase a la tabla simplex inicial:

$$\begin{array}{rrrrr|c} x & y & u & v & P & \text{Constante} \\ \hline 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 180 \\ 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 300 \\ \hline -1 & -\frac{6}{5} & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \tag{17}$$

Puesto que hay valores negativos en el último renglón de la tabla simplex inicial, la solución inicial no es óptima. Se procede al paso 3.

Paso 3 *Realice las siguientes iteraciones.* Primero, busque el elemento pivote:

a. Dado que la entrada $-\frac{6}{5}$ la más negativa a la izquierda de la línea vertical en el último renglón de la tabla simplex inicial, la segunda columna de la tabla es la columna pivote.

b. Divida cada número positivo de la columna pivote entre la entrada correspondiente en la columna de constantes y compare las razones obtenidas. Vemos que la relación $\frac{300}{3}$ es menor que la proporción de $\frac{180}{1}$, por lo que el renglón 2 en la tabla es el renglón pivote.

c. La entrada 3 situada en la columna pivote y en el renglón pivote es el elemento pivote.

A continuación, convierta este elemento pivote en 1 multiplicando todas las entradas en el renglón pivote por $\frac{1}{3}$. Luego, usando operaciones con renglones elementales, complete la conversión de la columna pivote en una columna unitaria. Los detalles de la iteración se registran de la siguiente manera:

$$\begin{array}{r|rrrrr|c|c} & x & y & u & v & P & \text{Constante} & \text{Razón} \\ \hline & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 180 & \frac{180}{1} = 180 \\ \text{Renglón pivote} \rightarrow & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 300 & \frac{300}{3} = 100 \\ \hline & -1 & -\frac{6}{5} & 0 & 0 & 1 & 0 & \\ & & \uparrow & & & & & \\ & & \text{Columna pivote} & & & & & \end{array}$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{3}R_2} \begin{array}{rrrrr|c} x & y & u & v & P & \text{Constante} \\ \hline 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 180 \\ \frac{1}{3} & 1 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 100 \\ \hline -1 & -\frac{6}{5} & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

$$\xrightarrow[R_3 + \frac{6}{5}R_2]{R_1 - R_2} \begin{array}{rrrrr|c} x & y & u & v & P & \text{Constante} \\ \hline \frac{5}{3} & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & 0 & 80 \\ \frac{1}{3} & 1 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 100 \\ \hline -\frac{3}{5} & 0 & 0 & \frac{2}{5} & 1 & 120 \end{array} \tag{18}$$

Esto completa una iteración. El último renglón de la tabla simplex contiene un número negativo, por lo que una solución óptima no se ha alcanzado. Por tanto, repetimos el paso iterativo una vez más, de la siguiente manera:

$$
\begin{array}{r}
\\
\text{Renglón pivote} \rightarrow \\
\\
\\
\end{array}
\begin{array}{ccccc|c}
x & y & u & v & P & \text{Constante} \\
\hline
\frac{5}{3} & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & 0 & 80 \\
\frac{1}{3} & 1 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 100 \\
\hline
-\frac{3}{5} & 0 & 0 & \frac{2}{5} & 1 & 120 \\
\uparrow & & & & & \\
\text{Columna pivote} & & & & &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c}
\text{Razón} \\
\frac{80}{5/3} = 48 \\
\frac{100}{1/3} = 300
\end{array}
$$

$$
\xrightarrow{\frac{3}{5}R_1}
\begin{array}{ccccc|c}
x & y & u & v & P & \text{Constante} \\
\hline
1 & 0 & \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} & 0 & 48 \\
\frac{1}{3} & 1 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 100 \\
\hline
-\frac{3}{5} & 0 & 0 & \frac{2}{5} & 1 & 120
\end{array}
$$

$$
\xrightarrow[R_3 + \frac{3}{5}R_1]{R_2 - \frac{1}{3}R_1}
\begin{array}{ccccc|c}
x & y & u & v & P & \text{Constante} \\
\hline
1 & 0 & \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} & 0 & 48 \\
0 & 1 & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & 0 & 84 \\
\hline
0 & 0 & \frac{9}{25} & \frac{7}{25} & 1 & 148\frac{4}{5}
\end{array}
\qquad \textbf{(19)}
$$

El último renglón de la tabla simplex (19) no contiene números negativos y, por tanto, concluimos que la solución óptima se ha alcanzado.

Paso 4 *Determine la solución óptima.* Localice las variables básicas en la tabla final. En este caso las variables básicas (las columnas unitarias iniciales) son x, y y P. El valor asignado a la variable básica x es el número 48, que es la entrada situada en la columna de constantes y en el renglón 1 (el renglón que contiene el 1).

$$
\begin{array}{ccccc|c}
x & y & u & v & P & \text{Constante} \\
\hline
1 & 0 & \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} & 0 & 48 \leftarrow \\
0 & 1 & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & 0 & 84 \leftarrow \\
\hline
0 & 0 & \frac{9}{25} & \frac{7}{25} & 1 & 148\frac{4}{5} \leftarrow
\end{array}
$$

Del mismo modo, llegamos a la conclusión de que $y = 84$ y $P = 148.8$. A continuación tomamos nota de que u y v son variables no básicas y, en consecuencia, le asignamos los valores $u = 0$ y $v = 0$. Estos resultados concuerdan con los obtenidos en el ejemplo 1 de la sección 6.3. ■

EJEMPLO 3

$$
\begin{array}{ll}
\text{Maximizar} & P = 2x + 2y + z \\
\text{sujeto a} & 2x + y + 2z \leq 14 \\
& 2x + 4y + z \leq 26 \\
& x + 2y + 3z \leq 28 \\
& x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0
\end{array}
$$

Solución Introducir las variables de holgura u, v y w, y volver a escribir la función objetivo en la forma estándar proporciona el sistema de ecuaciones lineales

$$
\begin{aligned}
2x + y + 2z + u \qquad\qquad &= 14 \\
2x + 4y + z \qquad + v \qquad &= 26 \\
x + 2y + 3z \qquad\qquad + w \quad &= 28 \\
-2x - 2y - z \qquad\qquad\qquad + P &= 0
\end{aligned}
$$

La tabla simplex inicial está dada por

x	y	z	u	v	w	P	Constante
2	1	2	1	0	0	0	14
2	4	1	0	1	0	0	26
1	2	3	0	0	1	0	28
−2	−2	−1	0	0	0	1	0

Dado que la entrada más negativa en el último renglón (−2) aparece dos veces, podemos elegir entre la columna x o la y como columna pivote. Al elegir la columna x como la columna pivote y proceder con la primera iteración, obtenemos la siguiente secuencia de tablas:

	x	y	z	u	v	w	P	Constante	Razón
Renglón pivote →	2	1	2	1	0	0	0	14	$\frac{14}{2} = 7$
	2	4	1	0	1	0	0	26	$\frac{26}{2} = 13$
	1	2	3	0	0	1	0	28	$\frac{28}{1} = 28$
	−2	−2	−1	0	0	0	1	0	
	↑ Columna pivote								

$\xrightarrow{\frac{1}{2}R_1}$

x	y	z	u	v	w	P	Constante
1	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0	0	0	7
2	4	1	0	1	0	0	26
1	2	3	0	0	1	0	28
−2	−2	−1	0	0	0	1	0

$\xrightarrow[R_3 - R_1 \\ R_4 + 2R_1]{R_2 - 2R_1}$

x	y	z	u	v	w	P	Constante
1	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0	0	0	7
0	3	−1	−1	1	0	0	12
0	$\frac{3}{2}$	2	$-\frac{1}{2}$	0	1	0	21
0	−1	1	1	0	0	1	14

Como hay un número negativo en el último renglón de la tabla simplex, llevamos a cabo otra iteración, de la siguiente manera:

	x	y	z	u	v	w	P	Constante	Razón
	1	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0	0	0	7	$\frac{7}{1/2} = 14$
Renglón pivote →	0	3	−1	−1	1	0	0	12	$\frac{12}{3} = 4$
	0	$\frac{3}{2}$	2	$-\frac{1}{2}$	0	1	0	21	$\frac{21}{3/2} = 14$
	0	−1	1	1	0	0	1	14	
		↑ Columna pivote							

$\xrightarrow{\frac{1}{3}R_2}$

x	y	z	u	v	w	P	Constante
1	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0	0	0	7
0	1	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	0	4
0	$\frac{3}{2}$	2	$-\frac{1}{2}$	0	1	0	21
0	−1	1	1	0	0	1	14

$\xrightarrow[R_3 - \frac{3}{2}R_2 \\ R_4 + R_2]{R_1 - \frac{1}{2}R_2}$

x	y	z	u	v	w	P	Constante
1	0	$\frac{7}{6}$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{6}$	0	0	5
0	1	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	0	4
0	0	$\frac{5}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	1	0	15
0	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	1	18

Todas las entradas en el último renglón son no negativas, por lo que hemos llegado a la solución óptima. Concluimos que $x = 5$, $y = 4$, $z = 0$, $u = 0$, $v = 0$, $w = 15$ y $P = 18$.

Explore y analice

Considere el problema de programación lineal

$$\begin{aligned} \text{Maximizar} \quad & P = x + 2y \\ \text{sujeto a} \quad & -2x + y \leq 4 \\ & x - 3y \leq 3 \\ & x \geq 0, y \geq 0 \end{aligned}$$

1. Dibuje el conjunto factible S para el problema de programación lineal y explique por qué el problema tiene una solución no acotada.
2. Utilice el método simplex para resolver el problema de la siguiente manera:
   a. Realice una iteración en la tabla simplex inicial. Interprete el resultado. Indique el punto en S correspondiente a esta solución (no óptima).
   b. Demuestre que el procedimiento simplex se interrumpe cuando intenta realizar otra iteración, demostrando que no hay ningún elemento pivote.
   c. Describa qué sucede si usted viola la regla para encontrar el elemento pivote al permitir que las razones sean negativas y continuar con la iteración.

El ejemplo siguiente se construye para ilustrar la geometría asociada con el método simplex cuando se utiliza para resolver un problema en tres dimensiones. Bosquejamos el conjunto factible para el problema y mostramos el camino dictado por el método simplex para llegar a la solución óptima del problema. El uso de una calculadora le ayudará en las operaciones aritméticas si desea verificar los pasos.

EJEMPLO 4 Ilustración geométrica del método simplex en tres dimensiones

$$\begin{aligned} \text{Maximizar} \quad & P = 20x + 12y + 18z \\ \text{sujeto a} \quad & 3x + y + 2z \leq 9 \\ & 2x + 3y + z \leq 8 \\ & x + 2y + 3z \leq 7 \\ & x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0 \end{aligned}$$

Solución Introducir las variables de holgura u, v y w, y volver a escribir la función objetivo en la forma estándar da el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{aligned} 3x + y + 2z + u \quad\quad\quad &= 9 \\ 2x + 3y + z \quad + v \quad\quad &= 8 \\ x + 2y + 3z \quad\quad + w \quad &= 7 \\ -20x - 12y - 18z \quad\quad\quad + P &= 0 \end{aligned}$$

La tabla simplex inicial está dada por

x	y	z	u	v	w	P	Constante
3	1	2	1	0	0	0	9
2	3	1	0	1	0	0	8
1	2	3	0	0	1	0	7
−20	−12	−18	0	0	0	1	0

Dado que la entrada más negativa en el último renglón (-20) aparece en la columna X, elegimos a ésta como la columna pivote. Continuando con la primera iteración, obtenemos la siguiente secuencia de tablas:

Renglón pivote →

x	y	z	u	v	w	P	Constante	Razón
3	1	2	1	0	0	0	9	$\frac{9}{3}=3$
2	3	1	0	1	0	0	8	$\frac{8}{2}=4$
1	2	3	0	0	1	0	7	$\frac{7}{1}=7$
-20	-12	-18	0	0	0	1	0	

↑ Columna pivote

$\xrightarrow{\frac{1}{3}R_1}$

x	y	z	u	v	w	P	Constante
1	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	0	0	3
2	3	1	0	1	0	0	8
1	2	3	0	0	1	0	7
-20	-12	-18	0	0	0	1	0

$\xrightarrow[\substack{R_3 - R_1 \\ R_4 + 20R_1}]{R_2 - 2R_1}$

Renglón pivote →

x	y	z	u	v	w	P	Constante	Razón
1	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	0	0	3	9
0	$\frac{7}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	1	0	0	2	$\frac{6}{7}$
0	$\frac{5}{3}$	$\frac{7}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	1	0	4	$\frac{12}{5}$
0	$-\frac{16}{3}$	$-\frac{14}{3}$	$\frac{20}{3}$	0	0	1	60	

↑ Columna pivote

Después de una iteración estamos en el punto (3, 0, 0) con $P = 60$. (Ver la figura 20.) Dado que la entrada más negativa en el último renglón es $-\frac{16}{3}$, elegimos la columna y como la columna pivote. Continuando con esta iteración obtenemos

$\xrightarrow{\frac{3}{7}R_2}$

x	y	z	u	v	w	P	Constante
1	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	0	0	3
0	1	$-\frac{1}{7}$	$-\frac{2}{7}$	$\frac{3}{7}$	0	0	$\frac{6}{7}$
0	$\frac{5}{3}$	$\frac{7}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	1	0	4
0	$-\frac{16}{3}$	$-\frac{14}{3}$	$\frac{20}{3}$	0	0	1	60

$\xrightarrow[\substack{R_3 - \frac{5}{3}R_2 \\ R_4 + \frac{16}{3}R_2}]{R_1 - \frac{1}{3}R_2}$

x	y	z	u	v	w	P	Constante	Razón
1	0	$\frac{5}{7}$	$\frac{3}{7}$	$-\frac{1}{7}$	0	0	$\frac{19}{7}$	$\frac{19}{5}$
0	1	$-\frac{1}{7}$	$-\frac{2}{7}$	$\frac{3}{7}$	0	0	$\frac{6}{7}$	—
0	0	$\frac{18}{7}$	$\frac{1}{7}$	$-\frac{5}{7}$	1	0	$\frac{18}{7}$	1
0	0	$-\frac{38}{7}$	$\frac{36}{7}$	$\frac{16}{7}$	0	1	$64\frac{4}{7}$	

↑ Columna pivote

La segunda iteración nos lleva al punto $(\frac{19}{7}, \frac{6}{7}, 0)$ con $P = 64\frac{4}{7}$. (Ver la figura 20.)

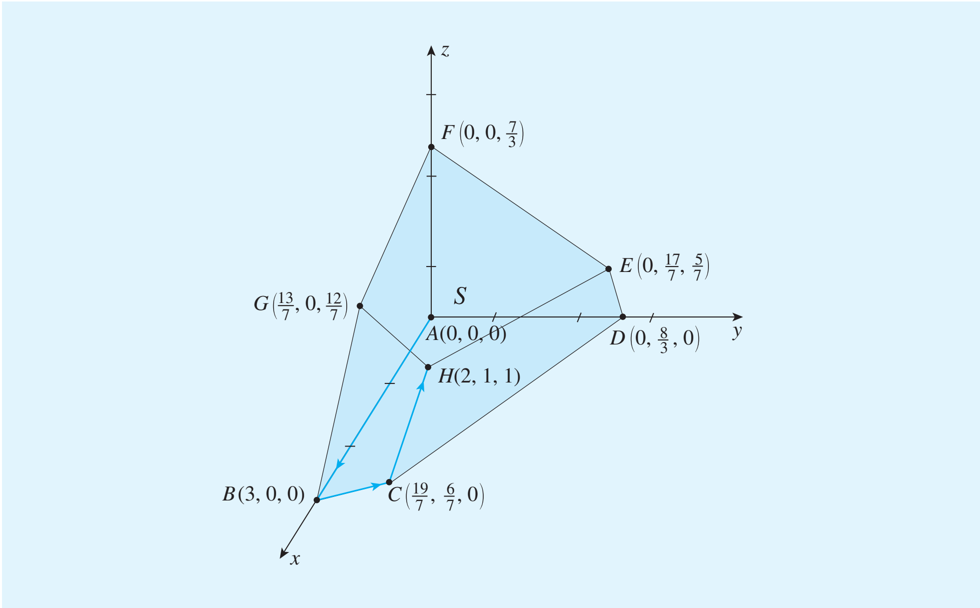


FIGURA 20
El método simplex nos lleva del punto *A* al punto *H*, en el que se maximiza la función objetivo.

Como hay un número negativo en el último renglón de la tabla simplex, llevamos a cabo otra iteración, de la siguiente manera:

$\xrightarrow{\frac{7}{18}R_3}$

x	y	z	u	v	w	P	Constante
1	0	$\frac{5}{7}$	$\frac{3}{7}$	$-\frac{1}{7}$	0	0	$\frac{19}{7}$
0	1	$-\frac{1}{7}$	$-\frac{2}{7}$	$\frac{3}{7}$	0	0	$\frac{6}{7}$
0	0	1	$\frac{1}{18}$	$-\frac{5}{18}$	$\frac{7}{18}$	0	1
0	0	$-\frac{38}{7}$	$\frac{36}{7}$	$\frac{16}{7}$	0	1	$64\frac{4}{7}$

$\xrightarrow[\substack{R_2 + \frac{1}{7}R_3 \\ R_4 + \frac{38}{7}R_3}]{R_1 - \frac{5}{7}R_3}$

x	y	z	u	v	w	P	Constante
1	0	0	$\frac{7}{18}$	$\frac{1}{18}$	$-\frac{5}{18}$	0	2
0	1	0	$-\frac{5}{18}$	$\frac{7}{18}$	$\frac{1}{18}$	0	1
0	0	1	$\frac{1}{18}$	$-\frac{5}{18}$	$\frac{7}{18}$	0	1
0	0	0	$\frac{49}{9}$	$\frac{7}{9}$	$\frac{19}{9}$	1	70

Todas las entradas en el último renglón son no negativas, por lo que hemos llegado a la solución óptima. Llegamos a la conclusión de que $x = 2$, $y = 1$, $z = 1$, $u = 0$, $v = 0$, $w = 0$ y $P = 70$.

El conjunto factible S para el problema es el hexaedro que se muestra en la figura 21 de la página 364. Es la intersección de los semiespacios determinados por los planos P_1, P_2 y P_3 con las ecuaciones $3x + y + 2z = 9$, $2x + 3y + z = 8$, $x + 2y + 3z = 7$, respectivamente, y los planos de coordenadas $x = 0$, $y = 0$ y $z = 0$. La parte de la figura que muestra el conjunto factible S se encuentra en la figura 20. Observe que la primera iteración del método simplex nos lleva de $A(0, 0, 0)$ con $P = 0$ a $B(3, 0, 0)$ con $P = 60$. La segunda versión nos lleva de $B(3, 0, 0)$ a $C(\frac{19}{7}, \frac{6}{7}, 0)$ con $P = 64\frac{4}{7}$, y la tercera iteración nos lleva a partir de $C(\frac{19}{7}, \frac{6}{7}, 0)$ hasta el punto $H(2, 1, 1)$ con un valor óptimo de 70 para P.

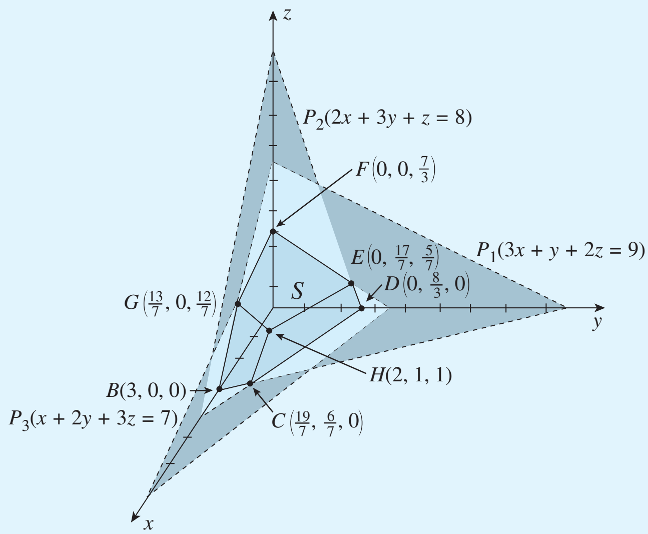


FIGURA 21
El conjunto factible S se obtiene de la intersección de los semiespacios determinada por P_1, P_2 y P_3 con los planos de coordenadas $x = 0$, $y = 0$ y $z = 0$.

VIDEO

EJEMPLO DE APLICACIÓN 5 Planeación de la producción Ace Novelty Company ha determinado que la utilidad por cada souvenir tipo A, tipo B y tipo C que planea fabricar es de \$6, \$5 y \$4, respectivamente. Para fabricar un souvenir tipo A requiere 2 minutos en la máquina I, 1 minuto en la II y 2 minutos en la III. Un souvenir tipo B requiere 1 minuto en la máquina I, 3 minutos en la II y 1 minuto en la III. Un souvenir tipo C requiere 1 minuto en la máquina I y 2 en cada una de las máquinas II y III. Cada día hay 3 horas disponibles en la máquina I, 5 en la máquina II y 4 en la máquina III para la fa-bricación de estos souvenirs. ¿Cuántos souvenirs de cada tipo debe fabricar Ace Novelty por día a fin de maximizar sus utilidades? (Comparar con el ejemplo 1, de la sección 5.1.)

Solución La información dada puede ser tabulada de la siguiente manera:

	Tipo A	Tipo B	Tipo C	Tiempo disponible (min)
Máquina I	2	1	1	180
Máquina II	1	3	2	300
Máquina III	2	1	2	240
Utilidad por unidad	\$6	\$5	\$4	

Sean x, y y z las cantidades respectivas de souvenirs tipo A, tipo B y tipo C que se fabricarán. La cantidad total de tiempo que se usará la máquina I está dada por $2x + y + z$ minutos y no debe superar los 180 minutos. Por tanto, tenemos la desigualdad

$$2x + y + z \leq 180$$

Consideraciones similares sobre el uso de las máquinas II y III llevan a las desigualdades

$$x + 3y + 2z \leq 300$$
$$2x + y + 2z \leq 240$$

Las utilidades resultantes de la venta de los souvenirs producidos está dada por

$$P = 6x + 5y + 4z$$

La formulación matemática de este problema ha llevado al siguiente problema de programación lineal estándar: maximizar la función objetivo (utilidad) $P = 6x + 5y + 4z$ sujeto a

$$\begin{aligned} 2x + y + z &\le 180 \\ x + 3y + 2z &\le 300 \\ 2x + y + 2z &\le 240 \\ x \ge 0, y \ge 0, z &\ge 0 \end{aligned}$$

Introducir las variables de holgura u, v y w da el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{aligned} 2x + y + z + u \qquad\qquad &= 180 \\ x + 3y + 2z \quad + v \qquad &= 300 \\ 2x + y + 2z \qquad + w \quad &= 240 \\ -6x - 5y - 4z \qquad\qquad + P &= 0 \end{aligned}$$

Las tablas que resulten del uso del algoritmo simplex son

	x	y	z	u	v	w	P	Constante	Razón
Renglón pivote →	2	1	1	1	0	0	0	180	$\frac{180}{2} = 90$
	1	3	2	0	1	0	0	300	$\frac{300}{1} = 300$
	2	1	2	0	0	1	0	240	$\frac{240}{2} = 120$
	−6	−5	−4	0	0	0	1	0	
	↑ Columna pivote								

$\xrightarrow{\frac{1}{2}R_1}$	x	y	z	u	v	w	P	Constante
	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	0	90
	1	3	2	0	1	0	0	300
	2	1	2	0	0	1	0	240
	−6	−5	−4	0	0	0	1	0

$\xrightarrow{R_2 - R_1}$ $R_3 - 2R_1$ $R_4 + 6R_1$	x	y	z	u	v	w	P	Constante	Razón
	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	0	90	$\frac{90}{1/2} = 180$
Renglón pivote →	0	$\frac{5}{2}$	$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	0	0	210	$\frac{210}{5/2} = 84$
	0	0	1	−1	0	1	0	60	
	0	−2	−1	3	0	0	1	540	
		↑ Columna pivote							

$\xrightarrow{\frac{2}{5}R_2}$	x	y	z	u	v	w	P	Constante
	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	0	90
	0	1	$\frac{3}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	0	0	84
	0	0	1	−1	0	1	0	60
	0	−2	−1	3	0	0	1	540

$$\xrightarrow[R_4 + 2R_2]{R_1 + \frac{1}{2}R_2} \quad \begin{array}{ccccccc|c} x & y & z & u & v & w & P & \text{Constante} \\ \hline 1 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} & 0 & 0 & 48 \\ 0 & 1 & \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & 0 & 0 & 84 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 60 \\ \hline 0 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{13}{5} & \frac{4}{5} & 0 & 1 & 708 \end{array}$$

De la tabla simplex final obtenemos la solución

$$x = 48 \qquad y = 84 \qquad z = 0 \qquad u = 0 \qquad v = 0 \qquad w = 60 \qquad P = 708$$

Por tanto, con el fin de maximizar su utilidad, Ace Novelty debe fabricar 48 souvenirs tipo A, 84 souvenirs tipo B y ningún recuerdo tipo C. La utilidad resultante es de \$708 por día. El valor de la variable de holgura $w = 60$ indica que 1 hora del tiempo disponible en la máquina III no se utiliza. ■

Interpretación de los resultados Es ilustrativo comparar los resultados obtenidos aquí con los obtenidos en el ejemplo 7 de la sección 5.2. Recuerde que para usar todo el tiempo disponible en cada una de las tres máquinas, Ace Novelty tenía que fabricar 36 souvenirs tipo A, 48 tipo B y 60 tipo C. Esto habría dado lugar a una utilidad de \$696. El ejemplo 5 muestra cómo, a través del uso óptimo de los equipos, una empresa puede incrementar sus utilidades y al mismo tiempo reducir el desgaste de las máquinas.

Problemas con múltiples soluciones y problemas sin soluciones

Como se vio en la sección 6.3, un problema de programación lineal puede tener un número infinito de soluciones. Vimos también que un problema de programación lineal puede no tener solución. ¿Cómo reconocer cada uno de estos fenómenos cuando se utiliza el método simplex para resolver un problema?

Un problema de programación lineal puede tener un número infinito de soluciones si y sólo si el último renglón a la izquierda de la línea vertical de la tabla simplex final tiene un cero en una columna que no es una columna unitaria. También, un problema de programación lineal *no* tendrá solución si el método simplex se interrumpe en alguna etapa. Por ejemplo, si en algún momento no hay razones no negativas en nuestro cálculo, entonces el problema de programación lineal no tiene solución (vea el ejercicio 44).

Explore y analice

Considere el problema de programación lineal

$$\begin{array}{ll} \text{Maximizar} & P = 4x + 6y \\ \text{sujeto a} & 2x + y \le 10 \\ & 2x + 3y \le 18 \\ & x \ge 0, y \ge 0 \end{array}$$

1. Dibuje el conjunto factible para el problema de programación lineal.
2. Utilice el método de las esquinas para mostrar que hay un número infinito de soluciones óptimas. ¿Qué son?
3. Utilice el método simplex para resolver el problema de la siguiente manera:
   - **a.** Realice una iteración en la tabla simplex inicial y concluya que ha llegado a una solución óptima. ¿Cuál es el valor de P y dónde se alcanza? Compare este resultado con el obtenido en el paso 2.
   - **b.** Observe que la tabla obtenida en el inciso (a) indica que hay un número infinito de soluciones (vea el comentario sobre múltiples soluciones en esta página). Ahora realice otra iteración en la tabla simplex utilizando la columna x como columna pivote. Interprete la tabla final.

6.4 Ejercicios de autoevaluación

1. Resolver el problema de programación lineal siguiente por el método simplex:

$$\begin{aligned} \text{Maximizar} \quad & P = 2x + 3y + 6z \\ \text{sujeto a} \quad & 2x + 3y + z \leq 10 \\ & x + y + 2z \leq 8 \\ & 2y + 3z \leq 6 \\ & x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0 \end{aligned}$$

2. The LaCrosse Iron Works fabrica dos modelos de rejillas de hierro fundido para chimenea, el modelo A y el B. La producción de una rejilla del modelo A requiere 20 libras de hierro fundido y 20 minutos de mano de obra, mientras que producir una rejilla modelo B requiere 30 libras de hierro fundido y 15 minutos de mano de obra. La utilidad de una rejilla de modelo A es de \$6, y la de una rejilla modelo B es de \$8. Hay 7200 libras de hierro fundido y 100 horas de mano de obra disponibles a la semana. Debido a un superávit de la semana anterior, el propietario ha decidido que se deben fabricar no más de 150 unidades del modelo A esta semana. Determinar cuántas unidades de cada modelo se deben fabricar a fin de maximizar sus utilidades.

Las soluciones de los ejercicios de autoevaluación 6.4 se pueden encontrar en la página 371.

6.4 Preguntas de concepto

1. Mencione las tres características de un problema de programación lineal de maximización estándar.
2. **a.** Cuando se crea la tabla simplex inicial, ¿cómo se transforma el sistema de desigualdades lineales en un sistema de ecuaciones lineales? ¿Cómo se reescribe la función objetivo $P = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$?
   b. Si tiene una tabla simplex, ¿cómo determina cuando se ha llegado a la solución óptima?
3. En el método simplex, ¿cómo se selecciona la columna pivote? ¿Un renglón pivote? ¿Un elemento pivote?

6.4 Ejercicios

En los ejercicios 1 a 10, determine si la tabla simplex dada está en su forma definitiva. Si es así, encuentre la solución al problema de programación lineal regular asociado. Si no, encuentre el elemento pivote que se utilizará en la siguiente iteración del método simplex.

1.

x	y	u	v	P	Constante
0	1	$\frac{5}{7}$	$-\frac{1}{7}$	0	$\frac{20}{7}$
1	0	$-\frac{3}{7}$	$\frac{2}{7}$	0	$\frac{30}{7}$
0	0	$\frac{13}{7}$	$\frac{3}{7}$	1	$\frac{220}{7}$

2.

x	y	u	v	P	Constante
1	1	1	0	0	6
1	0	−1	1	0	2
3	0	5	0	1	30

3.

x	y	u	v	P	Constante
0	$\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	0	2
1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	4
0	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{3}{2}$	1	12

4.

x	y	z	u	v	P	Constante
3	0	5	1	1	0	28
2	1	3	0	1	0	16
2	0	8	0	3	1	48

5.

x	y	z	u	v	w	P	Constante
1	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	0	$-\frac{2}{3}$	0	$\frac{1}{3}$
0	2	0	0	1	1	0	6
0	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{13}{3}$
0	4	0	1	0	2	1	17

6.

x	y	z	u	v	w	P	Constante
$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{4}$	1	$-\frac{1}{4}$	0	0	$\frac{19}{2}$
$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	0	0	$\frac{21}{2}$
2	0	3	0	0	1	0	30
−1	0	$-\frac{1}{2}$	6	$\frac{3}{2}$	0	1	63

7.

x	y	z	s	t	u	v	P	Constante
$\frac{5}{2}$	3	0	1	0	0	−4	0	46
1	0	0	0	1	0	0	0	9
0	1	0	0	0	1	0	0	12
0	0	1	0	0	0	1	0	6
−180	−200	0	0	0	0	300	1	1800

8.

x	y	z	s	t	u	v	P	Constante
1	0	0	$\frac{2}{5}$	0	$-\frac{6}{5}$	$-\frac{8}{5}$	0	4
0	0	0	$-\frac{2}{5}$	1	$\frac{6}{5}$	$\frac{8}{5}$	0	5
0	1	0	0	0	1	0	0	12
0	0	1	0	0	0	1	0	6
0	0	0	72	0	−16	12	1	4920

9.

x	y	z	u	v	P	Constante
1	0	$\frac{3}{5}$	0	$\frac{1}{5}$	0	30
0	1	$-\frac{19}{5}$	1	$-\frac{3}{5}$	0	10
0	0	$\frac{26}{5}$	0	0	1	60

10.

x	y	z	u	v	w	P	Constante
0	$\frac{1}{2}$	0	1	$-\frac{1}{2}$	0	0	2
1	$\frac{1}{2}$	1	0	$\frac{1}{2}$	0	0	13
2	$\frac{1}{2}$	0	0	$-\frac{3}{2}$	1	0	4
-1	3	0	0	1	0	1	26

En los ejercicios 11 a 25, resuelva cada problema de programación lineal con el método simplex.

11. Maximizar $P = 3x + 4y$
sujeto a
$$\begin{aligned} x + y &\le 4 \\ 2x + y &\le 5 \\ x \ge 0, y &\ge 0 \end{aligned}$$

12. Maximizar $P = 5x + 3y$
sujeto a
$$\begin{aligned} x + y &\le 80 \\ 3x &\le 90 \\ x \ge 0, y &\ge 0 \end{aligned}$$

13. Maximizar $P = 10x + 12y$
sujeto a
$$\begin{aligned} x + 2y &\le 12 \\ 3x + 2y &\le 24 \\ x \ge 0, y &\ge 0 \end{aligned}$$

14. Maximizar $P = 5x + 4y$
sujeto a
$$\begin{aligned} 3x + 5y &\le 78 \\ 4x + y &\le 36 \\ x \ge 0, y &\ge 0 \end{aligned}$$

15. Maximizar $P = 4x + 6y$
sujeto a
$$\begin{aligned} 3x + y &\le 24 \\ 2x + y &\le 18 \\ x + 3y &\le 24 \\ x \ge 0, y &\ge 0 \end{aligned}$$

16. Maximizar $P = 15x + 12y$
sujeto a
$$\begin{aligned} x + y &\le 12 \\ 3x + y &\le 30 \\ 10x + 7y &\le 70 \\ x \ge 0, y &\ge 0 \end{aligned}$$

17. Maximizar $P = 3x + 4y + 5z$
sujeto a
$$\begin{aligned} x + y + z &\le 8 \\ 3x + 2y + 4z &\le 24 \\ x \ge 0, y \ge 0, z &\ge 0 \end{aligned}$$

18. Maximizar $P = 3x + 3y + 4z$
sujeto a
$$\begin{aligned} x + y + 3z &\le 15 \\ 4x + 4y + 3z &\le 65 \\ x \ge 0, y \ge 0, z &\ge 0 \end{aligned}$$

19. Maximizar $P = 3x + 4y + z$
sujeto a
$$\begin{aligned} 3x + 10y + 5z &\le 120 \\ 5x + 2y + 8z &\le 6 \\ 8x + 10y + 3z &\le 105 \\ x \ge 0, y \ge 0, z &\ge 0 \end{aligned}$$

20. Maximizar $P = x + 2y - z$
sujeto a
$$\begin{aligned} 2x + y + z &\le 14 \\ 4x + 2y + 3z &\le 28 \\ 2x + 5y + 5z &\le 30 \\ x \ge 0, y \ge 0, z &\ge 0 \end{aligned}$$

21. Maximizar $P = 4x + 6y + 5z$
sujeto a
$$\begin{aligned} x + y + z &\le 20 \\ 2x + 4y + 3z &\le 42 \\ 2x + 3z &\le 30 \\ x \ge 0, y \ge 0, z &\ge 0 \end{aligned}$$

22. Maximizar $P = x + 4y - 2z$
sujeto a
$$\begin{aligned} 3x + y - z &\le 80 \\ 2x + y - z &\le 40 \\ -x + y + z &\le 80 \\ x \ge 0, y \ge 0, z &\ge 0 \end{aligned}$$

23. Maximizar $P = 12x + 10y + 5z$
sujeto a
$$\begin{aligned} 2x + y + z &\le 10 \\ 3x + 5y + z &\le 45 \\ 2x + 5y + z &\le 40 \\ x \ge 0, y \ge 0, z &\ge 0 \end{aligned}$$

24. Maximizar $P = 2x + 6y + 6z$
sujeto a
$$\begin{aligned} 2x + y + 3z &\le 10 \\ 4x + y + 2z &\le 56 \\ 6x + 4y + 3z &\le 126 \\ 2x + y + z &\le 32 \\ x \ge 0, y \ge 0, z &\ge 0 \end{aligned}$$

25. Maximizar $P = 24x + 16y + 23z$
sujeto a
$$\begin{aligned} 2x + y + 2z &\le 7 \\ 2x + 3y + z &\le 8 \\ x + 2y + 3z &\le 7 \\ x \ge 0, y \ge 0, z &\ge 0 \end{aligned}$$

26. Retome el ejemplo 3 utilizando la columna y como la columna pivote en la primera iteración del método simplex.

27. Demuestre que el problema de programación lineal siguientes

$$\begin{aligned} \text{Maximizar} \quad P &= 2x + 2y - 4z \\ \text{sujeto a} \quad 3x + 3y - 2z &\le 100 \\ 5x + 5y + 3z &\le 150 \\ x \ge 0, y \ge 0, z &\ge 0 \end{aligned}$$

tienen soluciones óptimas $x = 30, y = 0, z = 0, P = 60$ y $x = 0, y = 30, z = 0, P = 60$.

28. **MANUFACTURA. PROGRAMACIÓN DE LA PRODUCCIÓN** Una empresa fabrica dos productos, A y B, en dos máquinas, I y II. Se ha determinado que la empresa logre una utilidad de $3/unidad de producto A y una utilidad de $4/unidad del producto B. Fabricar 1 unidad del producto A requiere 6 minutos en la máquina I y 5 en la máquina II. Fabricar una unidad del producto B requiere 9 minutos en la máquina I y 4 en la máquina II. Hay 5 horas de tiempo disponibles en la máquina I y 3 horas de tiempo disponibles en la máquina II en cada turno de trabajo. ¿Cuántas unidades de cada producto se deben fabricar en cada turno para maximizar las utilidades de la empresa? ¿Cuál es la mayor utilidad de la empresa puede obtener? ¿Hay algún momento en que se dejan de usar las máquinas?

29. **MANUFACTURA. PROGRAMACIÓN DE LA PRODUCCIÓN** National Business Machines Corporation fabrica dos modelos de máquinas de fax: A y B. Fabricar el modelo A tiene un costo de $100, y fabricar el modelo B cuesta $150. Las utilidades son de $30 para cada aparato de fax del modelo A y $40 por cada aparato de fax modelo B. Si la demanda total por mes de aparatos de fax no es superior a 2500 y la empresa ha destinado no más de $600,000 por mes para los costos de fabricación, calcule el número de unidades de cada modelo que National debe fabricar cada mes con el fin de maximizar sus utilidades mensuales. ¿Cuál es la mayor utilidad mensual que puede obtener la empresa?

30. **MANUFACTURA. PROGRAMACIÓN DE LA PRODUCCIÓN** Kane Manufacturing cuenta con una división que fabrica dos modelos de brasero chino (brasero), el modelo A y el B. Fabricar cada brasero modelo A requiere 3 libras de hierro fundido y 6 minutos de mano de obra. Fabricar cada brasero modelo B requiere 4 libras de hierro fundido y 3 minutos de mano de obra. La utilidad por cada brasero modelo A es de $2 y por cada brasero modelo B es de $1.50. Si hay disponibles 1000 libras de hierro fundido y 20 horas de mano de obra para la fabricación de braseros por día, ¿cuántos braseros de cada modelo debe fabricar la división con el fin de ayudar a maximizar las utilidades de Kane? ¿Cuál es la mayor utilidad que la empresa puede obtener? ¿Hay algún sobrante de materia prima?

31. **AGRICULTURA. PLANEACIÓN DEL CULTIVO** Un agricultor tiene 150 acres de tierras aptas para los cultivos A y B. El costo de trabajar el cultivo A es de $40 por acre, mientras que el del cultivo B es de $60 por acre. El agricultor tiene un máximo de $7400 disponibles para el cultivo de la tierra. Cada acre del cultivo A requiere 20 horas de mano de obra, y cada acre del cultivo B requiere 25. El agricultor tiene un máximo de 3300 horas de mano de obra disponibles. Si se espera obtener una utilidad de $150 por acre en el cultivo de A y $200 por acre en el cultivo B, ¿cuántos acres de cada cultivo debe plantar a fin de maximizar sus utilidades? ¿Cuál es la mayor utilidad que el agricultor puede obtener? ¿Hay sobrantes de los recursos?

32. **INVERSIONES. ASIGNACIÓN DE ACTIVOS** Un experto en finanzas planea invertir hasta $500,000 en dos proyectos. Del proyecto A se obtiene un rendimiento de 10% sobre la inversión, mientras que del proyecto B se obtiene un rendimiento de 15% sobre la inversión. Debido a que la inversión en el proyecto B es más riesgosa que la inversión en el proyecto A, el experto en finanzas ha decidido que la inversión en el proyecto B no debe exceder de 40% de la inversión total. ¿Cuánto debe invertir en cada proyecto para maximizar el rendimiento sobre su inversión? ¿Cuál es el rendimiento máximo?

33. **INVERSIONES. ASIGNACIÓN DE ACTIVOS** Ashley ha destinado un máximo de $250,000 para invertir en tres fondos de inversión: un fondo del mercado de dinero, un fondo internacional de renta variable y un fondo de crecimiento y renta. El fondo del mercado de dinero tiene una tasa de rendimiento de 6% anual, el fondo de renta variable tiene una tasa de rendimiento de 10% anual y el fondo de crecimiento y renta tiene una tasa de rendimiento de 15% anual. Ashley ha estipulado que no más de 25% del total de su portafolio debe estar en el fondo de crecimiento y renta y no más de 50% en el fondo internacional de renta variable. Para maximizar el rendimiento de su inversión, ¿cuánto debe invertir Ashley en cada tipo de fondo? ¿Cuál es el rendimiento máximo?

34. **MANUFACTURA. PROGRAMACIÓN DE LA PRODUCCIÓN** Una división de Winston Furniture Company fabrica mesas y sillas. Cada mesa requiere 40 pies de tablas de madera y 3 horas de mano de obra. Cada silla requiere 16 pies de tablas de madera y 4 horas de mano de obra. La utilidad por cada mesa es de $45, y por cada silla es de $20. En una semana determinada, la empresa tiene 3200 pies de tablas de madera disponible, y 520 horas de mano de obra. ¿Cuántas mesas y sillas debe fabricar Winston a fin de maximizar sus utilidades? ¿Cuál es la utilidad máxima?

35. **MANUFACTURA. PROGRAMACIÓN DE LA PRODUCCIÓN** Una empresa fabrica los productos A, B y C. Cada producto es procesado en tres departamentos: I, II y III. El total de horas de mano de obra disponibles por semana para los departamentos I, II y III son 900, 1080 y 840, respectivamente. Los requerimientos de tiempo (en horas por unidad) y la utilidad por unidad de cada producto son los siguientes:

	Producto A	Producto B	Producto C
Departamento I	2	1	2
Departamento II	3	1	2
Departamento III	2	2	1
Utilidad	$18	$12	$15

¿Cuántas unidades de cada producto debe fabricar la empresa con el fin de maximizar sus utilidades? ¿Cuál es la utilidad máxima que la empresa puede obtener? ¿Hay sobrantes de los recursos?

36. **MANUFACTURA. PROGRAMACIÓN DE LA PRODUCCIÓN** Ace Novelty fabrica pandas gigantes y perros San Bernardo. Cada panda requiere 1.5 yardas cuadradas de felpa, 30 pies cúbicos de relleno y 5 piezas de adorno; cada San Bernardo requiere 2 yardas cuadradas de felpa, 35 pies cúbicos de relleno y 8 piezas de adorno. La utilidad por cada panda es de $10 y la utilidad por cada San Bernardo es de $15. Si tiene a su disposición 3600 yardas cuadradas de felpa, 66,000 pies cúbicos de relleno y 13,600 piezas de adorno, ¿cuántos de cada uno de los animales de felpa deberá fabricar la empresa para maximizar sus utilidades? ¿Cuál es la utilidad máxima?

37. **Publicidad. Comerciales por televisión** Como parte de una campaña para promover su venta anual de liquidación, la empresa Excélsior decidió comprar tiempo de publicidad en televisión en la estación KAOS. El presupuesto de publicidad de Excélsior es de $102,000. El tiempo de la mañana cuesta $3000 por minuto, el de la tarde $1000 por minuto y el de la noche (horario estelar) $12,000 por minuto. Debido a compromisos previos, KAOS no puede ofrecer a Excélsior más de 6 minutos del horario estelar o más de un total de 25 minutos de tiempo de publicidad durante las 2 semanas en que los comerciales saldrán al aire. KAOS estima que en la mañana los comerciales son vistos por 200,000 personas, en la tarde son vistos por 100,000 personas y en la noche son vistos por 600,000 personas. ¿Cuánto tiempo de publicidad debe comprar Excélsior por la mañana, por la tarde y por la noche para maximizar la exposición de sus comerciales?

38. **Inversiones. Asignación de activos** Sharon tiene un total de $200,000 para invertir en tres tipos de fondos de inversión: crecimiento, equilibrado y fondos de renta. Los fondos de crecimiento tienen una tasa de rendimiento de 12% anual, los equilibrados 10% anual y los de renta 6% anual. Los tres tipos de fondos tienen asignados factores de riesgo de 0.1, 0.06 y 0.02, respectivamente. Sharon ha decidido que por lo menos 50% de su portafolio total esté en fondos de renta y por lo menos 25% en fondos equilibrados. También ha decidido que el factor de riesgo promedio de la inversión no debe superar 0.05. ¿Cuánto debe invertir Sharon en cada tipo de fondo con el fin de obtener el máximo rendimiento de su inversión? ¿Cuál es el rendimiento máximo?
Sugerencia: El factor de riesgo promedio de la inversión está dado por $0.1x + 0.06y + 0.02z \le 0.05(x + y + z)$.

39. **Manufactura. Control de la producción** Custom Office Furniture Company está introduciendo una nueva línea de escritorios ejecutivos fabricada con una calidad especialmente seleccionada de nogal. En principio serán comercializados tres modelos diferentes: A, B y C. Cada escritorio modelo A requiere $1\frac{1}{4}$ horas de fabricación, 1 hora de ensamblaje y 1 hora de acabado; cada escritorio modelo B requiere $1\frac{1}{2}$ horas de fabricación, 1 hora de ensamblaje y 1 hora de acabado; cada escritorio modelo C requiere $1\frac{1}{2}$ horas, $\frac{3}{4}$ de hora y $\frac{1}{2}$ hora para fabricación, ensamblaje y acabado, respectivamente. La utilidad por cada escritorio modelo A es de $26, por cada escritorio modelo B es de $28 y por cada escritorio modelo C es de $24. El tiempo total disponible en el departamento de fabricación, el departamento de ensamblaje y el departamento de acabado en el primer mes de producción es de 310, 205 y 190 horas, respectivamente. Para maximizar las utilidades de Custom, ¿cuántos escritorios de cada modelo deberán fabricarse en el mes? ¿Cuál es la mayor utilidad que la empresa puede obtener? ¿Hay sobrantes de los recursos?

40. **Manufactura. Producción de casas prefabricadas** Boise Lumber ha decidido entrar en el lucrativo negocio de las casas prefabricadas. Inicialmente planea ofrecer tres modelos: estándar, elegante y de lujo. Cada casa está parcialmente prefabricada y ensamblada en la fábrica, y el montaje final se completa en el lugar. El monto en dólares de los materiales de construcción necesarios, la cantidad de mano de obra requerida en la planta para la prefabricación y el ensamblaje parcial, la cantidad de mano de obra requerida en el lugar y la utilidad por unidad se muestran a continuación:

	Modelo estándar	Modelo elegante	Modelo de lujo
Materiales	$6000	$8000	$10,000
Mano de obra/fábrica (h)	240	220	200
Mano de obra/en el lugar (h)	180	210	300
Utilidad	$3400	$4000	$5000

Para el primer año de producción, se tiene presupuestada una suma de $8.2 millones para el material de construcción; el número de horas de mano de obra disponibles para trabajar en la fábrica (prefabricación y montaje parcial) no excede las 218,000 horas, y la cantidad de mano de obra para trabajar en el lugar debe ser menor o igual a 237,000 horas. Determine el número de viviendas de cada tipo que debe fabricar Boise (una investigación de mercados ha confirmado que no debería haber problemas con las ventas) con el fin de maximizar sus utilidades en esta nueva empresa.

41. **Manufactura. Producción de fórmula para el resfriado** Farmacéutica Beyer produce tres tipos de fórmula para el resfriado: I, II y III. Se necesitan 2.5 horas para producir 1000 botellas de la fórmula I, 3 para producir 1000 botellas de la fórmula II y 4 para producir 1000 botellas de la fórmula III. Las utilidades por cada 1000 botellas de la fórmula I, la II y la III, son de $180, $200 y $300, respectivamente. Suponga que para una corrida de producción determinada hay suficientes ingredientes disponibles para fabricar como máximo 9000 botellas de la fórmula I, 12,000 de la fórmula II y 6000 de la fórmula III. Además, el tiempo para la corrida de producción se limita a un máximo de 70 horas. ¿Cuántas botellas de cada fórmula deben producirse en esta corrida para que se maximice la utilidad? ¿Cuál es la utilidad máxima alcanzable para la empresa? ¿Hay sobrantes de los recursos?

42. **Producción. Productos de jugo** CalJuice Company ha decidido introducir tres jugos de fruta a partir de una mezcla de dos o más concentrados. Estos jugos se empacarán en cajas de cartón de 64 onzas. Una caja de cartón de jugo de piña-naranja requiere de 8 onzas de concentrado de jugo de piña y de naranja. Una caja de cartón de jugo de naranja-plátano requiere 12 onzas de concentrado de jugo de naranja y 4 onzas de concentrado de pulpa de plátano. Por último, una caja de cartón de jugo de piña-naranja-plátano requiere 4 onzas de concentrado de jugo de piña, 8 onzas de concentrado de jugo de naranja y 4 onzas de concentrado de pulpa de plátano. La empresa ha decidido destinar 16,000 onzas de concentrado de jugo de piña, 24,000 onzas de concentrado de jugo de naranja y 5000 onzas de concentrado de pulpa de plátano para la producción inicial. La empresa también ha establecido que la producción de jugo de piña-naranja-plátano no debe exceder de 800 cajas de cartón. Su utilidad en una caja de cartón de jugo de piña-naranja es de $1.00, en una de jugo de naranja-plátano es de $0.80 y en una de jugo de piña-naranja-plátano es de $0.90. Para lograr una utilidad máxima, ¿cuántas cajas de cartón de cada mezcla debe producir la empresa? ¿Cuál es la utilidad máxima que se puede obtener? ¿Hay sobrantes de los recursos?

43. **Inversiones. Asignación de activos** Un experto en finanzas planea invertir hasta $2 millones en tres proyectos. Estima que el proyecto A producirá un rendimiento de 10% sobre su

inversión, el B 15% sobre su inversión y el C 20% sobre su inversión. Debido a los riesgos asociados a las inversiones, decidió no asignar más de 20% de su inversión total en el proyecto C. También decidió que sus inversiones en los proyectos B y C no deben superar 60% de su inversión total. Finalmente, decidió que su inversión en el proyecto A debe ser por lo menos de 60% de sus inversiones en los proyectos B y C. ¿Cuánto debe invertir el experto en finanzas en cada proyecto si desea maximizar la rentabilidad total de sus inversiones? ¿Cuál es el importe máximo que puede esperar de sus inversiones?

44. Considere el problema de programación lineal

$$\begin{aligned} \text{Maximizar} \quad & P = 3x + 2y \\ \text{sujeto a} \quad & x - y \leq 3 \\ & x \leq 2 \\ & x \geq 0, y \geq 0 \end{aligned}$$

a. Trace el conjunto factible para el problema de programación lineal.

b. Muestre que el problema de programación lineal es no acotado.

c. Resuelva el problema de programación lineal utilizando el método simplex. ¿Cómo se interrumpe el método?

d. Explique por qué el resultado del inciso (c) implica que no existe ninguna solución para el problema de programación lineal.

En los ejercicios 45 a 48 determine si la afirmación es verdadera o falsa. Si es verdadera, explique por qué lo es. Si es falsa, dé un ejemplo para mostrar por qué lo es.

45. Si al menos uno de los coeficientes $a_1, a_2, \ldots, a_n$ de la función objetivo $P = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n$ es positivo, entonces $(0, 0, \ldots, 0)$ no puede ser la solución óptima del problema de programación lineal (maximización) estándar.

46. Elegir el renglón pivote requiriendo que la razón asociada con ese renglón sea la más baja asegura que la iteración no nos llevará de un punto factible a uno no factible.

47. Elegir la columna pivote requiriendo que sea la columna asociada a la entrada más negativa a la izquierda de la línea vertical en el último renglón de la tabla simplex asegura que la iteración se traducirá en el mayor aumento o, en el peor de los casos, no disminuirá en la función objetivo.

48. Si en cualquier etapa de una iteración del método simplex no es posible calcular las razones (división entre cero) o las razones son negativas, entonces podemos concluir que el problema de programación lineal estándar no tiene solución.

6.4 Soluciones a los ejercicios de autoevaluación

1. Al introducir las variables de holgura *u, v* y *w,* se obtiene el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{aligned} 2x + 3y + z + u \quad &= 10 \\ x + y + 2z \quad + v \quad &= 8 \\ 2y + 3z \quad + w \quad &= 6 \\ -2x - 3y - 6z \quad + P &= 0 \end{aligned}$$

La tabla simplex inicial y las sucesivas tablas resultantes de aplicar el procedimiento simplex son los siguientes:

	x	y	z	u	v	w	P	Constante	Razón
	2	3	1	1	0	0	0	10	$\frac{10}{1} = 10$
	1	1	2	0	1	0	0	8	$\frac{8}{2} = 4$
Renglón pivote →	0	2	3	0	0	1	0	6	$\frac{6}{3} = 2$
	−2	−3	−6	0	0	0	1	0	
			↑ Columna pivote						

$\xrightarrow{\frac{1}{3}R_3}$

x	y	z	u	v	w	P	Constante
2	3	1	1	0	0	0	10
1	1	2	0	1	0	0	8
0	$\frac{2}{3}$	1	0	0	$\frac{1}{3}$	0	2
−2	−3	−6	0	0	0	1	0

$\xrightarrow[R_2 - 2R_3 \\ R_4 + 6R_3]{R_1 - R_3}$

	x	y	z	u	v	w	P	Constante	Razón
	2	$\frac{7}{3}$	0	1	0	$-\frac{1}{3}$	0	8	$\frac{8}{2} = 4$
Renglón pivote →	1	$-\frac{1}{3}$	0	0	1	$-\frac{2}{3}$	0	4	$\frac{4}{1} = 4$
	0	$\frac{2}{3}$	1	0	0	$\frac{1}{3}$	0	2	—
	−2	1	0	0	0	2	1	12	
	↑ Columna pivote								

$\xrightarrow[R_4 + 2R_2]{R_1 - 2R_2}$

x	y	z	u	v	w	P	Constante
0	3	0	1	−2	1	0	0
1	$-\frac{1}{3}$	0	0	1	$-\frac{2}{3}$	0	4
0	$\frac{2}{3}$	1	0	0	$\frac{1}{3}$	0	2
0	$\frac{1}{3}$	0	0	2	$\frac{2}{3}$	1	20

Todas las entradas en el último renglón son no negativas y es la tabla final. Llegamos a la conclusión de que $x = 4$, $y = 0$, $z = 2$ y $P = 20$.

2. Sea x el número de rejillas del modelo A y y el número de rejillas del modelo B que se fabricarán esta semana. Entonces la función utilidad a maximizar está dada por

$$P = 6x + 8y$$

Las limitaciones en la disponibilidad de material y mano de obra pueden ser expresadas por las desigualdades lineales

$$20x + 30y \leq 7200 \quad \text{o} \quad 2x + 3y \leq 720$$
$$20x + 15y \leq 6000 \quad \text{o} \quad 4x + 3y \leq 1200$$

Por último, la condición de que no se fabriquen más de 150 unidades de las rejillas modelo A por semana puede ser expresada por la desigualdad lineal

$$x \leq 150$$

Entonces, llegamos al siguiente problema de programación lineal:

$$\begin{aligned} \text{Maximizar} \quad & P = 6x + 8y \\ \text{sujeto a} \quad & 2x + 3y \leq 720 \\ & 4x + 3y \leq 1200 \\ & x \quad \leq 150 \\ & x \geq 0, y \geq 0 \end{aligned}$$

Para resolver este problema se introducen las variables de holgura u, v y w, y utilizamos el método simplex, obteniendo la siguiente secuencia de tablas simplex:

	x	y	u	v	w	P	Constante	Razón
Renglón pivote →	2	3	1	0	0	0	720	$\frac{720}{3} = 240$
	4	3	0	1	0	0	1200	$\frac{1200}{3} = 400$
	1	0	0	0	1	0	150	—
	−6	−8	0	0	0	1	0	
		↑ Columna pivote						

$\xrightarrow{\frac{1}{3}R_1}$

x	y	u	v	w	P	Constante
$\frac{2}{3}$	1	$\frac{1}{3}$	0	0	0	240
4	3	0	1	0	0	1200
1	0	0	0	1	0	150
−6	−8	0	0	0	1	0

$\xrightarrow[R_4 + 8R_1]{R_2 - 3R_1}$

	x	y	u	v	w	P	Constante	Razón
	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{1}{3}$	0	0	0	240	$\frac{240}{2/3} = 360$
	2	0	−1	1	0	0	480	$\frac{480}{2} = 240$
Renglón pivote →	1	0	0	0	1	0	150	$\frac{150}{1} = 150$
	$-\frac{2}{3}$	0	$\frac{8}{3}$	0	0	1	1920	
	↑ Columna pivote							

$\xrightarrow[\substack{R_2 - 2R_3 \\ R_4 + \frac{2}{3}R_3}]{R_1 - \frac{2}{3}R_3}$

x	y	u	v	w	P	Constante
0	1	$\frac{1}{3}$	0	$-\frac{2}{3}$	0	140
0	0	−1	1	−2	0	180
1	0	0	0	1	0	150
0	0	$\frac{8}{3}$	0	$\frac{2}{3}$	1	2020

La última tabla es definitiva y vemos que $x = 150$, $y = 140$ y $P = 2020$. Por tanto, LaCrosse debe fabricar 150 rejillas modelo A y 140 modelo B esta semana. La utilidad será de \$2020.

USO DE LA TECNOLOGÍA

Método simplex: solución de problemas de maximización

Calculadora graficadora

Una calculadora graficadora se puede utilizar para resolver un problema de programación lineal utilizando el método simplex, como se ilustra en el ejemplo 1.

EJEMPLO 1 (Remítase al ejemplo 5 de la sección 6.4.) El problema se reduce al problema de programación lineal siguiente:

$$
\begin{aligned}
\text{Maximizar}\quad & P = 6x + 5y + 4z \\
\text{sujeto a}\quad & 2x + y + z \le 180 \\
& x + 3y + 2z \le 300 \\
& 2x + y + 2z \le 240 \\
& x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0
\end{aligned}
$$

Con u, v y w, como variables de holgura, llegamos a la siguiente secuencia de tablas simplex, donde la primera tabla entra como la matriz A:

	x	y	z	u	v	w	P	Constante	Razón
Renglón pivote →	2	1	1	1	0	0	0	180	$\frac{180}{2} = 90$
	1	3	2	0	1	0	0	300	$\frac{300}{1} = 300$
	2	1	2	0	0	1	0	240	$\frac{240}{2} = 120$
	−6	−5	−4	0	0	0	1	0	
	↑ Columna pivote								

$\xrightarrow{\text{*}\mathbf{raíz}(\frac{1}{2}, A, 1) \blacktriangleright B}$

x	y	z	u	v	w	P	Constante
1	0.5	0.5	0.5	0	0	0	90
1	3	2	0	1	0	0	300
2	1	2	0	0	1	0	240
−6	−5	−4	0	0	0	1	0

$\xrightarrow[\substack{\text{*}\mathbf{raíz+}(-2,\, C,\, 1,\, 3) \blacktriangleright B \\ \text{*}\mathbf{raíz+}(6,\, B,\, 1,\, 4) \blacktriangleright C}]{\text{*}\mathbf{raíz+}(-1,\, B,\, 1,\, 2) \blacktriangleright C}$

	x	y	z	u	v	w	P	Constante	Razón
	1	0.5	0.5	0.5	0	0	0	90	$\frac{90}{0.5} = 180$
Renglón pivote →	0	2.5	1.5	−0.5	1	0	0	210	$\frac{210}{2.5} = 84$
	0	0	1	−1	0	1	0	60	
	0	−2	−1	3	0	0	1	540	
		↑ Columna pivote							

***raíz**$(\frac{1}{2.5}, C, 2) \blacktriangleright B$

x	y	z	u	v	w	P	Constante
1	0.5	0.5	0.5	0	0	0	90
0	1	0.6	−0.2	0.4	0	0	84
0	0	1	−1	0	1	0	60
0	−2	−1	3	0	0	1	540

$$\xrightarrow[\textbf{*raíz+}(2,\, C,\, 2,\, 4)\ \blacktriangleright B]{\textbf{*raíz+}(-0.5,\, B,\, 2,\, 1)\ \blacktriangleright C}$$

x	y	z	u	v	w	P	Constante
1	0	0.2	0.6	−0.2	0	0	48
0	1	0.6	−0.2	0.4	0	0	84
0	0	1	−1	0	1	0	60
0	0	0.2	2.6	0.8	0	1	708

La tabla simplex final es la misma que la obtenida antes. Vemos que $x = 48$, $y = 84$, $z = 0$ y $P = 708$. Por tanto, Ace Novelty debe fabricar 48 souvenirs tipo A, 84 tipo B y ninguno tipo C, obteniendo una utilidad de \$708 por día. ■

Excel

Solver es un complemento de Excel que se utiliza para resolver problemas de programación lineal. Al iniciar el programa Excel, seleccione el menú *Tools* y el comando *Solver*. Si no está ahí, tendrá que instalarlo. (Consulte las instrucciones en el manual de instalación.)

EJEMPLO 2 Resolver el problema de programación lineal siguiente:

$$\begin{aligned} \text{Maximizar} \quad & P = 6x + 5y + 4z \\ \text{sujeto a} \quad & 2x + y + z \le 180 \\ & x + 3y + 2z \le 300 \\ & 2x + y + 2z \le 240 \\ & x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0 \end{aligned}$$

Solución

1. *Introduzca los datos para el problema de programación lineal en una hoja de cálculo.* Introduzca las etiquetas indicadas en la columna A y las variables con las que estamos trabajando debajo de Decision Variables en las celdas B4:B6, como se muestra en la figura T1. Este paso opcional ayudará a organizar nuestro trabajo.

Nota: las palabras y los caracteres en negrita y encerrados en un recuadro (por ejemplo, $\boxed{\textbf{Enter}}$) indican que se requiere una acción (*clic*, seleccionar o presionar). Las palabras y los caracteres impresos en azul (por ejemplo, Chart sub-type:) indican palabras y caracteres que aparecen en la pantalla. Las palabras y los caracteres de imprenta en una fuente de máquina de escribir (por ejemplo, `=(-2/3)*A2+2`) indican palabras o caracteres que deben ser escritos e introducidos.

(*continúa*)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Problema de maximización								
2									
3	Variables de decisión								
4		x							
5		y							
6		z							
7									
8	Función objetivo		0						
9									
10	Restricciones								
11			0	<=	180				
12			0	<=	300				
13			0	<=	240				

Fórmulas para las celdas señaladas
C8: = 6∗C4 + 5∗C5 + 4∗C6
C11: = 2∗C4 + C5 + C6
C12: = C4 + 3∗C5 + 2∗C6
C13: = 2∗C4 + C5 + 2∗C6

FIGURA T1
Creación de la hoja de cálculo para Solver.

Por el momento, las celdas que contienen los valores de las variables (C4:C6) se dejan en blanco. En C8 escriba la fórmula para la función objetivo: `=6*C4+5*C5+4*C6`. En C11 escriba la fórmula para el lado izquierdo de la primera restricción: `=2*C4+C5+C6`. En C12 escriba la fórmula para el lado izquierdo de la segunda restricción: `=C4+3*C5+2*C6`. En C13 escriba la fórmula para el lado izquierdo de la tercera restricción: `=2*C4+C5+2*C6`. A continuación aparecerán ceros en la celda B8 y en las celdas C11:C13. En las celdas D11:D13, escriba <= para indicar que cada restricción es de la forma ≤. Por último, en las celdas E11:E13 escriba el valor del lado derecho de cada restricción; en este caso, `180`, `300`, y `240`, respectivamente. Tenga en cuenta que no es necesario que especifique las restricciones de no negatividad $x \geq 0$, $y \geq 0$ y $z \geq 0$. La hoja de cálculo resultante se muestra en la figura T1, donde las fórmulas que se hayan ingresado a la función objetivo y las restricciones se muestran en el cuadro de comentarios.

2. *Utilice Solver para resolver el problema.* Haga clic en **Tools** en la barra de menú y luego haga *clic* en **Solver**. El cuadro de diálogo Solver Parameters aparecerá.
   a. El puntero estará en la caja Set Target Cell: (figura T2). Resalte la celda en la hoja de cálculo que contiene la fórmula para la función objetivo, en este caso, C8.

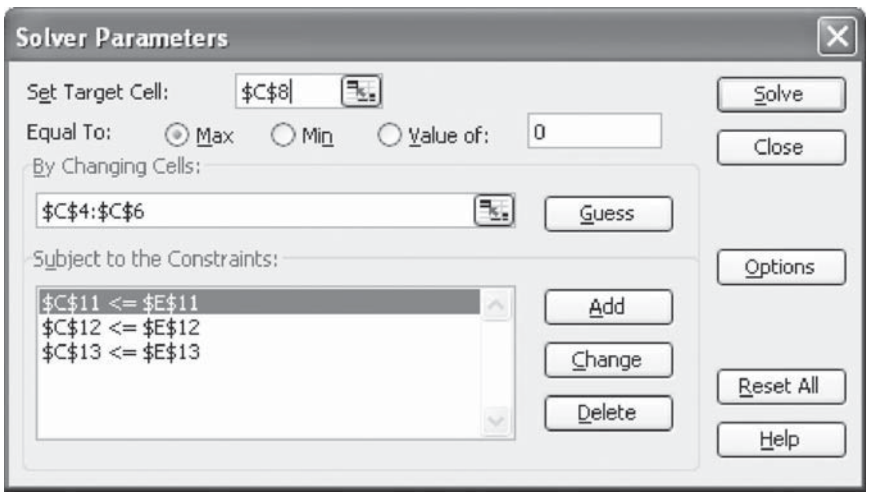


FIGURA T2
El cuadro de diálogo de Solver Parameters.

Luego, junto a Equal To: Seleccione **Max**. Seleccione la caja **By Changing Cells:** y resalte las celdas en la hoja de cálculo que contiene el valor de las variables, en este caso C4:C6. Seleccione el cuadro **Subject to the Constraints:** y luego haga clic en **Add**. Aparecerá el cuadro de diálogo Add Constraint (figura T3).

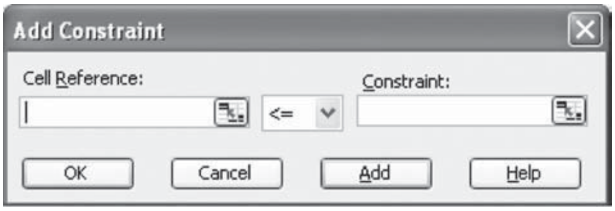


FIGURA **T3**
El cuadro de diálogo Add Constraint.

b. El puntero aparecerá en Cell Reference: resalte las celdas en su hoja de cálculo que contienen la fórmula para el lado izquierdo de la primera restricción, en este caso C11. A continuación, seleccione el símbolo de la restricción apropiada en este caso, **<=**. Seleccione la caja **Constraint:** y resalte el valor del lado derecho de la primera restricción en su hoja de cálculo, en este caso 180. Haga clic en **Add** y luego siga el mismo procedimiento para ingresar la segunda y la tercera restricciones. Haga clic en **OK**. Aparecerá el cuadro de diálogo resultante Solver Parameters que se muestra en la figura T2.

c. En el cuadro de diálogo Solver Parameters haga clic en **Options** (figura T2). En el cuadro de diálogo Solver Options que aparece, seleccione las restricciones **Assume Linear Model** y **Assume Non-Negative** (figura T4). Haga clic en **OK**.

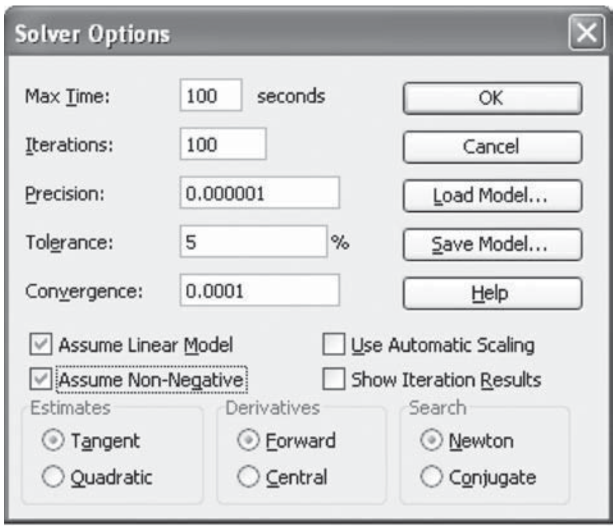


FIGURA **T4**
El cuadro de diálogo Solver Options.

d. En el cuadro de diálogo Solver Parameters que aparece (figura T2), haga clic en **Solve**. Aparecerá el cuadro de diálogo Solver Results y, al mismo tiempo, las respuestas aparecerán en su hoja de cálculo (figura T5).

	A	B	C	D	E
1	Problema de maximización				
2					
3	Variables de decisión				
4		x	48		
5		y	84		
6		z	0		
7					
8	Función objetivo		708		
9					
10	Restricciones				
11			180	<=	180
12			300	<=	300
13			240	<=	240

FIGURA **T5**
Hoja de cálculo completa después de usar Solver.

(*continúa*)

3. *Lea sus respuestas.* De la hoja de cálculo, vemos que la función objetivo alcanza un valor máximo de 708 (celda C8) cuando $x = 48$, $y = 84$ y $z = 0$ (celdas C4:C6). ■

EJERCICIOS CON TECNOLOGÍA

Resolver los problemas de programación lineal.

1. Maximizar $P = 2x + 3y + 4z + 2w$
sujeto a
$$\begin{aligned} x + 2y + 3z + 2w &\le 6 \\ 2x + 4y + z - w &\le 4 \\ 3x + 2y - 2z + 3w &\le 12 \\ x \ge 0, y \ge 0, z \ge 0, w &\ge 0 \end{aligned}$$

2. Maximizar $P = 3x + 2y + 2z + w$
sujeto a
$$\begin{aligned} 2x + y - z + 2w &\le 8 \\ 2x - y + 2z + 3w &\le 20 \\ x + y + z + 2w &\le 8 \\ 4x - 2y + z + 3w &\le 24 \\ x \ge 0, y \ge 0, z \ge 0, w &\ge 0 \end{aligned}$$

3. Maximizar $P = x + y + 2z + 3w$
sujeto a
$$\begin{aligned} 3x + 6y + 4z + 2w &\le 12 \\ x + 4y + 8z + 4w &\le 16 \\ 2x + y + 4z + w &\le 10 \\ x \ge 0, y \ge 0, z \ge 0, w &\ge 0 \end{aligned}$$

4. Maximizar $P = 2x + 4y + 3z + 5w$
sujeto a
$$\begin{aligned} x - 2y + 3z + 4w &\le 8 \\ 2x + 2y + 4z + 6w &\le 12 \\ 3x + 2y + z + 5w &\le 10 \\ 2x + 8y - 2z + 6w &\le 24 \\ x \ge 0, y \ge 0, z \ge 0, w &\ge 0 \end{aligned}$$

6.5 Método simplex: problemas de minimización estándar

Minimización con restricciones ≤

En la última sección desarrollamos un procedimiento, llamado método simplex, para resolver problemas de programación lineal estándar. Recuerde que un problema de maximización estándar cumple tres condiciones:

1. La función objetivo debe ser maximizada.
2. Todas las variables que intervienen son no negativas.
3. Cada restricción lineal se puede escribir de modo que la expresión que incluye a las variables sea menor o igual a una constante no negativa.

En esta sección veremos cómo se puede utilizar el método simplex para resolver ciertas clases de problemas que no son necesariamente los problemas de maximización estándar. En particular, veremos cómo una modificación de este procedimiento se puede utilizar para resolver problemas relacionados con la minimización de las funciones objetivo.

Comenzamos considerando el tipo de problemas de programación lineal que requiere la minimización de funciones objetivo, pero que cumpla las condiciones 2 y 3 para problemas de maximización estándar. El método empleado para resolver estos problemas se ilustra en el siguiente ejemplo.

VIDEO

EJEMPLO 1

Minimizar $C = -2x - 3y$
sujeto a
$$\begin{aligned} 5x + 4y &\le 32 \\ x + 2y &\le 10 \\ x \ge 0, y &\ge 0 \end{aligned}$$

Solución Este problema consiste en la minimización de la función objetivo y en consecuencia *no* es un problema de maximización estándar. Tenga en cuenta, sin embargo, que todas las demás condiciones para un problema de maximización estándar son ciertas. Para resolver un problema de este tipo, observamos que minimizar la función objetivo C es equivalente a maximizar la función objetivo $P = -C$. Por tanto, la solución a este problema se puede encontrar mediante la solución del siguiente problema de maximización estándar asociado: maximizar $P = 2x + 3y$ sujeto a las restricciones dadas. Utilizando el método simplex con u y v como variables de holgura, se obtiene la siguiente secuencia de tablas simplex:

$$\begin{array}{rrrrr|r}
x & y & u & v & P & \text{Constante} \\
\hline
5 & 4 & 1 & 0 & 0 & 32 \\
1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 10 \\
\hline
-2 & -3 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c}
\text{Razón} \\
\frac{32}{4} = 8 \\
\frac{10}{2} = 5
\end{array}$$

Renglón pivote → (segundo renglón); Columna pivote ↑ (columna y)

$$\xrightarrow{\frac{1}{2}R_2}
\begin{array}{rrrrr|r}
x & y & u & v & P & \text{Constante} \\
\hline
5 & 4 & 1 & 0 & 0 & 32 \\
\frac{1}{2} & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 5 \\
\hline
-2 & -3 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{array}$$

$$\xrightarrow[R_3 + 3R_2]{R_1 - 4R_2}
\begin{array}{rrrrr|r}
x & y & u & v & P & \text{Constante} \\
\hline
3 & 0 & 1 & -2 & 0 & 12 \\
\frac{1}{2} & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 5 \\
\hline
-\frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{3}{2} & 1 & 15
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c}
\text{Razón} \\
\frac{12}{3} = 4 \\
\frac{5}{1/2} = 10
\end{array}$$

Renglón pivote → (primer renglón); Columna pivote ↑ (columna x)

$$\xrightarrow{\frac{1}{3}R_1}
\begin{array}{rrrrr|r}
x & y & u & v & P & \text{Constante} \\
\hline
1 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 0 & 4 \\
\frac{1}{2} & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 5 \\
\hline
-\frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{3}{2} & 1 & 15
\end{array}$$

$$\xrightarrow[R_3 + \frac{1}{2}R_1]{R_2 - \frac{1}{2}R_1}
\begin{array}{rrrrr|r}
x & y & u & v & P & \text{Constante} \\
\hline
1 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 0 & 4 \\
0 & 1 & -\frac{1}{6} & \frac{5}{6} & 0 & 3 \\
\hline
0 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{7}{6} & 1 & 17
\end{array}$$

> **Explore y analice**
>
> Consulte el ejemplo 1.
>
> **1.** Dibuje el conjunto factible S para el problema de programación lineal.
>
> **2.** Resuelva el problema utilizando el método de esquinas.
>
> **3.** Indique en S la esquina correspondiente a cada iteración del procedimiento simplex y siga el camino que conduce a la solución óptima.

La última tabla es la tabla final. La solución del problema de maximización estándar asociado con el problema de programación lineal propuesta es $x = 4$, $y = 3$ y $P = 17$, por lo que la solución requerida está dada por $x = 4$, $y = 3$ y $C = -17$. Usted puede verificar que la solución es correcta usando el método de las esquinas. ■

El problema dual

Otra clase especial de problemas de programación lineal que encontramos en las aplicaciones prácticas se caracteriza por las siguientes condiciones:

1. La función objetivo se reduce al *mínimo*.
2. Todas las variables que intervienen son no negativas.
3. Cada restricción lineal se puede escribir de modo que la expresión que incluye a las variables es *mayor o igual* a una constante.

Estos problemas se llaman **problemas de minimización estándar**.

Un método conveniente para resolver este tipo de problemas se basa en la siguiente observación. Cada problema de programación lineal de maximización se asocia con un problema de minimización, y viceversa. Para efectos de identificación, el problema dado se llama **problema primal**; el problema relacionado con lo que se llama **problema dual**. El siguiente ejemplo ilustra la técnica para construir el dual de un problema de programación lineal dado.

EJEMPLO 2 Escribir el problema dual asociado con el siguiente problema:

$$\left.\begin{array}{ll}\text{Minimizar la función objetivo } C = 6x + 8y & \\ \text{sujeto a} \quad 40x + 10y \geq 2400 & \\ \qquad\qquad 10x + 15y \geq 2100 & \\ \qquad\qquad 5x + 15y \geq 1500 & \\ \qquad\qquad x \geq 0,\ y \geq 0 & \end{array}\right\} \text{Problema primal}$$

Solución En primer lugar, escribimos la siguiente tabla para el problema primal dado:

x	y	Constante
40	10	2400
10	15	2100
5	15	1500
6	8	

A continuación intercambiamos las columnas y los renglones de la tabla anterior y escribimos como encabezados de las tres columnas de la matriz resultante las tres variables *u, v* y *w,* obteniendo la tabla

u	v	w	Constante
40	10	5	6
10	15	15	8
2400	2100	1500	

Tomando la última tabla como si fuera parte de la tabla simplex inicial de un problema de maximización estándar, con la excepción de que los signos de los coeficientes correspondientes a la función objetivo no se invierten, se construye el problema dual requerido de la siguiente manera:

$$\left.\begin{array}{ll}\text{Maximizar la función objetivo } P = 2400u + 2100v + 1500w & \\ \text{sujeto a} \quad 40u + 10v + 5w \leq 6 & \\ \qquad\qquad 10u + 15v + 15w \leq 8 & \\ \qquad\qquad u \geq 0,\ v \geq 0,\ w \geq 0 & \end{array}\right\} \text{Problema dual}$$

■

La conexión entre la solución del problema primal y la del problema dual es proporcionada por el siguiente teorema, atribuido a John von Neumann (1903-1957), el cual se afirma sin pruebas.

TEOREMA 3

El teorema fundamental de la dualidad

Un problema primal tiene solución si y sólo si el problema dual correspondiente tiene solución. Por otra parte, si existe una solución, entonces:

a. Las funciones objetivo tanto del problema primal como del problema dual alcanzan el mismo valor óptimo.

b. La solución óptima al problema primal aparece debajo de las variables de holgura en el último renglón de la tabla simplex final asociada con el problema dual.

Ayudados de este teorema, resolveremos el problema planteado en el ejemplo 2.

EJEMPLO 3 Complete la solución al problema planteado en el ejemplo 2.

Solución Observe que el problema dual asociado con el problema propuesto (original) es un problema de maximización estándar. Por tanto, la solución se puede encontrar utilizando el algoritmo simplex. Al introducir las variables de holgura x y y, obtenemos el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{aligned} 40u + 10v + 5w + x \qquad &= 6 \\ 10u + 15v + 15w \qquad + y \quad &= 8 \\ -2400u - 2100v - 1500w \qquad + P &= 0 \end{aligned}$$

Continuando con el algoritmo simplex, se obtiene la secuencia de tablas simplex:

	u	v	w	x	y	P	Constante	Razón
Renglón pivote →	40	10	5	1	0	0	6	$\frac{6}{40} = \frac{3}{20}$
	10	15	15	0	1	0	8	$\frac{8}{10} = \frac{4}{5}$
	−2400	−2100	−1500	0	0	1	0	

↑ Columna pivote (columna u)

$\xrightarrow{\frac{1}{40}R_1}$

u	v	w	x	y	P	Constante
1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{40}$	0	0	$\frac{3}{20}$
10	15	15	0	1	0	8
−2400	−2100	−1500	0	0	1	0

$\xrightarrow[R_3 + 2400R_1]{R_2 - 10R_1}$

	u	v	w	x	y	P	Constante	Razón
	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{40}$	0	0	$\frac{3}{20}$	$\frac{3/20}{1/4} = \frac{3}{5}$
Renglón pivote →	0	$\frac{25}{2}$	$\frac{55}{4}$	$-\frac{1}{4}$	1	0	$\frac{13}{2}$	$\frac{13/2}{25/2} = \frac{13}{25}$
	0	−1500	−1200	60	0	1	360	

↑ Columna pivote (columna v)

$\xrightarrow{\frac{2}{25}R_2}$

u	v	w	x	y	P	Constante
1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{40}$	0	0	$\frac{3}{20}$
0	1	$\frac{11}{10}$	$-\frac{1}{50}$	$\frac{2}{25}$	0	$\frac{13}{25}$
0	−1500	−1200	60	0	1	360

$\xrightarrow[R_3 + 1500R_2]{R_1 - \frac{1}{4}R_2}$

u	v	w	x	y	P	Constante
1	0	$-\frac{3}{20}$	$\frac{3}{100}$	$-\frac{1}{50}$	0	$\frac{1}{50}$
0	1	$\frac{11}{10}$	$-\frac{1}{50}$	$\frac{2}{25}$	0	$\frac{13}{25}$
0	0	450	30	120	1	1140

$\underbrace{30 \quad 120}_{\text{Solución del problema primal}}$

La última tabla es la tabla final. El teorema fundamental de la dualidad indica que la solución para el problema primal es $x = 30$ y $y = 120$ con un valor mínimo para C de 1140. Observe que la solución al problema dual (maximización) se puede leer en la tabla simplex de la forma habitual: $u = \frac{1}{50}$, $v = \frac{13}{25}$, $w = 0$ y $P = 1140$.

Tenga en cuenta que el valor máximo de P es igual al valor mínimo de C garantizados por el teorema fundamental de la dualidad. La solución para el problema primal es acorde con la solución del mismo problema resuelto en la sección 6.3, ejemplo 2, utilizando el método de las esquinas. ■

Notas

1. Dejamos al lector demostrar que el dual de un problema de minimización estándar es siempre un problema de maximización estándar, siempre que los coeficientes de la función objetivo del problema primal son todos no negativos. Estos problemas siempre se pueden resolver mediante la aplicación del método simplex para resolver el problema dual.
2. Minimización de los problemas básicos en los que los coeficientes de la función objetivo no son todos no negativos, no necesariamente tienen un problema dual que es un problema de maximización estándar. ■

EJEMPLO 4

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & C = 3x + 2y \\ \text{sujeto a} & 8x + y \geq 80 \\ & 8x + 5y \geq 240 \\ & x + 5y \geq 100 \\ & x \geq 0, y \geq 0 \end{array}$$

Solución Empezamos por escribir el problema dual asociado al problema primal dado. En primer lugar, escribimos el cuadro siguiente para el problema primal:

x	y	Constante
8	1	80
8	5	240
1	5	100
3	2	

A continuación, intercambiando las columnas y los renglones de esta tabla y escribiendo como encabezados de las tres columnas de la matriz resultante las tres variables u, v y w, obtenemos la tabla

u	v	w	Constante
8	8	1	3
1	5	5	2
80	240	100	

Tomando la última tabla como si fuera parte de la tabla simplex inicial de un problema de maximización estándar, con la excepción de que los signos de los coeficientes correspondientes a la función objetivo no se invierten, se construye el problema dual requerido de la siguiente manera: maximizar la función objetivo $P = 80u + 240v + 100w$ sujeto a las restricciones

$$\begin{aligned} 8u + 8v + w &\leq 3 \\ u + 5v + 5w &\leq 2 \end{aligned}$$

donde $u \geq 0$, $v \geq 0$ y $w \geq 0$. Después de haber construido el problema dual, que es un problema de maximización estándar, lo resolvemos utilizando el método simplex. Al introducir las variables de holgura x y y, obtenemos el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{array}{rrrrrrl} 8u\ + & 8v\ + & w\ + & x & & & = 3 \\ u\ + & 5v\ + & 5w & & +\ y & & = 2 \\ -80u\ - & 240v\ - & 100w & & & +\ P & = 0 \end{array}$$

Continuando con el algoritmo simplex, obtenemos la secuencia de tablas simplex:

	u	v	w	x	y	P	Constante	Razón
Renglón pivote →	8	8	1	1	0	0	3	$\frac{3}{8}$
	1	5	5	0	1	0	2	$\frac{2}{5}$
	−80	−240	−100	0	0	1	0	
		↑ Columna pivote						

	u	v	w	x	y	P	Constante
$\xrightarrow{\frac{1}{8}R_1}$	1	1	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	0	0	$\frac{3}{8}$
	1	5	5	0	1	0	2
	−80	−240	−100	0	0	1	0

	u	v	w	x	y	P	Constante	Razón
$\xrightarrow[R_3 + 240R_1]{R_2 - 5R_1}$	1	1	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	0	0	$\frac{3}{8}$	3
Renglón pivote →	−4	0	$\frac{35}{8}$	$-\frac{5}{8}$	1	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{35}$
	160	0	−70	30	0	1	90	
			↑ Columna pivote					

	u	v	w	x	y	P	Constante
$\xrightarrow{\frac{8}{35}R_2}$	1	1	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	0	0	$\frac{3}{8}$
	$-\frac{32}{35}$	0	1	$-\frac{1}{7}$	$\frac{8}{35}$	0	$\frac{1}{35}$
	160	0	−70	30	0	1	90

	u	v	w	x	y	P	Constante
$\xrightarrow[R_3 + 70R_2]{R_1 - \frac{1}{8}R_2}$	$\frac{39}{35}$	1	0	$\frac{1}{7}$	$-\frac{1}{35}$	0	$\frac{13}{35}$
	$-\frac{32}{35}$	0	1	$-\frac{1}{7}$	$\frac{8}{35}$	0	$\frac{1}{35}$
	96	0	0	20	16	1	92
				Solución del problema primal			

La última tabla es la tabla final. El teorema fundamental de la dualidad indica que la solución para el problema primal es $x = 20$ y $y = 16$ con un valor mínimo para C de 92. ■

Nuestro último ejemplo ilustra cómo el problema de almacenamiento que se plantea en la sección 6.2 puede ser resuelto por dualidad.

EJEMPLO DE APLICACIÓN 5 Un problema de almacenamiento

Completar la solución al problema de almacenamiento dado en la sección 6.2, ejemplo de aplicación 4 (página 333).

Minimizar

$$C = 20x_1 + 8x_2 + 10x_3 + 12x_4 + 22x_5 + 18x_6 \qquad \textbf{(20)}$$

sujeto a

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 \quad\quad\quad\quad\quad\quad &\leq 400 \\ x_4 + x_5 + x_6 &\leq 600 \\ x_1 \quad\quad + x_4 \quad\quad\quad &\geq 200 \\ x_2 \quad\quad + x_5 \quad\quad &\geq 300 \\ x_3 \quad\quad + x_6 &\geq 400 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \ldots, x_6 &\geq 0 \end{aligned} \qquad \textbf{(21)}$$

Solución Al multiplicar cada una de las dos primeras de las desigualdades de (21) por 1, se obtiene el siguiente sistema equivalente de restricciones en el que cada una de las expresiones que incluyen las variables es mayor o igual a una constante:

$$\begin{aligned}
-x_1 - x_2 - x_3 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad &\geq -400\\
- x_4 - x_5 - x_6 &\geq -600\\
x_1 \qquad\qquad + x_4 \qquad\qquad &\geq 200\\
x_2 \qquad\qquad + x_5 \qquad &\geq 300\\
x_3 \qquad\qquad + x_6 &\geq 400\\
x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \ldots, x_6 &\geq 0
\end{aligned}$$

El problema ahora puede ser resuelto por dualidad. En primer lugar, escribimos la tabla:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Constante
−1	−1	−1	0	0	0	−400
0	0	0	−1	−1	−1	−600
1	0	0	1	0	0	200
0	1	0	0	1	0	300
0	0	1	0	0	1	400
20	8	10	12	22	18	

Intercambiando las columnas y los renglones de esta tabla y escribiendo como encabezados de las tres columnas de la matriz resultante las tres variables u_1, u_2, u_3, u_4 y u_5, obtenemos la tabla:

u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	Constante
−1	0	1	0	0	20
−1	0	0	1	0	8
−1	0	0	0	1	10
0	−1	1	0	0	12
0	−1	0	1	0	22
0	−1	0	0	1	18
−400	−600	200	300	400	

de la cual se construye el problema dual asociado: maximizar $P = -400u_1 - 600u_2 + 200u_3 + 300u_4 + 400u_5$, sujeto a

$$\begin{aligned}
-u_1 \qquad + u_3 \qquad\qquad\qquad &\leq 20\\
-u_1 \qquad\qquad\qquad + u_4 \qquad &\leq 8\\
-u_1 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + u_5 &\leq 10\\
-u_2 + u_3 \qquad\qquad\qquad &\leq 12\\
-u_2 \qquad + u_4 \qquad &\leq 22\\
-u_2 \qquad\qquad\qquad + u_5 &\leq 18\\
u_1 \geq 0, u_2 \geq 0, \ldots, u_5 &\geq 0
\end{aligned}$$

Al resolver el problema de maximización estándar por el algoritmo simplex, obtenemos la siguiente secuencia de tablas ($x_1, x_2, \ldots, x_6$ son variables de holgura):

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	P	Constante	Razón
	−1	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	20	—
	−1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	8	—
Renglón pivote →	−1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	10	10
	0	−1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	12	—
	0	−1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	22	—
	0	−1	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	18	18
	400	600	−200	−300	−400	0	0	0	0	0	0	1	0	

Columna pivote (u_5)

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	P	Constante	Razón
	−1	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	20	—
Renglón pivote →	−1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	8	8
	−1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	10	—
	0	−1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	12	—
$\xrightarrow[R_7 + 400R_3]{R_6 - R_3}$	0	−1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	22	22
	1	−1	0	0	0	0	0	−1	0	0	1	0	8	—
	0	600	−200	−300	0	0	0	400	0	0	0	1	4000	

Columna pivote (u_4)

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	P	Constante	Razón
	−1	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	20	—
$\xrightarrow[R_7 + 300R_2]{R_5 - R_2}$	−1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	8	—
	−1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	10	—
	0	−1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	12	—
	1	−1	0	0	0	0	−1	0	0	1	0	0	14	14
Renglón pivote →	1	−1	0	0	0	0	0	−1	0	0	1	0	8	8
	−300	600	−200	0	0	0	300	400	0	0	0	1	6400	

Columna pivote (u_1)

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	P	Constante	Razón
	0	−1	1	0	0	1	0	−1	0	0	1	0	28	28
$R_1 + R_6$	0	−1	0	1	0	0	1	−1	0	0	1	0	16	—
$\xrightarrow[R_3 + R_6]{R_2 + R_6}$	0	−1	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	18	—
Renglón pivote →	0	−1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	12	12
$R_5 - R_6$; $R_7 + 300R_6$	0	0	0	0	0	0	−1	1	0	1	−1	0	6	—
	1	−1	0	0	0	0	0	−1	0	0	1	0	8	—
	0	300	−200	0	0	0	300	100	0	0	300	1	8800	

Columna pivote (u_3)

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	P	Constante
	0	0	0	0	0	1	0	−1	−1	0	1	0	16
	0	−1	0	1	0	0	1	−1	0	0	1	0	16
	0	−1	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	18
$\xrightarrow[R_7 + 200R_4]{R_1 - R_4}$	0	−1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	12
	0	0	0	0	0	0	−1	1	0	1	−1	0	6
	1	−1	0	0	0	0	0	−1	0	0	1	0	8
	0	100	0	0	0	0	300	100	200	0	300	1	11,200

La última tabla es la tabla final, y encontramos que

$$x_1 = 0 \quad x_2 = 300 \quad x_3 = 100 \quad x_4 = 200$$
$$x_5 = 0 \quad x_6 = 300 \quad P = 11{,}200$$

Por tanto, para minimizar los costos de envío, Acrosonic debe enviar 300 sistemas de sonido de la planta I al almacén B, 100 sistemas de la planta I al almacén C, 200 sistemas de la planta II al almacén A y 300 sistemas de la planta II al almacén C. El costo total de envío de la empresa es de $11,200. ■

6.5 Ejercicios de autoevaluación

1. Escriba el problema dual asociado con el siguiente problema:

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar} && C = 2x + 5y \\ &\text{sujeto a} && 4x + y \geq 40 \\ &&& 2x + y \geq 30 \\ &&& x + 3y \geq 30 \\ &&& x \geq 0, y \geq 0 \end{aligned}$$

2. Resuelva el problema primal planteado en el ejercicio 1.

Las soluciones de los ejercicios de autoevaluación 6.5 se pueden encontrar en la página 386.

6.5 Preguntas de concepto

1. Suponga que se le da el problema de programación lineal

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar} && C = -3x - 5y \\ &\text{sujeto a} && 5x + 2y \leq 30 \\ &&& x + 3y \leq 21 \\ &&& x \geq 0, y \geq 0 \end{aligned}$$

Defina el problema de maximización estándar asociado que se utilizaría para resolver este problema de programación lineal utilizando el método simplex.

2. Mencione tres características de un problema de programación lineal de minimización estándar.

3. ¿Cuál es el problema primal asociado a un problema de programación lineal estándar de minimización? ¿Y cuál el problema dual?

4. **a.** ¿Qué hace que el teorema fundamental de la dualidad hable de la existencia de una solución a un problema primal?
   b. ¿Cómo son los valores óptimos de los problemas primal y dual relacionados?
   c. Dada la tabla simplex final asociado con un problema dual, ¿cómo determinar la solución óptima para el problema primal asociados?

6.5 Ejercicios

En los ejercicios 1 a 6 utilice la técnica desarrollada en esta sección para resolver el problema de minimización.

1. $$\begin{aligned} &\text{Minimizar} && C = -2x + y \\ &\text{sujeto a} && x + 2y \leq 6 \\ &&& 3x + 2y \leq 12 \\ &&& x \geq 0, y \geq 0 \end{aligned}$$

2. $$\begin{aligned} &\text{Minimizar} && C = -2x - 3y \\ &\text{sujeto a} && 3x + 4y \leq 24 \\ &&& 7x - 4y \leq 16 \\ &&& x \geq 0, y \geq 0 \end{aligned}$$

3. Minimizar $C = -3x - 2y$ sujeto a las restricciones del ejercicio 2.

4. $$\begin{aligned} &\text{Minimizar} && C = x - 2y + z \\ &\text{sujeto a} && x - 2y + 3z \leq 10 \\ &&& 2x + y - 2z \leq 15 \\ &&& 2x + y + 3z \leq 20 \\ &&& x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0 \end{aligned}$$

5. $$\begin{aligned} &\text{Minimizar} && C = 2x - 3y - 4z \\ &\text{sujeto a} && -x + 2y - z \leq 8 \\ &&& x - 2y + 2z \leq 10 \\ &&& 2x + 4y - 3z \leq 12 \\ &&& x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0 \end{aligned}$$

6. Minimizar $C = -3x - 2y - z$ sujeto a las restricciones del ejercicio 5.

En los ejercicios 7 a 10 se da la tabla simplex final para el problema dual. Obtenga las soluciones del problema primal y del problema dual asociado.

7. Problema: Minimizar $C = 8x + 12y$
sujeto a
$$\begin{aligned} x + 3y &\geq 2 \\ 2x + 2y &\geq 3 \\ x \geq 0, y &\geq 0 \end{aligned}$$

Tabla final:

u	v	x	y	P	Constante
0	1	$\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{4}$	0	3
1	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	2
0	0	$\frac{5}{4}$	$\frac{1}{4}$	1	13

8. Problema: Minimizar $C = 3x + 2y$
sujeto a
$$\begin{aligned} 5x + y &\geq 10 \\ 2x + 2y &\geq 12 \\ x + 4y &\geq 12 \\ x \geq 0, y &\geq 0 \end{aligned}$$

Tabla final:

u	v	w	x	y	P	Constante
1	0	$-\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$
0	1	$\frac{19}{8}$	$-\frac{1}{8}$	$\frac{5}{8}$	0	$\frac{7}{8}$
0	0	9	1	5	1	13

9. Problema: Minimizar $C = 10x + 3y + 10z$
sujeto a
$$\begin{aligned} 2x + y + 5z &\geq 20 \\ 4x + y + z &\geq 30 \\ x \geq 0, y \geq 0, z &\geq 0 \end{aligned}$$

Tabla final:

u	v	x	y	z	P	Constante
0	1	$\frac{1}{2}$	-1	0	0	2
1	0	$-\frac{1}{2}$	2	0	0	1
0	0	2	-9	1	0	3
0	0	5	10	0	1	80

10. Problema: Minimizar $C = 2x + 3y$
sujeto a
$$\begin{aligned} x + 4y &\geq 8 \\ x + y &\geq 5 \\ 2x + y &\geq 7 \\ x \geq 0, y &\geq 0 \end{aligned}$$

Tabla final:

u	v	w	x	y	P	Constante
0	1	$\frac{7}{3}$	$\frac{4}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{5}{3}$
1	0	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$
0	0	2	4	1	1	11

En los ejercicios 11-20 construya el problema dual asociado con el problema primal. Resolver el problema primal.

11. Minimizar $C = 2x + 5y$
sujeto a
$$\begin{aligned} x + 2y &\geq 4 \\ 3x + 2y &\geq 6 \\ x \geq 0, y &\geq 0 \end{aligned}$$

12. Minimizar $C = 3x + 2y$
sujeto a
$$\begin{aligned} 2x + 3y &\geq 90 \\ 3x + 2y &\geq 120 \\ x \geq 0, y &\geq 0 \end{aligned}$$

13. Minimizar $C = 6x + 4y$
sujeto a
$$\begin{aligned} 6x + y &\geq 60 \\ 2x + y &\geq 40 \\ x + y &\geq 30 \\ x \geq 0, y &\geq 0 \end{aligned}$$

14. Minimizar $C = 10x + y$
sujeto a
$$\begin{aligned} 4x + y &\geq 16 \\ x + 2y &\geq 12 \\ x &\geq 2 \\ x \geq 0, y &\geq 0 \end{aligned}$$

15. Minimizar $C = 200x + 150y + 120z$
sujeto a
$$\begin{aligned} 20x + 10y + z &\geq 10 \\ x + y + 2z &\geq 20 \\ x \geq 0, y \geq 0, z &\geq 0 \end{aligned}$$

16. Minimizar $C = 40x + 30y + 11z$
sujeto a
$$\begin{aligned} 2x + y + z &\geq 8 \\ x + y - z &\geq 6 \\ x \geq 0, y \geq 0, z &\geq 0 \end{aligned}$$

17. Minimizar $C = 6x + 8y + 4z$
sujeto a
$$\begin{aligned} x + 2y + 2z &\geq 10 \\ 2x + y + z &\geq 24 \\ x + y + z &\geq 16 \\ x \geq 0, y \geq 0, z &\geq 0 \end{aligned}$$

18. Minimizar $C = 12x + 4y + 8z$
sujeto a
$$\begin{aligned} 2x + 4y + z &\geq 6 \\ 3x + 2y + 2z &\geq 2 \\ 4x + y + z &\geq 2 \\ x \geq 0, y \geq 0, z &\geq 0 \end{aligned}$$

19. Minimizar $C = 30x + 12y + 20z$
sujeto a
$$\begin{aligned} 2x + 4y + 3z &\geq 6 \\ 6x + z &\geq 2 \\ 6y + 2z &\geq 4 \\ x \geq 0, y \geq 0, z &\geq 0 \end{aligned}$$

20. Minimizar $C = 8x + 6y + 4z$
sujeto a
$$\begin{aligned} 2x + 3y + z &\geq 6 \\ x + 2y - 2z &\geq 4 \\ x + y + 2z &\geq 2 \\ x \geq 0, y \geq 0, z &\geq 0 \end{aligned}$$

21. **TRANSPORTE** Deluxe River Cruises opera una flota de embarcaciones fluviales, la cual cuenta con dos tipos de buques: un buque tipo A con 60 camarotes de lujo y 160 estándar, además de un buque tipo B con 80 camarotes de lujo y 120 estándar. En virtud de un contrato de alquiler con Odyssey Travel Agency, Deluxe River Cruises proporciona a Odyssey un mínimo de 360 camarotes de lujo y 680 estándar para su crucero de 15 días en mayo. Cuesta \$44,000 operar un buque tipo A y \$54,000 uno tipo B por ese periodo. ¿Cuántos buques de cada tipo debe utilizar con el fin de mantener los costos de operación al mínimo? ¿Cuál es el costo mínimo?

22. **COSTOS DE ENVÍO** Acrosonic fabrica un sistema de sonido modelo G en las plantas I y II. La producción de la planta I es como máximo de 800 por mes, mientras que la producción de la planta II es como máximo de 600 por mes. Estos sistemas de sonido también son enviados a tres almacenes A, B y C, cuyos requerimientos mínimos mensuales son de 500, 400 y 400 sistemas, respectivamente. Los gastos de envío de la planta I al almacén A, al B y al C son de \$16, \$20 y \$22 por sistema, respectivamente, y los gastos de envío de la planta II a cada uno de estos almacenes son de \$18, \$16 y \$14 por sistema, respectivamente. ¿Qué programa de envíos permitirá a Acrosonic cumplir con los requerimientos de los almacenes y al mismo tiempo mantener sus gastos de envío al mínimo? ¿Cuál es el costo mínimo?

23. **PUBLICIDAD** Everest Deluxe World Travel ha decidido hacer publicidad en las ediciones dominicales de los dos principales periódicos de la ciudad. Estos anuncios se dirigen a tres grupos de clientes potenciales. Cada anuncio en el periódico I es visto por 70,000 clientes del grupo A, 40,000 del grupo B y 20,000 del grupo C. Cada anuncio en el periódico II es visto por 10,000 clientes del grupo A, 20,000 del grupo B y 40,000 del grupo C. Cada anuncio en el periódico I cuesta \$1000, y en el periódico II \$800. Everest quisiera que sus anuncios fueran leídos por lo menos por 2 millones de personas del grupo A, 1.4 millones del grupo B y 1 millón del grupo C. ¿Cuántos anuncios debe colocar Everest en cada diario para lograr sus objetivos de publicidad al costo mínimo? ¿Cuál es el costo mínimo?

24. **COSTOS DE ENVÍO** Steinwelt Piano fabrica pianos y consolas en dos instalaciones, la planta I y la planta II. La producción de la planta I es como máximo de 300 por mes, mientras que la de la planta II es como máximo de 250 por mes. Estos pianos son enviados a tres almacenes que sirven como centros de distribución para la empresa. Para surtir los pedidos actuales y futuros, el almacén A requiere un mínimo de 200 pianos por mes, el almacén B requiere un mínimo de 150 pianos por mes y el almacén C requiere un mínimo de 200 pianos por mes. El costo de envío de cada uno de los pianos de la planta I al almacén A, al B y al C es de \$60, \$60 y \$80, respectivamente, y el envío de los costos de cada piano de la planta II al almacén A, al B y al C es de \$80, \$70 y \$50, respectivamente. ¿Qué programa de envíos permitirá a Steinwelt cumplir con los requerimientos de los almacenes al tiempo que mantiene los costos de envío al mínimo? ¿Cuál es el costo mínimo?

25. **NUTRICIÓN. PLANEACIÓN DE LA DIETA** El propietario del Health JuiceBar quiere preparar un jugo de fruta bajo en calorías con un alto contenido de vitamina A y vitamina C mezclando jugo de naranja y jugo de toronja. Cada vaso de jugo de la mezcla debe contener por lo menos 1200 unidades internacionales (UI) de vitamina A y 200 UI de vitamina C. Una onza de jugo de naranja contiene 60 UI de vitamina A, 16 UI de vitamina C y 14 calorías; cada onza de jugo de toronja contiene 120 UI de vitamina A, 12 UI de vitamina C y calorías 11. ¿Cuántas onzas de cada jugo debe contener un vaso de la mezcla si se quiere cumplir con los requerimientos mínimos vitamínicos, a la vez que contiene un número mínimo de calorías?

26. **CONTROL DE LA PRODUCCIÓN** Una compañía petrolera opera dos refinerías en una ciudad determinada. La refinería I tiene una producción por día de 200, 100 y 100 barriles de petróleo de grado bajo, medio y alto, respectivamente. La refinería II tiene una producción por día de 100, 200 y 600 barriles de petróleo de grado bajo, medio y alto, respectivamente. La empresa desea producir por lo menos 1000, 1400 y 3000 barriles de petróleo de grado bajo, medio y alto, respectivamente. Si cuesta \$200 por día operar la refinería I y \$300 por día la refinería II, determine cuántos días se debe operar cada refinería con el fin de satisfacer las necesidades de producción a un costo mínimo para la empresa. ¿Cuál es el costo mínimo?

En los ejercicios 27 y 28 determine si la afirmación es verdadera o falsa. Si es verdadera, explique por qué lo es. Si es falsa, dé un ejemplo para mostrar por qué lo es.

27. Si un problema de programación lineal de minimización estándar tiene una solución única, entonces el problema de maximización correspondiente con la función objetivo $P = -C$, donde $C = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n$ es la función objetivo para el problema de minimización.

28. El valor óptimo alcanzado por la función objetivo del problema primal puede ser diferente del alcanzado por la función objetivo del problema dual.

6.5 Soluciones a los ejercicios de autoevaluación

1. En primer lugar, escribimos la tabla siguiente para el problema propuesto (original):

x	y	Constante
4	1	40
2	1	30
1	3	30
2	5	0

A continuación intercambiamos las columnas y los renglones de la tabla y colocamos como encabezados de las tres columnas de la matriz resultante las tres variables u, v y w, obteniendo la tabla

u	v	w	Constante
4	2	1	2
1	1	3	5
40	30	30	0

Tomando la última tabla como si fuera la tabla simplex inicial de un problema de programación lineal estándar, con la excepción de que los signos de los coeficientes correspondientes a la función objetivo no se invierten, construimos el problema dual requerido como sigue:

$$\begin{aligned} \text{Maximizar} \quad & P = 40u + 30v + 30w \\ \text{sujeto a} \quad & 4u + 2v + w \le 2 \\ & u + v + 3w \le 5 \\ & u \ge 0, v \ge 0, w \ge 0 \end{aligned}$$

2. Introducimos las variables de holgura x y y para obtener el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{aligned} 4u + 2v + w + x \quad &= 2 \\ u + v + 3w \quad + y \quad &= 5 \\ -40u - 30v - 30w \quad + P &= 0 \end{aligned}$$

Utilizando el algoritmo simplex, se obtiene la secuencia de tablas simplex

	u	v	w	x	y	P	Constante	Razón
Renglón pivote →	4	2	1	1	0	0	2	$\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$
	1	1	3	0	1	0	5	$\frac{5}{1} = 5$
	−40	−30	−30	0	0	1	0	
	↑ Columna pivote							

$\xrightarrow{\frac{1}{4}R_1}$

u	v	w	x	y	P	Constante
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	0	0	$\frac{1}{2}$
1	1	3	0	1	0	5
−40	−30	−30	0	0	1	0

$\xrightarrow[R_3 + 40R_1]{R_2 - R_1}$

	u	v	w	x	y	P	Constante	Razón
	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1/2}{1/4} = 2$
Renglón pivote →	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{11}{4}$	$-\frac{1}{4}$	1	0	$\frac{9}{2}$	$\frac{9/2}{11/4} = \frac{18}{11}$
	0	−10	−20	10	0	1	20	
			↑ Columna pivote					

$\xrightarrow{\frac{4}{11}R_2}$

u	v	w	x	y	P	Constante
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	0	0	$\frac{1}{2}$
0	$\frac{2}{11}$	1	$-\frac{1}{11}$	$\frac{4}{11}$	0	$\frac{18}{11}$
0	−10	−20	10	0	1	20

$\xrightarrow[R_3 + 20R_2]{R_1 - \frac{1}{4}R_2}$

	u	v	w	x	y	P	Constante	Razón
Renglón pivote →	1	$\frac{5}{11}$	0	$\frac{3}{11}$	$-\frac{1}{11}$	0	$\frac{1}{11}$	$\frac{1/11}{5/11} = \frac{1}{5}$
	0	$\frac{2}{11}$	1	$-\frac{1}{11}$	$\frac{4}{11}$	0	$\frac{18}{11}$	$\frac{18/11}{2/11} = 9$
	0	$-\frac{70}{11}$	0	$\frac{90}{11}$	$\frac{80}{11}$	1	$\frac{580}{11}$	
		↑ Columna pivote						

$\xrightarrow{\frac{11}{5}R_1}$

u	v	w	x	y	P	Constante
$\frac{11}{5}$	1	0	$\frac{3}{5}$	$-\frac{1}{5}$	0	$\frac{1}{5}$
0	$\frac{2}{11}$	1	$-\frac{1}{11}$	$\frac{4}{11}$	0	$\frac{18}{11}$
0	$-\frac{70}{11}$	0	$\frac{90}{11}$	$\frac{80}{11}$	1	$\frac{580}{11}$

$\xrightarrow[R_3 + \frac{70}{11}R_1]{R_2 - \frac{2}{11}R_1}$

u	v	w	x	y	P	Constante
$\frac{11}{5}$	1	0	$\frac{3}{5}$	$-\frac{1}{5}$	0	$\frac{1}{5}$
$-\frac{2}{5}$	0	1	$-\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	0	$\frac{8}{5}$
14	0	0	12	6	1	54
			Solución del problema primal			

La última tabla es la tabla final y la solución al problema primal es $x = 12$ y $y = 6$ con un valor mínimo para C de 54.

USO DE LA TECNOLOGÍA

Método simplex: solución de problemas de minimización

Calculadora graficadora

Una calculadora graficadora se puede utilizar para resolver problemas de minimización mediante el método simplex.

EJEMPLO 1

$$\begin{aligned} \text{Minimizar} \quad & C = 2x + 3y \\ \text{sujeto a} \quad & 8x + y \ge 80 \\ & 3x + 2y \ge 100 \\ & x + 4y \ge 80 \\ & x \ge 0, y \ge 0 \end{aligned}$$

(continúa)

Solución Empezamos por escribir el problema dual asociado al problema primal dado. Desde la tabla para el problema primal

x	y	Constante
8	1	80
3	2	100
1	4	80
2	3	

Al intercambiar las columnas y los renglones de esta tabla y colocando como encabezados de las tres columnas de la matriz resultante las variables *u, v* y *w,* obtenemos la tabla

u	v	w	Constante
8	3	1	2
1	2	4	3
80	100	80	

Esto nos indica que el problema dual es

$$\begin{aligned} \text{Maximizar} \quad & P = 80u + 100v + 80w \\ \text{sujeto a} \quad & 8u + 3v + w \le 2 \\ & u + 2v + 4w \le 3 \\ & u \ge 0, v \ge 0, w \ge 0 \end{aligned}$$

Para resolver este problema de maximización estándar, procedemos como sigue:

	u	v	w	x	y	P	Constante	Razón
Renglón pivote →	8	3	1	1	0	0	2	$\frac{2}{3}$
	1	2	4	0	1	0	3	$\frac{3}{2}$
	−80	−100	−80	0	0	1	0	

↑ Columna pivote

$\xrightarrow{\textbf{*raíz}(\frac{1}{3}, A, 1) \blacktriangleright B}$

u	v	w	x	y	P	Constante
2.67	1	0.33	0.33	0	0	0.67
1	2	4	0	1	0	3
−80	−100	−80	0	0	1	0

$\xrightarrow[\textbf{*raíz+}(100, C, 1, 3) \blacktriangleright B]{\textbf{*raíz+}(-2, B, 1, 2) \blacktriangleright C}$

	u	v	w	x	y	P	Constante	Razón
	2.67	1	0.33	0.33	0	0	0.67	2
Renglón pivote →	−4.33	0	3.33	−0.67	1	0	1.67	0.5
	186.67	0	−46.67	33.33	0	1	66.67	

↑ Columna pivote

$\xrightarrow{\textbf{*raíz}(\frac{1}{3.33}, B, 2) \blacktriangleright C}$

u	v	w	x	y	P	Constante
2.67	1	0.33	0.33	0	0	0.67
−1.30	0	1	−0.2	0.3	0	0.5
186.67	0	−46.67	33.33	0	1	66.67

$\xrightarrow[\textbf{*raíz+}(46.67, B, 2, 3) \blacktriangleright C]{\textbf{*raíz+}(-0.33, C, 2, 1) \blacktriangleright B}$

u	v	w	x	y	P	Constante
3.1	1	0	0.4	−0.1	0	0.50
−1.3	0	1	−0.2	0.3	0	0.50
125.93	0	0.05	23.99	14.02	1	90.03

Solución del problema primal

De la última tabla, vemos que $x = 23.99$ y $y = 14.02$, y el valor mínimo de C es 90.03. ■

Excel

EJEMPLO 2

$$
\begin{aligned}
\text{Minimizar} \quad & C = 2x + 3y \\
\text{sujeto a} \quad & 8x + y \geq 80 \\
& 3x + 2y \geq 100 \\
& x + 4y \geq 80 \\
& x \geq 0, y \geq 0
\end{aligned}
$$

Solución Utilizamos Solver como se delineó en el ejemplo 2, páginas 373-376, para obtener la hoja de cálculo que se muestra en la figura T1. (En este caso, seleccionar **Min** junto a Equa1 to: en vez de Max porque se trata de un problema de minimización. También seleccionar **>=** en la caja de diálogo Add Constraint porque las desigualdades en el problema son de la forma $\geq$.) De la hoja de cálculo leemos la solución: $x = 24$, $y = 14$ y $C = 90$.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Problema de minimización								
2									
3	Variables de decisión								
4		x	24						
5		y	14						
6									
7									
8	Función objetivo		90						
9									
10	Restricciones								
11			206	>=	80				
12			100	>=	100				
13			80	>=	80				

Fórmulas para las celdas señaladas
C8: = 2∗C4 + 3∗C5
C11: = 8∗C4 + C5
C12: = 3∗C4 + 2∗C5
C13: = C4 + 4∗C5

FIGURA **T1**
Hoja de cálculo completa después de usar Solver.

Nota: las palabras y los caracteres en negrita y encerrados en un recuadro (por ejemplo, **Enter**) indican que se requiere una acción (*clic*, seleccionar o presionar). Las palabras y los caracteres impresos en azul (por ejemplo, Chart sub-type) indican palabras y caracteres que aparecen en la pantalla. Las palabras y los caracteres de imprenta en una fuente de máquina de escribir (por ejemplo, `=(-2/3)*A2+2`) indican palabras o caracteres que deben ser escritos e introducidos.

(*continúa*)

EJERCICIOS CON TECNOLOGÍA

En los ejercicios 1 a 4 resuelva el problema de programación lineal por el método simplex.

1. Minimizar $C = x + y + 3z$

sujeto a
$$\begin{aligned} 2x + y + 3z &\geq 6 \\ x + 2y + 4z &\geq 8 \\ 3x + y - 2z &\geq 4 \\ x \geq 0, y \geq 0, z &\geq 0 \end{aligned}$$

2. Minimizar $C = 2x + 4y + z$

sujeto a
$$\begin{aligned} x + 2y + 4z &\geq 7 \\ 3x + y - z &\geq 6 \\ x + 4y + 2z &\geq 24 \\ x \geq 0, y \geq 0, z &\geq 0 \end{aligned}$$

3. Minimizar $C = x + 1.2y + 3.5z$

sujeto a
$$\begin{aligned} 2x + 3y + 5z &\geq 12 \\ 3x + 1.2y - 2.2z &\geq 8 \\ 1.2x + 3y + 1.8z &\geq 14 \\ x \geq 0, y \geq 0, z &\geq 0 \end{aligned}$$

4. Minimizar $C = 2.1x + 1.2y + z$

sujeto a
$$\begin{aligned} x + y - z &\geq 5.2 \\ x - 2.1y + 4.2z &\geq 8.4 \\ x \geq 0, y \geq 0, z &\geq 0 \end{aligned}$$

CAPÍTULO 6 Resumen de los términos principales

TÉRMINOS

columna pivote (355)
conjunto factible (338)
conjunto solución acotado (326)
conjunto solución de un sistema de desigualdades lineales (325)
conjunto solución no acotado (326)
elemento pivote (355)
función objetivo (330)
línea de isoutilidades (339)
método de las esquinas (340)
método simplex (357)
problema de maximización estándar (351)
problema de minimización estándar (377)
problema de programación lineal (330)
problema dual (378)
problema primal (378)
renglón pivote (355)
solución básica (354)
solución factible (338)
solución óptima (338)
tabla simplex (356)
variable básica (353)
variable de holgura (352)
variable no básica (353)

CAPÍTULO 6 Preguntas de revisión de conceptos

Llene los espacios en blanco.

1. a. El conjunto solución de la desigualdad $ax + by < c$ es un _____ _____ que no incluye la _____ con la ecuación $ax + by = c$.

b. Si $ax + by < c$ describe el semiplano inferior, entonces la desigualdad _____ describe el semiplano inferior, junto con la línea con la ecuación _____.

2. a. El conjunto solución de un sistema de desigualdades lineales con dos variables x y y es el conjunto de todas las _____ que satisfacen _____ la desigualdad del sistema.

b. El conjunto solución de un sistema de desigualdades lineales es _____ si puede ser _____ por un círculo.

3. Un problema de programación lineal consiste en una función lineal, llamada _____ _____ que será _____ o _____ sujeta a restricciones en forma de ecuaciones _____ o _____.

4. a. Si un problema de programación lineal tiene una solución, entonces debe ocurrir en un/una _____ _____ del conjunto factible.

b. Si la función objetivo de un problema de programación lineal se optimiza en dos vértices adyacentes del conjunto factible, entonces se ha optimizado en todos los puntos en el segmento de _____ que une estos vértices.

5. En un problema de maximización estándar: la función objetivo debe ser _____; todas las variables involucradas en el problema son _____ _____, y todas las restricciones lineales se pueden escribir de modo que la expresión con las variables es _____ o _____ a una constante no negativa.

6. En la creación de la tabla simplex inicial, primero transformamos el sistema de desigualdades lineales en un sistema de _____ lineales utilizando _____ de _____, se reescribe la función objetivo para que tenga la forma _____ y a continuación se escribe _____ del sistema de ecuaciones lineales obtenidas anteriormente. Por último, la tabla simplex inicial es la matriz _____ asociada a este sistema de ecuaciones lineales.

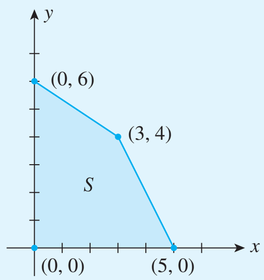
7. En un problema de minimización estándar: de la función objetivo debe ser ____ ; todas las variables involucradas en el problema son ____, y todas las restricciones lineales se pueden escribir de modo que la expresión con las variables es ____ o ____ a una constante.

8. El teorema fundamental de dualidad establece que un problema primal tiene solución si y sólo si el problema ____ correspondiente tiene solución. Si existe una solución, entonces las funciones ____ tanto del problema primal como del problema dual alcanzan el mismo ____ ____.

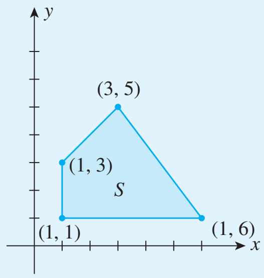
CAPÍTULO 6 Ejercicios de revisión

En los ejercicios 1 y 2 calcular el (los) valor(es) óptimo(s) de la función objetivo en el conjunto factible *S*.

1. $Z = 2x + 3y$



2. $Z = 4x + 3y$



En los ejercicios 3 a 12 utilice el método de las esquinas para resolver el problema de programación lineal proporcionado.

3. Maximizar $P = 3x + 5y$
sujeto a
$$\begin{aligned} 2x + 3y &\leq 12 \\ x + y &\leq 5 \\ x \geq 0, y &\geq 0 \end{aligned}$$

4. Maximizar $P = 2x + 3y$
sujeto a
$$\begin{aligned} 2x + y &\leq 12 \\ x - 2y &\leq 1 \\ x \geq 0, y &\geq 0 \end{aligned}$$

5. Minimizar $C = 2x + 5y$
sujeto a
$$\begin{aligned} x + 3y &\geq 15 \\ 4x + y &\geq 16 \\ x \geq 0, y &\geq 0 \end{aligned}$$

6. Minimizar $C = 3x + 4y$
sujeto a
$$\begin{aligned} 2x + y &\geq 4 \\ 2x + 5y &\geq 10 \\ x \geq 0, y &\geq 0 \end{aligned}$$

7. Maximizar $P = 3x + 2y$
sujeto a
$$\begin{aligned} 2x + y &\leq 16 \\ 2x + 3y &\leq 36 \\ 4x + 5y &\geq 28 \\ x \geq 0, y &\geq 0 \end{aligned}$$

8. Maximizar $P = 6x + 2y$
sujeto a
$$\begin{aligned} x + 2y &\leq 12 \\ x + y &\leq 8 \\ 2x - 3y &\geq 6 \\ x \geq 0, y &\geq 0 \end{aligned}$$

9. Minimizar $C = 2x + 7y$
sujeto a
$$\begin{aligned} 3x + 5y &\geq 45 \\ 3x + 10y &\geq 60 \\ x \geq 0, y &\geq 0 \end{aligned}$$

10. Minimizar $C = 4x + y$
sujeto a
$$\begin{aligned} 6x + y &\geq 18 \\ 2x + y &\geq 10 \\ x + 4y &\geq 12 \\ x \geq 0, y &\geq 0 \end{aligned}$$

11. Encuentre el máximo y el mínimo de $Q = x + y$ sujeto a
$$\begin{aligned} 5x + 2y &\geq 20 \\ x + 2y &\geq 8 \\ x + 4y &\leq 22 \\ x \geq 0, y &\geq 0 \end{aligned}$$

12. Calcular el máximo y el mínimo de $Q = 2x + 5y$ sujeto a
$$\begin{aligned} x + y &\geq 4 \\ -x + y &\leq 6 \\ x + 3y &\leq 30 \\ x &\leq 12 \\ x \geq 0, y &\geq 0 \end{aligned}$$

En los ejercicios 13 a 20 utilice el método simplex para resolver el problema de programación lineal.

13. Maximizar $P = 3x + 4y$
sujeto a
$$\begin{aligned} x + 3y &\leq 15 \\ 4x + y &\leq 16 \\ x \geq 0, y &\geq 0 \end{aligned}$$

14. Maximizar $P = 2x + 5y$
sujeto a
$$\begin{aligned} 2x + y &\leq 16 \\ 2x + 3y &\leq 24 \\ y &\leq 6 \\ x \geq 0, y &\geq 0 \end{aligned}$$

15. Maximizar $P = 2x + 3y + 5z$
sujeto a
$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &\leq 12 \\ x - 3y + 2z &\leq 10 \\ x \geq 0, y \geq 0, z &\geq 0 \end{aligned}$$

16. Maximizar $P = x + 2y + 3z$

sujeto a
$$\begin{aligned} 2x + y + z &\le 14 \\ 3x + 2y + 4z &\le 24 \\ 2x + 5y - 2z &\le 10 \\ x \ge 0, y \ge 0, z &\ge 0 \end{aligned}$$

17. Minimizar $C = 3x + 2y$

sujeto a
$$\begin{aligned} 2x + 3y &\ge 6 \\ 2x + y &\ge 4 \\ x \ge 0, y &\ge 0 \end{aligned}$$

18. Minimizar $C = x + 2y$

sujeto a
$$\begin{aligned} 3x + y &\ge 12 \\ x + 4y &\ge 16 \\ x \ge 0, y &\ge 0 \end{aligned}$$

19. Minimizar $C = 24x + 18y + 24z$

sujeto a
$$\begin{aligned} 3x + 2y + z &\ge 4 \\ x + y + 3z &\ge 6 \\ x \ge 0, y \ge 0, z &\ge 0 \end{aligned}$$

20. Minimizar $C = 4x + 2y + 6z$

sujeto a
$$\begin{aligned} x + 2y + z &\ge 4 \\ 2x + y + 2z &\ge 2 \\ 3x + 2y + z &\ge 3 \\ x \ge 0, y \ge 0, z &\ge 0 \end{aligned}$$

En los ejercicios 21 a 23 utilice el método de las esquinas para resolver el problema de programación lineal.

21. ANÁLISIS FINANCIERO Un inversionista ha decidido dedicar hasta $80,000 a la compra de acciones ordinarias de dos empresas, la A y la B. También ha estimado que existe la posibilidad de pérdida de hasta 1% del capital de su inversión en la empresa A y la posibilidad de pérdida de hasta 4% en su inversión en la B, y ha decidido que estas pérdidas, en conjunto, no deben superar $2000. Por otra parte, espera tener 14% de utilidad por su inversión en la empresa A y 20% de utilidad por su inversión en la B. Determine cuánto debe invertir en las acciones de cada empresa a fin de maximizar el rendimiento de su inversión.

22. MANUFACTURA. PROGRAMACIÓN DE LA PRODUCCIÓN Soundex fabrica dos modelos de radio-relojes. El modelo A requiere 15 minutos de mano de obra en la línea de ensamble I y 10 minutos en la línea II. El modelo B requiere 10 minutos en la línea de ensamble I y 12 minutos en la línea II. Cada día están disponibles, a lo sumo, 25 horas de trabajo de ensamble en la línea I y 22 en la línea II. Se prevé que Soundex obtendrá una utilidad de $12 en el modelo A y $10 en el modelo B. ¿Cuántos radio-relojes de cada modelo debe fabricar Soundex cada día con el fin de maximizar sus utilidades?

23. MANUFACTURA. PROGRAMACIÓN DE LA PRODUCCIÓN Kane Manufacturing cuenta con una división que fabrica dos modelos de rejillas para chimenea, el modelo A y el modelo B. Para fabricar cada rejilla el modelo A requiere 3 libras de hierro fundido y 6 minutos de mano de obra. Para fabricar cada rejilla modelo B requiere 4 libras de hierro fundido y 3 minutos de mano de obra. La utilidad por cada rejilla modelo A es de $2.00 y por cada rejilla modelo B es de $1.50. Cada día se tienen disponibles 1000 libras de hierro fundido y 20 horas de mano de obra para la fabricación de rejillas. Debido a la cartera de pedidos para el modelo B, el gerente de Kane ha decidido fabricar por lo menos 180 rejillas del modelo B por día. ¿Cuántas rejillas por día de cada modelo debe producir la división a fin de maximizar las utilidades de Kane?

En los ejercicios 24 a 26 utilice el método simplex para resolver el problema de programación lineal.

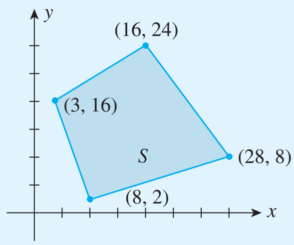
24. MINERÍA. PRODUCCIÓN Perth Mining Company opera dos minas con el fin de extraer oro y plata. Operar la mina Saddle cuesta $14,000 por día y produce 50 onzas de oro y 3000 de plata cada día. Operar la mina Horseshoe cuesta $16,000 por día y produce 75 onzas de oro y 1000 onzas de plata cada día. La gerencia de la empresa ha establecido un objetivo de por lo menos 650 onzas de oro y 18,000 de plata. ¿Cuántos días debe operarse cada mina de manera que el objetivo pueda lograrse al costo mínimo? ¿Cuál es el costo mínimo?

25. ANÁLISIS DE INVERSIONES Jorge ha decidido invertir hasta $100,000 en valores en forma de acciones corporativas. Ha clasificado sus opciones en tres grupos de acciones: acciones estables que considera que producirán un rendimiento de 10% (dividendos y apreciación del capital) en un año, acciones de crecimiento que se supone producirán un rendimiento de 15% en un año y acciones especulativas que asume producirán un rendimiento de 20% (debido principalmente a la apreciación del capital) en un año. Además, debido a los riesgos relativos inherentes a la inversión, Jorge ha decidido que no más de 30% de su inversión debe ser en acciones de crecimiento y especulativas, y que por lo menos 50% de su inversión debe estar en acciones estables y especulativas. Determine cuánto debe invertir Jorge en cada grupo de acciones con la expectativa de maximizar el rendimiento de sus inversiones.

26. MAXIMIZACIÓN DE UTILIDADES Una empresa fabrica tres productos, A, B y C, en dos máquinas, I y II. Se ha determinado que la empresa obtendrá una utilidad de $4 por unidad del producto A, $6 por unidad del producto B y $8 por unidad del producto C. La fabricación de una unidad del producto A requiere 9 minutos en la máquina I y 6 en la II; la fabricación de una unidad del producto B requiere 12 minutos en la máquina I y 6 en la II; la fabricación de una unidad del producto C requiere 18 minutos en la máquina I y 10 en la II. Hay 6 horas de tiempo máquina disponibles en la máquina I y 4 horas de tiempo máquina en la II en cada turno. ¿Cuántas unidades de cada producto se deben producir en cada turno a fin de maximizar las utilidades de la empresa?

CAPÍTULO 6 Antes de continuar. . .

1. Calcule los valores mínimo y máximo de $Z = 3x - y$ en el siguiente conjunto factible.



2. Utilice el método de esquinas para resolver el siguiente problema de programación lineal:

$$\begin{array}{ll} \text{Maximizar} & P = x + 3y \\ \text{sujeto a} & 2x + 3y \leq 11 \\ & 3x + 7y \leq 24 \\ & x \geq 0, y \geq 0 \end{array}$$

3. Considere el problema de programación lineal siguiente:

$$\begin{array}{ll} \text{Maximizar} & P = x + 2y - 3z \\ \text{sujeto a} & 2x + y - z \leq 3 \\ & x - 2y + 3z \leq 1 \\ & 3x + 2y + 4z \leq 17 \\ & x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0 \end{array}$$

Escriba la tabla simplex inicial para el problema e identifique el elemento pivote a ser utilizado en la primera iteración del método simplex.

4. La siguiente tabla simplex está en su forma final. Encuentre la solución al problema de programación lineal asociado a esta tabla.

x	y	z	u	v	w	P	Constante
0	$\frac{1}{2}$	0	1	$-\frac{1}{2}$	0	0	2
0	$\frac{1}{4}$	1	0	$\frac{5}{4}$	$-\frac{1}{2}$	0	11
1	$\frac{1}{4}$	0	0	$-\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$	0	2
0	$\frac{13}{4}$	0	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	28

5. Utilizando el método simplex, resuelva el problema de programación lineal siguiente:

$$\begin{array}{ll} \text{Maximizar} & P = 5x + 2y \\ \text{sujetos a} & 4x + 3y \leq 30 \\ & 2x - 3y \leq 6 \\ & x \geq 0, y \geq 0 \end{array}$$

CONJUNTOS Y PROBABILIDAD

7

A MENUDO TRATAMOS con colecciones de objetos bien definidas llamadas conjuntos. En este capítulo se verá cómo se combinan algebraicamente los conjuntos para producir otros conjuntos. También estudiaremos algunas técnicas para determinar el número de elementos en un conjunto y la variedad de formas en que los elementos de un conjunto se acomodan o combinan. Después de proporcionar el significado técnico del término *probabilidad*, se verá cómo se aplican las reglas de la probabilidad a muchas situaciones reales para calcular la probabilidad de ocurrencia de ciertos eventos.

¿De cuántas maneras The Futurists (un grupo de rock) pueden planear su gira de conciertos en San Francisco, Los Ángeles, San Diego, Denver y Las Vegas si deben hacer tres presentaciones consecutivas en California? En el ejemplo 13, página 425, mostraremos cómo determinar el número de diferentes itinerarios posibles.

7.1 Conjuntos y operaciones de conjuntos

Terminología y notación de conjuntos

Con frecuencia tratamos con colecciones de diferentes tipos de objetos. Por ejemplo, al realizar un estudio de la distribución del peso de los recién nacidos, podríamos considerar la colección de todos los bebés nacidos en el Hospital General de Massachusetts durante 2008. En un estudio del consumo de combustible de los automóviles compactos, podríamos estar interesados en la colección de automóviles compactos fabricados por General Motors, modelo 2008. Estas colecciones son ejemplos de conjuntos. De manera más específica, un **conjunto** es una colección bien definida de objetos. De ahí que un conjunto no sólo es una colección de objetos cualesquiera, sino que debe estar bien definido en el sentido de que si nos proporcionan un objeto debemos poder determinar si éste pertenece o no a la colección.

Los objetos de un conjunto se llaman **elementos**, o *miembros*, **de un conjunto**, y por lo general se denotan por medio de letras minúsculas $a, b, c, \ldots$; los conjuntos por sí mismos comúnmente se denotan por letras mayúsculas $A, B, C, \ldots$. Los elementos de un conjunto pueden mostrarse mediante una lista de todos los elementos entre llaves. Por ejemplo, al usar la **notación de lista**, el conjunto A, que se compone de las primeras tres letras del alfabeto se escribe

$$A = \{a, b, c\}$$

El conjunto B de todas las letras del alfabeto se escribe

$$B = \{a, b, c, \ldots, z\}$$

Otra notación de uso común es la **notación de conjuntos**. Enseguida se proporciona una regla que describe la propiedad o propiedades definitivas que un objeto x debe satisfacer para reunir los requisitos para pertenecer al conjunto. Utilizando esta notación, el conjunto B se escribe como

$$B = \{x \mid x \text{ es una letra del alfabeto}\}$$

y se lee "B es el conjunto de todos los elementos x tales que x es una letra del alfabeto".

Si a es un elemento de un conjunto A, se escribe $a \in A$ y se lee "a pertenece a A" o "a es un elemento de A." Sin embargo, si el elemento a no pertenece al conjunto A, entonces se escribe $a \notin A$ y se lee "a no pertenece a A". Por ejemplo, si $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, entonces $3 \in A$ pero $6 \notin A$.

Explore y analice

1. Sea A la colección de todos los días de agosto de 2008 en los cuales la temperatura media diaria en el aeropuerto internacional de San Francisco fue aproximadamente de 75°F. ¿A es un conjunto? Explique su respuesta.
2. Sea B la colección de todos los días de agosto de 2008 en los cuales la temperatura media diaria en el aeropuerto internacional de San Francisco fue de 73.5°F y 81.2°F, inclusive. ¿B es un conjunto? Explique su respuesta.

Igualdad de conjuntos

Dos conjuntos A y B son **iguales**, en forma escrita $A = B$, si y sólo si tienen exactamente los mismos elementos.

EJEMPLO 1 Sean A, B y C los conjuntos

$$A = \{a, e, i, o, u\}$$
$$B = \{a, i, o, e, u\}$$
$$C = \{a, e, i, o\}$$

Por tanto, $A = B$ ya que ambos contienen exactamente los mismos elementos. Observe que el orden en el cual se muestran los elementos no es importante. Además, $A \neq C$ ya que $u \in A$ pero $u \notin C$. De modo parecido, concluimos que $B \neq C$. ■

Subconjunto

Si cada elemento de un conjunto A es también un elemento de un conjunto B, entonces decimos que A es un **subconjunto** de B y escribimos $A \subseteq B$.

A partir de esta definición, dos conjuntos A y B son iguales si y sólo si (1) $A \subseteq B$ y (2) $B \subseteq A$. Usted puede verificar esto (vea el ejercicio 66).

EJEMPLO 2 Si observa el ejemplo 1, verá que $C \subseteq B$ ya que cada elemento de C es también un elemento de B. Además, si D es el conjunto

$$D = \{a, e, i, o, x\}$$

entonces D no es un subconjunto de A, lo que se escribe $D \nsubseteq A$, dado que $x \in D$ pero $x \notin A$. Observe que $A \nsubseteq D$ también, ya que $u \in A$ pero $u \notin D$. ■

Si A y B son dos conjuntos tales que $A \subseteq B$ pero $A \neq B$, entonces decimos que A es un **subconjunto propio** de B. En otras palabras, un conjunto A es un subconjunto propio de un conjunto B, lo cual se escribe $A \subset B$, si (1) $A \subseteq B$ y (2) existe por lo menos un elemento en B que no pertenece a A. La segunda condición establece que el conjunto A es correctamente "menor" que el conjunto B.

EJEMPLO 3 Sean $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ y $B = \{2, 4, 6\}$. Por tanto B es un subconjunto propio de A debido a que (1) $B \subseteq A$, lo cual se verifica fácilmente, y (2) existe por lo menos un elemento en A que no está en B, por ejemplo, el elemento 1. ■

Cuando nos referimos a conjuntos y subconjuntos utilizamos los símbolos $\subset$, $\subseteq$, $\supset$ y $\supseteq$ para expresar la idea de "contención". No obstante, cuando queremos mostrar que un elemento está contenido en un conjunto, usamos el símbolo $\in$ para expresar la idea de "pertenencia". Así, en el ejemplo 3, escribiríamos $1 \in A$ y *no* $\{1\} \in A$.

Conjunto vacío

El conjunto que no contiene elementos se llama **conjunto vacío** y se denota por $\varnothing$.

El conjunto vacío, $\varnothing$, es un subconjunto de todo conjunto. Para entender esto, observe que $\varnothing$ no tiene elementos; por tanto no contiene elementos que no pertenezcan a algún conjunto A.

VIDEO

EJEMPLO 4 Haga una lista de todos los subconjuntos del conjunto $A = \{a, b, c\}$.

Solución Existe un subconjunto que no contiene elementos, en concreto, el conjunto vacío $\varnothing$. A continuación observe que hay tres subconjuntos que contienen un elemento,

$$\{a\}, \{b\}, \{c\}$$

los tres subconjuntos contienen dos elementos,

$$\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}$$

y un subconjunto contiene tres elementos, el conjunto A mismo. Por consiguiente, los subconjuntos de A son

$$\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}$$ ■

En contraste con el conjunto vacío tenemos, en el otro extremo, la noción de un conjunto más grande, o universal. Un **conjunto universal** es el conjunto de todos los elementos de interés en un análisis particular. Es el más grande en el sentido de que todos los conjuntos considerados en el análisis del problema son subconjuntos del conjunto universal. Desde luego, los diferentes conjuntos universales se asocian con problemas distintos, como muestra el ejemplo 5.

EJEMPLO 5

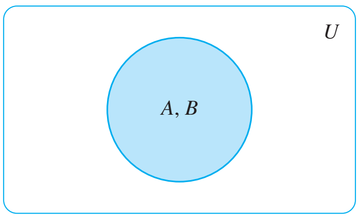
a. Si el problema a resolver es determinar la razón de estudiantes mujeres a estudiantes hombres en un colegio, entonces una opción lógica de un conjunto universal es el conjunto que se compone de todo el cuerpo de estudiantes del colegio.
b. Si el problema es determinar la razón de estudiantes mujeres a estudiantes hombres en el departamento de administración del colegio del inciso (a), entonces el conjunto de todos los estudiantes en el departamento de administración puede elegirse como conjunto universal. ■

La representación visual de los conjuntos se realiza mediante el uso de **diagramas de Venn**, los cuales son de ayuda considerable en la comprensión de los conceptos introducidos antes, así como en la solución de problemas que involucran conjuntos. El conjunto universal U se representa por un rectángulo y los subconjuntos de U se representan por regiones que están dentro del rectángulo.

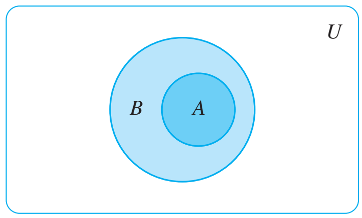
EJEMPLO 6 Utilice diagramas de Venn para ilustrar los enunciados siguientes:

a. Los conjuntos A y B son iguales.
b. El conjunto A es un subconjunto propio del conjunto B.
c. Los conjuntos A y B no son subconjuntos uno del otro.

Solución Los diagramas de Venn respectivos se muestran en la figura 1a-c.



(a) $A = B$



(b) $A \subset B$

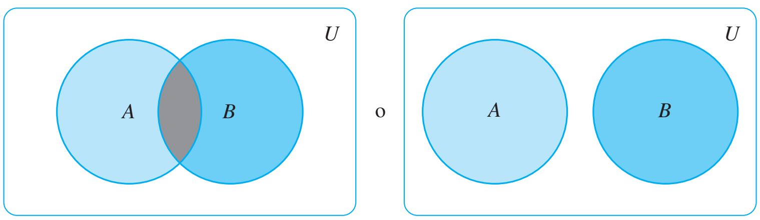


FIGURA 1

(c) $A \not\subseteq B$ y $B \not\subseteq A$ ■

Operaciones de conjuntos

Una vez presentado el concepto de conjunto, nuestra siguiente tarea es considerar las operaciones con conjuntos, es decir, considerar maneras en que los conjuntos pueden combinarse para producir otros conjuntos. Estas operaciones permiten combinar conjuntos de una manera muy parecida a cómo las operaciones de suma y multiplicación permiten combinar números para obtener otros números. De aquí en adelante, se supondrá que todos los conjuntos son subconjuntos de un conjunto universal U dado.

Unión de conjuntos

Sean A y B conjuntos. La **unión** de A y B, que se escribe $A \cup B$, es el conjunto de todos los elementos que pertenecen, ya sea a A, a B o a ambos.

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ o } x \in B \text{ o a ambos}\}$$

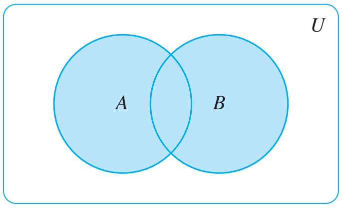


FIGURA 2
Unión de conjuntos $A \cup B$.

La porción sombreada del diagrama de Venn (figura 2) representa el conjunto $A \cup B$.

EJEMPLO 7 Si $A = \{a, b, c\}$ y $B = \{a, c, d\}$, entonces $A \cup B = \{a, b, c, d\}$. ■

Intersección de conjuntos

Sean A y B conjuntos. El conjunto de elementos comunes a los conjuntos A y B, que se escribe $A \cap B$, se llama **intersección** de A y B.

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ y } x \in B\}$$

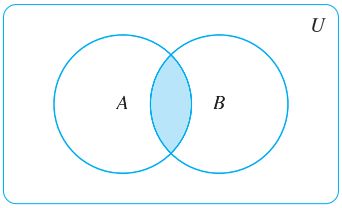


FIGURA 3
Intersección de conjuntos $A \cap B$.

La porción sombreada del diagrama de Venn (figura 3) representa el conjunto $A \cap B$.

EJEMPLO 8 Sean $A = \{a, b, c\}$ y $B = \{a, c, d\}$. Por tanto $A \cap B = \{a, c\}$. (Compare este resultado con el ejemplo 7.) ■

EJEMPLO 9 Sean $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ y $B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$. Por tanto $A \cap B = \varnothing$. ■

Los dos conjuntos del ejemplo 9 tienen una intersección vacía, o nula. En general, se dice que los conjuntos A y B son **disjuntos** si no tienen elementos en común, es decir, si $A \cap B = \varnothing$.

EJEMPLO 10 Sea U el conjunto de todos los estudiantes en el aula. Si $M = \{x \in U \mid x \text{ es hombre})$ y $F = \{x \in U \mid x \text{ es mujer}\}$, entonces $F \cap M = \varnothing$ y por ende F y M son disjuntos. ■

Complemento de un conjunto

Si U es un conjunto universal y A es un subconjunto de U, entonces el conjunto de todos los elementos de U que no están en A se llama **complemento** de A y se denota por A^c.

$$A^c = \{x \mid x \in U \text{ y } x \notin A\}$$

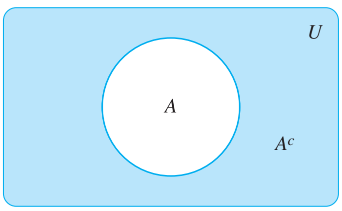


FIGURA 4
Complemento de conjuntos.

La porción sombreada del diagrama de Venn (figura 4) muestra el conjunto A^c.

EJEMPLO 11 Sean $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ y $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$. Por tanto $A^c = \{1, 3, 5, 7, 9\}$. ■

Explore y analice

Sean A, B y C subconjuntos no vacíos de un conjunto U.

1. Suponga que $A \cap B \neq \varnothing$, $A \cap C \neq \varnothing$ y $B \cap C \neq \varnothing$. ¿Puede usted concluir que $A \cap B \cap C \neq \varnothing$? Explique su respuesta con un ejemplo.
2. Suponga que $A \cap B \cap C \neq \varnothing$. ¿Puede concluir que $A \cap B \neq \varnothing$, $A \cap C \neq \varnothing$ y $B \cap C \neq \varnothing$? Explique su respuesta.

Las reglas siguientes son válidas para el complemento de un conjunto. Intente verificarlas.

Complemento de conjuntos

Si U es un conjunto universal y A es un subconjunto de U, por tanto

a. $U^c = \varnothing$ **b.** $\varnothing^c = U$ **c.** $(A^c)^c = A$
d. $A \cup A^c = U$ **e.** $A \cap A^c = \varnothing$

Las operaciones con conjuntos satisfacen las propiedades siguientes.

Propiedades de las operaciones con conjuntos

Sea U un conjunto universal. Si A, B y C son subconjuntos arbitrarios de U, entonces

$$A \cup B = B \cup A$$ Ley conmutativa para la unión

$$A \cap B = B \cap A$$ Ley conmutativa para la intersección

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$ Ley asociativa para la unión

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$ Ley asociativa para la intersección

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$ Ley distributiva para la unión

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$ Ley distributiva para la intersección

Dos propiedades adicionales, conocidas como leyes de De Morgan, son válidas para las operaciones con conjuntos.

Leyes de De Morgan

Sean A y B conjuntos. Por tanto

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c \qquad \textbf{(1)}$$
$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c \qquad \textbf{(2)}$$

La ecuación (1) establece que el complemento de la unión de dos conjuntos es igual a la intersección de sus complementos. La ecuación (2) establece que el complemento de la intersección de dos conjuntos es igual a la unión de sus complementos.

No demostraremos las leyes de De Morgan aquí, pero demostraremos la validez de (2) en el ejemplo siguiente.

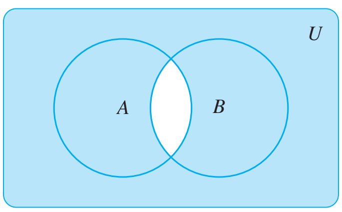
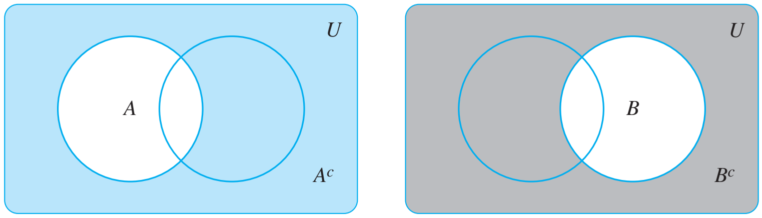


FIGURA **5**
$(A \cap B)^c$

EJEMPLO 12 Utilizando diagramas de Venn, muestre que

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$

Solución $(A \cap B)^c$ es el conjunto de elementos en U pero no en $A \cap B$ y, por tanto, es la región sombreada de la figura 5. Luego, A^c y B^c se muestran en la figura 6a-b. Se ve fácilmente que su unión, $A^c \cup B^c$, es igual a $(A \cap B)^c$ al remitirnos una vez más a la figura 5.



(a) **(b)**

FIGURA **6**
$A^c \cup B^c$ es el conjunto obtenido al unir (a) y (b).

EJEMPLO 13 Sean $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, $A = \{1, 2, 4, 8, 9)$ y $B = \{3, 4, 5, 6, 8\}$. Verifique por cálculo directo que $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$.

Solución $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9\}$, por tanto $(A \cup B)^c = \{7, 10\}$. Además, $A^c = \{3, 5, 6, 7, 10\}$ y $B^c = \{1, 2, 7, 9, 10\}$, de ahí que $A^c \cap B^c = \{7, 10\}$. A continuación se presenta el resultado requerido.

EJEMPLO DE APLICACIÓN 14 Opciones de automóviles Sean U el conjunto de todos los automóviles en el lote de un vendedor y

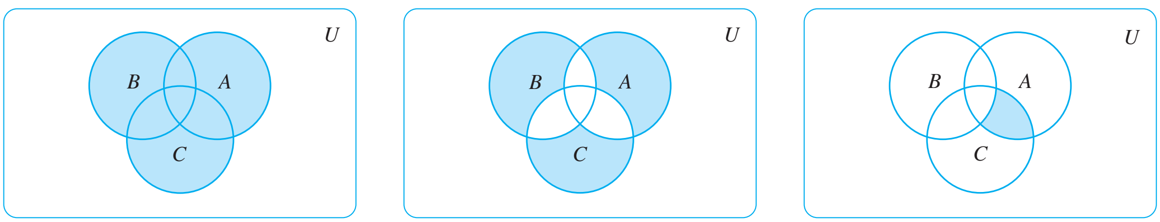
$$A = \{x \in U \mid x \text{ está equipado con transmisión automática}\}$$
$$B = \{x \in U \mid x \text{ está equipado con aire acondicionado}\}$$
$$C = \{x \in U \mid x \text{ está equipado con bolsas de aire laterales}\}$$

Encuentre una expresión en función de A, B y C para cada uno de los conjuntos siguientes:

a. El conjunto de automóviles con al menos una de las opciones dadas
b. El conjunto de automóviles con exactamente una de las opciones dadas
c. El conjunto de automóviles con transmisión automática y bolsas de aire laterales, pero sin aire acondicionado

Solución

a. El conjunto de automóviles con al menos una de las opciones dadas es $A \cup B \cup C$ (figura 7a).
b. El conjunto de automóviles con transmisión automática está dado únicamente por $A \cap B^c \cap C^c$. De manera similar, encontramos que el conjunto de automóviles con aire acondicionado está dado sólo por $B \cap C^c \cap A^c$, mientras el conjunto de automóviles con bolsas de aire laterales está dado únicamente por $C \cap A^c \cap B^c$. Por tanto, el conjunto de automóviles con exactamente una de las opciones dadas es $(A \cap B^c \cap C^c) \cup (B \cap C^c \cap A^c) \cup (C \cap A^c \cap B^c)$ (figura 7b).
c. El conjunto de automóviles con transmisión automática y bolsas de aire laterales, pero sin aire acondicionado, está dado por $A \cap C \cap B^c$ (figura 7c).



(a) El conjunto de automóviles con al menos una opción

(b) El conjunto de automóviles con exactamente una opción

(c) El conjunto de automóviles con transmisión automática y bolsas de aire laterales pero sin aire acondicionado

FIGURA **7**

7.1 Ejercicios de autoevaluación

1. Sean $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{3, 4, 5, 6\}$ y $C = \{2, 3, 4\}$. Encuentre los conjuntos siguientes:
a. A^c **b.** $A \cup B$ **c.** $B \cap C$
d. $(A \cup B) \cap C$ **e.** $(A \cap B) \cup C$ **f.** $A^c \cap (B \cup C)^c$

2. Sea U el conjunto de todos los miembros de la Cámara de Representantes. Sean

$$D = \{x \in U \mid x \text{ es demócrata}\}$$
$$R = \{x \in U \mid x \text{ es republicano}\}$$
$$F = \{x \in U \mid x \text{ es mujer}\}$$
$$L = \{x \in U \mid x \text{ es abogado de profesión}\}$$

Describa cada uno de los conjuntos siguientes con palabras.
a. $D \cap F$ **b.** $F^c \cap R$ **c.** $D \cap F \cap L^c$

Las soluciones de los ejercicios de autoevaluación 7.1 pueden encontrarse en la página 405.

7.1 Preguntas de concepto

1. a. ¿Qué es un conjunto? Proporcione un ejemplo.
b. ¿Cuándo son iguales dos conjuntos? Dé un ejemplo de dos conjuntos iguales.
c. ¿Qué es el conjunto vacío?

2. ¿Qué puede decir acerca de dos conjuntos A y B tales que
a. $A \cup B \subseteq A$ **b.** $A \cup B = \varnothing$
c. $A \cap B = B$ **d.** $A \cap B = \varnothing$

3. a. Si $A \subset B$, ¿qué puede decir acerca de la relación entre A^c y B^c?
b. Si $A^c = \varnothing$, ¿qué puede decir acerca de A?

7.1 Ejercicios

En los ejercicios 1-4 escriba el conjunto en notación de conjuntos.

1. El conjunto de medallistas de oro en los Juegos Olímpicos de Invierno de 2010

2. El conjunto de equipos de futbol americano en la NFL

3. $\{3, 4, 5, 6, 7\}$

4. $\{1, 3, 5, 7, 9, 11, \ldots, 39\}$

En los ejercicios 5-8 haga una lista de los elementos del conjunto en notación de lista.

5. $\{x \mid x$ es un dígito del número 352,646$\}$

6. $\{x \mid x$ es una letra de la palabra *HIPOPÓTAMO*$\}$

7. $\{x \mid 2 - x = 4$ y x es un entero$\}$

8. $\{x \mid 2 - x = 4$ y x es una fracción$\}$

En los ejercicios 9-14 establezca si los enunciados son verdaderos o falsos.

9. a. $\{a, b, c\} = \{c, a, b\}$ **b.** $A \in A$

10. a. $\varnothing \in A$ **b.** $A \subset A$

11. a. $0 \in \varnothing$ **b.** $0 = \varnothing$

12. a. $\{\varnothing\} = \varnothing$ **b.** $\{a, b\} \in \{a, b, c\}$

13. $\{$Chevrolet, Pontiac, Buick$\} \subset \{x \mid x$ es una división de General Motors$\}$

14. $\{x \mid x$ es un medallista de plata en los Juegos Olímpicos de Invierno de 2010$\} = \varnothing$

En los ejercicios 15 y 16, $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Determine si los enunciados son verdaderos o falsos.

15. a. $2 \in A$ **b.** $A \subseteq \{2, 4, 6\}$
16. a. $0 \in A$ **b.** $\{1, 3, 5\} \in A$

17. $A = \{1, 2, 3\}$. ¿Cuál de los conjuntos siguientes es igual a A?
a. $\{2, 1, 3\}$ **b.** $\{3, 2, 1\}$
c. $\{0, 1, 2, 3\}$

18. $A = \{a, e, l, t, r\}$. ¿Cuál de los conjuntos siguientes es igual a A?
a. $\{x \mid x$ es una letra de la palabra *later*$\}$
b. $\{x \mid x$ es una letra de la palabra *latter*$\}$
c. $\{x \mid x$ es una letra de la palabra *relate*$\}$

19. Haga una lista de todos los subconjuntos de los conjuntos siguientes:
a. $\{1, 2\}$ **b.** $\{1, 2, 3\}$ **c.** $\{1, 2, 3, 4\}$

20. Haga una lista de todos los subconjuntos del conjunto $A = \{$IBM, U.S. Steel, Union Carbide, Boeing$\}$. ¿Cuáles de éstos son subconjuntos propios de A?

En los ejercicios 21-24 encuentre el conjunto más pequeño posible (es decir, el conjunto con el menor número de elementos) que contenga como subconjuntos los conjuntos dados.

21. $\{1, 2\}$, $\{1, 3, 4\}$, $\{4, 6, 8, 10\}$

22. $\{1, 2, 4\}$, $\{a, b\}$

23. $\{$Jill, John, Jack$\}$, $\{$Susan, Sharon$\}$

24. $\{$GM, Ford, Chrysler$\}$, $\{$Daimler-Benz, Volkswagen$\}$, $\{$Toyota, Nissan$\}$

25. Utilice diagramas de Venn para representar las relaciones siguientes:
a. $A \subset B$ y $B \subset C$
b. $A \subset U$ y $B \subset U$, donde A y B no tienen elementos en común
c. Los conjuntos A, B y C son iguales.

26. U es el conjunto de todos los estudiantes que solicitaron entrar en la clase de primer año en el colegio Faber College para el siguiente año académico, y

$A = \{x \in U \mid x$ es un solicitante aceptado$\}$

$B = \{x \in U \mid x$ es una estudiante que se inscribió en la clase de primer año$\}$

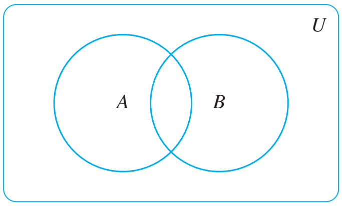
$C = \{x \in U \mid x$ es un estudiante que se inscribió en la clase de primer año$\}$

a. Utilice diagramas de Venn para representar los conjuntos U, A, B y C.
b. Determine si los enunciados siguientes son verdaderos o falsos.
i. $A \subseteq B$ **ii.** $B \subset A$ **iii.** $C \subset B$

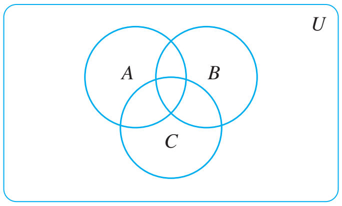
En los ejercicios 27 y 28, sombree la porción de la figura siguiente que representa cada conjunto.

27. a. $A \cap B^c$
b. $A^c \cap B$

28. a. $A^c \cap B^c$
b. $(A \cup B)^c$



En los ejercicios 29-32 sombree la porción de la figura siguiente que representa cada conjunto.



29. a. $A \cup B \cup C$ **b.** $A \cap B \cap C$

30. a. $A \cap B \cap C^c$ **b.** $A^c \cap B \cap C$

31. a. $A^c \cap B^c \cap C^c$ **b.** $(A \cup B)^c \cap C$

32. a. $A \cup (B \cap C)^c$ **b.** $(A \cup B \cup C)^c$

En los ejercicios 33-36, sean $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, $B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ y $C = \{1, 2, 4, 5, 8, 9\}$. Haga una lista de los elementos de cada conjunto.

33. a. A^c **b.** $B \cup C$ **c.** $C \cup C^c$

34. a. $C \cap C^c$ **b.** $(A \cap C)^c$ **c.** $A \cup (B \cap C)$

35. a. $(A \cap B) \cup C$ **b.** $(A \cup B \cup C)^c$
c. $(A \cap B \cap C)^c$

36. a. $A^c \cap (B \cap C^c)$ **b.** $(A \cup B^c) \cup (B \cap C^c)$
c. $(A \cup B)^c \cap C^c$

En los ejercicios 37 y 38, determine si los pares de conjuntos son disjuntos.

37. a. $\{1, 2, 3, 4\}, \{4, 5, 6, 7\}$
b. $\{a, c, e, g\}, \{b, d, f\}$

38. a. $\varnothing, \{1, 3, 5\}$
b. $\{0, 1, 3, 4\}, \{0, 2, 5, 7\}$

En los ejercicios 39-42, sean U el conjunto de todos los empleados en la compañía de seguros de vida Universal Life Insurance y

$$T = \{x \in U \mid x \text{ bebe té}\}$$
$$C = \{x \in U \mid x \text{ bebe café}\}$$

Describa cada conjunto en palabras.

39. a. T^c **b.** C^c

40. a. $T \cup C$ **b.** $T \cap C$

41. a. $T \cap C^c$ **b.** $T^c \cap C$

42. a. $T^c \cap C^c$ **b.** $(T \cup C)^c$

En los ejercicios 43-46, U es el conjunto de todos los empleados de un hospital y

$$N = \{x \in U \mid x \text{ es una enfermera o un enfermero}\}$$
$$D = \{x \in U \mid x \text{ es una médica o un médico}\}$$
$$A = \{x \in U \mid x \text{ es una gerente o un gerente}\}$$
$$M = \{x \in U \mid x \text{ es hombre}\}$$
$$F = \{x \in U \mid x \text{ es mujer}\}$$

Describa cada conjunto con palabras.

43. a. D^c **b.** N^c

44. a. $N \cup D$ **b.** $N \cap M$

45. a. $D \cap M^c$ **b.** $D \cap A$

46. a. $N \cap F$ **b.** $(D \cup N)^c$

En los ejercicios 47 y 48, sea U el conjunto de todos los senadores en el Congreso y sean

$$D = \{x \in U \mid x \text{ es demócrata}\}$$
$$R = \{x \in U \mid x \text{ es republicano}\}$$
$$F = \{x \in U \mid x \text{ es mujer}\}$$
$$L = \{x \in U \mid x \text{ es abogado}\}$$

Escriba el conjunto que representa cada enunciado.

47. a. El conjunto de todos los demócratas que son mujeres
b. El conjunto de todos los republicanos que son hombres y no son abogados

48. a. El conjunto de todos los demócratas que son mujeres o son abogados
b. El conjunto de todos los senadores que no son demócratas o son abogados

En los ejercicios 49 y 50, *U* es el conjunto de todos los estudiantes de cierta universidad. Sean

$$A = \{x \in U \mid x \text{ habían tomado un curso de contabilidad}\}$$
$$B = \{x \in U \mid x \text{ habían tomado un curso de economía}\}$$
$$C = \{x \in U \mid x \text{ habían tomado un curso de marketing}\}$$

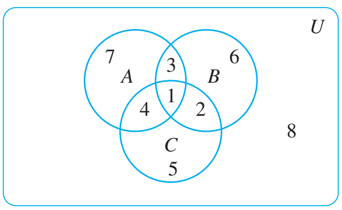
Escriba el conjunto que representa cada enunciado.

49. **a.** El conjunto de estudiantes que no han tomado un curso de economía
b. El conjunto de estudiantes que han tomado cursos de contabilidad y de economía
c. El conjunto de estudiantes que han tomado cursos de contabilidad y economía pero no de marketing

50. **a.** El conjunto de estudiantes que han tomado cursos de economía pero no cursos de contabilidad o marketing
b. El conjunto de estudiantes que han tomado como mínimo uno de los tres cursos
c. El conjunto de estudiantes que han tomado los tres cursos

En los ejercicios 51 y 52, remítase al diagrama siguiente, donde *U* es el conjunto de todos los turistas encuestados durante un periodo de una semana en Londres y donde

$$A = \{x \in U \mid x \text{ ha tomado el tren subterráneo [metro]}\}$$
$$B = \{x \in U \mid x \text{ ha tomado un taxi}\}$$
$$C = \{x \in U \mid x \text{ ha tomado un autobús}\}$$



Expresa las regiones indicadas en notación de conjuntos y con palabras.

51. **a.** Región 1
b. Regiones 1 y 4 juntas
c. Regiones 4, 5, 7 y 8 juntas

52. **a.** Región 3
b. Regiones 4 y 6 juntas
c. Regiones 5, 6 y 7 juntas

En los ejercicios 53-58, utilice diagramas de Venn para ilustrar cada enunciado.

53. $A \subseteq A \cup B$; $B \subseteq A \cup B$ **54.** $A \cap B \subseteq A$; $A \cap B \subseteq B$

55. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

56. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

57. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

58. $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

En los ejercicios 59 y 60, sean

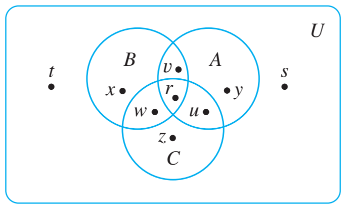
$$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$$
$$A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$$
$$B = \{1, 2, 4, 7, 8\}$$
$$C = \{2, 4, 6, 8\}$$

Verifique cada ecuación por cálculo directo.

59. **a.** $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
b. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

60. **a.** $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
b. $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

En los ejercicios 61-64, remítase a la figura siguiente y haga una lista de los puntos que pertenecen a cada conjunto.



61. **a.** $A \cup B$ **b.** $A \cap B$

62. **a.** $A \cap (B \cup C)$ **b.** $(B \cap C)^c$

63. **a.** $(B \cup C)^c$ **b.** A^c

64. **a.** $(A \cap B) \cap C^c$ **b.** $(A \cup B \cup C)^c$

65. Suponga que $A \subset B$ y $B \subset C$, donde A y B son dos conjuntos cualesquiera. ¿Qué conclusión puede formularse con respecto a los conjuntos A y C?

66. Verifique la afirmación de que dos conjuntos A y B son iguales si y sólo si (1) $A \subseteq B$ y (2) $B \subseteq A$.

En los ejercicios 67-72 determine si el enunciado es verdadero o falso. Si es verdadero, explique por qué lo es. Si es falso, dé un ejemplo para mostrar por qué lo es.

67. Un conjunto nunca es un subconjunto de sí mismo.

68 Un subconjunto propio de un conjunto es él mismo, un subconjunto del conjunto, pero no necesariamente a la inversa.

69. Si $A \cup B = \varnothing$, entonces $A = \varnothing$ y $B = \varnothing$.

70. Si $A \cap B = \varnothing$, entonces ya sea $A = \varnothing$ o $B = \varnothing$.

71. $(A \cup A^c) = \varnothing$

72. Si $A \subseteq B$, entonces $A \cap B = A$.

7.1 Soluciones de los ejercicios de autoevaluación

1. **a.** A^c es el conjunto de todos los elementos que están en U pero no en A. Por tanto,

$$A^c = \{4, 5, 6, 7\}$$

b. $A \cup B$ se compone de todos los elementos de A y/o de B. Por tanto,

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

c. $B \cap C$ es el conjunto de todos los elementos tanto en B como en C. Por tanto,

$$B \cap C = \{3, 4\}$$

d. Utilizando el resultado del inciso (b), encontramos que

$$\begin{aligned}(A \cup B) \cap C &= \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \cap \{2, 3, 4\}\\ &= \{2, 3, 4\}\end{aligned}$$

e. Primero calculamos

$$A \cap B = \{3\}$$

Luego, como $(A \cap B) \cup C$ es el conjunto de todos los elementos en $(A \cap B)$ y/o C, concluimos que

$$\begin{aligned}(A \cap B) \cup C &= \{3\} \cup \{2, 3, 4\}\\ &= \{2, 3, 4\}\end{aligned}$$

f. Del inciso (a), tenemos que $A^c = \{4, 5, 6, 7\}$. Luego, calculamos

$$\begin{aligned}B \cup C &= \{3, 4, 5, 6\} \cup \{2, 3, 4\}\\ &= \{2, 3, 4, 5, 6\}\end{aligned}$$

A partir de lo cual deducimos que

$$(B \cup C)^c = \{1, 7\}$$ El conjunto de elementos que están en U pero no están en $B \cup C$

Por último, utilizando estos resultados obtenemos que

$$A^c \cap (B \cup C)^c = \{4, 5, 6, 7\} \cap \{1, 7\} = \{7\}$$

2. **a.** $D \cap F$ denota el conjunto de todos los elementos tanto en D como en F. Dado que un elemento en D es un demócrata y un elemento en F es una representante del sexo femenino, vemos que $D \cap F$ es el conjunto de todos los demócratas mujeres en la Cámara de Representantes.

b. Como F^c es el conjunto de representantes mujeres y R es el conjunto de republicanos, se deduce que $F^c \cap R$ es el conjunto de republicanos hombres en la Cámara de Representantes.

c. L^c es el conjunto de representantes que no son abogados por ejercicio. Por consiguiente, $D \cap F \cap L^c$ es el conjunto de representantes demócratas mujeres que no son abogadas de formación.

7.2 El número de elementos en un conjunto finito

Conteo de elementos en un conjunto

La solución a algunos problemas de matemáticas exige encontrar el número de elementos en un conjunto. Este tipo de problemas se llaman **problemas de conteo** y constituyen un campo de estudio conocido como **combinatoria**. Nuestro estudio de la combinatoria está restringido a los resultados que se requerirán para nuestro trabajo sobre probabilidad más adelante.

El número de elementos en un conjunto finito se determina sencillamente al contar los elementos del conjunto. Si A es un conjunto, entonces $n(A)$ denota el número de elementos en A. Por ejemplo, si

$$A = \{1, 2, 3, \ldots, 20\} \qquad B = \{a, b\} \qquad C = \{8\}$$

entonces $n(A) = 20$, $n(B) = 2$ y $n(C) = 1$.

El conjunto vacío no contiene elementos, de manera que $n(\varnothing) = 0$. Otro resultado que se ve verdadero con facilidad es el siguiente: si A y B son conjuntos disjuntos, entonces

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) \tag{3}$$

EJEMPLO 1 Si $A = \{a, c, d\}$ y $B = \{b, e, f, g\}$, entonces $n(A) = 3$ y $n(B) = 4$, por lo que $n(A) + n(B) = 7$. Además, $A \cup B = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ y $n(A \cup B) = 7$. De ahí que la ecuación (3) sea verdadera en este caso. Observe que $A \cap B = \varnothing$. ■

En el caso general, A y B no necesitan ser disjuntos, lo cual nos lleva a la fórmula

$$\boxed{n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)} \tag{4}$$

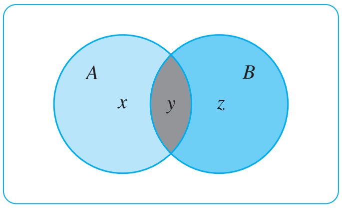


FIGURA **8**
$n(A \cup B) = x + y + z$

Para ver esto, observamos que el conjunto $A \cup B$ puede verse como la unión de tres conjuntos mutuamente disjuntos con los elementos x, y y z, respectivamente (figura 8). Esta figura muestra que

$$n(A \cup B) = x + y + z$$

Asimismo,

$$n(A) = x + y \quad \text{y} \quad n(B) = y + z$$

por tanto

$$\begin{aligned} n(A) + n(B) &= (x + y) + (y + z) \\ &= (x + y + z) + y \\ &= n(A \cup B) + n(A \cap B) \qquad n(A \cap B) = y \end{aligned}$$

Al resolver para $n(A \cup B)$, se obtiene

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

que es el resultado deseado.

EJEMPLO 2 Sean $A = \{a, b, c, d, e\}$ y $B = \{b, d, f, h\}$. Verifique directamente la ecuación (4) .

Solución

$$A \cup B = \{a, b, c, d, e, f, h\} \quad \text{por tanto} \quad n(A \cup B) = 7$$
$$A \cap B = \{b, d\} \quad \text{por tanto} \quad n(A \cap B) = 2$$

Además,

$$n(A) = 5 \quad \text{y} \quad n(B) = 4$$

así que

$$n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 5 + 4 - 2 = 7 = n(A \cup B)$$

■

VIDEO

EJEMPLO DE APLICACIÓN 3 Estudios del consumidor En un estudio realizado de 100 bebedores de café, se encontró que 70 toman azúcar, 60 toman crema y 50 toman crema y azúcar con su café. ¿Cuántos bebedores de café toman azúcar o crema con su café?

Solución Sea U el conjunto de los 100 bebedores de café encuestados y sean

$$A = \{x \in U \mid x \text{ toman azúcar}\}$$
$$B = \{x \in U \mid x \text{ toman crema}\}$$

Por tanto, $n(A) = 70$, $n(B) = 60$ y $n(A \cap B) = 50$. El conjunto de bebedores de café que toman azúcar o crema con su café está dado por $A \cup B$. Utilizando la ecuación (4), encontramos que

$$\begin{aligned} n(A \cup B) &= n(A) + n(B) - n(A \cap B) \\ &= 70 + 60 - 50 = 80 \end{aligned}$$

De ahí que 80 de los 100 bebedores de café encuestados tomen crema o azúcar con su café. ■

Explore y analice

Demuestre la fórmula (5), utilizando un argumento parecido a aquel empleado para demostrar la fórmula (4). Otra prueba se explica a grandes rasgos en el ejercicio 41 de la página 411.

Una ecuación similar a la ecuación (4) puede obtenerse para el caso que involucra un número finito de conjuntos finitos. Por ejemplo, una relación que involucra el número de elementos de los conjuntos A, B y C está dada por

$$\boxed{\begin{aligned} n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) \\ - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C) \end{aligned}} \tag{5}$$

Con todo lo útil que son las ecuaciones como la (5), en la práctica a menudo es más fácil atacar un problema directamente con la ayuda de los diagramas de Venn, como muestra el ejemplo siguiente.

VIDEO

EJEMPLO DE APLICACIÓN 4 Estudios de marketing Un fabricante líder de cosméticos anuncia sus productos en tres revistas: *Allure*, *Cosmopolitan* y *Ladies Home Journal*. Una encuesta aplicada por el fabricante a 500 clientes revela la siguiente información:

180 se enteraron de sus productos por *Allure*.
200 se enteraron de sus productos por *Cosmopolitan*.
192 se enteraron de sus productos por *Ladies Home Journal*.
84 se enteraron de sus productos por *Allure* y *Cosmopolitan*.
52 se enteraron de sus productos por *Allure* y *Ladies Home Journal*.
64 se enteraron de sus productos por *Cosmopolitan* y *Ladies Home Journal*.
38 se enteraron de sus productos por las tres revistas.

¿Cuántos de los clientes vieron el anuncio del fabricante en
a. por lo menos una revista?
b. exactamente una revista?

Solución Sea U el conjunto de todos los clientes encuestados y sean

$A = \{x \in U \mid x$ los clientes que se enteraron de los productos por *Allure*$\}$
$C = \{x \in U \mid x$ los clientes que se enteraron de los productos por *Cosmopolitan*$\}$
$L = \{x \in U \mid x$ los clientes que se enteraron de los productos por *Ladies Home Journal*$\}$

El resultado de que 38 clientes se enteraron de los productos por las tres revistas se traduce a $n(A \cap C \cap L) = 38$ (figura 9a). A continuación, el resultado de que 64 se enteraron de los productos por *Cosmopolitan* y *Ladies Home Journal* se traduce a $n(C \cap L) = 64$. Esto deja

$$64 - 38 = 26$$

clientes que se enteraron de los productos sólo por *Cosmopolitan* y *Ladies Home Journal* (figura 9b). De modo parecido, $n(A \cap L) = 52$, de manera que

$$52 - 38 = 14$$

clientes se enteraron de los productos sólo por *Allure* y *Ladies Home Journal*, y $n(A \cap C) = 84$, por tanto

$$84 - 38 = 46$$

se enteraron de los productos sólo por *Allure* y *Cosmopolitan*. Estos números aparecen en las regiones apropiadas de la figura 9b.

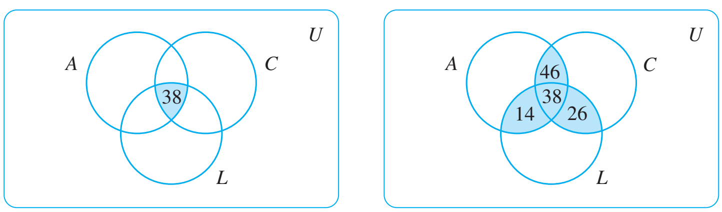


FIGURA 9 **(a)** Las tres revistas **(b)** Dos o más revistas

Continuando, tenemos $n(L) = 192$, de modo que el número de clientes que se enteró de los productos sólo por *Ladies Home Journal* está dado por

$$192 - 14 - 38 - 26 = 114$$

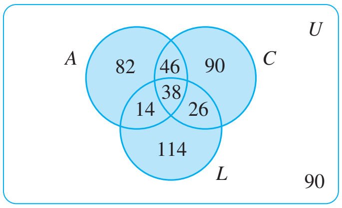


FIGURA 10
El diagrama de Venn completo.

(figura 10). Asimismo, $n(C) = 200$, por tanto

$$200 - 46 - 38 - 26 = 90$$

clientes se enteraron de los productos sólo por *Cosmopolitan* y $n(A) = 180$, de modo que

$$180 - 14 - 38 - 46 = 82$$

se enteraron de los producto sólo por *Allure*. Finalmente,

$$500 - (90 + 26 + 114 + 14 + 82 + 46 + 38) = 90$$

se enteraron de los productos por otras fuentes.

Ahora podemos responder las preguntas (a) y (b).

a. Al remitirnos a la figura 10, vemos que el número de clientes que se enteró de los productos por al menos una revista está dado por

$$n(A \cup C \cup L) = 500 - 90 = 410$$

b. El número de clientes que se enteró de los productos por exactamente una revista (figura 11) está dado por

$$n(L \cap A^c \cap C^c) + n(C \cap A^c \cap L^c) + n(A \cap L^c \cap C^c)$$
$$= 114 + 90 + 82 = 286$$

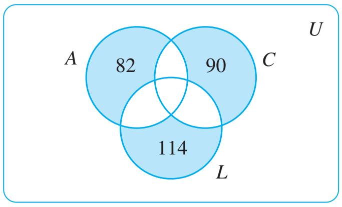


FIGURA 11
Exactamente una revista.

7.2 Ejercicios de autoevaluación

1. Sean A y B subconjuntos de un conjunto universal U y suponga que $n(U) = 100$, $n(A) = 60$, $n(B) = 40$ y $n(A \cap B) = 20$. Calcule:
   a. $n(A \cup B)$ **b.** $n(A \cap B^c)$ **c.** $n(A^c \cap B)$
2. En una encuesta de 1000 lectores de la revista *Video Magazine*, se encontró que 166 tenían por lo menos un reproductor HD en formato HD-DVD, 161 tenían por lo menos un reproductor HD en formato Blu-ray y 22 tenían reproductores HD en ambos formatos. ¿Cuántos de los lectores encuestados tienen un reproductor HD sólo en formato HD-DVD? ¿Cuántos de los lectores encuestados no tienen reproductor HD en ningún formato?

Las soluciones de los ejercicios de autoevaluación 7.2 pueden encontrarse en la página 411.

7.2 Preguntas de concepto

1. **a.** Si A y B son conjuntos con $A \cap B = \varnothing$, ¿qué puede decir acerca de $n(A) + n(B)$? Explique su respuesta.
   b. Si A y B son conjuntos que satisfacen $n(A \cup B) \neq n(A) + n(B)$, ¿qué puede decir acerca de $A \cap B$? Explique su respuesta.
2. Sean A y B subconjuntos de U, el conjunto universal y suponga que $A \cap B = \varnothing$. ¿Es cierto que $n(A) - n(B) = n(B^c) - n(A^c)$? Explique su respuesta.

7.2 Ejercicios

En los ejercicios 1 y 2 verifique la ecuación

$$\boldsymbol{n(A \cup B) = n(A) + n(B)}$$

para los conjuntos disjuntos dados.

1. $A = \{a, e, i, o, u\}$ y $B = \{g, h, k, l, m\}$
2. $A = \{x \mid x \text{ es un número entero entre 0 y 4}\}$
   $B = \{x \mid x \text{ es un entero negativo mayor que } -4\}$
3. Sea $A = \{2, 4, 6, 8\}$ y $B = \{6, 7, 8, 9, 10\}$. Calcule:
   a. $n(A)$ **b.** $n(B)$
   c. $n(A \cup B)$ **d.** $n(A \cap B)$

4. Sea $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, a, b, c, d, e\}$. Si $A = \{1, 2, a, e\}$ y $B = \{1, 2, 3, 4, a, b, c\}$, calcule:
   a. $n(A^c)$ **b.** $n(A \cap B^c)$
   c. $n(A \cup B^c)$ **d.** $n(A^c \cap B^c)$

5. Verifique directamente que $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$ para los conjuntos del ejercicio 3.

6. Sea $A = \{a, e, i, o, u\}$ y $B = \{b, d, e, o, u\}$. Verifique por cálculo directo que $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$.

7. Si $n(A) = 15$, $n(A \cap B) = 5$ y $n(A \cup B) = 30$, por tanto ¿cuánto es $n(B)$?

8. Si $n(A) = 10$, $n(A \cup B) = 15$ y $n(B) = 8$, por tanto ¿cuánto es $n(A \cap B)$?

En los ejercicios 9 y 10, sean *A* y *B* subconjuntos de un conjunto universal *U* y suponga que $n(U) = 200$, $n(A) = 100$, $n(B) = 80$ y $n(A \cap B) = 40$. Calcule:

9. **a.** $n(A \cup B)$ **b.** $n(A^c)$ **c.** $n(A \cap B^c)$

10. **a.** $n(A^c \cap B)$ **b.** $n(B^c)$ **c.** $n(A^c \cap B^c)$

11. Encuentre $n(A \cup B)$ dado que $n(A) = 6$, $n(B) = 10$ y $n(A \cap B) = 3$.

12. Si $n(B) = 6$, $n(A \cup B) = 14$ y $n(A \cap B) = 3$, encuentre $n(A)$.

13. Si $n(A) = 4$, $n(B) = 5$ y $n(A \cup B) = 9$, encuentre $n(A \cap B)$.

14. Si $n(A) = 16$, $n(B) = 16$, $n(C) = 14$, $n(A \cap B) = 6$, $n(A \cap C) = 5$, $n(B \cap C) = 6$ y $n(A \cup B \cup C) = 31$, encuentre $n(A \cap B \cap C)$.

15. Si $n(A) = 12$, $n(B) = 12$, $n(A \cap B) = 5$, $n(A \cap C) = 5$, $n(B \cap C) = 4$, $n(A \cap B \cap C) = 2$ y $n(A \cup B \cup C) = 25$, encuentre $n(C)$.

16. Una encuestra de 1000 suscriptores a *Los Angeles Times* reveló que 900 personas están suscritas a la edición matutina diaria y que 500 están suscritas tanto a la edición matutina diaria como a la edición dominical. ¿Cuántas personas están suscritas a la edición dominical? ¿Cuántas están suscritas a sólo la edición dominical?

17. Cierto día, la cárcel del condado Wilton alojó a 190 prisioneros debido a un delito (por un delito grave y/o uno menor). De éstos, 130 fueron acusados por delitos graves y 121 por delitos menores. ¿Cuántos prisioneros fueron acusados por ambos tipos de delito?

18. De 100 radio relojes vendidos recientemente en una tienda departamental, 70 tenían sintonizadores digitales y 90 reproductores de CD. ¿Cuántos radio-relojes tenían tanto sintonizadores digitales como reproductores de CD?

19. **Estudios del consumidor** En una encuesta aplicada por un centro comercial a 120 consumidores, 80 de ellos indicaron que compraban la marca A de cierto producto, 68 la marca B y 42 compraban ambas marcas. ¿Cuántos consumidores que participaron en la encuesta compran
   a. por lo menos una de estas marcas?
   b. exactamente una de estas marcas?
   c. sólo la marca A?
   d. ninguna de las dos marcas?

20. **Estudios del consumidor** En una encuesta aplicada a 200 miembros de un club deportivo local, 100 miembros indicaron que planean asisitir a los siguientes Juegos Olímpicos de Verano, 60 que planean asistir a los siguientes Juegos Olímpicos de Invierno y 40 que planean asistir a ambos juegos. ¿Cuántos miembros del club planean asistir
   a. por lo menos a uno de los dos juegos?
   b. exactamente a uno de los juegos?
   c. sólo a los Juegos Olímpicos de Verano?
   d. a ninguno de los juegos?

21. **Inversión** En una encuesta aplicada a 200 inversionistas activos, se encontró que 120 usan corredores de descuento, 126 usan corredores de servicio completo y 64 usan corredores tanto de descuento como de servicios completo. ¿Cuántos inversionistas
   a. usan al menos un tipo de corredor?
   b. usan exactamente un tipo de corredor?
   c. usan sólo corredores de descuento?
   d. no usan corredores?

22. **Tendencias de personas que viajan diario al trabajo** De 50 empleados de una tienda ubicada en el centro de Boston, 18 personas toman el metro para ir al trabajo, 12 toman el autobús y 7 toman tanto el metro como el autobús. ¿Cuántos empleados
   a. toman el metro o el autobús para ir al trabajo?
   b. toman sólo el autobús para ir al trabajo?
   c. toman ya sea el autobús o el metro para ir al trabajo?
   d. van al trabajo usando algún otro medio de tansporte?

23. **Estudios del consumidor** En una encuesta aplicada a 200 familias con respecto a la propiedad de computadoras de escritorio y laptop, se obtuvo la siguiente información:
   120 familian tienen computadoras de escritorio.
   10 familias tienen computadoras laptop.
   40 familias no tienen computadoras de escritorio ni laptop.

   ¿Cuántas familias tienen tanto computadoras de escritorio como laptop?

24. **Estudios del consumidor** En una encuesta aplicada a 400 familias con respecto a la propiedad de reproductores de VCR y DVD, se obtuvieron los datos siguientes:
   360 familias tienen una o más VCR.
   170 familias tienen una o más VCR y uno o más reproductores de DVD.
   19 familias no tienen un reproductor de VCR ni uno de DVD. ¿Cuántas familias tienen sólo uno o más reproductores de DVD?

En los ejercicios 25-28, sean *A*, *B* y *C* subconjuntos de un conjunto universal *U* y suponga que $n(U) = 100$, $n(A) = 28$, $n(B) = 30$, $n(C) = 34$, $n(A \cap B) = 8$, $n(A \cap C) = 10$, $n(B \cap C) = 15$ y $n(A \cap B \cap C) = 5$. Calcule:

25. **a.** $n(A \cup B \cup C)$ **b.** $n(A^c \cap B \cap C)$

26. **a.** $n[A \cap (B \cup C)]$ **b.** $n[A \cap (B \cup C)^c]$

27. **a.** $n(A^c \cap B^c \cap C^c)$ **b.** $n[A^c \cap (B \cup C)]$

28. **a.** $n[A \cup (B \cap C)]$ **b.** $n[(A^c \cap B^c \cap C^c)^c]$

29. ESTUDIOS ECONÓMICOS Un estudio de las opiniones de 10 economistas destacados en cierto país mostraron que, debido a que se esperaba que los precios del petróleo cayeran en ese país durante los 12 meses siguientes,

7 redujeron su estimación del índice de precios al consumidor.

8 aumentaron su estimación del índice de crecimiento del producto interno bruto (PIB).

2 redujeron su estimación del índice de precios al consumidor, pero no aumentaron su estimación de la tasa de crecimiento del PIB.

¿Cuántos economistas optaron por las dos cosas, tanto reducir su estimación del índice de precios al consumidor como aumentar su estimación de la tasa de crecimiento del PIB para ese periodo?

30. TASA DE DESERCIÓN DE LOS ESTUDIOS Los datos publicados por el Departamento de Educación referentes a la tasa (porcentaje) de estudiantes de noveno grado que no se gradúan mostraron que, de 50 estados,

12 estados mostraron un incremento en la tasa de deserción de los estudios durante el segundo año.

15 estados presentaron una tasa de deserción de los estudios de como mínimo 30% durante el segundo año anterior.

21 estados mostraron un incremento en la tasa de deserción de los estudios y/o al menos 30% durante el segundo año anterior.

a. ¿Cuántos estados mostraron tanto una tasa de deserción de los estudios de como mínimo 30% y un incremento en la tasa de deserción durante el periodo del segundo año?
b. ¿Cuántos estados mostraron una tasa de deserción de los estudios menor de 30%, pero que aumentó durante el periodo del segundo año?

31. HÁBITOS DE LECTURA DE LOS ESTUDIANTES Una encuesta aplicada a 100 estudiantes universitarios que frecuentan la sala de lectura de una universidad reveló los resultados siguientes:

40 leen la revista *Time*.

30 leen la revista *Newsweek*.

25 leen la revista *U.S. News & World Report*.

15 leen las revistas *Time* y *Newsweek*.

12 leen *Time* y *U.S. News & World Report*.

10 leen *Newsweek* y *U.S. News & World Report*.

4 leen las tres revistas.

¿Cuántos de los estudiantes encuestados leen
a. por lo menos una de estas revistas?
b. exactamente una de estas revistas?
c. exactamente dos de estas revistas?
d. ninguna de estas revistas?

32. CALIFICACIONES DE LA PRUEBA SAT Los resultados de la encuesta del Departamento de Educación de las calificaciones de la prueba SAT en 22 estados mostraron que

10 estados tuvieron una calificación SAT media compuesta de como mínimo 1000 durante el tercer año pasado.

15 estados tuvieron un incremento de por lo menos 10 puntos en la calificación SAT media compuesta durante el tercer año pasado.

8 estados tuvieron tanto una calificación SAT media compuesta de mínimo 1000 y un incremento en la calificación SAT media compuesta de por lo menos 10 puntos durante el tercer año pasado.

a. ¿Cuántos de los 22 estados tuvieron una calificación SAT media compuesta de menos de 1000 y mostraron un incremento de por lo menos 10 puntos durante el periodo de tercer año?
b. ¿Cuántos de los 22 estados tuvieron calificaciones SAT compuestas de como mínimo 1000 y no mostraron un incremento de por lo menos 10 puntos durante el periodo de tercer año?

33. ESTUDIOS DEL CONSUMIDOR A los 120 consumidores del ejercicio 19 también se les preguntó sobre sus preferencias de compra respecto a otro producto que se vende en el mercado bajo tres etiquetas. Los resultados fueron los siguientes

12 compran sólo aquellos que se venden con la etiqueta A.

25 compran sólo aquellos que se venden con la etiqueta B.

26 compran sólo aquellos que se venden con la etiqueta C.

15 compran sólo aquellos que se venden con las etiquetas A y B.

10 compran sólo aquellos que se venden con las etiquetas A y C.

12 compran sólo aquellos que se venden con las etiquetas B y C.

8 compran el producto vendido con las tres etiquetas.

¿Cuántos de los consumidores encuestados compran el producto vendido
a. por lo menos con una de las tres etiquetas?
b. con las etiquetas A y B pero no con C?
c. la etiqueta A?
d. ninguna de estas etiquetas?

34. ENCUESTAS ESTUDIANTILES Para ayudar a planear el número de comidas (desayuno, comida y cena) que se van a preparar en la cafetería de una universidad, se realizó una encuesta y se obtuvieron los datos siguientes:

130 estudiantes desayunan.

180 estudiantes comen.

275 estudiantes cenan.

68 estudiantes desayunan y comen.

112 estudiantes desayunan y cenan.

90 estudiantes comen y cenan.

58 estudiantes comen las tres comidas.

¿Cuántos de los estudiantes comen
a. por lo menos una comida en la cafetería?
b. exactamente una comida en la cafetería?
c. sólo cenan en la cafetería?
d. exactamente dos comidas en la cafetería?

35. INVERSIONES En una encuesta aplicada a 200 empleados de una empresa con respecto a sus inversiones en el plan de retiro 401(k), se obtuvieron los datos siguientes:

141 tenían inversiones en fondos de acciones.

91 tenían inversiones en fondos de bonos.

60 tenían inversiones en fondos del mercado de dinero.

47 tenían inversiones en fondos de acciones y fondos de bonos.

36 tenían inversiones en fondos de acciones y fondos del mercado de dinero.

36 tenían inversiones en fondos de bonos y fondos del mercado de dinero.

5 tenían inversiones sólo en algún otro instrumento.

a. ¿Cuántos de los empleados encuestados tenían inversiones en los tres tipos de fondos?

b. ¿Cuántos de los empleados tenían inversiones sólo en fondos de acciones?

36. **SUSCRIPCIONES A UN PERIÓDICO** En una encuesta de 300 inversionistas individuales respecto a suscripciones al *New York Times* (*NYT*), *Wall Street Journal* (*WSJ*) y *USA Today* (*UST*), se obtuvieron los datos siguientes:

122 están suscritos al *NYT*.

150 están suscritos al *WSJ*.

62 están suscritos al *UST*.

38 están suscritos al *NYT* y *WSJ*.

20 están suscritos al *NYT* y *UST*.

28 están suscritos al *WSJ* y *UST*.

36 no están suscritos a ninguno de estos periódicos.

a. ¿Cuántos de los inversionistas individuales encuestados están suscritos a los tres periódicos?

b. ¿Cuántos están suscritos sólo a uno de estos periódicos?

En los ejercicios 37-40 determine si el enunciado es verdadero o falso. Si es verdadero, explique por qué lo es. Si es falso, dé un ejemplo para mostrar por qué lo es.

37. Si $A \cap B \neq \varnothing$, entonces $n(A \cup B) \neq n(A) + n(B)$.

38. Si $A \subseteq B$, entonces $n(B) = n(A) + n(A^c \cap B)$.

39. Si $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$, entonces $A \cap B = \varnothing$.

40. Si $n(A \cup B) = 0$, entonces $A = \varnothing$.

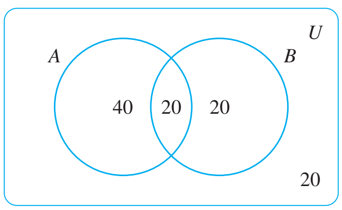
41. Derive la ecuación (5).

Sugerencia: La ecuación (4) puede escribirse como $n(D \cup E) = n(D) + n(E) - n(D \cap E)$. Ahora, haga $D = A \cup B$ y $E = C$. Utilice de nuevo la ecuación (4) si es necesario.

42. Encuentre condiciones sobre los conjuntos A, B y C de modo que $n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C)$.

7.2 Soluciones de los ejercicios de autoevaluación

1. Use la información dada para construir el diagrama de Venn siguiente:



Usando este diagrama vemos que

a. $n(A \cup B) = 40 + 20 + 20 = 80$

b. $n(A \cap B^c) = 40$

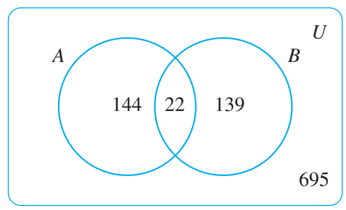
c. $n(A^c \cap B) = 20$

2. Sea U el conjunto de todos los lectores encuestados y sean

$A = \{x \in U \mid x$ tiene por lo menos un reproductor HD en formato HD-DVD)

$B = \{x \in U \mid x$ tiene por lo menos un reproductor HD en formato Blu-ray)

Por tanto, el hecho de que 22 de los lectores tengan tanto reproductores HD en ambos formatos significa que $n(A \cap B) = 22$. Además, $n(A) = 166$ y $n(B) = 161$. Utilizando esta información obtenemos el diagrama de Venn siguiente:



A partir del diagrama de Venn, vemos que el número de lectores que tiene un reproductor HD sólo en formato HD-DVD está dado por

$$n(A \cap B^c) = 144$$

El número de lectores que no tiene un reproductor HD en ningún formato está dado por

$$n(A^c \cap B^c) = 695$$

7.3 El principio de multiplicación

El principio fundamental del conteo

La solución de ciertos problemas requiere técnicas de conteo más complejas que aquellas desarrolladas en la sección anterior. Veremos algunas de ellas en ésta y en la siguiente sección. Comenzamos al establecer el principio fundamental de conteo llamado **principio de multiplicación**.

El principio de multiplicación

Suponga que hay m maneras de realizar una tarea T_1 y n maneras de realizar una tarea T_2. Por tanto, hay mn maneras de realizar la tarea T_1 seguida por la tarea T_2.

EJEMPLO 1 Tres carreteras principales conectan la ciudad A y la ciudad B y dos carreteras principales conectan la ciudad B y la ciudad C.

a. Utilice el principio de multiplicación para encontrar el número de maneras en que un viaje de la ciudad A a la ciudad C a través de la ciudad B puede completarse.
b. Verfique el inciso (a) directamente al exhibir todas las rutas posibles.

Solución

a. Como hay tres formas de realizar la primera tarea (ir de la ciudad A a la ciudad B) seguidas por dos maneras de realizar la segunda tarea (ir de la ciudad B a la ciudad C), el principio de multiplicación establece que hay $3 \cdot 2$, o 6, maneras de completar un viaje de la ciudad A a la ciudad C a través de la ciudad B.
b. Rotule las carreteras principales que conectan la ciudad A y la ciudad B con los números romanos I, II y III, y rotule las carreteras principales que conectan la ciudad B y la ciudad C con las letras minúsculas a y b. Un esquema se muestra en la figura 12. Por tanto, las rutas de la ciudad A a la ciudad C a través de la ciudad B pueden exhibirse con la ayuda de un **diagrama de árbol** (figura 13).

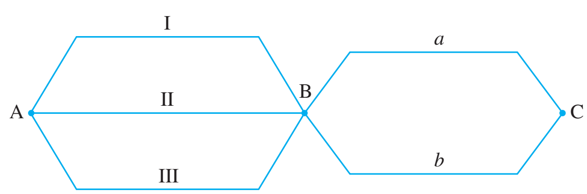


FIGURA **12**
Carreteras de la ciudad A a la ciudad C.

Si seguimos todas las ramas desde el punto inicial A al extremo derecho del árbol, obtenemos las seis rutas representadas por seis pares ordenados:

$$(\text{I}, a), (\text{I}, b), (\text{II}, a), (\text{II}, b), (\text{III}, a), (\text{III}, b)$$

donde (I, a) significa que el viaje de la ciudad A a la ciudad B se realiza en la carretera principal I y el resto del viaje, de la ciudad B a la ciudad C, se completa en la carretera principal a, etcétera.

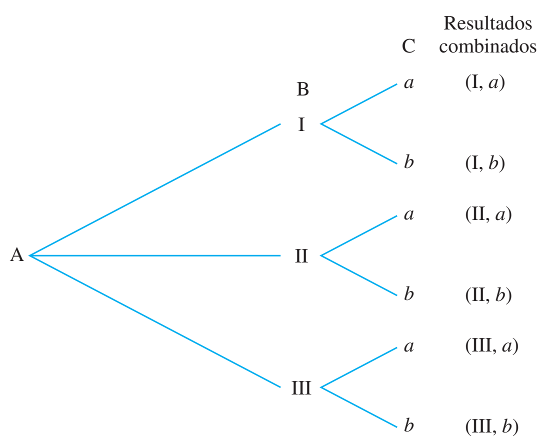


FIGURA **12**
Diagrama de árbol que muestra las tres rutas posibles de la ciudad *A* a la ciudad *C*.

PORTAFOLIO Stephanie Molina

PUESTO Detective de delitos informáticos
INSTITUCIÓN Oficina del sherif del condado de Maricopa

Al trabajar como detective en la división de delitos informáticos de la oficina del sherif del condado de Maricopa, encontré que las técnicas matemáticas aplicadas juegan un papel significativo en mi trabajo cuando busco evidencia contenida en los discos duros de las computadoras y otras formas de medios. Para obtener evidencia, se me pide tener un conocimiento básico de ciertas habilidades de matemáticas aplicadas, de modo que pueda comunicarme de manera eficiente con el analista informático forense, quien decodifica la evidencia. Para realizar una investigación eficaz, también se me pide comprender estos datos en una amplia variedad de formatos. Con esta información puedo trabajar con el analista para reconstruir los datos que pueden jugar un papel significativo en la determinación de los hechos que ocurrieron relacionados con un delito.

Durante el curso de una investigación, tengo que estudiar datos no sólo en texto sino también en código. Utilizando este modo de ver, el analista puede descifrar diferentes tipos de archivos y posible evidencia en un espacio no asignado en todo el disco duro. Este espacio no asignado puede contener archivos borrados que pueden contener evidencia potencial. El analista también tiene que decodificar archivos a mano y reconocer patrones entre los archivos se vuelve muy importante. A partir de aquí, podemos derivar un algoritmo para definir esos patrones. Al producir un algoritmo, se vuelve posible escribir un programa que decodifique los archivos.

Por ejemplo, hubo un caso que involucraba a un sospechoso que estaba recibiendo archivos a través de un servidor de correo. Este sospechoso abría entonces los archivos y eliminaba el correo electrónico. Los miembros de mi laboratorio de informática forense y yo veíamos estos archivos en su código original para tratar de descubrir patrones o incongruencias en el código con el fin de encontrar una solución al problema. Encontramos una pista enterrada dentro del código. Luego derivamos un algoritmo que definía su patrón. Al introducir el algoritmo, pudimos por fin extraer los archivos a partir de los datos codificados.

Aunque no tengo una formación sólida en informática, o incluso en matemáticas, mi conocimiento de las matemáticas aplicadas me ayuda a comprender los procedimientos involucrados en la obtención de pruebas. Lo mejor de todo es que soy capaz de transmitir con claridad mis necesidades a los analistas forenses de mi departamento.

Explore y analice

Una manera de evaluar el desempeño de una línea aérea es registrar los tiempos de llegada de sus vuelos. Suponga que denotamos con E, O y L un vuelo que llega antes de la hora programada, uno que llega a tiempo y uno que llega después.

1. Utilice un diagrama de árbol para exhibir los resultados posibles cuando registre dos vuelos sucesivos de la línea aérea. ¿Cuántos resultados hay?
2. ¿Cuántos resultados hay si usted registra tres vuelos sucesivos? Justifique su respuesta.

EJEMPLO DE APLICACIÓN 2 Opciones de menú Para las cenas en Angelo's Spaghetti Bar usted pueden seleccionar su entrada entre 6 opciones de pasta y 28 tipos de salsa. ¿Cuántas combinaciones hay que consten de 1 opción de pasa y 1 tipo de salsa?

Solución Hay 6 maneras de elegir una pasta seguida por 28 maneras de elegir una salsa, por lo que según el principio de multiplicación, hay $6 \cdot 28$, o 168, combinaciones de platos de pasta. ■

El principio de multiplicación puede ampliarse fácilmente, lo cual conduce al **principio generalizado de la multiplicación**.

Principio generalizado de la multiplicación

Suponga que una tarea T_1 puede realizarse de N_1 maneras, una tarea T_2 puede realizarse de N_2 maneras, . . . , y, por último, una tarea T_m puede realizarse de N_m maneras. Por tanto, el número de maneras de realizar las tareas $T_1, T_2, \ldots, T_m$ en sucesión está dado por el producto.

$$N_1 N_2 \cdots N_m$$

Ahora ilustramos la aplicación del principio generalizado de la multiplicación a varias situaciones.

EJEMPLO 3 Una moneda es lanzada 3 veces y la secuencia de caras y cruces se registra.

a. Utilice el principio generalizado de la multiplicación para determinar el número de resultados posibles de esta actividad.
b. Muestre todas las secuencias mediante un diagrama de árbol.

Solución

a. La moneda puede caer de dos maneras. Por consiguiente, en tres lanzamientos el número de resultados (secuencias) está dado por $2 \cdot 2 \cdot 2$, u 8.
b. Sean H y T los resultados de "cara" y "cruz", respectivamente. Por tanto las secuencias requeridas pueden obtenerse como se muestra en la figura 14, dando la secuencia HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH y TTT.

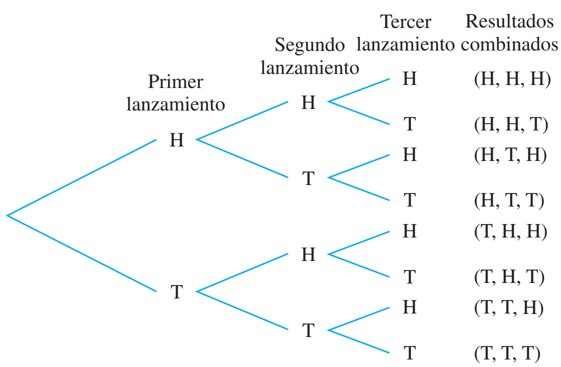


FIGURA **14**
Diagrama de árbol que muestra los resultados posibles de tres lanzamientos de moneda consecutivos.

EJEMPLO DE APLICACIÓN 4 **Candado con combinación** Un candado con combinación se cierra al marcar una secuencia de números: primero a la izquierda, luego a la derecha y después de nuevo a la izquierda. Si hay 10 dígitos en el disco, determine el número de combinaciones posibles.

Solución Hay 10 opciones para el primer número, seguidas por 10 para el segundo y 10 para el tercero, así que por el principio generalizado de la multiplicación hay $10 \cdot 10 \cdot 10$, o 1000, combinaciones posibles.

EJEMPLO DE APLICACIÓN 5 **Opciones de inversión** Un inversionista ha decidido comprar acciones de tres empresas: una dedicada a actividades aeroespaciales, otra dedicada al desarrollo de la energía y otra más que se dedica a la electrónica. Después de hacer un poco de investigación, el ejecutivo de cuenta de una firma de corretaje ha recomendado al inversionista que considere acciones de cinco empresas aeroespaciales, tres empresas de desarrollo de energía y cuatro empresas de electrónica. ¿De cuántas maneras puede el inversionista seleccionar el grupo de tres empresas de la lista de ejecutivos?

Solución El inversionista tiene cinco opciones para seleccionar una empresa aeroespacial, tres opciones para selecciona una empresa de desarrollo de energía y cuatro opciones para seleccionar una empresa de electrónica. Por tanto, según el principio generalizado de la multiplicación, hay $5 \cdot 3 \cdot 4$, o 60, maneras en que podemos seleccionar un grupo de tres empresas, una de cada grupo industrial. ■

VIDEO

EJEMPLO DE APLICACIÓN 6 Opciones de viaje Tom está planeando salir de Washington, D.C. a la ciudad de Nueva York, el lunes por la mañana y ha decidido que viajará en avión o tomará el tren. Hay cinco vuelos y dos trenes que salen hacia la ciudad de Nueva York desde Washington esa mañana. Cuando regrese el domingo por la tarde, Tom planea ya sea tomar un vuelo o aceptar que un amigo lo lleve. Hay dos vuelos que parten de la ciudad de Nueva York a Washington esa tarde. ¿De cuántas maneras puede Tom completar este viaje redondo?

Solución Hay siete maneras en que Tom puede viajar de Washington, D.C. a la ciudad de Nueva York (cinco por avión y dos por tren). De regreso, Tom puede viajar de tres maneras (dos por avión y una por automóvil). Por consiguiente, según el principio de multiplicación, Tom puede completar el viaje redondo de $7 \cdot 3$, o 21, maneras. ■

7.3 Ejercicios de autoevaluación

1. Encore Travel ofrece un paquete "Semana de Teatro en Londres" que sale de la ciudad de Nueva York. Hay ocho opciones de vuelos que parten de Nueva York cada semana, cinco opciones de hoteles para alojamiento y una opción de boleto complementario para uno de ocho espectáculos. ¿Cuántos paquetes de viaje pueden elegirse?

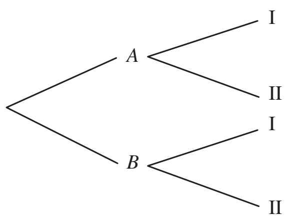
2. El Café Napolean ofrece una cena especial los miércoles que consiste en dos opciones de entrada (carne a la borgoñona o pollo a la vasca); una ensalada; un pan francés; tres opciones de vegetales; una jarra de tres vinos a escoger, de Borgoña, rosado o blanco seco; café o té, y uno de seis pastelillos para el postre. ¿Cuántas combinaciones hay de platillos especiales para la cena?

Las soluciones de los ejercicios de autoevaluación 7.3 pueden encontrarse en la página 417.

7.3 Preguntas de concepto

1. Explique el principio de multiplicación e ilústrelo con un diagrama.

2. Dado el diagrama de árbol siguiente para una actividad, ¿cuáles son los tres resultados posibles?



7.3 Ejercicios

1. **Tarifas de renta** Lynbrook West, un complejo de departamentos financiado por la agencia State Housing Finance Agency, ofrece unidades habitacionales de una, dos, tres y cuatro recámaras en renta. La tarifa de renta para cada tipo de unidad, de bajo costo, de costo moderado o comercial, está determinada por el ingreso del arrendador. ¿Cuántas tarifas diferentes hay?

2. **PASES DE TRANSPORTE** La autoridad de tránsito local de una ciudad ofrece cinco tipos distintos de pases de transporte mensuales para cada uno de tres grupos distintos de pasajeros: jóvenes, adultos y adultos mayores. ¿Cuántos tipos diferentes de pases deben imprimirse cada mes?

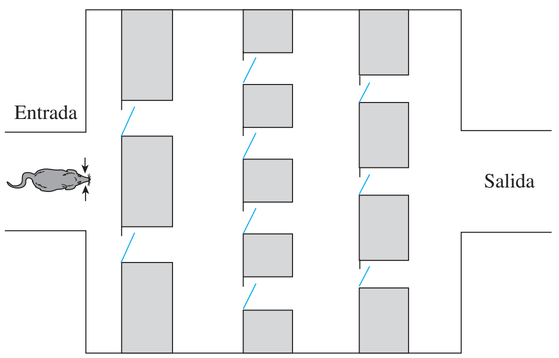
3. **BLACKJACK** En el juego de Blackjack, una mano de 2 cartas compuesta por un as y ya sea una carta con una figura o un 10 se llama "blackjack". Si se usa una baraja estándar de 52 cartas, determine cuántas manos de blackjack puede haber. (Una "carta con figura" es una jota, una dama o un rey.)

4. **LANZAMIENTO DE MONEDAS** Una moneda es lanzada 4 veces y se registra la secuencia de caras y cruces.
   a. Utilice el principio generalizado de la multiplicación para determinar el número de resultados de esta actividad.
   b. Muestre todas las secuencias por medio de un diagrama de árbol.

5. **SELECCIÓN DE UN GUARDARROPA** Una ejecutiva que seleccionaba su guardarropa compró dos blazers, cuatro blusas y tres faldas en colores coordinados. ¿Cuántos conjuntos formados por un blazer, una blusa y una falda puede crear a partir de esta colección?

6. **OPCIONES DE TRANSPORTE** Cuatro trenes de pasajeros y tres autobuses exprés salen de la ciudad A a la ciudad B en la mañana y tres trenes de pasajeros y tres autobuses exprés operan en el viaje de regreso por la tarde. ¿De cuántas maneras puede un pasajero completar un viaje redondo de la ciudad A a la ciudad B por autobús y/o por tren?

7. **EXPERIMENTOS PSICOLÓGICOS** Un psicólogo ha construido el laberinto siguiente para usarlo en un experimento. El laberinto se construyó de modo que una rata debe atravesar una serie de puertas de un sentido. ¿Cuántas rutas distintas hay desde la entrada hasta la salida?



Laberinto

8. **PROBLEMAS DE NEGOCIACIONES SINDICALES** En una encuesta realizada por un sindicato, se pidió a los miembros que calificaran la importancia de los problemas siguientes: 1) seguridad en el trabajo, 2) mayores incentivos y 3) mejores condiciones laborales. Cinco respuestas diferentes se permitieron para cada problema. Entre las encuestas terminadas, ¿cuántas respuestas diferentes eran posibles?

9. **OPCIONES DE PLANES DE CUIDADO DE LA SALUD** A un nuevo empleado estatal le ofrecen la opción de 10 planes de salud básicos, tres planes dentales y dos planes de cuidado de la vista. ¿Cuántos planes de cuidado de la salud diferentes hay para elegir si se selecciona un plan de cada categoría?

10. **CONTRASEÑAS** ¿Cuántas contraseñas de tres letras pueden formarse a partir de las primeras 10 letras del alfabeto griego si no se permiten repeticiones?

11. **NÚMEROS DEL SEGURO SOCIAL** Un número del Seguro Social tiene nueve dígitos. ¿Cuántos números del Seguro Social son posibles?

12. **NÚMEROS SERIALES** Las computadoras fabricadas por cierta empresa tienen un número serial compuesto por una letra del alfabeto seguida por un número de cuatro dígitos. Si todos los números seriales de este tipo se han usado, ¿cuántas computadoras se han fabricado?

13. **CITAS POR COMPUTADORA** Un servicio de citas por computadora utiliza los resultados de su encuesta de compatibilidad para arreglar citas. La encuesta consiste en 50 preguntas, cada una tiene cinco respuestas posibles. ¿Cuántas respuestas diferentes son posibles si se responden todas las preguntas?

14. **COLORES DE AUTOMÓVILES** El Coupe 335i 2007 de BMW se vende con una opción de 14 colores exteriores (11 métalicos y 3 estándar), 5 colores interiores y 4 tipos de tapicería. ¿Cuántas combinaciones que involucran el color y la tapicería están disponibles para el modelo?
    Fuente: BMW

15. **COLORES DE AUTOMÓVILES** El Camry 2007 de Toyota viene con 5 categorías de modelos, 2 tamaños de motor, 4 opciones de tansmisiones, 5 colores exteriores y 2 colores interiores. ¿Cuántas opciones del Camry están disponibles para el futuro comprador?
    Fuente: Toyota

16. **ESTUDIOS DE AUDIENCIA TELEVISIVA** Se realizará un estudio de opinión entre espectadores de televisión. Se formularán seis preguntas de opción múltiple, cada una con cuatro respuestas posibles. ¿De cuántas maneras diferentes puede completar la encuesta un espectador si se proporciona exactamente una respuesta para cada pregunta?

17. **TARJETAS ATM** Para tener acceso a su cuenta, un cliente que utiliza un cajero automático (ATM, por sus siglas en inglés) debe introducir un código de cuatro dígitos. Si no se permite la repetición de los mismos cuatro dígitos (por ejemplo, 5555), ¿cuántas combinaciones posibles hay?

18. **ESTUDIOS POLÍTICOS** Morris Polling Group realizó un estudio de opinión en Estados Unidos. Los encuestados se clasificaron con base en su sexo (M o F), afiliación política (D, I, R) y la región del país donde residen (NW, W, C, S, E, NE).
    a. Utilice el principio generalizado de la multiplicación para determinar el número de clasificaciones posibles.
    b. Trace un diagrama de árbol para mostrar todas las clasificaciones posibles de mujeres.

19. **NÚMEROS DE PLACAS** Con los años, el estado de California ha usado diferentes combinaciones de letras del alfabeto y dígitos en las placas de sus automóviles.

a. En algún tiempo se emitieron placas que consistían en tres letras seguidas por tres dígitos. ¿Cuántas placas diferentes pueden emitirse bajo este arreglo?

b. Tiempo después se emitieron placas que consistían en tres dígitos seguidos por tres letras. ¿Cuántas placas distintas pueden emitirse bajo este arreglo?

20. Números de placas En años recientes, el estado de California emitió placas que usaban una combinación de una letra del alfabeto seguida por tres dígitos, seguidos a su vez por otras tres letras. ¿Cuántas placas distintas pueden emitirse usando esta configuración?

21. Exámenes Un examen está conformado por 10 preguntas de cierto o falso. Suponiendo que se responden todas las preguntas, ¿de cuántas maneras diferentes puede completar el examen un estudiante? ¿De cuántas maneras puede completarse el examen si un estudiante deja algunas preguntas sin responder, por ejemplo, porque se le impone una sanción por cada respuesta incorrecta?

22. Números de garantía El número de identificación de la garantía de cierto producto está compuesto por una letra seguida por un número de cinco dígitos. ¿Cuántos números de identificación posibles hay si el primer dígito del número de cinco dígitos debe ser diferente de cero?

23. Loterías En una lotería estatal, hay 15 finalistas elegibles para ganarse el dinero del sorteo. ¿De cuántas maneras pueden otorgarse el primero, segundo y tercer premios si los finalistas pueden ganar sólo un premio?

24. Números telefónicos

a. ¿Cuántos números telefónicos de siete dígitos son posibles si el primer dígito debe ser diferente de cero?

b. ¿Cuántos números de marcación directa para las llamadas en el interior de Estados Unidos y Canadá son posibles si cada número está compuesto de un número 1 más un código de área de tres dígitos (el primer dígito del cual debe ser distinto de cero) y un número del tipo descrito en el inciso a)?

25. Máquinas tragamonedas Un "dólar de la suerte" es uno de los nueve símbolos impresos en cada carrete de una máquina tragamonedas con tres carretes. Un jugador recibe una de varias recompensas cada vez que uno o más "dólares de la suerte" aparecen en la ventana de la máquina. Calcule el número de combinaciones ganadoras para las cuales la máquina da una bonificación.

Pista: a) Calcule el número de maneras en que los nueve símbolos en el primero, segundo y tercer carretes pueden aparecer en la ventana y b) calcule el número de maneras en que los ocho símbolos diferentes del "dólar de la suerte" pueden aparecer en la ventana. La diferencia $(a - b)$ es el número de maneras en que el "dólar de la suerte" puede aparecer en la ventana. ¿Por qué?

26. Proceso de empleo Student Painters, que se especializa en pintar el exterior de edificios residenciales, tiene cinco personas disponibles que se organizarán en equipos de dos y de tres personas.

a. ¿De cuántas maneras puede formarse un equipo de dos personas?

b. ¿De cuántas maneras puede formarse un equipo de tres personas?

c. ¿De cuántas maneras puede organizar la empresa a las personas de que dispone en equipos ya sea de dos o de tres personas?

En los ejercicios 27 y 28 determine si el enunciado es verdadero o falso. Si es verdadero, explique por qué lo es. Si es falso, dé un ejemplo para mostrar por qué lo es.

27. Existen 32 números impares de tres dígitos que pueden formarse de los dígitos 1, 2, 3 y 4.

28. Si hay seis ingredientes disponibles, entonces el número de pizzas diferentes que puede elaborarse es 2^5 o 32.

7.3 Soluciones de los ejercicios de autoevaluación

1. Un turista debe elegir entre ocho vuelos, alojamiento en uno de cinco hoteles distintos y ocho boletos. Según el principio generalizado de la multiplicación, hay $8 \cdot 5 \cdot 8$, o 320, paquetes de viaje.

2. Hay una opción de dos entradas, una ensalada para comer, un pan francés, tres verduras, tres vinos, dos bebidas sin alcohol y seis pastelillos. Por tanto, por el principio generalizado de la multiplicación hay $2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 6$, o 216, combinaciones de platillos especiales para la comida.

7.4 Permutaciones y combinaciones

Permutaciones

En esta sección aplicamos el principio generalizado de la multiplicación a la solución de dos tipos de problemas de conteo. Los dos tipos involucran determinar el número de maneras en que los elementos de un conjunto pueden acomodarse y ambos juegan un papel importante en la solución de problemas de probabilidad.

Comencemos con la consideración de las permutaciones de un conjunto. En específico, dado un conjunto de objetos distintos, una **permutación** del conjunto es un arreglo de estos objetos en un *orden definido*. Para ver por qué el orden en que estos objetos están acomodados es importante en ciertas situaciones prácticas, suponga que el número ganador para el primer premio en una rifa es 9237. Por tanto el número 2973, aun cuando contiene los mismos dígitos que el número ganador, no puede ser el ganador del primer premio (figura 15). Aquí, los cuatro objetos, es decir los dígitos 9, 2, 3 y 7, están acomodados en un orden distinto; un arreglo está asociado con el número ganador para el primer premio y el otro no.

FIGURA 15
Los mismos dígitos aparecen en cada boleto, pero el orden de los dígitos es diferente.

EJEMPLO 1 Sea $A = \{a, b, c\}$.

a. Encuentre el número de permutaciones de A.
b. Haga una lista de todas las permutaciones de A con ayuda de un diagrama de árbol.

Solución

a. Cada permutación de A se compone de una secuencia de las tres letras a, b, c. Por consiguiente, podemos pensar en una secuencia de este tipo como si estuviera formada mediante el llenado de cada uno de los tres espacios en blanco

$$\_\_ \quad \_\_ \quad \_\_$$

con una de las tres letras. Ahora bien, hay tres maneras en que podemos llenar el primer espacio en blanco, podemos elegir a, b o c. Una vez seleccionada una letra para el primer espacio en blanco, hay dos letras para el segundo espacio en blanco. Por último, hay sólo una manera de llenar el tercer espacio en blanco. De manera esquemática tenemos

$$\underline{\ 3\ } \quad \underline{\ 2\ } \quad \underline{\ 1\ }$$

Al invocar el principio generalizado de la multiplicación, concluimos que hay $3 \cdot 2 \cdot 1$, o 6, permutaciones del conjunto A.

b. El diagrama de árbol asociado con este problema aparece en la figura 16 y las seis permutaciones de A son *abc*, *acb*, *bac*, *bca*, *cab* y *cba*.

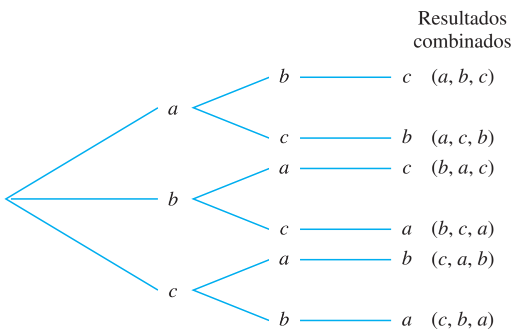


FIGURA 16
Permutaciones de tres objetos.

Nota Observe que, cuando los resultados posibles se listan en el diagrama de árbol del ejemplo 1, el orden se toma en cuenta. Por tanto, (a, b, c) y (a, c, b) son dos arreglos diferentes.

EJEMPLO 2 Encontrar el número de maneras en que un equipo de beisbol conformado por nueve jugadores puede acomodarse en una fila para una fotografía del grupo.

Solución Queremos determinar el número de permutaciones de los nueve miembros del equipo de beisbol. Cada permutación en esta situación consiste en un arreglo de los nueve miembros del equipo en una fila. Las nueve posiciones pueden representarse por nueve espacios en blanco. Por tanto,

Posición	__	__	__	__	__	__	__	__	__
	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Hay nueve maneras de elegir entre los nueve jugadores para llenar la primera posición. Cuando esa posición se llena, hay ocho jugadores a la izquierda, lo cual nos da ocho maneras para llenar la segunda posición. Al proceder de una forma parecida, encontramos que hay siete maneras para llenar la tercera posición, etc. En términos esquemáticos, tenemos

Número de maneras de llenar cada posición	9	8	7	6	5	4	3	2	1

Al invocar el principio generalizado de la multiplicación, concluimos que hay $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$, o 362,880, maneras de acomodar al equipo de beisbol para la fotografía. ■

Siempre que se nos pide determinar el número de maneras en que los objetos de un conjunto pueden acomodarse en una fila, el orden es importante. Por ejemplo, si tomamos una fotografía de dos jugadores de beisbol, A y B, entonces los dos jugadores pueden formar una línea para la fotografía de dos maneras, AB o BA, y las dos fotografías serán diferentes.

Siguiendo el mismo argumento utilizado para resolver los problemas de los dos últimos ejemplos, podemos obtener una expresión para calcular el número de maneras de permutar un conjunto A de n objetos distintos tomando n a la vez. De hecho, se puede considerar que cada permutación se obtiene al llenar cada uno de los n espacios en blanco con uno y sólo un elemento del conjunto. Hay n maneras de llenar el primer espacio en blanco, seguido por $(n - 1)$ maneras de llenar el segundo espacio en blanco, etc. Por tanto, según el principio generalizado de la multiplicación, hay

$$n(n-1)(n-2)\cdot \cdots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

maneras de permutar los elementos del conjunto A.

Antes de establecer este resultado de manera formal, introduzcamos una notación que nos permitirá escribir en una forma compacta muchas de las expresiones siguientes. Usamos el símbolo $n!$ (se lee "***n* factorial**") para denotar el producto de los primeros n enteros positivos.

n factorial

Para cualquier número natural "n",

$$n! = n(n-1)(n-2)\cdot \cdots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$
$$0! = 1$$

Por ejemplo,

$$\begin{aligned}
1! &= 1 \\
2! &= 2 \cdot 1 = 2 \\
3! &= 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6 \\
4! &= 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24 \\
5! &= 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120 \\
&\vdots \\
10! &= 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 3{,}628{,}800
\end{aligned}$$

Utilizando esta notación podemos expresar *el número de permutaciones de n objetos distintos tomando n a la vez, denotado por P*(*n*, *n*), *como*

$$P(n, n) = n!$$

En muchas situaciones estamos interesados en determinar el número de maneras de permutar n objetos distintos tomando r a la vez, donde $r \leq n$. Para obtener una fórmula para calcular el número de maneras de permutar un conjunto compuesto por n objetos distintos tomando r a la vez, observamos que puede considerarse que cada permutación de éste se obtuvo al llenar cada uno de los r espacios en blanco con precisamente un elemento del conjunto. Ahora hay n maneras de llenar el primer espacio en blanco, seguidas por $(n - 1)$ maneras de llenar el segundo espacio en blanco, etc. Por último, hay $(n - r + 1)$ maneras de llenar el r-ésimo espacio en blanco. Podemos representar este argumento por medio de un esquema como sigue:

Número de maneras	n	$n-1$	$n-2$	$\cdots$	$n-r+1$
Posición	1er	2do	3er		r-ésimo

Utilizando el principio generalizado de la multiplicación, concluimos que *el número de maneras de permutar n objetos distintos tomando r a la vez, que se denota por medio de P*(*n*, *r*), *está dado por*

$$P(n, r) = \underbrace{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}_{r \text{ factores}}$$

Como

$$\begin{aligned} &n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1) \\ &\quad = [n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)]\cdot\underbrace{\frac{(n-r)(n-r-1)\cdot\,\cdots\,\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{(n-r)(n-r-1)\cdot\,\cdots\,\cdot 3\cdot 2\cdot 1}}_{\text{Aquí estamos multiplicando por 1.}} \\ &\quad = \frac{[n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)][(n-r)(n-r-1)\cdot\,\cdots\,\cdot 3\cdot 2\cdot 1]}{(n-r)(n-r-1)\cdot\,\cdots\,\cdot 3\cdot 2\cdot 1} \\ &\quad = \frac{n!}{(n-r)!} \end{aligned}$$

tenemos la fórmula siguiente.

Permutaciones de *n* objetos distintos

El número de *permutaciones* de n objetos distintos tomando r a la vez es

$$P(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!} \qquad \textbf{(6)}$$

Nota Cuando $r = n$, la ecuación (6) se reduce a

$$P(n, n) = \frac{n!}{0!} = \frac{n!}{1} = n! \qquad \text{Observe que } 0! = 1.$$

En otras palabras, el número de permutaciones de un conjunto de n objetos distintos, tomándolos a todos, es $n!$. ■

EJEMPLO 3 Calcule (a) $P(4, 4)$ y (b) $P(4, 2)$ e interprete sus resultados.

Solución

a. $P(4, 4) = \dfrac{4!}{(4-4)!} = \dfrac{4!}{0!} = \dfrac{4!}{1} = \dfrac{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{1} = 24$ Observe que $0! = 1$.

Esto da el número de permutaciones de cuatro objetos tomando cuatro a la vez.

b. $P(4, 2) = \dfrac{4!}{(4-2)!} = \dfrac{4!}{2!} = \dfrac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1} = 4 \cdot 3 = 12$

Éste es el número de permutaciones de cuatro objetos tomando dos a la vez. ■

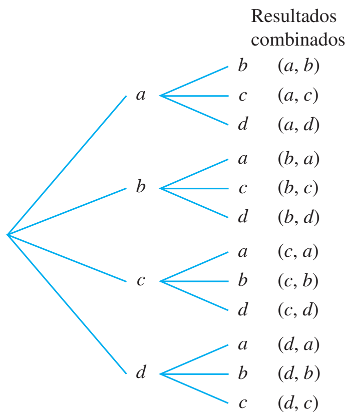


FIGURA **17**
Permutaciones de cuatro objetos tomando dos a la vez.

EJEMPLO 4 Sea $A = \{a, b, c, d\}$.

a. Use la ecuación (6) para calcular el número de permutaciones del conjunto A tomando dos objetos a la vez.

b. Muestre las permutaciones del inciso (a) por medio de un diagrama de árbol.

Solución

a. Aquí $n = 4$ y $r = 2$, por tanto el número requerido de permutaciones está dado por

$$P(4, 2) = \frac{4!}{(4-2)!} = \frac{4!}{2!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1} = 4 \cdot 3$$
$$= 12$$

b. El diagrama de árbol asociado con el problema se muestra en la figura 17 y las permutaciones de A tomando dos a la vez son

$$ab, ac, ad, ba, bc, bd, ca, cb, cd, da, db, dc$$ ■

VIDEO

EJEMPLO 5 Calcule el número de maneras en que un presidente, vicepresidente, un secretario y un tesorero pueden elegirse de un comité de ocho miembros.

Solución El problema es equivalente a calcular el número de permutaciones de ocho objetos distintos tomando cuatro a la vez. Por tanto, hay

$$P(8, 4) = \frac{8!}{(8-4)!} = \frac{8!}{4!} = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 1680$$

maneras de elegir a los cuatro funcionarios del comité de ocho miembros. ■

Las permutaciones consideradas hasta ahora han sido aquellas que involucran conjuntos de objetos *distintos*. En muchas situaciones nos interesa calcular el número de permutaciones de un conjunto de objetos en el cual no todos los objetos son distintos.

Permutaciones de *n* objetos, no todos distintos

Dado un conjunto de n objetos en los cuales n_1 objetos son parecidos y de un tipo, n_2 objetos son parecidos y de otro tipo, . . . , y n_m objetos son parecidos y de otro tipo, de modo que

$$n_1 + n_2 + \cdots + n_m = n$$

entonces el número de permutaciones de estos n objetos tomando n objetos a la vez está dado por

$$\frac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_m!} \tag{7}$$

Para establecer la ecuación (7), denotemos el número de estas permutaciones por x. Ahora bien, si *pensamos* en los n_1 objetos somo si fueran distintos, entonces pueden permutarse de n_1 maneras. Asimismo, si *pensamos* en los n_2 objetos como si fueran distintos, entonces éstos pueden permutarse de n_2! formas y así sucesivamente. Por consiguiente, si *pensamos* que los n objetos son distintos, entonces, según el principio generalizado de la multiplicación, hay $x \cdot n_1! \cdot n_2! \cdot \cdots \cdot n_m!$ permutaciones de estos objetos. Pero, el número de permutaciones de un conjunto de n objetos distintos tomando n a la vez es sencillamente igual a $n!$ Por tanto, tenemos

$$x(n_1! \cdot n_2! \cdot \cdots \cdot n_m!) = n!$$

a partir de lo cual deducimos que

$$x = \frac{n!}{n_1!\, n_2! \cdots n_m!}$$

EJEMPLO 6 Calcular el número de permutaciones que puede formarse a partir de todas las letras de la palabra *ATLANTA*.

Solución Hay siete objetos (letras) involucradas, de modo que $n = 7$. Sin embargo, tres de ellas son parecidas y de un tipo (las tres A), mientras que dos de ellas son parecidas y de otro tipo (las dos T); por consiguiente, en este caso tenemos $n_1 = 3$, $n_2 = 2$, $n_3 = 1$ (la única L) y $n_4 = 1$ (la única N). Por consiguiente, usando la fórmula (7), hay

$$\frac{7!}{3!\; 2!\; 1!\; 1!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1} = 420$$

permutaciones. ■

EJEMPLO DE APLICACIÓN 7 Decisiones gerenciales Weaver and Kline, una firma de corretaje de acciones, ha recibido nueve preguntas sobre cómo abrir una cuenta nueva. ¿De cuántas maneras pueden dirigirse estas preguntas a los ejecutivos de cuenta de la empresa si cada ejecutivo de cuenta maneja tres preguntas?

Solución Si pensamos que las nueve preguntas son como ranuras acomodadas en una fila con la pregunta 1 a la izquierda y la pregunta 9 a la derecha, entonces el problema puede considerarse como un problema de llenado de cada ranura con una tarjeta de presentación de un ejecutivo de cuenta. Por tanto, se usarían 9 tarjetas de presentación, de las cuales tres son parecidas y de un tipo, tres son parecidas y de otro tipo y otras tres son parecidas y de un tipo distinto. Así, al usar la ecuación (7) con $n = 9$ y $n_1 = n_2 = n_3 = 3$, hay

$$\frac{9!}{3!\; 3!\; 3!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 1680$$

maneras de asignar las preguntas. ■

Combinaciones

Hasta ahora nos hemos ocupado de las permutaciones de un conjunto, es decir, con arreglos de los objetos del conjunto en los que el *orden* de los elementos se toma en consideración. En muchas situaciones, uno está interesado en determinar el número de maneras de seleccionar r objetos de un conjunto de n objetos sin tener en cuenta el orden en que se seleccionan los objetos. Un subconjunto de este tipo se llama **combinación**.

Por ejemplo, si uno está interesado en conocer el número de manos de póquer de 5 cartas que puede repartirse con una baraja de 52 cartas, el orden en que se reparte la mano de póquer no es importante (figura 18). En esta situación nos interesa determinar el número de combinaciones de 5 cartas (objetos), seleccionados de una baraja (conjunto) de 52 cartas (objetos) (este problema se resolverá en el ejemplo 10).

FIGURA 18

Para obtener una fórmula con el fin de determinar el número de combinaciones de n objetos tomando r a la vez, se escribe

$$C(n, r) \quad \text{o} \quad \binom{n}{r}$$

observe que cada una de las combinanciones $C(n, r)$ de r objetos puede permutarse de $r!$ maneras (figura 19).

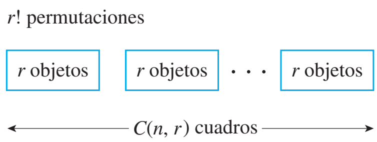


FIGURA **19**

Por tanto, según el principio de multiplicación, el producto $r!\,C(n, r)$ da el número de permutaciones de n objetos tomando r a la vez; es decir,

$$r!\,C(n, r) = P(n, r)$$

a partir de lo cual encontramos

$$C(n, r) = \frac{P(n, r)}{r!}$$

o, usando la ecuación (6),

$$C(n, r) = \frac{n!}{r!\,(n - r)!}$$

Combinaciones de *n* objetos

El número de combinaciones de n objetos distintos tomando r a la vez está dado por

$$C(n, r) = \frac{n!}{r!\,(n - r)!} \qquad (\text{donde } r \leq n) \qquad \textbf{(8)}$$

EJEMPLO 8 Calcule e interprete los resultados de (a) $C(4, 4)$ y (b) $C(4, 2)$.

Solución

a. $C(4, 4) = \dfrac{4!}{4!\,(4 - 4)!} = \dfrac{4!}{4!\,0!} = 1$ Recuerde que $0! = 1$.

Esto da 1 como el número de combinaciones de cuatro objetos distintos tomando cuatro a la vez.

b. $C(4, 2) = \dfrac{4!}{2!\,(4 - 2)!} = \dfrac{4!}{2!\,2!} = \dfrac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 2} = 6$

Esto da 6 como el número de combinaciones de cuatro objetos distintos tomando dos a la vez. ■

EJEMPLO DE APLICACIÓN 9 **Selección de un comité** Un subcomité de investigación del senado de cuatro miembros se seleccionará de un comité del senado de 10 miembros. Determine el número de maneras de hacer esto.

Solución El orden en el cual los miembros del subcomité se seleccionan no es importante, y por ende el número de maneras de elegir el subcomité está dado por

$C(10, 4)$, el número de combinaciones de diez objetos tomando cuatro a la vez. Por consiguiente, hay

$$C(10, 4) = \frac{10!}{4!\,(10-4)!} = \frac{10!}{4!\,6!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 210$$

maneras de elegir un subcomité como éste. ■

Nota Recuerde que una combinación es una selección de objetos *sin* relación uno con otro. Por tanto, en el ejemplo 9 usamos una fórmula de combinación en vez de una fórmula de permutación para resolver el problema debido a que el orden de selección no era importante; es decir, no importaba si un miembro del subcomité se seleccionaba en primero, segundo, tercero o cuarto lugar. ■

EJEMPLO DE APLICACIÓN 10 Póquer ¿Cuántas manos de póquer de 5 cartas pueden repartirse de una baraja estándar de 52 cartas?

Solución El orden en el cual se reparten las 5 cartas no es importante. El número de maneras de repartir una mano de póquer de 5 cartas de una baraja estándar de 52 cartas está dado por $C(52, 5)$, el número de combinaciones de 52 objetos tomando cinco a la vez. Por tanto, hay

$$\begin{aligned} C(52, 5) &= \frac{52!}{5!\,(52-5)!} = \frac{52!}{5!\,47!} \\ &= \frac{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \\ &= 2{,}598{,}960 \end{aligned}$$

maneras de repartir una mano de póquer como ésta. ■

Los ejemplos siguientes muestran que la solución de un problema de conteo a menudo consiste en aplicar de manera repetida la ecuación o ecuaciones (6) y/u (8), posiblemente junto con el principio generalizado de la multiplicación.

EJEMPLO DE APLICACIÓN 11 Selección de miembros de un grupo Los miembros de un cuarteto de cuerdas formado por dos violinistas, un violonchelista y un chelista se seleccionarán de un grupo de seis violinistas, tres violistas y dos violonchelistas.

a. ¿De cuántas maneras puede formarse el cuarteto de cuerdas?
b. ¿De cuántas maneras puede formarse el cuarteto de cuerdas si uno de los violinistas se designará como el primer violinista y el otro se designará como el segundo?

Solución

a. Como el orden en el cual se selecciona cada músico no es importante, usamos combinaciones. Los violinistas pueden seleccionarse de $C(6, 2)$, o 15, maneras; el violista puede seleccionarse de $C(3, 1)$, o 3, maneras, y el violonchelista puede seleccionarse de $C(2, 1)$, o 2, maneras. Según el principio generalizado de la multiplicación, hay $15 \cdot 3 \cdot 2$, o 90, maneras de formar el cuarteto de cuerdas.
b. El orden en el cual se seleccionan los violinistas es importante aquí. Por consiguiente, el número de maneras de seleccionar a los violinistas está dado por $P(6, 2)$, o 30, maneras. El número de maneras de seleccionar al violistas y al violonchelista permanecen, desde luego, 3 y 2, respectivamente. De ahí que el número de maneras de formar el cuarteto de cuerdas está dado por $30 \cdot 3 \cdot 2$, o 180, maneras. ■

Nota La solución del ejemplo 11 involucra una permutación y una combinación. Cuando seleccionamos dos violinistas de seis violinistas, el orden no es importante, usamos una fórmula de combinación para resolver el problema. Sin embargo, cuando uno de los violinistas se designa como un primer violinista, el orden es importante, y usamos una fórmula de permutación para resolver el problema. ■

EJEMPLO DE APLICACIÓN 12 **Opciones de inversión** Remítase al ejemplo 5, página 414. Suponga que el inversionista ha decidido comprar acciones de dos empresas aeroespaciales, dos empresas de desarrollo de energía y dos empresas de electrónica. ¿De cuántas maneras puede el inversionista seleccionar el grupo de seis empresas para invertir de la lista recomendada de cinco empresas aeroespaciales, tres empresas de desarrollo de energía y cuatro empresas de electrónica?

Solución Hay $C(5, 2)$ maneras en que el inversionista puede seleccionar las empresas aeroespaciales, $C(3, 2)$ maneras de seleccionar las empresas involucradas en el desarrollo de energía y $C(4, 2)$ maneras de seleccionar las empresas de electrónica como inversiones. Según el principio generalizado de la multiplicación, hay

$$\begin{aligned} C(5, 2)\,C(3, 2)\,C(4, 2) &= \frac{5!}{2!\,3!} \cdot \frac{3!}{2!\,1!} \cdot \frac{4!}{2!\,2!} \\ &= \frac{5 \cdot 4}{2} \cdot 3 \cdot \frac{4 \cdot 3}{2} = 180 \end{aligned}$$

maneras de seleccionar el grupo de seis empresas para su inversión. ■

EJEMPLO DE APLICACIÓN 13 **Programación de presentaciones** The Futurists, un grupo de rock, están planeando una gira de conciertos con presentaciones en cinco ciudades: San Francisco, Los Ángeles, San Diego, Denver y Las Vegas. ¿De cuántas maneras pueden organizar su itinerario si

a. no hay restricciones?
b. las tres presentaciones en California deben darse de forma consecutiva?

Solución

a. El orden es importante aquí, y vemos que hay

$$P(5, 5) = 5! = 120$$

maneras de organizar su itinerario.

b. Primero, observe que hay $P(3, 3)$ maneras de elegir entre la programación en California y en las dos ciudades fuera de ese estado. Luego, hay $P(3, 3)$ maneras de organizar su itinerario en las tres ciudades de California. Por tanto, según el principio generalizado de la multiplicación, hay

$$P(3, 3)P(3, 3) = \frac{3!}{(3-3)!} \cdot \frac{3!}{(3-3)!} = 6 \cdot 6 = 36$$

maneras de organizar su itinerario. ■

EJEMPLO DE APLICACIÓN 14 **Votación del Consejo de Seguridad de las Naciones Unidas** El Consejo de Seguridad de las Naciones Unidas está compuesto por 5 miembros permanentes y 10 miembros no permanentes. Las decisiones tomadas por el consejo requieren 9 votos para su ratificación. Sin embargo, cualquier miembro permanente puede vetar una medida y por ende bloquear su ratificación. Suponiendo que no hay abstenciones, ¿de cuántas maneras puede una medida ratificarse si los 15 miembros del Consejo votan?

Solución Si una medida se va a ratificar, entonces los 5 miembros permanentes deben votar para la ratificación de esa medida. Esto puede hacerse de $C(5, 5)$, o 1, maneras.

A continuación observe que, dado que se requieren 9 votos para ratificar una medida, *al menos* 4 de los 10 miembros no permanentes deben votar también para su ratificación. Para determinar cuántas maneras existen de hacer esto, observe que simplemente hay $C(10, 4)$ maneras en las que exactamente 4 de los miembros no permanentes pueden votar para ratificar una medida, $C(10, 5)$ maneras en las que exactamente 5 de ellos pueden votar para su ratificación, etc. Por último, hay $C(10, 10)$ maneras en que los 10 miembros no permanentes pueden votar para la ratificación de una medida. Por consiguiente, hay

$$C(10, 4) + C(10, 5) + \cdots + C(10, 10)$$

maneras en que por lo menos 4 de los 10 miembros no permanentes pueden votar por una medida. Por tanto, según el principio de multiplicación, hay

$$\begin{aligned} &C(5, 5)[C(10, 4) + C(10, 5) + \cdots + C(10, 10)] \\ &= (1)\left[\frac{10!}{4!\,6!} + \frac{10!}{5!\,5!} + \cdots + \frac{10!}{10!\,0!}\right] \\ &= (1)(210 + 252 + 210 + 120 + 45 + 10 + 1) = 848 \end{aligned}$$

maneras en que una medida puede ratificarse. ■

7.4 Ejercicios de autoevaluación

1. Evalúe:
   a. $5!$ **b.** $C(7, 4)$ **c.** $P(6, 2)$

2. La tripulación de un transbordador espacial está conformada por el comandante, un piloto, tres ingenieros, un científico y un civil. El comandante y el piloto se elegirán entre 8 candidatos, los 3 ingenieros entre 12 candidatos, el científico entre 5 candidatos y el civil entre 2 candidatos. ¿Cuántas tripulaciones pueden formarse para el transbordador espacial?

Las soluciones de los ejercicios de autoevaluación 7.4 pueden encontrarse en la página 430.

7.4 Preguntas de concepto

1. **a.** ¿Qué es una permutación de un conjunto de objetos distintos?
   b. ¿Cuántas permutaciones hay de un conjunto de cinco objetos distintos tomando tres a la vez?

2. Dado un conjunto de 10 objetos en el cual tres son parecidos y de un tipo, tres son parecidos y de otro tipo, y cuatro son parecidos y de un tipo distinto, ¿cuál es la fórmula para calcular la permutación de estos 10 objetos tomando 10 a la vez?

3. **a.** ¿Qué es una combinación de un conjunto de n objetos distintos tomando r a la vez?
   b. ¿Cuántas combinaciones hay de seis objetos distintos tomando tres a la vez?

7.4 Ejercicios

En los ejercicios 1-22 evalúe la expresión dada.

1. $3 \cdot 5!$ **2.** $2 \cdot 7!$ **3.** $\dfrac{5!}{2!\,3!}$

4. $\dfrac{6!}{4!\,2!}$ **5.** $P(5, 5)$ **6.** $P(6, 6)$

7. $P(5, 2)$ **8.** $P(5, 3)$ **9.** $P(n, 1)$

10. $P(k, 2)$ **11.** $C(6, 6)$ **12.** $C(8, 8)$

13. $C(7, 4)$ **14.** $C(9, 3)$ **15.** $C(5, 0)$

16. $C(6, 5)$ **17.** $C(9, 6)$ **18.** $C(10, 3)$

19. $C(n, 2)$ **20.** $C(7, r)$ **21.** $P(n, n - 2)$

22. $C(n, n - 2)$

En los ejercicios 23-30 clasifique cada problema dependiendo de si requiere una permutación o una combinación.

23. ¿De cuántas maneras pueden acomodarse las letras de la palabra inglesa *GLACIER*?

24. Se formará un comité ejecutivo de cuatro integrantes de un consejo de administración de 12 miembros. ¿De cuántas maneras puede formarse?

25. Como parte de un programa de control de calidad, se seleccionan 3 teléfonos celulares al azar para hacer pruebas de 100 celulares producidos por el fabricante. ¿De cuántas maneras puede elegirse este lote de prueba?

26. ¿Cuántos números de tres dígitos pueden formarse usando los dígitos del conjunto {3, 2, 7, 9} si no se permite la repetición?

27. ¿De cuántas maneras pueden acomodarse nueve libros diferentes en un estante?

28. Una mujer miembro de un club de lectura quiere comprar dos libros de una selección de ocho libros recomendados para cierto mes. ¿De cuántas maneras puede elegirlos?

29. ¿Cuántas manos de póquer de cinco cartas pueden repartirse que contengan tres reinas y un par?

30. ¿De cuántas maneras puede formarse una contraseña de seguridad de seis letras del alfabeto si no se repite ninguna letra?

31. ¿Cuántas permutaciones de cuatro letras pueden formarse a partir de las primeras cuatro letras del alfabeto?

32. ¿Cuántas permutaciones de tres letras pueden formarse a partir de las primeras cinco letras del alfabeto?

33. ¿De cuántas maneras pueden sentarse cuatro estudiantes en una fila de cuatro asientos?

34. ¿De cuántas maneras pueden formar una fila cinco personas en una caja de un supermercado?

35. ¿Cuántas órdenes de bateo diferentes pueden formarse para un equipo de béisbol de nueve miembros?

36. ¿De cuántas maneras pueden los nombres de seis candidatos a cargos políticos usarse en una votación?

37. ¿De cuántas maneras puede un miembro de un comité de contratación seleccionar a 3 de 12 aspirantes a un puesto para una entrevista posterior?

38. ¿De cuántas maneras puede un inversionista seleccionar cuatro fondos de inversión para su portafolio de inversiones de una lista recomendada de ocho fondos de inversión?

39. Encuentre el número de permutaciones distinguibles que pueden formarse con las letras de la palabra en inglés *ANTARCTICA*.

40. Encuentre el número de permutaciones distinguibles que pueden formarse con las letras de la palabra en inglés *PHILIPPINES*.

41. ¿De cuántas maneras pueden acomodarse las letras del sitio web *MySpace* si todas las letras se utilizan y las vocales *a* y *e* deben permanecer siempre en el orden *ae*?

42. ¿De cuántas maneras pueden sentarse cinco personas a bordo de un autobús si éste tiene ocho asientos vacíos?

43. ¿Cuántos números distintos de cinco cifras pueden formarse usando los dígitos 1, 2, 2, 2, 7?

44. ¿Cuántas señales diferentes pueden hacerse al izar dos banderas amarillas, cuatro verdes y tres rojas en el mástil de un barco, al mismo tiempo?

45. **Decisiones gerenciales** ¿De cuántas maneras puede seleccionar una cadena de supermercados 3 de los 12 posibles sitios para la construcción de supermercados nuevos?

46. **Selecciones de libros** Un estudiante recibe una lista de lectura de 10 libros de la que deberá seleccionar dos para leer en casa. ¿De cuántas maneras puede hacer sus selecciones?

47. **Control de calidad** ¿De cuántas maneras puede un ingeniero de control de calidad seleccionar una muestra de 3 microprocesadores para las pruebas de un lote de 100 microprocesadores?

48. **Grupos de estudio** Un grupo de cinco estudiantes que se preparan para un examen de certificación ha formado un grupo de estudio. Cada miembro del grupo se encargará de preparar un esquema de estudio para uno de los cinco cursos. ¿De cuántas maneras diferentes pueden los cinco cursos asignarse a los miembros del grupo?

49. **Programación de televisión** ¿De cuántas maneras puede el director de programación de televisión programar seis diferentes comerciales en los seis espacios de tiempo dedicados a anuncios durante un programa de 1 hora?

50. **Filas de espera** Siete personas llegan a la taquilla de un cine al mismo tiempo. ¿De cuántas maneras pueden formarse para adquirir sus boletos?

51. **Decisiones gerenciales** Weaver y Kline, una firma de corretaje de acciones, ha recibido seis consultas con respecto a las cuentas nuevas. ¿De cuántas maneras pueden dirigirse estas consultas a sus 12 ejecutivos de cuenta si cada ejecutivo maneja no más de una consulta?

52. **Automóviles compartidos** Seis empleados de una empresa han decidido compartir un automóvil con capacidad para seis pasajeros. Si sólo cuatro de los empleados saben conducir, ¿de cuántas maneras se pueden acomodar los pasajeros del grupo en los asientos?

53. **Estantes para libros** En una exposición de las publicaciones de una biblioteca universitaria se exhibirán tres libros de matemáticas, cuatro libros de ciencias sociales y tres libros de biología en un estante. (Suponga que ninguno de los libros se parece.)

a. ¿De cuántas maneras pueden acomodarse los 10 libros en el estante?

b. ¿De cuántas maneras pueden acomodarse los 10 libros en el estante si los libros sobre el mismo tema se colocan juntos?

54. **Asientos** ¿De cuántas maneras pueden sentarse cuatro parejas de matrimonios que asisten a un concierto en una fila de ocho asientos si

a. no hay restricciones?

b. cada pareja se sienta junta?

c. los miembros del mismo sexo se sientan juntos?

55. Anuncios en periódicos Cuatro artículos de cinco departamentos diferentes de la tienda departamental Metro se mostrarán en anuncios de periódico de una página, como se aprecia en el diagrama siguiente:

Anuncio

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16
17	18	19	20

a. ¿De cuántas maneras pueden acomodarse en la página los 20 artículos diferentes que se mostrarán?
b. Si los artículos del mismo departamento deben estar en la misma fila, ¿cuántos arreglos son posibles?

56. Decisiones gerenciales C & I Realty ha recibido 12 consultas de compradores potenciales de casas. ¿De cuántas maneras pueden dirigirse las consultas a cualquiera de los cuatro agentes de la empresa de bienes raíces si cada uno maneja tres consultas?

57. Deportes Un equipo de béisbol de Ligas Pequeñas tiene 12 jugadores disponibles para un equipo de 9 miembros (no se han designado las posiciones del equipo).
a. ¿Cuántas órdenes de bateo diferentes de 9 personas son posibles?
b. ¿Cuántos equipos diferentes de 9 miembros son posibles?
c. ¿Cuántos equipos diferentes de 9 miembros y 2 alternos son posibles?

58. Deportes En el torneo de tenis varonil de Wimbledon dos finalistas, A y B, compiten por el título, que se otorgará al primer jugador en ganar tres sets. ¿De cuántas maneras diferentes puede quedar el marcador del partido?

59. Deportes En el torneo de tenis femenil en Wimbledon dos finalistas, A y B, compiten por el título, que se otorgará al primer jugador en ganar dos sets. ¿De cuántas maneras diferentes puede quedar el marcador del partido?

60. Selección del jurado ¿De cuántas maneras diferentes puede elegirse un panel de 12 jurados y dos jurados suplentes, entre un grupo de 30 posibles miembros del jurado?

61. Votación en la ONU Remítase al ejemplo 14. ¿De cuántas maneras puede ratificarse una medida si dos miembros permanentes particulares y dos miembros no permanentes particulares del Consejo se abstienen de votar?

62. Exámenes Un estudiante que presenta un examen debe responder exactamente 10 de un total de 15 preguntas.
a. ¿De cuántas maneras pueden seleccionarse las 10 preguntas?
b. ¿De cuántas maneras pueden seleccionarse las 10 preguntas si deben responderse exactamente 2 de las 3 primeras preguntas?

63. Ayudantía docente Doce estudiantes graduados han presentado su solicitud para tres plazas de auxiliar docente disponibles. ¿De cuántas maneras pueden adjudicarse las plazas entre los solicitantes si
a. no se da preferencia a ningún estudiante?
b. cada plaza debe adjudicarse a un estudiante en particular?
c. El grupo de solicitantes incluye siete hombres y cinco mujeres, y se establece que por lo menos una plaza debe adjudicarse a una mujer?

64. Comités del Senado ¿De cuántas maneras puede elegirse un subcomité de cuatro miembros de un comité del Senado formado por cinco demócratas y cuatro republicanos si
a. todos los miembros son elegibles?
b. el subcomité debe estar formado por dos republicanos y dos demócratas?

65. Licitación de contratos UBS Television Company está considerando las licitaciones de siete diferentes empresas para cada uno de los tres contratos distintos. ¿De cuántas maneras se adjudicarán los contratos entre estas empresas si ninguna empresa recibe más de dos contratos?

66. Selección de personal JCL Computers tiene cinco vacantes en su programa de capacitación ejecutiva. ¿De cuántas maneras puede la empresa seleccionar a cinco empleados de un grupo de 10 candidatos de sexo masculino y 10 de sexo femenino si las vacantes
a. pueden ser ocupadas por cualquier combinación de hombres y mujeres?
b. deben ocuparse por dos hombres y tres mujeres?

67. Selección de cursos Un estudiante que organiza su plan de estudios para el próximo año debe seleccionar uno de cinco cursos de administración, uno de tres cursos de matemáticas, dos de seis cursos opcionales y uno de los cuatro cursos de historia, o bien, uno de los tres cursos de ciencias sociales. ¿Cuántos planes de estudio tiene disponibles para su consideración?

68. Pruebas de conducir Un Departamento de Vehículos Motorizados estatal requiere que los aprendices aprueben un examen escrito sobre el reglamento de tránsito del estado. El examen consta de 10 preguntas de verdadero/falso, de las cuales ocho deben contestarse correctamente para obtener un permiso. ¿De cuántas maneras diferentes puede una persona que responde a todas las preguntas obtener el permiso?

En la tabla siguiente se muestra una lista de manos de póquer, ordenada de mayor a menor, junto con una descripción y un ejemplo de cada mano. Utilice la tabla para resolver los ejercicios 69-74.

Mano	Descripción	Ejemplo
Escalera de color	5 cartas del mismo color en secuencia	A♥ 2♥ 3♥ 4♥ 5♥

Póquer	4 cartas del mismo valor y otra carta de diferente valor y cualquier otra carta	K♥ K♦ K♠ K♣ 2♥
Full	3 cartas del mismo valor y un par	3♥ 3♦ 3♣ 7♥ 7♦
Color	5 cartas del mismo color que no están en secuencia	5♥ 6♥ 9♥ J♥ K♥
Escalera	5 cartas en secuencia, pero no del mismo valor	10♥ J♦ Q♣ K♠ A♥
Tercia	3 cartas del mismo valor y dos cartas cualquiera	K♥ K♦ K♠ 2♥ 4♦
Dos pares	2 cartas del mismo valor, otras 2 cartas de otro valor y una carta cualquiera	K♥ K♦ 2♥ 2♠ 4♣
Un par	2 cartas del mismo valor y tres cartas de diferente valor	K♥ K♦ 5♥ 2♠ 4♥

Si se reparte una mano de póquer de 5 cartas de una baraja bien revuelta con 52 cartas, ¿cuántas manos distintas se forman de lo siguiente?

69. Una escalera de color (tenga en cuenta que un as puede jugarse como una carta alta o baja en una escalera, es decir, A, 2, 3, 4, 5 o 10, J, Q, K, A. Por tanto, hay 10 secuencias posibles para una escalera en una mano).

70. Una escalera (pero no de color)

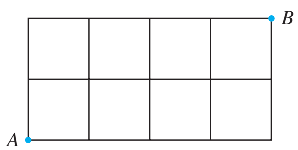
71. Color (pero no en escalera)

72. Póquer

73. Full

74. Dos pares

75. **Rutas de autobuses** A continuación se presenta un diagrama esquemático del sistema de calles de una ciudad entre los puntos A y B. La Autoridad de Tránsito de la ciudad está en el proceso de selección de una ruta de A a B a lo largo de la cual se ofrecerá un servicio de autobuses. Si la intención de la empresa es mantener la ruta lo más corta posible, ¿cuántas rutas hay que considerar?

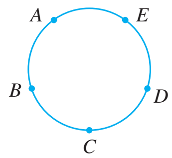


Sistema de calles

76. **Deportes** En la Serie Mundial, un equipo de la Liga Nacional y un equipo de la Liga Americana compiten por el título, que se otorga al primer equipo en ganar cuatro partidos. ¿De cuántas maneras distintas puede completarse la serie?

77. **Quórum de votaciones** El quórum (mínimo) de 6 miembros votantes es obligatorio en todas las reuniones de Curtis Townhomes Owners Association. Si hay un total de 12 miembros votantes en el grupo, determine cuántas maneras hay de formar este quórum.

78. **Permutaciones circulares** Suponga que n objetos distintos se colocan en círculo. Demuestre que el número de arreglos circulares (diferentes) de los objetos es $n\,(n-1)!$.
Sugerencia: Considere el arreglo de las cinco letras A, B, C, D y E en la figura adjunta. Las permutaciones $ABCDE$, $BCDEA$, $CDEAB$, $DEABC$ y $EABCD$ no se distinguen. Generalice esta observación en el caso de n objetos.



79. Remítase al ejercicio 78. ¿De cuántas maneras pueden sentarse a discutir cinco comentaristas de televisión en una mesa redonda?

80. Remítase al ejercicio 78. ¿De cuántas maneras pueden sentarse a cenar en una mesa redonda cuatro hombres y cuatro mujeres, si cada uno se sienta entre miembros del sexo opuesto?

81. Al final de la sección 6.3 mencionamos que la solución a un problema de programación lineal con tres variables y cinco restricciones por el método de las esquinas exige resolver 56 sistemas de ecuaciones lineales de 3×3. Verifique esta afirmación.

82. Remítase al ejercicio 81. Demuestre que, con el fin de resolver un problema de programación lineal con cinco variables y 10 restricciones, debemos resolver 3003 sistemas de ecuaciones lineales de 5×5. Esta afirmación se hizo también al final de la sección 6.3.

En los ejercicios 83-86 determine si el enunciado es verdadero o falso. Si es verdadero, explique por qué lo es. Si es falso, dé un ejemplo para mostrar por qué lo es.

83. El número de permutaciones de n objetos distintos tomando a todos juntos es $n!$

84. $P(n, r) = r!\, C(n, r)$

85. El número de combinaciones de n objetos tomando $n - r$ a la vez es el mismo que al tomar r objetos a la vez.

86. Si un conjunto de n objetos se compone de r elementos de un tipo y $n - r$ elementos de otro tipo, entonces el número de permutaciones de los n objetos tomando a todos juntos es $P(n, r)$.

7.4 Soluciones de los ejercicios de autoevaluación

1. a. $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$

b. $C(7, 4) = \dfrac{7!}{4!\,3!} = \dfrac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 35$

c. $P(6, 2) = \dfrac{6!}{4!} = 6 \cdot 5 = 30$

2. Hay $P(8, 2)$ maneras de elegir al comandante del transbordador y al piloto (el orden es importante aquí), $C(12, 3)$ maneras de elegir a los ingenieros (el orden no importa aquí), $C(5, 1)$ maneras de elegir al científico y $C(2, 1)$ maneras de elegir al civil. Según el principio generalizado de la multiplicación, hay

$$\begin{aligned} &P(8, 2) \cdot C(12, 3) \cdot C(5, 1) \cdot C(2, 1) \\ &= \frac{8!}{6!} \cdot \frac{12!}{9!\,3!} \cdot \frac{5!}{4!\,1!} \cdot \frac{2!}{1!\,1!} \\ &= \frac{8 \cdot 7 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 5 \cdot 2}{3 \cdot 2} \\ &= 123{,}200 \end{aligned}$$

maneras de formar la tripulación.

USO DE LA TECNOLOGÍA

Evaluación de $n!$, $P(n, r)$ y $C(n, r)$

Calculadora graficadora

Una calculadora graficadora se puede utilizar para calcular factoriales, permutaciones y combinaciones con relativa facilidad. Dicha calculadora es, por tanto, una herramienta indispensable para la solución de problemas de conteo que involucran un número grande de objetos. Aquí usamos las funciones **nPr** (permutación) y **nCr** (combinación) de una calculadora graficadora.

EJEMPLO 1 Utilice una calculadora graficadora para calcular (a) 12!, (b) $P(52, 5)$ y (c) $C(38, 10)$.

Solución

a. Utilizando la función factorial, encontramos que $12! = 479{,}001{,}600$.

b. Utilizando la función **nPr**, tenemos

$$P(52, 5) = 52 \textbf{ nPr } 5 = 311{,}875{,}200$$

c. Utilizando la función **nCr**, obtenemos

$$C(38, 10) = 38 \textbf{ nCr } 10 = 472{,}733{,}756$$

■

Excel

Excel tiene funciones integradas para el cálculo de factoriales, permutaciones y combinaciones.

EJEMPLO 2 Utilice Excel para calcular

a. 12!
b. $P(52, 5)$
c. $C(38, 10)$

Solución

a. En la celda A1, escriba `=FACT(12)` y oprima las teclas **Shift-Enter**. Aparecerá el número 479001600.

b. En la celda A2, escriba `=PERMUT(52,5)` y oprima **Shift-Enter**. El número 311875200 aparecerá.

c. En celda A3, escriba `=COMBIN(38,10)` y oprima **Shift-Enter**. El número 472733756 aparecerá. ■

Nota: Las palabras o caracteres impresos en negritas y encerrados en un margen (por ejemplo, **Enter**) indican que se requiere una acción (clic, seleccionar u oprimir). Las palabras o caracteres en azul (por ejemplo, Chart sub-type:) indican caracteres que aparecen en la pantalla. Las palabras o caracteres impresos en una fuente de máquina de escribir (por ejemplo, `=(−2/3)*A2+2)`) indican palabras o caracteres que deben introducirse desde el teclado.

EJERCICIOS CON TECNOLOGÍA

En los ejercicios 1-10, evalúe la expresión.

1. 15! **2.** 20!

3. 4(18!) **4.** $\dfrac{30!}{18!}$

5. $P(52, 7)$ **6.** $P(24, 8)$

7. $C(52, 7)$ **8.** $C(26, 8)$

9. $P(10, 4)C(12, 6)$ **10.** $P(20, 5)C(9, 3)C(8, 4)$

11. Un profesor de matemáticas utiliza un banco de preguntas computarizado para preparar su examen final. Si dispone de 25 problemas diferentes para las tres primeras preguntas del examen, 40 problemas distintos para las cinco preguntas siguientes y 30 problemas diferentes para las dos últimas preguntas, ¿cuántos exámenes diferentes de 10 preguntas puede preparar? (Suponga que el orden de las preguntas dentro de cada grupo no es importante.)

12. S&S Brokerage ha recibido 100 consultas de posibles clientes. ¿De cuántas maneras puede dirigir las consultas a cualquiera de los cinco agentes de la empresa si cada uno resuelve 20 consultas?

7.5 Terminología de experimentos, espacios muestrales y eventos

Terminología

Una serie de términos especializados se usan en el estudio de la probabilidad. Comenzamos con la definición del término *experimento*.

Experimento

Un **experimento** es una actividad con resultados observables.

Lo que produce el experimento se llama **resultados**. En seguida se presentan tres ejemplos de experimentos:

- Lanzar una moneda y observar si cae cara o cruz
- Lanzar un dado y observar cuál de los números 1, 2, 3, 4, 5 o 6 cae en la cara superior
- Probar una bujía de una muestra de 100 bujías y observar si está defectuosa o no

En nuestro análisis de los experimentos, utilizamos los términos siguientes:

Punto de muestreo, espacio muestral y evento

Punto de muestreo: Un resultado de un experimento

Espacio muestral: El conjunto que consiste en todos los puntos de muestreo posibles de un experimento

Evento: Un subconjunto de un espacio muestral de un experimento

El espacio muestral de un experimento es un conjunto universal, cuyos elementos son precisamente los resultados, o puntos de muestreo, del experimento, los eventos del experimento son los subconjuntos del conjunto universal. Un espacio muestral asociado a un experimento que tiene un número finito de resultados posibles (puntos de muestreo) se denomina **espacio muestral finito**.

Como los eventos de un experimento son subconjuntos de un conjunto universal (el espacio muestral del experimento), podemos utilizar los resultados para la teoría de conjuntos dada antes como ayuda para estudiar la probabilidad. Se dice que el evento *B*

ocurre en un ensayo de un experimento siempre que B contenga el resultado observado. Empecemos con la explicación de los papeles que desempeña el conjunto vacío y un conjunto universal cuando se consideran eventos asociados a un experimento. El conjunto vacío, $\varnothing$, se llama *evento imposible*, no puede ocurrir porque $\varnothing$ no tiene elementos (resultados). Luego, el conjunto universal S que se conoce como *evento seguro*, debe ocurrir porque S contiene todos los resultados del experimento.

Esta terminología se ilustra en los ejemplos siguientes.

EJEMPLO 1 Describir el espacio muestral asociado con el experimento de lanzar una moneda y observar si resulta cara o cruz. ¿Cuáles son los eventos de este experimento?

Solución Los dos resultados son cara y cruz, y el espacio muestral requerido está dado por $S = \{\text{H, T}\}$, donde H denota el resultado de cara y T denota el resultado de cruz. Los eventos del experimento, los subconjuntos de S, son

$$\varnothing, \{\text{H}\}, \{\text{T}\}, S$$

Observe que hemos incluido el evento imposible, $\varnothing$, y el evento seguro, S. ■

Dado que los eventos de un experimento son subconjuntos del espacio muestral del experimento, podríamos hablar de la unión e intersección de cualesquiera dos eventos; también podemos considerar el complemento de un evento con respecto al espacio muestral.

Unión de dos eventos

La **unión de dos eventos** E y F es el evento $E \cup F$.

Por tanto, el evento $E \cup F$ contiene el conjunto de resultados de E y/o F.

Intersección de dos eventos

La **intersección de dos eventos** E y F es el evento $E \cap F$.

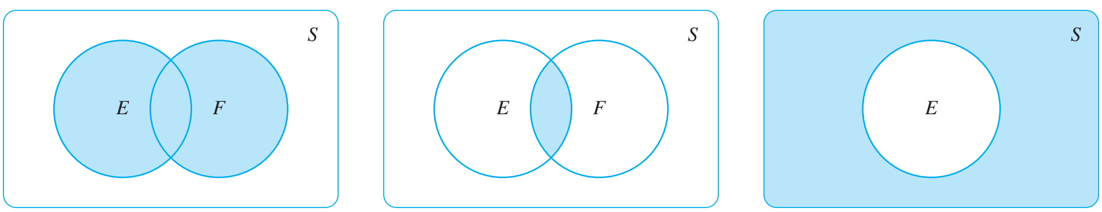
El evento $E \cap F$ contiene el conjunto de resultados comunes a E y F.

Complemento de un evento

El **complemento del evento** E es el evento E^c.

Por tanto, el evento E^c es el conjunto que contiene todos los resultados en el espacio muestral S que no están en E.

En la figura 20 se muestran los diagramas de Venn que representan la unión, la intersección y el complemento de eventos. Estos conceptos se ilustran en el ejemplo siguiente.



$E \cup F$ $E \cap F$ E^c

(a) La unión de dos eventos **(b)** La intersección de dos eventos **(c)** El complemento del evento E

FIGURA **20**

EJEMPLO 2 Considere el experimento de lanzar un dado y observar el número que cae en la cara superior. Sean $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ el espacio muestral de un experimento y $E = \{2, 4, 6\}$ y $F = \{1, 3\}$ los eventos de este experimento. Calcule (a) $E \cup F$, (b) $E \cap F$ y (c) F^c. Interprete sus resultados.

Solución

a. $E \cup F = \{1, 2, 3, 4, 6\}$ y es el evento de que el resultado del experimento es un 1, un 2, un 3, un 4 o un 6.
b. $E \cap F = \varnothing$ es el evento imposible; el número que aparece en la cara superior cuando se lanza un dado no puede ser par e impar al mismo tiempo.
c. $F^c = \{2, 4, 5, 6\}$ es precisamente el evento en que F no ocurre. ■

Si dos eventos no pueden ocurrir al mismo tiempo, se dice que son mutuamente excluyentes. Utilizando la notación de conjuntos tenemos la definición siguiente.

Eventos mutuamente excluyentes

E y F son **mutuamente excluyentes** si $E \cap F = \varnothing$.

Como antes, podemos utilizar diagramas de Venn para ilustrar estos eventos. En este caso, los dos eventos mutuamente excluyentes se representan como dos círculos que no se intersecan (figura 21).

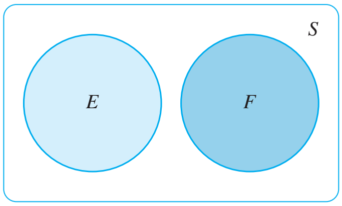


FIGURA 21
Eventos mutuamente excluyentes

EJEMPLO 3 Un experimento consiste en lanzar una moneda tres veces y observar la secuencia resultante de caras y cruces.

a. Describa el espacio muestral de S del expermiento.
b. Determine el evento E en que caen dos caras exactamente.
c. Determine el evento F en que cae por lo menos una cara.

Explore y analice

1. Suponga que E y F son dos eventos complementarios. ¿E y F deben ser mutuamente excluyentes? Explique su respuesta.
2. Suponga que E y F son eventos mutuamente excluyentes. ¿E y F deben ser complementarios? Explique su respuesta.

Solución

a. Los puntos de muestreo pueden obtenerse con la ayuda de un diagrama de árbol (figura 22).

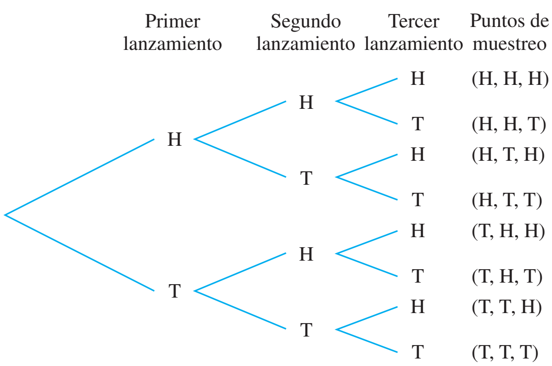


FIGURA 22

El espacio muestral requerido S está dado por

$$S = \{\text{HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT}\}$$

b. Al examinar el espacio muestral S obtenido en el inciso (a), vemos que los resultados en los cuales aparecen dos caras exactamente están dados por el evento

$$E = \{\text{HHT, HTH, THH}\}$$

c. Proseguimos como en el inciso (b) y encontramos que

$$F = \{\text{HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH}\}$$

EJEMPLO 4 Un experimento consiste en lanzar un par de dados y observar el número que cae en la cara superior de cada dado.

a. Describa un espacio muestral apropiado S para este experimento.
b. Determine los eventos $E_2, E_3, E_4, \ldots, E_{12}$ tales que la suma de los números que caen en las caras superiores es 2, 3, 4, . . . , 12, respectivamente.

Solución

a. Podemos representar cada resultado del experimento por medio de un par ordenado de números, en el cual el primero representa el número que aparece en la cara superior del primer dado y el segundo representa el número que aparece en la cara superior del segundo dado. Para distinguir entre los dos dados, piense en el primer dado como si fuera rojo y en el segundo como si fuera verde. Dado que hay seis resultados posibles para cada dado, el principio generalizado de la multiplicación implica que hay $6 \cdot 6$, o 36, elementos en el espacio muestral:

$$\begin{aligned} S = \{&(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6),\\ &(2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6),\\ &(3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6),\\ &(4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6),\\ &(5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6),\\ &(6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)\} \end{aligned}$$

b. Con la ayuda de los resultados del inciso (a), obtenemos la lista de eventos requerida, que se muestra en la tabla 1.

TABLA **1**

Suma de números de las caras superiores	Evento
2	$E_2 = \{(1, 1)\}$
3	$E_3 = \{(1, 2), (2, 1)\}$
4	$E_4 = \{(1, 3), (2, 2), (3, 1)\}$
5	$E_5 = \{(1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1)\}$
6	$E_6 = \{(1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1)\}$
7	$E_7 = \{(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1)\}$
8	$E_8 = \{(2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2)\}$
9	$E_9 = \{(3, 6), (4, 5), (5, 4), (6, 3)\}$
10	$E_{10} = \{(4, 6), (5, 5), (6, 4)\}$
11	$E_{11} = \{(5, 6), (6, 5)\}$
12	$E_{12} = \{(6, 6)\}$

EJEMPLO DE APLICACIÓN 5 Asistencia al cine El gerente de un cine local registra el número de clientes que asisten a una película de estreno a la proyección de la 1 p.m. El teatro tiene una capacidad de 500 asientos.

a. ¿Cuál es un espacio muestral apropiado para este experimento?
b. Describa el evento E de que menos de 50 hombres asisten a la proyección.
c. Describa el evento F de que más de la mitad de la sala está ocupada en la proyección.

Solución

a. El número de clientes que asiste a la proyección (el resultado) podría variar de 0 a 500. Por tanto, un espacio muestral para este experimento es

$$S = \{0, 1, 2, 3, \ldots, 500\}$$

b. $E = \{0, 1, 2, 3, \ldots, 49\}$

c. $F = \{251, 252, 253, \ldots, 500\}$ ■

VIDEO

EJEMPLO DE APLICACIÓN 6 Composición de la familia Un experimento consiste en el estudio de la composición del sexo de una familia de tres hijos en la cual los hijos nacieron en fechas distintas.

a. Describa un espacio muestral S apropiado para este experimento.
b. Describa el evento E de que hay dos niñas y un niño en la familia.
c. Describa el evento F de que el hijo mayor es una niña.
d. Describa el evento G de que el hijo mayor es una niña y el menor es un niño.

Solución

a. Los puntos de muestreo del experimento pueden obtenerse con la ayuda del diagrama de árbol mostrado en la figura 23, donde b denota un niño y g denota una niña.

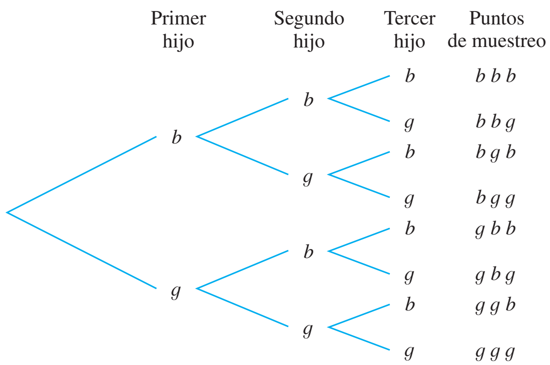


FIGURA **23**
Diagrama de árbol para una familia de tres hijos.

A partir del diagrama vemos que el espacio muestral requerido está dado por

$$S = \{bbb, bbg, bgb, bgg, gbb, gbg, ggb, ggg\}$$

Utilizando el diagrama de árbol encontramos que:

b. $E = \{bgg, gbg, ggb\}$
c. $F = \{gbb, gbg, ggb, ggg\}$
d. $G = \{gbb, ggb\}$ ■

El ejemplo siguiente muestra que los espacios muestrales pueden ser infinitos.

EJEMPLO DE APLICACIÓN 7 Pruebas de nuevos productos Ever-Brite está desarrollando una batería de alto amperaje y alta capacidad como una fuente para alimentar automóviles eléctricos. La batería se prueba al instalar una completamente cargada en un prototipo de automóvil eléctrico y hacer funcionar el vehículo en una pista de prueba a una velocidad constante de 55 mph hasta que el automóvil se queda sin energía. Luego se observa la distancia recorrida por el vehículo.

a. ¿Cuál es el espacio muestral para este experimento?
b. Describa el evento E de la distancia recorrida bajo las condiciones de prueba es inferior a 150 millas.

Explore y analice

Diseñe un experimento.

1. Describa el (los) punto(s) de muestreo y el espacio muestral del experimento.
2. Construya dos eventos, E y F, del experimiento.
3. Encuentre la unión e intersección de E y F y el complemento de E.
4. ¿E y F son mutuamente excluyentes? Explique su respuesta.

c. Describa el evento F de la distancia recorrida esté inclusive entre 200 y 250 millas.

Solución

a. Como la distancia d cubierta por el automóvil en cualquier ensayo puede estar dada por cualquier número no negativo, el espacio muestral está dado por

$$S = \{d \mid d \geq 0\}$$

b. El evento E está dado por

$$E = \{d \mid 0 \leq d < 150\}$$

c. El evento F está dado por

$$F = \{d \mid 200 \leq d \leq 250\}$$

7.5 Ejercicios de autoevaluación

1. Una muestra de tres manzanas tomadas del puesto de frutas de Cavallero se examina para determinar si las manzanas están en buen estado o podridas.
   a. ¿Cuál es un espacio muestral apropiado para este experimento?
   b. Describa el evento E de que exactamente una de las manzanas seleccionadas está podrida.
   c. Describa el evento F de que la primera manzana seleccionada está podrida.

2. Remítase al ejercicio de autoevaluación 1.
   a. Encuentre $E \cup F$.
   b. Encuentre $E \cap F$.
   c. Encuentre F^c.
   d. ¿Los eventos E y F son mutuamente excluyentes?

Las soluciones de los ejercicios de autoevaluación 7.5 pueden encontrarse en la página 439.

7.5 Preguntas de concepto

1. Explique lo que es un experimento. Dé un ejemplo. Para el ejemplo que ha elegido, describa a) un punto de muestreo, b) el espacio muestral y c) un evento del experimento.

2. ¿Qué significa que dos eventos sean mutuamente excluyentes? Dé un ejemplo de dos eventos mutuamente excluyentes E y F. ¿Cómo puede demostrar que son mutuamente excluyentes?

7.5 Ejercicios

En los ejercicios 1-6, sea $S = \{a, b, c, d, e, f\}$ un espacio muestral de un experimento y sea $E = \{a, b\}$, $F = \{a, d, f\}$ y $G = \{b, c, e\}$ eventos de este experimento.

1. Encuentre los eventos $E \cup F$ y $E \cap F$.
2. Encuentre los eventos $F \cup G$ y $F \cap G$.
3. Encuentre los eventos F^c y $E \cap G^c$.
4. Encuentre los eventos E^c y $F^c \cap G$.
5. ¿Los eventos E y F son mutuamente excluyentes?
6. ¿Los eventos $E \cup F$ y $E \cap F^c$ son mutuamente excluyentes?

En los ejercicios 7-14 sea $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $E = \{2, 4, 6\}$, $F = \{1, 3, 5\}$, y $G = \{5, 6\}$.

7. Encuentre el evento $E \cup F \cup G$.
8. Encuentre el evento $E \cap F \cap G$.
9. Encuentre el evento $(E \cup F \cup G)^c$.
10. Encuentre el evento $(E \cap F \cap G)^c$.
11. ¿Los eventos E y F son mutuamente excluyentes?
12. ¿Los eventos F y G son mutuamente excluyentes?
13. ¿Los eventos E y F son complementarios?
14. ¿Los eventos F y G son complementarios?

En los ejercicios 15-20 sea *S* cualquier espacio muestral y sean *E*, *F* y *G* cualesquiera tres eventos asociados con el experimento. Describa los eventos usando los símbolos ∪, ∩ y ^{c}.

15. El evento de que E y/o F ocurre

16. El evento de que tanto E como F ocurren

17. El evento de que G no ocurre

18. El evento de que ocurre E pero no ocurre F

19. El evento de que ninguno de los eventos E, F y G ocurre

20. El evento de que E ocurre pero ninguno de los eventos F o G ocurre

21. Considere el espacio muestral S del ejemplo 4, página 434.
- **a.** Determine el evento de que el número que cae en la cara superior del primer dado es mayor que el número que cae en la cara superior del segundo dado.
- **b.** Determine el evento de que el número que cae en la cara superior del segundo dado es el doble del número que cae en la cara superior del primer dado.

22. Considere el espacio muestral S del ejemplo 4, página 434.
- **a.** Determine el evento de que la suma de los números que caen en la cara superior es menor o igual que 7.
- **b.** Determine el evento de que el número que cae en la cara superior de un dado es un 4 y el número que cae en la cara superior del otro dado es mayor que 4.

23. Sea $S = \{a, b, c\}$ un espacio muestral de un experimento con los resultados a, b y c. Liste todos los eventos del experimento.

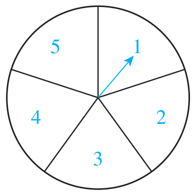
24. Sea $S = \{1, 2, 3\}$ un espacio muestral asociado con un experimento.
- **a.** Haga una lista de todos los eventos de un experimento.
- **b.** ¿Cuántos subconjuntos de S contienen el número 3?
- **c.** ¿Cuántos subconjuntos de S contienen, ya sea el número 2 o el número 3?

25. Un experimento consiste en seleccionar una carta de una baraja estándar de cartas y observar si es negra (B) o roja (R).
- **a.** Describa un espacio muestral apropiado para este experimento.
- **b.** ¿Cuáles son los eventos de este experimento?

26. Un experimento se compone de seleccionar una letra al azar a partir de las letras de la palabra *MASSACHUSETTS* y observar los resultados.
- **a.** ¿Cuál es un espacio muestral apropiado para este experimento?
- **b.** Describa el evento de que "la letra seleccionada es una vocal".

27. Un experimento consiste en lanzar una moneda, lanzar un dado y observar los resultados.
- **a.** Describa un espacio muestral apropiado para este experimento.
- **b.** Describa el evento de que "caen una cara y un número impar".

28. Un experimento consiste en hacer girar la flecha del disco numerado que muestra la figura siguiente y luego observar la región en la cual la flecha se detiene. (Si la flecha se detiene en una línea, el resultado es discontinuo y la flecha se hace girar de nuevo.)



- **a.** ¿Cuál es un espacio muestral apropiado para este experimento?
- **b.** Describa el evento de que "la flecha apunta al número 2".
- **c.** Describa el evento de que "la flecha apunta a un número impar".

29. Un dado se lanza y el número que cae en la cara superior se observa. Sea E el evento de que el número mostrado es un 2 y sea F el evento de que el número mostrado es un número par.
- **a.** ¿Los eventos E y F son mutuamente excluyentes?
- **b.** ¿Los eventos E y F son complementarios?

30. Se lanza un dado y el número que cae en la cara superior se observa. Sea E el evento de que el número mostrado es un número par y F el evento de que el número mostrado es un número impar.
- **a.** ¿Los eventos E y F son mutuamente excluyentes?
- **b.** ¿Los eventos E y F son complementarios?

31. **CONTROL DE CALIDAD** Una muestra de tres transistores tomados de una tienda local de aparatos electrónicos se examinó para determinar si los transistores tenían defectos (d) o no tenían defectos (n). ¿Cuál es un espacio muestral apropiado para este experimento?

32. **CLASIFICACIÓN DE GRUPOS SANGUÍNEOS** La sangre humana se clasifica por la presencia o ausencia de tres antígenos principales (A, B y Rh). Cuando una muestra de sangre se clasifica, la presencia del antígeno A y/o B se indica al listar la letra A y/o la letra B. Si no están presentes ninguno de los dos antígenos, se usa la letra O. La presencia o ausencia del antígeno Rh se indica por medio de los símbolos + o −, respectivamente. Por tanto, si una muestra de sangre se clasifica como AB^+, contiene los antígenos A y B, así como el antígeno Rh. De modo parecido, la sangre O^- no contiene ninguno de los tres antígenos. Utilizando esta información, determine el espacio muestral correspondiente a los diferentes grupos sanguíneos.

33. **PROGRAMAS DE JUEGOS** En un programa de televisión de juegos, se pide al ganador que seleccione tres premios de cinco premios diferentes, A, B, C, D y E.
- **a.** Describa un espacio muestral de resultados posibles (el orden no es importante).
- **b.** ¿Cuántos puntos hay en el espacio muestral correspondiente a una selección que incluye A?
- **c.** ¿Cuántos puntos hay en el espacio muestral correspondiente a una selección que incluye A y B?
- **d.** ¿Cuántos puntos hay en el espacio muestral correspondiente a una selección que incluye ya sea A o B?

34. Cajeros automáticos El gerente de un banco local observa cuánto tarda un cliente en completar sus transacciones en el cajero automático del banco.

a. Describa un espacio muestral apropiado para este experimento.

b. Describa el evento de que un cliente tarda entre 2 y 3 minutos en completar sus transacciones en el cajero automático del banco.

35. Acciones comunes Robin compró acciones de una empresa que fabrica herramientas para máquinas de una línea aérea. Sea E el evento de que las acciones de la compañía de herramientas para máquinas aumenta en valor durante los próximos 6 meses y F el evento de que las acciones de la línea aérea aumentan en valor durante los próximos 6 meses. Usando los símbolos $\cup$, $\cap$ y ^{c}, describa los eventos siguientes.

a. Las acciones en la compañía de herramientas para máquinas no aumentan de valor.

b. Las acciones de la compañía de herramientas para máquinas y de la línea aérea no aumentan de valor.

c. Las acciones de por lo menos una de las dos empresas no aumentan de valor.

d. Las acciones de sólo una de las dos empresas aumentan de valor.

36. Encuestas de servicio al cliente El departamento de servicio al cliente de Universal Instruments, fabricante de la computadora personal Galaxy, realizó una encuesta a aquellos de sus clientes que devolvieron sus tarjetas de registro de compra. Se solicitó a los compradores de esta computadora personal modelo de lujo que informaran el tiempo (t) en días que transcurrió antes de que solicitaran el servicio.

a. Describa un espacio muestral correspondiente a esta encuesta.

b. Describa el evento E de que una computadora personal requirió servicio antes de que hubiera transcurrido un periodo de 90 días.

c. Describa el evento F de que una computadora personal no requirió servicio antes de que hubiera transcurrido un periodo de 1 año.

37. Estudios del tiempo de ensamble El gerente de producto de Vista Vision realizó un estudio de tiempo de ensamble para determinar el tiempo en minutos requerido por un operario para completar cierta tarea durante el ensamble de sus televisores a color Pulsar.

a. Describa un espacio muestral correspondiente a este estudio de tiempo.

b. Describa el evento E de que un operario de ensamble tardó 2 min o menos en completar la tarea.

c. Describa el evento F de que un operario de ensamble tardó más de 2 min en completar la tarea.

38. Encuestas políticas Una encuesta política se realizó entre un electorado estatal para determinar la relación entre sus niveles de ingreso y sus posturas en cuanto a una propuesta dirigida a reducir el impuesto al ingreso. Los votantes se clasifican como si pertenecieran al grupo de ingresos ya sea bajo, medio o alto. Se les pregunta si están a favor, en contra o indecisos respecto a la postura. Sean las letras L, M y U que representan los grupos de ingresos bajos, medios y superiores, respectivamente, y sean las letras f, o y u que representan las respuestas: a favor, en contra e indeciso, respectivamente.

a. Describa un espacio muestral correspondiente a esta encuesta.

b. Describa el evento E_1 de que un encuestado está a favor de la propuesta.

c. Describa el evento E_2 de que un encuestado está en contra de la propuesta y no pertenece al grupo de bajos ingresos.

d. Describa el evento E_3 de que un encuestado no está a favor de la propuesta y no pertenece al grupo de ingresos altos.

39. Control de calidad Como parte de un procedimiento de control de calidad, un inspector de Bristol Fanns selecciona al azar 10 huevos de cada embarque y anota el número de huevos rotos.

a. ¿Cuál es un espacio muestral para este experimento?

b. Describa el evento F de que por lo menos tres huevos están rotos.

c. Describa el evento F que por lo menos cinco huevos están rotos.

40. Encuestas políticas En el estudio de opinión del ejercicio 38, se solicitó a los votantes indicaran su filiación política, demócratas, republicanos o independientes. Como antes, sean las letras L, M y U los grupos de ingresos bajos, medios y altos, respectivamente. Sean las letras D, R e I los demócratas, republicanos e independientes, respectivamente.

a. Describa un espacio muestral correspondiente a esta encuesta.

b. Describa el evento E_1 de que un encuestado es un demócrata.

c. Describa el evento E_2 de que un encuestado pertenece al grupo de ingresos altos y es un republicano.

d. Describa el evento E_3 de que un encuestado pertenece al grupo de ingresos medios y no es un demócrata.

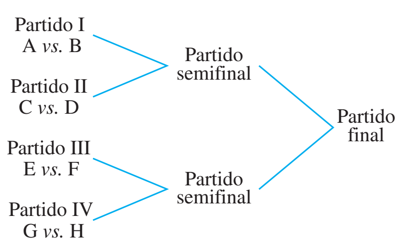
41. Uso de autobuses de enlace Cierto hotel del aeropuerto opera un servicio de autobuses de enlace entre el hotel y el aeropuerto. La capacidad máxima de un autobús es de 20 pasajeros. En los viajes alternos del autobús de enlace durante un periodo de 1 semana, el gerente del hotel llevaba un registro del número de pasajeros que llegaba al hotel en cada autobús.

a. ¿Cuál es un espacio muestral apropiado para este experimento?

b. Describa el evento E de que un autobús de enlace transportó menos de 10 pasajeros.

c. Describa el evento F de que un autobús de enlace llegó con una carga completa.

42. Deportes Ocho tenistas A, B, C, D, E, F, G y H, están compitiendo en una serie de partidos de eliminación de un torneo en el cual el ganador de cada partido preliminar avanzará a las semifinales y los ganadores de las semifinales avanzarán a las finales. Un esquema de los partidos programados se presenta a continuación. Describa un espacio muestral que liste a los participantes posibles en las finales.



43. Un experimento consiste en seleccionar al azar una carta de una baraja de 52 cartas bien revuelta. Sea E el evento de que se saca un as y F el evento de que se saca una espada. Muestre que $n(E \cup F) = n(E) + n(F) - n(E \cap F)$.

44. Sea S un espacio muestral para un experimento. Muestre que si E es cualquier evento de un experimento, entonces E y E^c son mutuamente excluyentes.

45. Sea S un espacio muestral para un experimento y E y F eventos de este experimento. Muestre que los eventos $E \cup F$ y $E^c \cap F^c$ son mutuamente excluyentes.
Consejo: Aplique la ley de De Morgan.

46. Sea S un espacio muestral de un experimento con n resultados. Determine el número de eventos de este experimento.

En los ejercicios 47 y 48 determine si el enunciado es verdadero o falso. Si es verdadero, explique por qué lo es. Si es falso, dé un ejemplo para mostrar por qué lo es.

47. Si E y F son mutuamente excluyentes y E y G son mutuamente excluyentes, entonces F y G son mutuamente excluyentes.

48. Los números 1, 2 y 3 se escriben por separado en tres trozos de papel, los cuales se colocan después en un tazón. Si usted extrae dos trozos del tazón, uno por uno y sin reemplazarlos, entonces el espacio muestral de este experimento consta de seis elementos.

7.5 Soluciones de los ejercicios de autoevaluación

1. a. Sea g una manzana en buen estado y r una manzana podrida. Por tanto, los puntos de muestreo requeridos pueden obtenerse con la ayuda de un diagrama de árbol (compare con el ejemplo 3). El espacio muestral requerido está dado por

$$S = \{ggg, ggr, grg, grr, rgg, rgr, rrg, rrr\}$$

b. Al explorar el espacio muestral S obtenido en el inciso (a), identificamos los resultados en los cuales una manzana está podrida. Encontramos que

$$E = \{ggr, grg, rgg\}$$

c. Procediendo como en el inciso (b), encontramos que

$$F = \{rgg, rgr, rrg, rrr\}$$

2. Utilizando los resultados del ejercicio de autoevaluación 1, encontramos que:

a. $E \cup F = \{ggr, grg, rgg, rgr, rrg, rrr\}$

b. $E \cap F = \{rgg\}$

c. F^c es el conjunto de resultados en S pero no en F. Por tanto,

$$F^c = \{ggg, ggr, grg, grr\}$$

d. Como $E \cap F \neq \varnothing$, concluimos que E y F no son mutuamente excluyentes.

7.6 Definición de probabilidad

Calcular la probabilidad de un evento

Regresemos al experimento del lanzamiento de una moneda. El espacio muestral de este experimento está dado por $S = \{\text{H, T}\}$, donde los puntos de muestreo H y T corresponde a dos resultados posibles, cara y cruz. Si es una moneda *no trucada*, entonces hay *una probabilidad de dos* de obtener una cara (o una cruz) y decimos que la *probabilidad* de lanzamiento de una cara (cruz) es $\frac{1}{2}$, que se abrevia

$$P(\text{H}) = \frac{1}{2} \quad \text{y} \quad P(\text{T}) = \frac{1}{2}$$

Un método alterno de conocer los valores de $P(\text{H})$ y $P(\text{T})$ se basa en la experimentación continua y no depende del supuesto de que los dos resultados son igualmente probables. La tabla 2 resume los resultados de este ejercicio.

TABLA **2**

A medida que el número de ensayos aumenta, la frecuencia relativa se aproxima a .5

Número de lanzamientos, *n*	**Número de caras, *m***	**Frecuencia relativa de las caras, *m/n***
10	4	.4000
100	58	.5800
1,000	492	.4920
10,000	5,034	.5034
20,000	10,024	.5012
40,000	20,032	.5008

Observe que las frecuencias relativas (columna 3) difieren considerablemente cuando el número de ensayos es pequeño, pero a medida que el número de ensayos aumenta, la frecuencia relativa se aproxima al número .5. Este resultado sugiere que asignemos a $P(\mathrm{H})$ el valor $\frac{1}{2}$, como antes.

De manera más general, considere un experimento que pueda repetirse una y otra vez bajo condiciones independientes y parecidas. Suponga que en n ensayos un evento E ocurre m veces. Llamamos a la razón m/n **frecuencia relativa** del evento E después de n repeticiones. Si esta frecuencia relativa se aproxima a algún valor $P(E)$ a medida que n aumenta cada vez más, entonces a $P(E)$ se le conoce como la **probabilidad empírica** de E. Por tanto, la probabilidad $P(E)$ de un evento que ocurre es una medida de la proporción del tiempo que el evento E ocurrirá a largo plazo. Observe que este método de calcular la probabilidad de que caiga una cara es eficaz incluso en el caso cuando una moneda trucada se usa en el experimento. La distribución de frecuencia relativa con frecuencia se conoce como una *distribución de probabilidad observada* o *empírica*.

La **probabilidad de un evento** es un número que está entre 0 y 1, inclusive. En general, entre mayor sea la probabilidad de un evento, más probable es que el evento ocurra. Por tanto, es más probable que ocurra un evento con una probabilidad de .8 que un evento con una probabilidad de .6. Un evento con una probabilidad de $\frac{1}{2}$, o .5, tiene una probabilidad de ocurrir de cincuenta a cincuenta.

Ahora suponga que nos dan un experimento y queremos determinar las probabilidades asociadas con ciertos eventos del experimento. Este problema podría resolverse mediante el cálculo de $P(E)$ directamente para cada evento E de interés. En la práctica, no obstante, el número de eventos de interés por lo general es bastante grande, así que este enfoque no es satisfactorio.

El enfoque siguiente es particularmente adecuado cuando el espacio muestral de un experimento es finito.* Sea S un espacio muestral finito con n resultados; es decir,

$$S = \{s_1, s_2, s_3, \ldots, s_n\}$$

Por tanto, los eventos

$$\{s_1\}, \{s_2\}, \{s_3\}, \ldots, \{s_n\}$$

que constan exactamente de un punto se llaman **eventos elementales**, o **simples**, del experimento. Son elementales en el sentido de que cualquier evento (no vacío) del experimento puede obtenerse al tomar una unión finita de eventos elementales no adecuados. Los eventos simples de un experimento también son **mutuamente excluyentes**; es decir, dados cualesquiera dos eventos simples del experimento, sólo uno puede ocurrir.

Mediante la asignación de probabilidades a cada uno de los eventos simples, obtenemos los resultados mostrados en la tabla 3. Esta tabla es una **distribución de probabilidad** para el experimento. La función P, que asigna una probabilidad a cada uno de los eventos simples, se llama **función de probabilidad**.

TABLA 3

Una distribución de probabilidad

Evento simple	Probabilidad*
$\{s_1\}$	$P(s_1)$
$\{s_2\}$	$P(s_2)$
$\{s_3\}$	$P(s_3)$
$\vdots$	$\vdots$
$\{s_n\}$	$P(s_n)$

*Por simplicidad, usamos la notación $P(s_i)$ en vez del técnicamente más correcto $P(\{s_i\})$.

Los números $P(s_1), P(s_2), \ldots, P(s_n)$ tienen las propiedades siguientes:

1. $0 \leq P(s_i) \leq 1 \qquad i = 1, 2, \ldots, n$
2. $P(s_1) + P(s_2) + \cdots + P(s_n) = 1$
3. $P(\{s_i\} \cup \{s_j\}) = P(s_i) + P(s_j)\ (i \neq j) \qquad i = 1, 2, \ldots, n;\ j = 1, 2, \ldots, n$

La primera propiedad sencillamente establece que la probabilidad de un evento simple debe estar entre 0 y 1, inclusive. La segunda propiedad establece que la suma de las probabilidades de todos los eventos simples del espacio muestral es 1. Esto se deriva del hecho de que es seguro que el evento S ocurra. La tercera propiedad establece que la probabilidad de la unión de dos eventos simples está dada por la suma de sus probabilidades.

*En el resto del capítulo, asumimos que todos los espacios muestrales son finitos.

Exploración con TECNOLOGÍA

Podemos utilizar una calculadora gráficadora para simular el experimento de lanzar una moneda descrito antes. Asocie el resultado “una cara” con el número 1 y el resultado “una cruz” con el número 0. Seleccione la función **randInt(** de la TI-83/84. (Usted puede obtener esto al presionar MATH y luego mover el cursor a **PRB**.) Introduzca **randInt**(0,1) y luego oprima ENTER repetidamente. Esto genera aleatoriamente números 0 y 1, lo que simula los resultados de lanzar una moneda no trucada.

Como se vio antes, no existe un método único para asignar probabilidades a los eventos simples de un experimento. En la práctica, los métodos empleados para determinar estas habilidades pueden variar desde consideraciones teóricas sobre el problema en un extremo hasta la dependencia de “conjeturas fundamentadas” en el otro.

Los espacios muestrales en los que los resultados son igualmente probables se llaman **espacios muestrales uniformes**. La asignación de probabilidades a los eventos simples en estos espacios es relativamente fácil.

Probabilidad de un evento en un espacio muestral uniforme

Si

$$S = \{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$$

es el espacio muestral para un experimento en el cual los resultados son igualmente probables, entonces asignamos las probabilidades

$$P(s_1) = P(s_2) = \cdots = P(s_n) = \frac{1}{n}$$

a cada uno de los eventos simples $\{s_1\}, \{s_2\}, \ldots, \{s_n\}$.

EJEMPLO 1 Un dado no cargado es lanzado y se observa el número que cae en la cara superior. Determine la distribución de probabilidad para el experimento.

Solución El espacio muestral para el experimento es $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6)$, y los eventos simples se proporcionan en consecuencia por los conjuntos $\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}$ y $\{6\}$. Dado que se supone que el dado no está cargado, los seis resultados son igualmente probables. Por consiguiente, asignamos una probabilidad de $\frac{1}{6}$ a cada uno de los eventos simples y se obtiene la distribución de probabilidad mostrada en la tabla 4. ■

TABLA 4

Una distribución de probabilidad

Evento simple	Probabilidad
$\{1\}$	$\frac{1}{6}$
$\{2\}$	$\frac{1}{6}$
$\{3\}$	$\frac{1}{6}$
$\{4\}$	$\frac{1}{6}$
$\{5\}$	$\frac{1}{6}$
$\{6\}$	$\frac{1}{6}$

Explore y analice

Usted sospecha que un dado está cargado.

1. Describa un método que podría usar para mostrar que su afirmación es correcta.
2. ¿Cómo asignaría su probabilidad a cada resultado de 1 a 6 de un experimento que consiste en lanzar el dado y observar el número que cae en la cara superior?

El ejemplo siguiente muestra cómo la interpretación de la *frecuencia relativa* de la *probabilidad* se presta al cálculo de las probabilidades.

TABLA 5

Datos obtenidos durante 200 pruebas finales de un vehículo eléctrico

Distancia cubierta en millas, x	Frecuencia de ocurrencia
$0 < x \leq 50$	4
$50 < x \leq 100$	10
$100 < x \leq 150$	30
$150 < x \leq 200$	100
$200 < x \leq 250$	40
$250 < x$	16

TABLA 6

Una distribución de probabilidad

Evento simple	Probabilidad
$\{s_1\}$	.02
$\{s_2\}$	.05
$\{s_3\}$	.15
$\{s_4\}$	.50
$\{s_5\}$	.20
$\{s_6\}$	.08

EJEMPLO DE APLICACIÓN 2 Pruebas de nuevos productos Remítase al ejemplo 7, sección 7.5. Los datos mostrados en la tabla 5 se obtuvieron en pruebas que involucran 200 pruebas finales (*test run*). Cada prueba se realizó con una batería totalmente cargada.

a. Describa un espacio muestral apropiado para este experimento.
b. Encuentre la distribución de probabilidad empírica para este experimento.

Solución

a. Sea s_1 el resultado de que la distancia cubierta por el automóvil no excede de 50 millas y s_2 el resultado de que la distancia cubierta por el automóvil es mayor que 50 millas, pero no excede de 100 millas, etc. Por último, sea s_3 el resultado de que la distancia cubierta por el automóvil es mayor que 250 millas. Por tanto, el espacio muestral requerido está dado por

$$S = \{s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6\}$$

b. Para calcular la distribución de probabilidad empírica para el experimento, recurrimos a la interpretación de la frecuencia relativa de la probabilidad. La aceptación de las imprecisiones inherentes al número relativamente pequeño de ensayos (200 pruebas finales), tomamos la probabilidad de que s_1 ocurra como

$$\begin{aligned} P(s_1) &= \frac{\text{Número de ensayos en que ocurre } s_1}{\text{Número total de ensayos}} \\ &= \frac{4}{200} = .02 \end{aligned}$$

De manera similar, asignamos probabilidades a los otros eventos simples, con lo cual obtenemos la distribución de probabilidad que se muestra en la tabla 6. ■

Estamos ahora en posición de dar un procedimiento para calcular la probabilidad $P(E)$ de un evento arbitrario E de un experimento.

Encontrar la probabilidad de un evento *E*

1. Determine un espacio muestral S asociado con el experimento.
2. Asigne probabilidades a los eventos simples de S.
3. Si $E = \{s_1, s_2, s_3, \ldots, s_n\}$, donde $\{s_1\}, \{s_2\}, \{s_3\}, \ldots, \{s_n\}$ son eventos simples, por tanto

$$P(E) = P(s_1) + P(s_2) + P(s_3) + \cdots + P(s_n)$$

Si E es el conjunto vacío, $\varnothing$, entonces $P(E) = 0$.

El principio establecido en el paso 3 se llama **principio de adición** y es una consecuencia de la propiedad 3 de la función de probabilidad (página 440). Este principio nos permite calcular las probabilidades de todos los demás eventos una vez que se conozcan las probabilidades de los eventos simples.

La regla de adición en el paso 3 se aplica *sólo* a la suma o adición de probabilidades de los eventos simples.

VIDEO

EJEMPLO DE APLICACIÓN 3 Lanzamiento de dados Un par de dados no cargados es lanzado.

a. Calcule la probabilidad de que los dos dados muestren el mismo número.
b. Calcule la probabilidad de que la suma de los números de los dos dados sea 6.

Solución A partir de los resultados del ejemplo 4, página 434, vemos que el espacio muestral S del experimento se compone de 36 resultados:

$$S = \{(1, 1), (1, 2), \ldots, (6, 5), (6, 6)\}$$

Dado que ambos dados son no cargados, cada uno de los 36 resultados es igualmente probable. En consecuencia, asignamos la probabilidad de $\frac{1}{36}$ a cada uno de los eventos simples.

a. El evento de que los dos dados muestran el mismo número está dado por

$$E = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)\}$$

(figura 24). Por tanto, según el principio de adición, la probabilidad de que los dos dados muestren el mismo número está dada por

$$\begin{aligned} P(E) &= P[(1, 1)] + P[(2, 2)] + \cdots + P[(6, 6)] \\ &= \frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \cdots + \frac{1}{36} \qquad \text{Seis términos} \\ &= \frac{1}{6} \end{aligned}$$

b. El evento de que la suma de los números de los dos dados es 6 está dado por

$$E_6 = \{(1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1)\}$$

(figura 25). Por tanto, la probabilidad de que la suma de los números de los dos dados sea 6 está dada por

$$\begin{aligned} P(E_6) &= P[(1, 5)] + P[(2, 4)] + P[(3, 3)] + P[(4, 2)] + P[(5, 1)] \\ &= \frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \cdots + \frac{1}{36} \qquad \text{Cinco términos} \\ &= \frac{5}{36} \end{aligned}$$

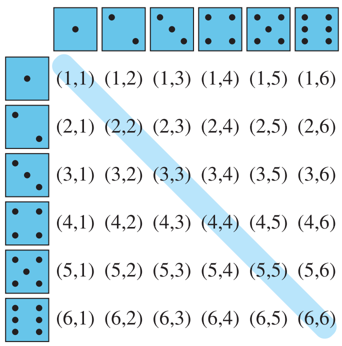


FIGURA 24
El evento de que los dos dados muestran el mismo número.

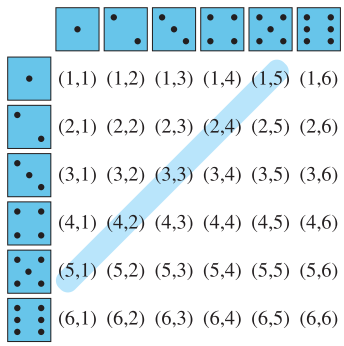


FIGURA 25
El evento de que la suma de los números de los dos dados es 6.

EJEMPLO DE APLICACIÓN 4 Pruebas de nuevos productos Considere el experimento realizado por EverBrite en el ejemplo 2. ¿Cuál es la probabilidad de que el prototipo de automóvil viaje más de 150 millas con una batería totalmente cargada?

Solución Utilizando los resultados del ejemplo 2, vemos que el evento de que el automóvil viaje más de 150 millas con una batería totalmente cargada está dado por $E = \{s_4, s_5, s_6\}$. Por tanto, la probabilidad de que el automóvil viaje más de 150 millas con una carga está dado por

$$P(E) = P(s_4) + P(s_5) + P(s_6)$$

o, utilizando la distribución de probabilidad para el experimento obtenida en el ejemplo 2,

$$P(E) = .50 + .20 + .08 = .78$$

7.6 Ejercicios de autoevaluación

1. Un dado cargado fue lanzado repetidas veces, y los resultados del experimento se resumen en la tabla siguiente:

Resultado	1	2	3	4	5	6
Frecuencia de ocurrencia	142	173	158	175	162	190

Utilizando la interpretación de la frecuencia relativa de la probabilidad, calcule la distribución de probabilidad empírica para este experimento.

2. En un experimento dirigido a estudiar la efectividad de una tercera luz de frenado en la prevención de colisiones, 250 de las 500 patrullas de caminos de cierto estado fueron equipadas con tales luces. Al final del año 1 del periodo de prueba, los registros revelaron que los vehículos equipados con la tercera luz tuvieron 14 incidentes de colisión. Hubo 22 incidentes que involucraron a vehículos no equipados con dicho accesorio. Con base en tales datos, ¿Cuál es la probabilidad de que una patrulla de caminos equipada con una tercera luz de frenado tenga un incidente dentro del periodo de 1 año? ¿Cuál es la probabilidad que una patrulla que no está equipada con el accesorio tenga un incidente dentro del periodo de 1 año?

Las soluciones de los ejercicios de autoevaluación 7.6 pueden encontrarse en la página 448.

7.6 Preguntas de concepto

1. Defina los conceptos de a) distribución de probabilidad y b) función de probabilidad. Dé ejemplos de cada uno.

2. Si $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$ es el espacio muestral para un experimento en el cual los resultados son igualmente probables, ¿cuál es la probabilidad de cada uno de los eventos simples $s_1, s_2, \ldots, s_n$? ¿Cómo se le llama a este tipo de espacio muestral?

3. Suponga que $E = \{s_1, s_2, s_3, \ldots, s_n\}$, donde E es un evento de un experimento y $\{s_1\}, \{s_2\}, \{s_3\}, \ldots, \{s_n\}$ son eventos simples. Si E no está vacío, ¿cuál es $P(E)$? Si E está vacío, ¿cuál es $P(E)$?

7.6 Ejercicios

En los ejercicios 1-8 elabore una lista de los eventos simples asociados con cada experimento.

1. Una moneda pequeña y una moneda grande son lanzadas, y se anota el resultado de caras y cruces para cada moneda.

2. Una carta al azar de una baraja estándar es seleccionada de 52 cartas y se anota su valor: corazones (h), diamantes (d), espadas (s) o tréboles (c).

3. **Estudios de opinión** Un estudio de opinión se realiza entre los votantes registrados. Se registran su afiliación política, es decir, demócrata (D), republicano (R) o independiente (I), y su sexo, a saber, hombre (m) o mujer (f).

4. **Control de calidad** Como parte de un procedimiento de control de calidad, ocho tableros de circuitos se revisan, y se anota el número de tableros defectuosos.

5. **Asistencia al cine** En una encuesta realizada para determinar si la asistencia al cine está aumentando (i), disminuyendo (d) o se mantiene igual (s) entre varios sectores de la población, los participantes se clasifican como sigue:

   Grupo 1: Edades entre 10-19 años

   Grupo 2: Edades entre 20-29 años

   Grupo 3: Edades entre 30-39 años

   Grupo 4: Edades entre 40-49 años

   Grupo 5: Edades de 50 años y mayores

   La respuesta y el grupo de edad de cada participante se registran.

6. **Pedidos de bienes de consumo duraderos** Un economista obtiene información relacionada con los pedidos de bienes de consumo duraderos cada mes. Lleva un registro de un periodo de 1 año de cualquier movimiento de incremento (i) o disminución (d), o si no hay cambio (u) en el número de pedidos de bienes de consumo duraderos para cada mes, en comparación con el número de estos pedidos en el mismo mes del año anterior.

7. **Tipos sanguíneos** Las pruebas sanguíneas se proporcionan como parte del procedimiento de admisión del hospital comunitario Monterey Garden. El tipo sanguíneo de cada paciente (A, B, AB o O) y la presencia o ausencia del factor Rh en la sangre de cada paciente (Rh^+ o Rh^-) se registran.

8. **Meteorología** Un meteorólogo que prepara un mapa climático clasifica la temperatura media esperada en cada uno de cinco estados vecinos (Minnesota, Wisconsin, Iowa, Illinois, Missouri) para la semana próxima como sigue:
   a. Más de 10° por debajo del promedio
   b. Normal a 10° por debajo del promedio

c. Más alta que la normal a 10° por encima del promedio
d. Más de 10° por encima del promedio

Usando la abreviatura de cada estado y las categorías, (a), (b), (c) y (d), el meteorólogo registra estos datos.

9. DISTRIBUCIONES POR GRADOS La distribución por grados para cierta clase se muestra en la tabla siguiente. Encuentra la distribución de probabilidad asociada con estos datos.

Grado	A	B	C	D	F
Frecuencia de ocurrencia	4	10	18	6	2

10. TIPOS SANGUÍNEOS El porcentaje de la población general que tiene cada tipo sanguíneo se muestra en la tabla siguiente. Determine la distribución de probabilidad asociada con estos datos.

Tipo sanguíneo	A	B	AB	O
Población,%	41	12	3	44

11. COMBATE A LA INFLACIÓN En una encuesta de 2,000 adultos de 18 años y mayores realizada en 2007, se formuló la pregunta siguiente: ¿Los ingresos de su familia están a la par del costo de vida? Los resultados de la encuesta se presentan a continuación:

Respuesta	No les alcanza	Apenas les alcanza	Aumentan rápido	No saben
Encuestados	800	880	240	80

Determine la distribución de probabilidad empírica asociada con estos datos.

Fuente: Pew Research Center

12. ESTUDIOS DEL CONSUMIDOR En una encuesta en línea de 500 adultos con niños menores a 18 años, se preguntó a los participantes cuántos días a la semana cocinan en casa. Los resultados se resumen enseguida:

Número de días	0	1	2	3	4	5	6	7
Encuestados	25	30	45	75	55	100	85	85

Determine la distribución de probabilidad empírica asociada con estos datos.

Fuente: Super Target

13. UNIÓN ENTRE MIEMBROS DEL MISMO SEXO En una encuesta de *Los Angeles Times* de los residentes de California realizada en febrero de 2004, se formuló la pregunta siguiente: ¿Está a favor o en contra de una enmienda a la Constitución de Estados Unidos que prohíbe la unión entre miembros del mismo sexo? Se obtuvieron los resultados siguientes:

Opinión	A favor	En contra	No saben
Encuestados	910	891	135

Determine la distribución de probabilidad empírica asociada con estos datos.

Fuente: The Field Poll, *Los Angeles Times*

14. MUERTES POR ACCIDENTES DE TRÁNSITO Un estudio de muertes en accidentes automovilísticos de 1986 a 2002 reveló los datos siguientes sobre muertes por accidentes por día de la semana.

Día de la semana	Domingo	Lunes	Martes	Miércoles
Número promedio de muertes	132	98	95	98

Día de la semana	Jueves	Viernes	Sábado
Número promedio de muertes	105	133	158

Determine la distribución de probabilidad empírica asociada con estos datos.

Fuente: Insurance Institute for Highway Safety

15. PUNTOS DE VISTA POLÍTICOS En una encuesta realizada entre 2,000 estudiantes universitarios de primer año para averiguar sus puntos de vista políticos, se obtuvieron los datos adjuntos. Determine la distribución de probabilidad empírica asociada con estos datos.

Puntos de vista políticos	A	B	C	D	E
Encuestados	52	398	1,140	386	24

A: Extrema izquierda

B: Liberal

C: Moderado

D: Conservador

E: Extrema derecha

16. ENCUESTAS DE SEGURIDAD DE LOS PRODUCTOS Los datos adjuntos se obtuvieron de una encuesta de 1,500 estadounidenses a quienes se les preguntó: ¿Qué tan seguros son los productos hechos en Estados Unidos? Determine la distribución de probabilidad empírica asociada con estos datos.

Calificación	A	B	C	D	E
Encuestados	285	915	225	30	45

A: Muy seguros

B: Más o menos seguros

C: No muy seguros

D: No son seguros

E: No lo sé

17. ENCUESTAS DE TRÁNSITO Se observó el número de automóviles que entró en un túnel que conduce a un aeropuerto en una ciudad importante durante un periodo de 200 horas pico, y se obtuvieron los datos siguientes:

Número de automóviles, x	Frecuencia de ocurrencia
$0 < x \leq 200$	15
$200 < x \leq 400$	20
$400 < x \leq 600$	35
$600 < x \leq 800$	70
$800 < x \leq 1{,}000$	45
$x > 1{,}000$	15

a. Describa un espacio muestral apropiado para este experimento.
b. Calcule la distribución de probabilidad empírica para este experimento.

18. **TIEMPOS DE LLEGADA** Los tiempos de llegada del tren de pasajeros proveniente de Boston a las 8 a.m. según se observaron en el suburbio de Sharon durante 120 fines de semana se resume en la siguiente tabla:

Tiempo de llegada, x	Frecuencia de ocurrencia
7:56 a.m. $< x \leq$ 7:58 a.m.	4
7:58 a.m. $< x \leq$ 8:00 a.m.	18
8:00 a.m. $< x \leq$ 8:02 a.m.	50
8:02 a.m. $< x \leq$ 8:04 a.m.	32
8:04 a.m. $< x \leq$ 8:06 a.m.	9
8:06 a.m. $< x \leq$ 8:08 a.m.	4
8:08 a.m. $< x \leq$ 8:10 a.m.	3

a. Describa un espacio muestral apropiado para este experimento.
b. Calcule la distribución de probabilidad empírica para este experimento.

19. **USO DE LENTES CORRECTIVOS** Según Mediamark Research, 84 millones de los 179 millones de adultos en Estados Unidos corrigen su visión usando lentes bajo prescripción médica, bifocales o de contacto. (Algunos encuestados usan más de un tipo.) ¿Cuál es la probabilidad de que un adulto seleccionado al azar use lentes correctivos?
Fuente: Mediamark Research

20. **SUPERVISIÓN CORRECCIONAL** Un estudio realizado por la Correccional de cierto estado reveló que 163,605 personas de una población adulta total de 1,778,314 se encontraban bajo supervisión correccional (en libertad probatoria, condicional o en la cárcel). ¿Cuál es la probabilidad de que una persona seleccionada al azar de la población adulta en ese estado esté bajo supervisión correccional?

21. **MUERTES POR RAYOS** Con base en los datos obtenidos del Servicio Nacional del Clima, 376 de las 439 personas muertas por rayos en Estados Unidos entre 1985 y 1992 eran hombres. (Los hábitos laborales y recreativos de los hombres los vuelven más vulnerables a los rayos.) Suponiendo que esta tendencia se mantiene en el futuro, ¿cuál es la probabilidad de que una persona muerta por un rayo sea
a. hombre? **b.** mujer?
Fuente: National Weather Service

22. **CONTROL DE CALIDAD** Un foco se selecciona al azar de un lote de 120 piezas, de los cuales 5% están defectuosos. ¿Cuál es la probabilidad de que el foco seleccionado esté defectuoso?

23. **ESFUERZOS PARA DETENER EL HURTO EN LAS TIENDAS** Según una encuesta de 176 minoristas, 46% de ellos usa etiquetas electrónicas como protección contra el hurto y el robo por parte de los empleados. Si uno de estos minoristas se selecciona al azar, ¿cuál es la probabilidad de que él o ella use etiquetas electrónicas como dispositivos antirrobo?

24. Si una bola se extrae al azar de una urna que contiene tres bolas rojas, dos blancas y cinco azules, ¿cuál es la probabilidad de que ésta sea blanca?

25. Si se extrae una carta al azar de una baraja estándar de 52 cartas, ¿cuál es la probabilidad de que la carta extraída sea
a. de diamantes? **b.** una carta negra?
c. un as?

26. Un par de dados no cargados se lanza. ¿Cuál es la probabilidad de que
a. la suma de los números mostrados en la cara superior sea menor que 5?
b. caiga por lo menos un 6?

27. **SEMÁFOROS** ¿Cuál es la probabilidad de llegar a un semáforo cuando esté en rojo si la señal roja dura encendida 30 segundos, la señal amarilla 5 segundos y la señal verde 45 segundos?

28. **RULETA** ¿Cuál es la probabilidad de que la bola de una ruleta se detenga en un número par diferente de 0 o 00? (Suponga que hay 38 resultados igualmente probables que consisten en los números 1-36, 0 y 00.)

29. **RESOLUCIÓN DE CASOS PENALES** De los 98 casos de asesinato en primer grado de 2002 a la primera mitad de 2004 en el tribunal superior de Suffolk, 9 casos fueron rechazados, en 62 casos se llegó a un acuerdo y 27 casos fueron a juicio. ¿Cuál es la probabilidad de que un caso seleccionado al azar
a. se resuelva mediante un acuerdo?
b. vaya a juicio?
Fuente: Boston Globe

30. **LOTERÍA** En una lotería patrocinada por Gemini Paper Products, se han recibido 100,000 entradas. Si se otorgarán 1 gran premio, 5 premios de primer lugar, 25 premios de segundo lugar y 500 premios de tercer lugar, ¿cuál es la probabilidad de que una persona que presentó una entrada gane
a. el gran premio?
b. un premio?

31. **ENCUESTAS POLÍTICAS** Una encuesta de opinión fue realizada entre un grupo de votantes registrados en cierto estado respecto a una propuesta dirigida a restringir los impuestos estatales y locales. Los resultados de la encuesta indican que 35% de los votantes estuvo a favor de la propuesta, 32% en contra de ella y el grupo restante estaba indeciso. Si se asume que los resultados de la encuesta son representativos del electorado del estado, ¿cuál es la probabilidad de que un votante registrado seleccionado al azar del electorado
a. esté a favor de la propuesta?
b. esté indeciso respecto a la propuesta?

32. **INFLUENCIA DE LOS PADRES** En una encuesta en línea aplicada a 1,962 ejecutivos de 64 países realizada por Korn/Ferry International entre agosto y octubre de 2006, se les preguntó si tratarían de influir en las opciones de carrera de sus hijos. Sus respuestas: A (en gran medida), B (en buena medida), C (hasta cierto punto), D (en menor medida) y E (en lo absoluto) se muestran abajo:

Respuesta	A	B	C	D	E
Encuestados	135	404	1,057	211	155

¿Cuál es la probabilidad de que la respuesta de un encuestado seleccionado al azar sea D (en menor medida) o E (en lo absoluto)?
Fuente: Korn/Ferry International

33. **EMPRESAS VERDES** En una encuesta realizada en 2007 de 1,004 adultos de 18 años y mayores, se planteó la pregunta siguiente: ¿Cómo están las empresas estadounidenses en la protección del ambiente en comparación con empresas de otros países? Los resultados se resumen abajo:

Pregunta	Rezagadas	Iguales	Adelantadas	No lo sé
Encuestados	382	281	251	90

Si un adulto de la encuesta se selecciona al azar, ¿cuál es la probabilidad de que él o ella diga que las empresas estadounidenses están iguales o adelantadas con respecto a la protección del ambiente en comparación con empresas de otros países?

Fuente: GfK Roper

34. **PERMANECER EN COMUNICACIÓN** En una encuesta realizada en 2007, se preguntó a 2,000 adultos de 18 años o mayores con qué frecuencia se mantenían en comunicación con sus padres por teléfono. Los resultados de la encuesta son los siguientes:

Respuesta	Mensual	Semanal	Diario	No lo sé	Menos
Encuestados, %	11	47	32	2	8

Una persona que participó en la encuesta se selecciona al azar, ¿cuál es la probabilidad de que la persona diga que él o ella se mantiene en contacto con sus padres

a. una vez a la semana?
b. por lo menos una vez a la semana?

Fuente: Pew Research Center

35. **MÉTODOS DE GASTO** En una encuesta sobre los métodos de gasto de los consumidores realizada en 2006, se obtuvieron los resultados siguientes:

Método de pago	Cheques	Efectivo	Tarjetas de crédito	Tarjetas de débito/ cajeros automáticos	Otros
Transacciones, %	37	14	25	15	9

Si una transacción referida en esta encuesta se selecciona al azar, ¿cuál es la probabilidad de que la transacción se pague

a. con una tarjeta de crédito o con una tarjeta de débito/cajero automático?
b. con efectivo o algún otro método distinto a un cheque, una tarjeta de crédito o una tarjeta de débito/cajero automático?

Fuente: Minute/Visa USA Research Services

36. **FALLAS DE SEGURIDAD** En una encuesta aplicada a 106 profesionales de tecnología de información y de seguridad de datos en las principales empresas estadounidenses respecto a su confianza en que habían detectado todas las fallas de seguridad importantes el año pasado, se obtuvieron las respuestas siguientes.

Respuesta	Mucha confianza	Confianza moderada	Poca confianza	No tenían confianza
Encuestados	21	56	22	7

Cuál es la probabilidad de que un participante de una encuesta seleccionado en forma aleatoria

a. ¿Tenga poca o no tenga confianza en la detección de todas las fallas de seguridad importantes el año pasado?
b. ¿Tenga mucha confianza en la detección de todas las fallas de seguridad importantes el año pasado?

Fuente: Forsythe Solutions Group

37. **LUGARES PARA ESCUCHAR MÚSICA** En una encuesta diseñada para determinar dónde las personas escuchan música en su hogar, se preguntó a 1,000 de ellas en qué habitación de su hogar era más probable que escucharan música. Los resultados se tabulan enseguida:

Habitación	Sala	Recámara principal	Estudio	Cocina	Baño	Otra
Encuestados	448	169	155	100	22	106

Si un encuestado se selecciona al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea más probable que él o ella escuchen música

a. en la sala?
b. en el estudio o la cocina?

Fuente: Phillips Electronics

38. **BENEFICIOS DEL RETIRO FRENTE AL SUELDO** En una encuesta aplicada en 2007 a 1,402 trabajadores de 18 años y mayores respecto a su opinión sobre los beneficios del retiro, se obtuvieron los datos siguientes: 827 dijeron que es mejor tener beneficios de retiro excelentes con un sueldo por debajo de lo esperado, 477 dijeron que era mejor tener un sueldo mayor que lo esperado con beneficios de retiro pobres, 42 dijeron que “ninguno de los dos” y 56 dijeron no estar seguros. Si un empleado en la encuesta se selecciona al azar, ¿cuál es la probabilidad de que él o ella responda que es mejor tener

a. beneficios de retiro excelentes con un sueldo por debajo de lo esperado?
b. un sueldo mayor que lo esperado con beneficios de retiro pobres?

Fuente: Transamerica Center for Retirement

39. **SEGURIDAD EN LAS AEROLÍNEAS** En un intento por estudiar las causas principales de que un avión se estrelle, se recabaron los datos siguientes a partir de los registros de accidentes aéreos, de 1959 a 1994 (excluyendo el sabotaje y la acción militar).

Factor principal	Accidentes
Piloto	327
Avión	49
Mantenimiento	14
Clima	22
Aeropuerto/control de tráfico aéreo	19
Misceláneos/Otros	15

Suponga que acaba de enterarse de un accidente aéreo y que los datos proporcionan una buena indicación general de las causas del accidente. Dé una estimación de la probabilidad de que la causa principal del accidente se deba a un error del piloto o al mal clima.

Fuente: National Transportation Safety Board

40. Plusvalía de la vivienda En una encuesta realizada en otoño de 2006, se preguntó a 800 propietarios de casa sobre sus expectativas respecto al valor de su hogar en los años siguientes; los resultados de la encuesta se resumen debajo:

Expectativas	Propietarios
Disminuye	48
Permanece igual	152
Aumenta menos de 5%	232
Aumenta 5-10%	240
Aumenta más de 10%	128

Si se elige al azar un propietario de una casa encuestado, ¿cuál es la probabilidad de que él o ella espere que el valor de su casa

a. permanezca igual o disminuya en los próximos años?
b. aumente 5% o más en valor en los próximos años?

Fuente: S&P, RBC Capital Markets

41. Un par de dados no cargados se lanzan y se observa la suma de los dos números que caen en la cara superior de los dados. La probabilidad de obtener una suma de 2 es igual que la probabilidad de obtener un 7, ya que sólo hay una manera de obtener un 2, a saber, que cada dado muestre un 1, y sólo hay una manera de obtener un 7, que un dado muestre un 3 y el otro muestre un 4. ¿Por qué está equivocado este argumento?

En los ejercicios 42-44 determine si el experimento dado tiene un espacio muestral con resultados igualmente probables.

42. Un dado cargado se lanza y el número que aparece en la cara superior del dado se registra.

43. Dos dados no cargados se lanzan y la suma de los números que aparecen en la cara superior se anota.

44. Una bola se saca al azar de una urna que contiene seis bolas negras y seis bolas rojas, y el color de la bola se anota.

45. Sea $S = \{s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6\}$ el espacio muestral asociado con un experimento que tiene la distribución de probabilidad siguiente:

Resultado	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6
Probabilidad	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{12}$

Calcule la probabilidad del evento:

a. $A = \{s_1, s_3\}$
b. $B = \{s_2, s_4, s_5, s_6\}$
c. $C = S$

46. Sea $S = \{s_1, s_2, s_3, s_4, s_5\}$ el espacio muestral asociado con un experimento que tiene la distribución de probabilidad siguiente:

Resultado	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5
Probabilidad	$\frac{1}{14}$	$\frac{3}{14}$	$\frac{6}{14}$	$\frac{2}{14}$	$\frac{2}{14}$

Calcule la probabilidad del evento:

a. $A = \{s_1, s_2, s_4\}$ **b.** $B = \{s_1, s_5\}$
c. $C = S$

En los ejercicios 47 y 48 determine si el enunciado es verdadero o falso. Si es verdadero, explique por qué lo es. Si es falso, dé un ejemplo para mostrar por qué lo es.

47. Si $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$ es un espacio muestral uniforme con n resultados, entonces $0 \leq P(s_1) + P(s_2) + \cdots + P(s_n) \leq 1$.

48. Sea $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$ un espacio muestral uniforme para un experimento. Si $n \geq 5$ y $E = \{s_1, s_2, s_5\}$, entonces $P(E) = 3/n$.

7.6 Soluciones de los ejercicios de autoevaluación

1.

$$P(1) = \frac{\text{Número de ensayos en los cuales aparece un 1 en la cara superior}}{\text{Número total de ensayos}} = \frac{142}{1{,}000} = .142$$

De modo parecido, calculamos $P(2), \ldots, P(6)$, obteniendo la distribución de probabilidad siguiente:

Resultado	1	2	3	4	5	6
Probabilidad	.142	.173	.158	.175	.162	.190

2. La probabilidad de que una patrulla de caminos equipada con una tercera luz de freno choque en la parte trasera en un periodo de 1 año está dada por

$$\frac{\text{Número de choques en la parte trasera que involucra automóviles equipados con una tercera luz de freno}}{\text{Número total de estos automóviles}} = \frac{14}{250} = .056$$

La probabilidad de que una patrulla de caminos no equipada con una tercera luz de freno choque en la parte trasera en un periodo de 1 año está dada por

$$\frac{\text{Número de choques en la parte trasera que involucra automóviles equipados con una tercera luz de freno}}{\text{Número total de estos automóviles}} = \frac{22}{250} = .088$$

7.7 Reglas de probabilidad

Propiedades de la función de probabilidad y sus aplicaciones

En esta sección examinamos algunas de las propiedades de la función de probabilidad y estudiamos el papel que desempeñan en la solución de ciertos problemas. Comenzamos con el estudio de la generalización de las tres propiedades de la función de probabilidad, las cuales se establecen para eventos simples en la última sección. Sea S un espacio muestral de un experimento y suponga que E y F son eventos del experimento. Tenemos:

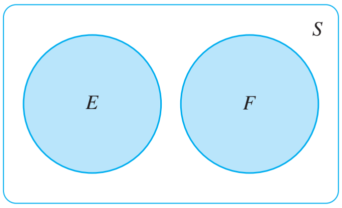


FIGURA **26**
Si E y F son eventos mutuamente excluyentes, entonces $P(E \cup F) = P(E) + P(F)$.

Propiedad 1. $P(E) \geq 0$ para cualquier E.

Propiedad 2. $P(S) = 1$.

Propiedad 3. Si E y F son mutuamente excluyentes (es decir, sólo uno de ellos puede ocurrir o, de manera equivalente, $E \cap F = \varnothing$), entonces

$$P(E \cup F) = P(E) + P(F)$$

(figura 26).

La propiedad 3 puede ampliarse fácilmente al caso que involucra cualquier número finito de eventos mutuamente exclusivos. Por tanto, si $E_1, E_2, \ldots, E_n$ son eventos mutuamente excluyentes, entonces

$$P(E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_n) = P(E_1) + P(E_2) + \cdots + P(E_n)$$

TABLA **7**

Distribución de probabilidad

Calificación, x	**Probabilidad**
$x > 700$	.01
$600 < x \leq 700$	.07
$500 < x \leq 600$	.19
$400 < x \leq 500$	.23
$300 < x \leq 400$	.31
$x \leq 300$	.19

EJEMPLO DE APLICACIÓN 1 Calificaciones en el examen de admisión verbal El superintendente de un distrito escolar metropolitano ha estimado las probabilidades asociadas con las calificaciones obtenidas en el examen de admisión verbal de los estudiantes de ese distrito. Los resultados se muestran en la tabla 7. Si se selecciona un estudiante al azar, ¿cuál es la probabilidad de que su calificación en el examen de admisión verbal sea

a. mayor que 400?
b. menor o igual que 500?
c. mayor que 400 pero menor o igual que 600?

Solución Sea A, B, C, D, E y F, respectivamente, los eventos de que la calificación es mayor que 700, mayor que 600 pero menor o igual que 700, mayor que 500 pero menor o igual que 600, etc. Por tanto estos eventos son mutuamente excluyentes. De ahí que,

a. La probabilidad de que la calificación del estudiante sea mayor que 400 está dada por

$$\begin{aligned} P(D \cup C \cup B \cup A) &= P(D) + P(C) + P(B) + P(A) \\ &= .23 + .19 + .07 + .01 \\ &= .5 \end{aligned}$$

b. La probabilidad de que la calificación del estudiante sea menor o igual que 500 está dada por

$$\begin{aligned} P(D \cup E \cup F) &= P(D) + P(E) + P(F) \\ &= .23 + .31 + .19 = .73 \end{aligned}$$

c. La probabilidad de que la calificación del estudiante sea mayor que 400 pero menor o igual que 600 está dada por

$$\begin{aligned} P(C \cup D) &= P(C) + P(D) \\ &= .19 + .23 = .42 \end{aligned}$$

La propiedad 3 es válida si y sólo si E y F son mutuamente excluyentes. En el caso general, tenemos la regla siguiente.

Propiedad 4. Regla de la adición

Si E y F son dos eventos cualesquiera de un experimento, por tanto

$$P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(E \cap F)$$

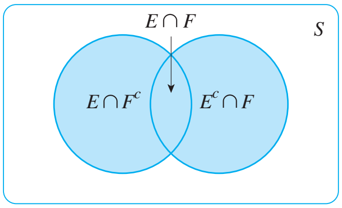


FIGURA **27**
$E \cup F = (E \cap F^c) \cup (E \cap F) \cup (E^c \cap F)$

Para determinar esta propiedad, remítase a la figura 27. Observe que podemos escribir

$$E = (E \cap F^c) \cup (E \cap F) \quad \text{y} \quad F = (E^c \cap F) \cup (E \cap F)$$

como una unión de conjuntos disjuntos. Por tanto,

$$P(E) = P(E \cap F^c) + P(E \cap F) \quad \text{o} \quad P(E \cap F^c) = P(E) - P(E \cap F)$$

y

$$P(F) = P(E^c \cap F) + P(E \cap F) \quad \text{o} \quad P(E^c \cap F) = P(F) - P(E \cap F)$$

Por último, como $E \cup F = (E \cap F^c) \cup (E \cap F) \cup (E^c \cap F)$ es una unión de conjuntos disjuntos, tenemos

$$\begin{aligned} P(E \cup F) &= P(E \cap F^c) + P(E \cap F) + P(E^c \cap F) \\ &= P(E) - P(E \cap F) + P(E \cap F) + P(F) \;\; = P(E \cap F) \\ &= P(E) + P(F) - P(E \cap F) \end{aligned}$$

Utilice los resultados anteriores.

Nota Observe que si E y F son mutuamente excluyentes, es decir, si $E \cap F = \varnothing$, entonces la ecuación de la propiedad 4 se reduce a aquella de la propiedad 3. En otras palabras, si E y F son eventos mutuamente excluyentes, entonces $P(E \cup \mathrm{F}) = P(E) + P(F)$. Si E y F no son eventos mutuamente excluyentes, entonces $P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(E \cap F)$.

EJEMPLO 2 Una carta es extraida de una baraja bien revuelta de 52 cartas. ¿Cuál es la probabilidad de que sea un as o una espada?

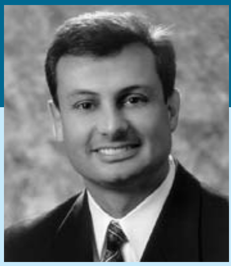
Solución Sea E el evento de que la carta extraida es un as y F el evento de que la carta extraida es una espada. Por tanto,

$$P(E) = \frac{4}{52} \quad \text{y} \quad P(F) = \frac{13}{52}$$

Además, E y F no son eventos mutuamente excluyentes. De hecho, $E \cap F$ es el evento de que la carta extraida es el as de espadas. En consecuencia,

$$P(E \cap F) = \frac{1}{52}$$

PORTAFOLIO Todd Good



PUESTO Propietario y broker
INSTITUCIÓN Good and Associates

El negocio de los seguros es un asunto de probabilidades. Tal vez le roben su vehículo, tal vez no, quizá tenga un accidente, quizá no, tal vez alguien se resbale en sus escalones y lo demande, tal vez no. Naturalmente, esperamos que nada malo le suceda a usted o a su familia, pero el sentido común y las estadísticas históricas nos dicen que podría suceder.

Todos estos factores tienen probabilidades asociadas con ellos. Por ejemplo, si usted es propietario de un automóvil Toyota Camry, hay una probabilidad mucho más alta de que su vehículo sea robado que si usted conduce un Dodge Caravan. En realidad, en las estadísticas recientes que mencionan los 10 automóviles más robados en Estados Unidos, el Toyota Camry no sólo estaba en primer lugar, varios modelos de años anteriores también estaban en segundo, tercero y octavo lugar. Y el Honda Accord también era muy popular entre los ladrones, durante el mismo año varios modelos de diferentes años del Accord se encontraban en quinto, séptimo, noveno y décimo lugar de la lista de los 10 automóviles más robados.

En términos de estadísticas de seguridad, hemos detectado que los accidentes y las lesiones tienden a variar bastante de una marca y modelo a otro. Cuando los demás factores son iguales, una persona que conduce un Pontiac Firebird corre mucho más riesgo de verse implicada en un accidente que alguien que conduce un Buick Park Avenue. Por ejemplo, a un hombre soltero de 23 años con buenos antecedentes de manejo que utiliza su Firebird para ir al trabajo y divertirse en Filadelfia, Pennsylvania, se le cobraría una prima de seguro anual superior a 30%, más que la prima que pagaría la misma persona por la misma cobertura de lesiones personales y responsabilidad civil si manejara un Buick Park Avenue.

Naturalmente, en Good and Associates le deseamos lo mejor en cuanto a evitar la delincuencia, mantenerse saludable y no tener accidentes. Sin embargo, estamos contentos de estar aquí para ayudarle a prepararse para las posibilidades negativas que puedan acontecer y para apoyarle a lidiar con ellas si es que ocurren.

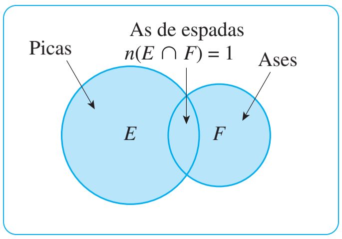


FIGURA 28
$P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(E \cap F)$

El evento de que una carta extraida es un as o una espada es $E \cup F$, con la probabilidad dada por

$$P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(E \cap F)$$
$$= \frac{4}{52} + \frac{13}{52} - \frac{1}{52} = \frac{16}{52} = \frac{4}{13}$$

(figura 28). Este resultado, desde luego, puede obtenerse al sostener que 16 de las 52 cartas son ya sea espadas o ases de otras manos. ■

Explore y analice

Sean E, F y G tres eventos cualesquiera de un experimento. Use la fórmula (5) de la sección 7.2 para mostrar que

$$P(E \cup F \cup G) = P(E) + P(F) + P(G) - P(E \cap F) - P(E \cap G)$$
$$- P(F \cap G) + P(E \cap F \cap G)$$

Si E, F y G son pares mutuamente excluyentes, ¿cuál es $P(E \cup F \cup G)$?

VIDEO

EJEMPLO DE APLICACIÓN 3 Control de calidad El departamento de control de calidad de Vista Vision, fabricante de la TV de plasma Pulsar de 42 pulgadas, ha determinado a partir de los registros obtenidos de los centros de servicio de la empresa que 3% de los televisores vendidos tiene problemas de video, 1% experimentó problemas de audio y 0.1% tiene problemas tanto de video como de audio antes de la expiración de la garantía de 90 días. Calcule la probabilidad de que una TV de plasma comprada por un cliente tenga problemas de video o audio antes de que la garantía expire.

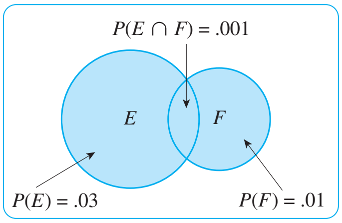


FIGURA **29**
$P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(E \cap F)$

Solución Sea E el evento de que una TV de plasma comprada presenta problemas de video dentro de los 90 días posteriores a su compra, y F el evento de que una TV de plasma comprada presenta problemas de audio dentro de los 90 días posteriores a su compra. Por tanto,

$$P(E) = .03 \qquad P(F) = .01 \qquad P(E \cap F) = .001$$

El evento de que una TV de plasma comprada presenta problemas de video o audio antes de que expire la garantía es $E \cup F$, y la probabilidad de este evento está dada por

$$\begin{aligned} P(E \cup F) &= P(E) + P(F) - P(E \cap F) \\ &= 0.03 + .01 - .001 \\ &= 0.39 \end{aligned}$$

(figura 29). ■

Aquí hay otra propiedad de una función de probabilidad que es de ayuda considerable en el cálculo de la probabilidad de un evento.

Propiedad 5. Regla de los complementos

Si E es un evento de un experimento y E^c es el complemento de E, entonces

$$P(E^c) = 1 - P(E)$$

La propiedad 5 es una consecuencia inmediata de las propiedades 2 y 3. De hecho, tenemos $E \cup E^c = S$ y $E \cap E^c = \varnothing$, por tanto

$$1 = P(S) = P(E \cup E^c) = P(E) + P(E^c)$$

y, por consiguiente,

$$P(E^c) = 1 - P(E)$$

EJEMPLO DE APLICACIÓN 4 **Garantías** Remítase al ejemplo 3. ¿Cuál es la probabilidad de que una TV de plasma Pulsar de 42 pulgadas comprada por un consumidor *no* experimentará dificultades de video o audio antes de que la garantía expire?

Solución Sea E el evento de que una TV de plasma comprada por un consumidor presentará dificultades de video o audio antes de que la garantía expire. Por tanto, el evento de que la TV de plasma no presentará cualquiera de los dos problemas antes de que la garantía expire está dado por E^c, con la probabilidad

$$\begin{aligned} P(E^c) &= 1 - P(E) \\ &= 1 - .039 \\ &= .961 \end{aligned}$$

■

Cálculos que involucran las reglas de probabilidad

Cerramos esta sección con dos ejemplos adicionales que ilustran las reglas de la probabilidad.

VIDEO

EJEMPLO 5 Sean E y F dos eventos mutuamente excluyentes y suponga que $P(F) = .1$ y $E(F) = .6$. Calcule:

a. $P(E \cap F)$ **b.** $P(E \cup F)$ **c.** $P(E^c)$
d. $P(E^c \cap F^c)$ **e.** $P(E^c \cup F^c)$

Solución

a. Desde los eventos E y F son mutuamente excluyentes, es decir, $E \cap F = \varnothing$, tenemos $P(E \cap F) = 0$.

b.
$$\begin{aligned} P(E \cup F) &= P(E) + P(F) && \text{Dado que } E \text{ y } F \text{ son mutuamente excluyentes.} \\ &= .1 + .6 \\ &= .7 \end{aligned}$$

c.
$$\begin{aligned} P(E^c) &= 1 - P(E) && \text{Propiedad 5} \\ &= 1 - .1 \\ &= .9 \end{aligned}$$

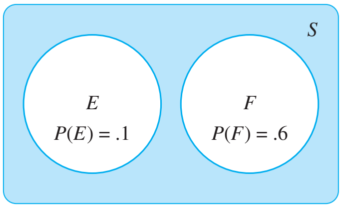


FIGURA **30**
$P(E^c \cap F^c) = P[(E \cup F)^c]$

d. Observe que, por la ley de De Morgan, $E^c \cap F^c = (E \cup F)^c$. Por consiguiente,

$$\begin{aligned} P(E^c \cap F^c) &= P[(E \cup F)^c] && \text{Vea la figura 30.} \\ &= 1 - P(E \cup F) && \text{Propiedad 5} \\ &= 1 - .7 && \text{Utilice el resultado del inciso (b).} \\ &= .3 \end{aligned}$$

e. Utilizando de nuevo la ley de De Morgan encontramos

$$\begin{aligned} P(E^c \cup F^c) &= P[(E \cap F)^c] \\ &= 1 - P(E \cap F) \\ &= 1 - 0 && \text{Utilice el resultado del inciso (a).} \\ &= 1 \end{aligned}$$

■

EJEMPLO 6 Sean E y F dos eventos de un experimento con un espacio muestral S. Suponga que $P(E) = .2$, $P(F) = .1$ y $P(E \cap F) = .05$. Calcule:

a. $P(E \cup F)$

b. $P(E^c \cap F^c)$

c. $P(E^c \cap F)$ *Consejo:* Trace un diagrama de Venn

Solución

a.
$$\begin{aligned} P(E \cup F) &= P(E) + P(F) - P(E \cap F) && \text{Propiedad 4} \\ &= .2 + .1 - .05 \\ &= .25 \end{aligned}$$

b. Utilizando la ley de De Morgan, tenemos

$$\begin{aligned} P(E^c \cap F^c) &= P[(E \cup F)^c] \\ &= 1 - P(E \cup F) && \text{Propiedad 5} \\ &= 1 - .25 && \text{Utilice el resultado del inciso (a).} \\ &= .75 \end{aligned}$$

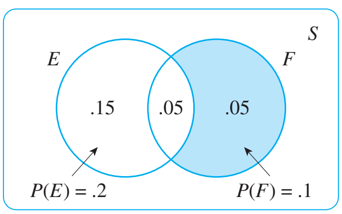


FIGURA **31**
$P(E^c \cap F)$: la probabilidad de que ocurra el evento F, pero no el evento E.

c. A partir del diagrama de Venn que describe la relación entre E, F y S (figura 31), tenemos

$$P(E^c \cap F) = .05 \qquad \text{El subconjunto sombreado es el evento } E^c \cap F.$$

Este resultado también puede obtenerse al usar la relación

$$\begin{aligned} P(E^c \cap F) &= P(F) - P(E \cap F) \\ &= .1 - .05 \\ &= .05 \end{aligned}$$

■

7.7 Ejercicios de autoevaluación

1. Sean E y F eventos de un experimento con un espacio muestral S. Suponga $P(E) = .4$, $P(F) = .5$ y $P(E \cap F) = .1$. Calcule:
   a. $P(E \cup F)$ **b.** $P(E \cap F^c)$
2. Susana García quiere vender o rentar un condominio por medio de una compañía de bienes raíces. El agente inmobiliario estima que la probabilidad de encontrar un comprador dentro de un mes a partir de la fecha en que la propiedad sale a la venta o renta es .3, la probabilidad de encontrar un arrendatario es .8 y la probabilidad de encontrar tanto un comprador como un arrendatario es .1. Determine la probabilidad de que la propiedad se venda o rente en 1 mes a partir de la fecha en que la propiedad sale a la venta o renta.

Las soluciones de los ejercicios de autoevaluación 7.7 pueden encontrarse en la página 458.

7.7 Preguntas de concepto

1. Suponga que S es un espacio muestral de un experimento, E y F son eventos del experimento, y P es una función de probabilidad. Dé el significado de cada uno de los enunciados siguientes:
   a. $P(E) = 0$ **b.** $P(F) = 0.5$ **c.** $P(S) = 1$
   d. $P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(E \cap F)$
2. Proporcione un ejemplo, basado en una situación real, que ilustre la propiedad $P(E^c) = 1 - P(E)$, donde E es un evento y E^c es el complemento de E.

7.7 Ejercicios

Un par de dados es lanzado y se observa el número que aparece en la cara superior de los mismos. En los ejercicios 1-6 remítase a este experimento y calcule la probabilidad del evento dado.

1. La suma de los números es un número par.
2. La suma de los números es ya sea 7 u 11.
3. Cae un par de 1.
4. Cae un doble.
5. Un dado muestra un 6 y el otro es un número menor de 3.
6. La suma de los números es por lo menos 4.

Un experimento consiste en extraer una carta al azar de una baraja de 52 cartas. En los ejercicios 7-12 remítase a este experimento y calcule la probabilidad del evento.

7. Se extrae un rey de diamantes.
8. Se extrae un diamante o un rey.
9. Se extrae una figura (por ejemplo, una jota, una reina o un rey).
10. Se extrae una carta de figura.
11. No se extrae un as.
12. No se extrae una tarjeta negra.
13. Se venden 500 boletos para una rifa. ¿Cuál es la probabilidad de que una persona que tiene un boleto gane el primer premio? ¿Cuál es la probabilidad de que él o ella ganen el primer premio?
14. **HOGARES CON TV** Los resultados de una encuesta reciente de los hogares con televisión en Estados Unidos reveló que 87 de cada 100 hogares tienen por lo menos un control remoto. ¿Cuál es la probabilidad de que un hogar con TV seleccionado al azar no tenga por lo menos un control remoto?

En los ejercicios 15-24 explique por qué el enunciado es incorrecto.

15. El espacio muestral asociado con un experimento está dado por $S = \{a, b, c\}$, donde $P(d) = .3$, $P(b) = .4$ y $P(c) = .4$.
16. La probabilidad de que un autobús llegue tarde al Centro Cívico es .35, y la probabilidad de que llegue a tiempo o temprano es .60.
17. Una persona participa en una tanda semanal en la cual tiene una posibilidad de ganar el monto de la tanda. Si participa durante 5 semanas sucesivas, la probabilidad de ganar por lo menos una tanda es $\frac{5}{10}$.
18. La probabilidad de que cierta acción aumente de valor durante un periodo de 1 semana es .6. Por tanto, la probabilidad de que el valor de la acción disminuya es .4.
19. Un dado rojo y un dado verde son lanzados. La probabilidad de que aparezca un 6 en la cara superior del dado rojo es $\frac{1}{6}$, y la probabilidad de que aparezca un 1 en la cara superior del dado verde es $\frac{1}{6}$. Por tanto, la probabilidad de que el dado rojo muestre un 6 o el dado verde muestre un 1 es $\frac{1}{6} + \frac{1}{6}$.

20. Joanne, una estudiante de bachillerato, ha presentado su examen de admisión en cuatro universidades, A, B, C y D. Joanne ha estimado que la probabilidad de que sea aceptada en A, B, C y D es .5, .3, .1 y .08, respectivamente. Por tanto, la probabilidad de que será aceptada en por lo menos una universidad es $P(A) + P(B) + P(C) + P(D) = .5 + .3 + .1 + .08 = .98$.

21. El espacio muestral asociado con un experimento está dado por $S = \{a, b, c, d, e\}$. Los eventos $E = \{a, b\}$ y $F = \{c, d\}$ son mutuamente excluyentes. Por consiguiente, los eventos E^c y F^c son mutuamente excluyentes.

22. Una mano de póquer de 5 cartas se reparte de una baraja de 52 cartas. Sea A el evento de que se reparte una flor imperial y sea B el evento de que se reparte una escalera. Por tanto los eventos A y B son mutuamente excluyentes.

23. **Ventas al detalle** Mark Owens, un optometrista, estima que la probabilidad de que un cliente entre en su tienda a comprar uno o más pares de lentes, pero no lentes de contacto es 0.40, y la probabilidad de que compre uno o más pares de lentes de contacto, pero no anteojos es 0.25. Por ende, Owens concluye que la probabilidad de que un cliente entre en su tienda y no compre un par de anteojos ni un par de lentes de contacto es 0.35.

24. Hay ocho grados en la escuela primaria Garfield. Si se selecciona al azar un estudiante de la escuela, entonces la probabilidad de que el estudiante esté en primer grado es $\frac{1}{8}$.

25. Sean E y F son dos eventos mutuamente excluyentes y suponga que $P(E) = .2$ y $P(F) = .5$. Calcule:

a. $P(E \cap F)$ **b.** $P(E \cup F)$
c. $P(E^c)$ **d.** $P(E^c \cap F^c)$

26. E y F son dos eventos de un experimento con el espacio muestral S. Suponga que $P(E) = 0.6$, $P(F) = 4$ y $P(E \cap F) = 0.2$. Calcule:

a. $P(E \cup F)$ **b.** $P(E^c)$
c. $P(F^c)$ **d.** $P(E^c \cap F)$

27. Sea $S = \{s_1, s_2, s_3, s_n\}$ el espacio muestral asociado con un experimento que tiene la distribución de probabilidad mostrada en la tabla adjunta. Si $A = \{s_1, s_2\}$ y $B = \{s_1, s_3\}$ calcule

a. $P(A)$, $P(B)$ **b.** $P(A^c)$, $P(B^c)$
c. $P(A \cap B)$ **d.** $P(A \cup B)$

Resultado	Probabilidad
s_1	$\frac{1}{8}$
s_2	$\frac{3}{8}$
s_3	$\frac{1}{4}$
s_4	$\frac{1}{4}$

28. Sea $S = \{s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6\}$ el espacio muestral asociado con un experimento que tiene distribución de probabilidad mostrada en la tabla adjunta. Si $A = \{s_1, s_2\}$ y $B = \{s_1, s_5, s_6\}$, calcule

a. $P(A)$, $P(B)$ **b.** $P(A^c)$, $P(B^c)$
c. $P(A \cap B)$ **d.** $P(A \cup B)$
e. $P(A^c \cap B^c)$ **f.** $P(A^c \cup B^c)$

Resultado	Probabilidad
s_1	$\frac{1}{3}$
s_2	$\frac{1}{8}$
s_3	$\frac{1}{6}$
s_4	$\frac{1}{6}$
s_5	$\frac{1}{12}$
s_6	$\frac{1}{8}$

29. **Actitudes de los profesores** Una organización sin fines de lucro aplicó una encuesta a 2,140 profesores de la zona metropolitana respecto a sus creencias en cuanto a los problemas de la educación. Se obtuvieron los datos siguientes:

900 dijeron que la falta de apoyo de los padres es un problema.

890 dijeron que los niños abusados o rechazados es un problema.

680 dijeron que la desnutrición o los estudiantes con mala salud es un problema.

120 dijeron que la falta de apoyo de los padres y los niños abusados o rechazados son los problemas.

110 dijeron que la falta de apoyo de los padres y la desnutrición o mala salud son los problemas.

140 dijeron que los niños abusados o rechazados y la desnutrición o mala salud son los problemas.

40 dijeron que la falta de apoyo de los padres, el abuso o rechazo, y la desnutrición o mala salud son los problemas.

¿Cuál es la probabilidad de que un maestro seleccionado al azar de este grupo diga que la falta de apoyo de los padres es el único problema que obstaculiza la educación de un estudiante?

Consejo: trace un diagrama de Venn.

30. **Inversiones** En una encuesta a 200 empleados de una empresa respecto a sus inversiones en el plan de retiro 401(k), se obtuvieron los datos siguientes:

141 tenían inversiones en fondos de acciones.

91 tenían inversiones en fondos de bonos.

60 tenían inversiones en fondos del mercado de dinero.

47 tenían inversiones en fondos de acciones y fondos de bonos.

36 tenían inversiones en fondos de acciones y fondos del mercado de dinero.

36 tenían inversiones en fondos de bonos y fondos del mercado de dinero.

22 tenían inversiones en fondos de acciones, fondos de bonos y fondos del mercado de dinero.

¿Cuál es la probabilidad de que un empleado de la empresa elegido al azar

a. tenga inversiones en exactamente dos tipos de fondos de inversión?

b. tenga inversiones en exactamente un tipo de fondo de inversión?

c. no cuente con una inversión en ninguno de los tres tipos de fondos?

31. **VENTAS AL DETALLE** La probabilidad de que una cliente en cierta boutique compre una blusa es 0.35, de que compre un pantalón es 0.30 y de que compre una falda es 0.27. La probabilidad de que compre tanto una blusa como una falda es 0.15, de que compre tanto una falda como un pantalón es 0.19 y de que compre tanto una blusa como un pantalón es 0.12. Por tanto, la probabilidad de que compre los tres artículos es 0.08. ¿Cuál es la probabilidad de que una cliente compre
   a. exactamente uno de estos artículos?
   b. ninguno de estos artículos?

32. **INSCRIPCIONES A CURSOS** Entre los 500 estudiantes de primer grado que tienen la intención de estudiar una licenciatura en administración en una universidad, 320 están inscritos en un curso de economía, 225 están inscritos en un curso de matemáticas y 140 están inscritos tanto en un curso de economía como en uno de matemáticas. ¿Cuál es la probabilidad de que un estudiante de primer grado seleccionado al azar de este grupo esté inscrito en
   a. un curso de economía y/o matemáticas?
   b. exactamente uno de estos dos cursos?
   c. ni un curso de economía ni un curso de matemáticas?

33. **ESTUDIOS DEL CONSUMIDOR** Un fabricante líder de electrodomésticos anuncia sus productos en dos revistas: *Good Housekeeping* y *Ladies Home Journal*. Una encuesta de 500 clientes reveló que 140 se enteraron de sus productos en *Good Housekeeping*, 130 en *Ladies Home Journal* y 80 en ambas revistas. ¿Cuál es la probabilidad de que una persona seleccionada al azar de este grupo haya visto el anuncio en
   a. ambas revistas?
   b. por lo menos una de las dos revistas?
   c. exactamente una revista?

34. **MUERTES POR VOLCADURAS DE VEHÍCULOS** La tabla siguiente lista el número de personas muertas en volcaduras de varios tipos de vehículos en 2002:

Tipos de vehículos	Automóviles	Camionetas	Todoterreno	Furgonetas
Muertes	4,768	2,742	2,448	698

   Calcule la distribución de probabilidad empírica asociada con estos datos. Si un deceso debido a una volcadura en 2002 se elige al azar, ¿cuál es la probabilidad de que la víctima estuviera en
   a. un automóvil? **b.** un vehículo SUV?
   c. una pickup o un vehículo SUV?
   Fuente: National Highway Traffic Safety Administration

35. **PREPARACIÓN DEL PAGO DE IMPUESTOS** Una encuesta en la cual se preguntó a las personas cómo planeaban preparar el pago de sus impuestos en 2007 reveló lo siguiente:

Método de preparación	Porcentaje
Software de computadora	33.9
Contador	23.6
Servicio de preparación de impuestos	17.4
Cónyuge, amigo u otro pariente lo prepararán	10.8
A mano	14.3

   ¿Cuál es la probabilidad de que un participante en la encuesta elegido al azar
   a. planee contratar a un contador o un servicio de preparación de impuestos para pagarlos?
   b. no planee usar software para preparar el pago de sus impuestos ni planee hacer su pago a mano?
   Fuente: National Retail Federation

36. **ROPA FEMENINA** En una encuesta en línea aplicada por Talbot a 1,095 mujeres de 35 años o mayores, se preguntó a las participantes qué prenda femenina de vestir preferían que les quedara perfectamente. Enseguida se presenta un resumen de los resultados:

Prenda de vestir	Encuestadas
Jeans	470
Traje de pantalón negro	307
Vestido de cóctel	230
Blusa blanca	22
Vestido	11
Otra	55

   Una mujer que participó en la encuesta es elegida al azar, ¿cuál es la probabilidad de que prefiera
   a. que los jeans le queden perfectamente?
   b. un traje de pantalón negro o un vestido de cóctel le queden perfectamente?
   Fuente: Market Tool's Zoom Panel

37. **CAMBIAR DE TRABAJO** Se preguntó a 200 trabajadores: ¿Una mejor economía le llevaría a cambiar de trabajo? Los resultados de la encuesta se muestran a continuación:

Respuesta	Muy probable	Probable	No es probable	Muy poco probable	No lo sé
Encuestados	40	28	26	104	2

   Si se elige un empleado al azar,
   a. ¿es muy poco probable que cambie de trabajo?
   b. ¿es probable o muy probable que cambie de trabajo?
   Fuente: Accountemps

38. **INVERSIONISTAS EN EL PLAN DE RETIRO 401(K)** Con base en un estudio realizado en 2003 referente a la participación, por edad, de los inversionistas en el plan de retiro 401(k), se obtuvieron los datos siguientes:

Edad	20s	30s	40s	50s	60s
Porcentaje	11	28	32	22	7

   a. ¿Cuál es la probabilidad de que un inversionista en el plan 401(k) seleccionado al azar tenga una edad de veintitantos o sesenta y tantos?
   b. ¿Cuál es la probabilidad de que un inversionista en el plan 401(k) seleccionado al azar sea menor de 50?
   Fuente: Investment Company Institute

39. **FUENTES DE ENERGÍA ALTERNATIVA** En una encuesta entre los probables votantes realizada por Zogby International, se pidió a los votantes su opinión sobre la mejor alternativa al petróleo y al carbón. Los resultados son los siguientes:

Fuente	Nuclear	Eólica	Celdas de combustible	Biocombustibles	Solar	Otras/sin respuesta
Encuestados, %	14.2	16.0	3.8	24.3	27.9	13.8

¿Cuál es la probabilidad de que un participante seleccionado al azar en la encuesta mencione

a. las fuentes de energía eólica o solar como la mejor alternativa al petróleo y al carbón?

b. la energía nuclear o los biocombustibles como la mejor alternativa al petróleo y el carbón?

Fuente: Zogby International

40. GENERACIÓN DE ELECTRICIDAD La electricidad en Estados Unidos se genera a partir de muchas fuentes. La tabla siguiente da las fuentes, así como su participación en la producción de electricidad:

Fuente	Carbón	Nuclear	Gas natural	Hidroeléctrica	Petróleo	Otras
Participación, %	50.0	19.3	18.7	6.7	3.0	2.3

Si una fuente para generar electricidad se selecciona al azar, ¿cuál es la probabilidad de que provenga de

a. el carbón o el gas natural?

b. las fuentes no nucleares?

Fuente: Energy Information Administration

41. DESCARGA DE MÚSICA La tabla siguiente, compilada en 2004, da el porcentaje de la música de Estados Unidos y otros países descargada por usuarios estadounidenses:

País	EUA	Alemania	Canadá	Italia	Reino Unido	Francia	Japón	Otros
Porcentaje	45.1	16.5	6.9	6.1	4.2	3.8	2.5	14.9

a. Verifique que la tabla da una distribución de probabilidad para el experimento.

b. ¿Cuál es la probabilidad de que un usuario que descarga música, seleccionado al azar, la obtenga ya sea de Estados Unidos o Canadá?

c. ¿Cuál es la probabilidad de que un usuario de Estados Unidos que descarga música, elegido al azar, no la obtenga de Italia, el Reino Unido o Francia?

Fuente: Felix Oberholtzer-Gee and Koleman Strumpf

42. PLANES PARA MANTENER UN AUTOMÓVIL En una encuesta realizada para ver durante cuánto tiempo los estadounidenses mantienen sus automóviles, se preguntó a 2000 propietarios de automóviles cuánto tiempo planean mantener sus automóviles presentes. Los resultados de la encuesta son los siguientes:

Años que mantienen el automóvil, x	Encuestados
$0 \leq x < 1$	60
$1 \leq x < 3$	440
$3 \leq x < 5$	360
$5 \leq x < 7$	340
$7 \leq x < 10$	240
$10 \leq x$	560

Calcule la distribución de probabilidad asociada con estos datos. ¿Cuál es la probabilidad de que el propietario de un automóvil seleccionado al azar planee mantener su automóvil actual

a. menos de 5 años?

b. 3 años o más?

43. TIEMPOS DE ENSAMBLAJE El gerente de producción de Universal Instruments realizó un estudio para determinar cuánto tiempo tardaba un operador en completar cierta tarea durante el ensamblaje de sus computadoras personales Galaxy. Los resultados del estudio indicaron que 20% de los operadores podía completar la tarea en menos de 3 minutos, 60% en 4 minutos o menos y 10% requería más de 5 minutos para completar la tarea. Si un empleado de la línea de ensamble se selecciona al azar de este grupo, ¿cuál es la probabilidad de que

a. él o ella completen la tarea en 5 minutos o menos?

b. él o ella no puedan completar la tarea en 4 minutos?

c. el tiempo que tarda el operador en completar la tarea estará entre 3 y 4 minutos (inclusive)?

44. CONDUCTORES DISTRAÍDOS Según un estudio de 100 conductores en el área metropolitana de Washington, D.C., cuyos automóviles estaban equipados con cámaras y sensores, las distracciones y el número de accidentes (choques, casi choques y situaciones que requieren una maniobra evasiva porque el conductor estaba distraído) provocados por estas distracciones son los siguientes:

Distracción	A	B	C	D	E	F	G	H	I
Accidentes de manejo	668	378	194	163	133	134	111	111	89

donde A = dispositivos inalámbricos (teléfono celular, PDA)

B = Pasajero

C = Algo dentro del automóvil

D = Vehículo

E = Higiene personal

F = Comida

G = Algo fuera del automóvil

H = Hablar, cantar

I = Otras

Si se elige al azar un accidente provocado por una distracción, ¿cuál es la probabilidad de que haya sido causado por

a. el uso de un dispositivo electrónico?

b. algo diferente a la higiene personal o la comida?

Fuente: Virginia Tech Transportation Institute and NHTSA

45. LEYES DE CONTROL DE ARMAS Se realizó una encuesta entre 250 residentes de cierta ciudad respecto a leyes más estrictas de control de armas. Los resultados se muestran en la tabla:

	Tener sólo una pistola	Tener sólo un rifle	Tener una pistola y un rifle	No tener ninguno	Total
A favor de leyes mas estrictas	0	12	0	138	150
En contra de leyes más estrictas	58	5	25	0	88
Sin opinión	0	0	0	12	12
Total	58	17	25	150	250

Si uno de los participantes en la encuesta es seleccionado al azar, ¿cuál es la probabilidad de que él o ella

a. esté a favor de leyes de control de armas más estrictas?
b. tenga una pistola?
c. tenga una pistola pero no un rifle?
d. esté a favor de leyes de control más estrictas y no tenga una pistola?

46. Riesgo de que un avión choque Según un estudio de los jets comerciales construidos por Western que se estrellaron de 1988 a 1998, el porcentaje de los accidentes aéreos que ocurre en cada etapa de vuelo es el siguiente:

Fase	Porcentaje
En tierra, al rodar por la pista de despegue	4
Durante el despegue	10
Al ascender para cambiar de altitud	19
En ruta	5
En el descenso y aproximación	31
En el aterrizaje	31

Si uno de los vuelos fatales en el periodo de 1988-1998 se selecciona al azar, ¿cuál es la probabilidad de que se haya estrellado

a. mientras rodaba por la pista o cuando estaba en ruta?
b. durante el despegue o aterrizaje?

Si el estudio es indicativo de que el avión se estrella en general, ¿cuándo el riesgo de que un avión se estrelle es más alto?

Fuente: National Transportation Safety Board

47. Suponga que la probabilidad de que Bill pueda resolver un problema es p_1 y la probabilidad de que Mike pueda resolverlo es p_2. Muestre que la probabilidad de que Bill y Mike trabajan de manera independiente en la solución del problema es $p_1 + p_2 - p_1p_2$.

48. Cincuenta boletos para una rifa se numeran del 1 al 50, y uno de ellos se extrae al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que el número sea un múltiplo de 5 o 7? Considere la "solución" siguiente: Como 10 boletos tienen números que son múltiplos de 5 y como 7 boletos tienen números que son múltiplos de 7, concluimos que la probabilidad requerida es

$$\frac{10}{50} + \frac{7}{50} = \frac{17}{50}$$

¿Por qué es erróneo este argumento? ¿Cuál es la respuesta correcta?

En los ejercicios 49-52 determine si el enunciado es verdadero o falso. Si es verdadero, explique por qué lo es. Si es falso, dé un ejemplo para mostrar por qué lo es.

49. Si A es un subconjunto de B y $P(B) = 0$, entonces $P(A) = 0$.

50. Si A es un subconjunto de B, entonces $P(A) \leq P(B)$.

51. Si $E_1, E_2, \ldots, E_n$ son eventos de un experimento, entonces $P(E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_n) = P(E_1) + P(E_2) + \cdots + P(E_n)$.

52. Si E es un evento de un experimento, entonces $P(E) + P(E^c) = 1$.

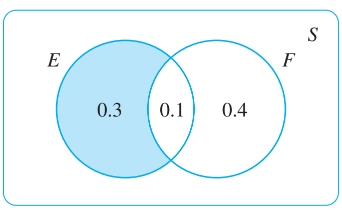
7.7 Soluciones a los ejercicios de autoevaluación

1. a. Utilizando la propiedad 4, encontramos

$$\begin{aligned} P(E \cup F) &= P(E) + P(F) - P(E \cap F) \\ &= 0.4 + 0.5 - 0.1 \\ &= 0.8 \end{aligned}$$

b. A partir del diagrama de Venn adjunto, en el cual el subconjunto de $E \cap F^c$ está sombreado, vemos que

$$P(E \cap F^c) = .3$$



El resultado también puede obtenerse usando la relación

$$\begin{aligned} P(E \cap F^c) &= P(E) - P(E \cap F) \\ &= 0.4 - 0.1 = 0.3 \end{aligned}$$

2. Sea E el evento de que el agente inmobiliario encontrará un comprador en 1 mes a partir de la fecha que la propiedad sale a la venta o renta y F el evento de que el agente inmobiliario encontrará un inquilino en el mismo periodo. Por tanto,

$$P(E) = 0.3 \qquad P(F) = 0.8 \qquad P(E \cap F) = 0.1$$

La probabilidad del evento de que el agente inmobiliario encuentre un comprador o un inquilino en 1 mes a partir de la fecha en que la propiedad sale a la venta o renta está dada por

$$\begin{aligned} P(E \cup F) &= P(E) + P(F) - P(E \cap F) \\ &= 0.3 + 0.8 - 0.1 = 1 \end{aligned}$$

este es un evento seguro.

CAPÍTULO 7 Resumen de las fórmulas y términos principales

FÓRMULAS

1. Leyes conmutativas	$A \cup B = B \cup A$ $A \cap B = B \cap A$
2. Leyes asociativas	$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
3. Leyes distributivas	$A \cup (B \cap C)$ $= (A \cup B) \cap (A \cup C)$ $A \cap (B \cup C)$ $= (A \cap B) \cup (A \cap C)$
4. Leyes de De Morgan	$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$
5. Número de elementos en la unión de dos conjuntos finitos	$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$
6. Permutación de n objetos distintos, tomados r a la vez	$P(n, r) = \dfrac{n!}{(n-r)!}$
7. Permutación de n objetos, no todos distintos, tomados n a la vez	$\dfrac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_m!}$
8. Combinación de n objetos distintos, tomados r a la vez	$C(n, r) = \dfrac{n!}{(n-r)!}$
9. Probabilidad de un evento en un espacio muestral uniforme	$P(E) = \dfrac{n(E)}{n(S)}$
10. Probabilidad de la unión de dos eventos mutuamente excluyentes	$P(E \cup F) = P(E) + P(F)$
11. Regla de la adición	$P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(E \cap F)$
12. Regla de los complementos	$P(E^c) = 1 - P(E)$

TÉRMINOS

combinación (422)
complemento de un conjunto (399)
complemento de un evento (432)
conjunto (396)
conjunto disjunto (399)
conjunto universal (398)
conjunto vacío (397)
diagrama de Venn (398)
distribución de probabilidad (440)
elemento de un conjunto (396)
espacio muestral (431)
espacio muestral finito (431)
espacio muestral uniforme (441)
evento (431)
evento elemental (simple) (440)
eventos mutuamente excluyentes (433)
experimento (431)
frecuencia relativa (440)
función de probabilidad (440)
igualdad de conjuntos (396)
intersección de conjuntos (399)
intersección de dos eventos (432)
n factorial (419)
notación de conjuntos (396)
notación de lista (396)
permutación (417)
principio de adición (442)
principio de multiplicación (411)
principio generalizado de la multiplicación (413)
probabilidad de un evento (440)
probabilidad empírica (440)
punto de muestreo (431)
resultado (431)
subconjunto (397)
unión de conjuntos (399)
unión de dos eventos (432)

CAPÍTULO 7 Preguntas de revisión de conceptos

Llene los espacios en blanco.

1. Una colección bien definida de objetos se llama ______. Estos objetos también se llaman ______ del/de la ______.
2. Se dice que dos conjuntos que tienen exactamente los mismos elementos son ______.
3. Si cada elemento de un conjunto A es también un elemento de un conjunto B, entonces A es un/una ______ de B.
4. **a.** El conjunto vacío $\varnothing$ es el conjunto que contiene ______ elementos.
   b. El conjunto universal es el conjunto que contiene ______ elementos.
5. **a.** El conjunto de todos los elementos en A y/o en B se llama el/la ______ de A y B.
   b. El conjunto de todos los elementos en A y B se llama el/la ______ de A y B.
6. El conjunto de todos los elementos en U que no están en A se llama el/la ______ de A.
7. Al aplicar la ley de De Morgan, podemos escribir $(A \cup B \cup C)^c =$ ______.
8. Un arreglo de un conjunto de objetos distintos en un orden definido se llama ______; un arreglo en el cual el orden no es importante es un/una ______.
9. Una actividad con resultados observables se conoce como un/una ______; un resultado de un experimento se llama punto ______ y el conjunto compuesto por todos los puntos de muestreo posibles de un experimento se llama ______; muestral; un subconjunto de un espacio muestral de un experimento se conoce como un/una ______.
10. Los eventos E y F son mutuamente excluyentes si $E \cap F =$ ______.
11. Un espacio muestral en el cual los resultados son igualmente probables se conoce como espacio muestral ______ ; si un espacio muestral de este tipo contiene n eventos simples, entonces la probabilidad de cada evento simple es ______.

CAPÍTULO 7 Ejercicios de revisión

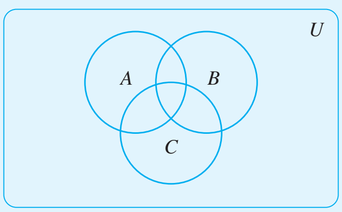
En los ejercicios 1-4 enumere los elementos de cada conjunto en notación de lista.

1. $\{x \mid 3x - 2 = 7;\ x, \text{ un entero}\}$
2. $\{x \mid x$ es una letra de la palabra *TALLAHASSEE*$\}$
3. El conjunto cuyos elementos son números pares entre 3 y 11.
4. $\{x \mid (x - 3)(x + 4) = 0;\ x, \text{ un entero negativo}\}$

Sea $A = \{a, c, e, r\}$. En los ejercicios 5-8 determine si el conjunto es igual a A.

5. $\{r, e, c, a\}$
6. $\{x \mid x$ es una letra de la palabra *career*$\}$
7. $\{x \mid x$ es una letra de la palabra *racer*$\}$
8. $\{x \mid x$ es una letra de la palabra *cares*$\}$

En los ejericios 9-12 sombree la porción de la figura adjunta que representa al conjunto.



9. $A \cup (B \cap C)$
10. $(A \cap B \cap C)^c$
11. $A^c \cap B^c \cap C^c$
12. $A^c \cap (B^c \cup C^c)$

Sea $U = \{a, b, c, d, e\}$, $A = \{a, b\}$, $B = \{b, c, d\}$ y $C = \{a, d, e\}$. En los ejercicios 13-16 verifique la ecuación por cálculo directo.

13. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
14. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
15. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
16. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Sea U = {todos los participantes en una encuesta de comportamiento del consumidor realizada por un grupo nacional de encuestas}

A = {los consumidores que evitan comprar un producto porque no es reciclable}

B = {los consumidores que usan pañales de tela en vez de pañales desechables}

C = {los consumidores que boicotean los productos de una empresa porque daña el ambiente}

D = {los consumidores que reciclan de manera voluntaria su basura}

En los ejercicios 17-20, describa cada conjunto en palabras.

17. $A \cap C$
18. $A \cup D$
19. $B^c \cap D$
20. $C^c \cup D^c$

Sean A y B subconjuntos de un conjunto universal U y suponga que $n(U) = 350$, $n(A) = 120$, $n(B) = 80$ y $n(A \cap B) = 50$. En los ejercicios 21-26 encuentre el número de elementos en cada conjunto.

21. $n(A \cup B)$ **22.** $n(A^c)$

23. $n(B^c)$ **24.** $n(A^c \cap B)$

25. $n(A \cap B^c)$ **26.** $n(A^c \cap B^c)$

En los ejercicios 27-30 evalúe cada cantidad.

27. $C(20, 18)$ **28.** $P(9, 7)$

29. $C(5, 3) \cdot P(4, 2)$ **30.** $4 \cdot P(5, 3) \cdot C(7, 4)$

31. Sean E y F dos eventos mutuamente excluyentes y suponga que $P(E) = .4$ y $P(F) = .2$. Calcule
a. $P(E \cap F)$ **b.** $P(E \cup F)$
c. $P(E^c)$ **d.** $P(E^c \cap F^c)$
e. $P(E^c \cup F^c)$

32. Sean E y F dos eventos de un experimento con el espacio muestral S. Suponga que $P(E) = 0.3$, $P(F) = 0.2$ y $P(E \cap F) = 0.15$. Calcule
a. $P(E \cup F)$
b. $P(E^c \cap F^c)$
c. $P(E^c \cap F)$

33. Un dado es lanzado y se determina que la distribución de probabilidad asociada con el experimento de lanzar el dado y observar qué número cae en la cara superior está dada por

Evento simple	Probabilidad
{1}	0.20
{2}	0.12
{3}	0.16
{4}	0.18
{5}	0.15
{6}	0.19

a. ¿Cuál es la probabilidad de que el número sea par?
b. ¿Cuál es la probabilidad de que el número sea un 1 o un 6?
c. ¿Cuál es la probabilidad de que el número sea menor que 4?

34. Una urna contiene seis bolas rojas, cinco bolas negras y cuatro bolas verdes. Si dos bolas se seleccionan al azar sin reemplazarlas de forma permanente en la urna, ¿cuál es la probabilidad de que una bola roja y una bola negra se seleccionen?

35. COMPARACIONES DE TARJETAS DE CRÉDITO Una comparación de cinco tarjetas de crédito importantes mostró que

3 ofrecían adelantos en efectivo.

3 ofrecían pagos diferidos para todos los bienes y servicios adquiridos.

2 requerían una cuota anual de menos de $35.

2 ofrecían tanto adelantos en efectivo como pagos diferidos.

1 ofrecía pagos diferidos y cobraba una cuota anual de menos de $35.

Ninguna tarjeta cobraba una cuota anual de menos de $35 ni ofrecía tanto adelantos en efectivo como pagos diferidos.

¿Cuántas tarjetas cobraban una cuota anual menor que $35 y ofrecían adelantos de efectivo? (Suponga que todas las tarjetas tenían por lo menos una de las tres características mencionadas.)

36. ENCUESTAS ESTUDIANTILES El Departamento de Lenguas Extranjeras de una universidad de artes y humanidades aplicó una encuesta a sus alumnos recién graduados para determinar los cursos de idiomas extranjeros que habían tomado mientras estudiaban en la universidad. De 480 graduados

200 tomaron por lo menos 1 año de español.

178 tomaron por lo menos 1 año de francés.

140 tomaron por lo menos 1 año de alemán.

33 tomaron por lo menos 1 año de español y francés.

24 tomaron por lo menos 1 año de español y alemán.

18 tomaron por lo menos 1 año de francés y alemán.

3 tomaron por lo menos 1 año de los tres idiomas.

¿Cuántos de los alumnos tomaron
a. por lo menos 1 año de al menos uno de los tres idiomas?
b. por lo menos 1 año de exactamente uno de los tres idiomas?
c. menos de 1 año de cualquiera de los tres idiomas?

37. ¿De cuántas maneras pueden seis discos compactos diferentes acomodarse en un estante?

38. ¿De cuántas maneras pueden seleccionarse tres fotografías de un grupo de seis fotografías diferentes?

39. Encuentre el número de permutaciones distinguibles que puede formarse a partir de las letras de cada palabra.
a. *CINCINNATI* **b.** *HONOLULU*

40. ¿Cuántos números de tres dígitos pueden formarse a partir de los números en el conjunto {1, 2, 3, 4, 5} si
a. no se permite repetir dígitos?
b. se permite repetir dígitos?

41. INVERSIONES En una encuesta realizada por Helena, una consultora financiera, se reveló que de sus 400 clientes,

300 tenían acciones.

180 tenían bonos.

160 tenían fondos de inversión.

110 tenían tanto acciones como bonos.

120 tenían tanto acciones como fondos de inversión.

90 tenían tanto bonos como fondos de inversión.

¿Cuántos de los clientes de Helena tienen acciones, bonos y fondos de inversión?

42. **Póquer** De una baraja estándar de 52 cartas, ¿cuántas manos de póquer de 5 cartas pueden repartirse que contengan
    a. cinco tréboles? **b.** tres reyes y un par?

43. **Elecciones** En la elección que se lleva a cabo por la Associated Students Organization, hay seis candidatos para presidente, cuatro para vicepresidente, cinco para secretario y seis para tesorero. ¿Cuántos resultados distintos posibles hay para esta elección?

44. **Selección de equipos** Hay ocho estudiantes de bachillerato y seis estudiantes de secundaria en el Club de Matemáticas de la Escuela Secundaria y Preparatoria Jefferson. ¿De cuántas maneras puede formarse un equipo de matemáticas que contenga cuatro estudiantes de bachillerato y dos de secundaria seleccionados de los miembros del Club de Matemáticas?

45. **Arreglo de asientos** ¿De cuántas maneras pueden asignarse asientos a siete estudiantes en una fila que contiene siete escritorios si
    a. no hay restricciones?
    b. dos de los estudiantes no deben sentarse al lado uno del otro?

46. **Control de calidad** De un envío de 60 transistores, 5 de los cuales tienen defectos, una muestra de 4 transistores se selecciona al azar.
    a. de cuántas maneras diferentes puede seleccionarse la muestra?
    b. cuántas muestras contienen 3 transistores defectuosos?
    c. cuántas muestras no contienen ningún transistor defectuoso?

47. **Muestras aleatorias** Una muestra de 4 bolas se extraerá al azar de una urna que contiene 15 bolas numeradas del 1 al 15. Si 6 bolas son verdes, 5 blancas y 4 negras,
    a. ¿cuántas muestras diferentes pueden extraerse?
    b. ¿cuántas muestras pueden extraerse que contengan por lo menos 1 bola blanca?

48. **Control de calidad** El departamento de control de calidad de Starr Communications, el fabricante de cartuchos para videojuegos, ha determinado a partir de los registros que 1.5% de los cartuchos vendidos tiene defectos de video, 0.8% tiene defectos de audio y 0.4% tiene tanto defectos de audio como de video. ¿Cuál es la probabilidad de que un cartucho comprado por un cliente
    a. tenga un defecto de audio o de video?
    b. no tenga un defecto de audio o de video?

CAPÍTULO 7 Antes de continuar . . .

1. Sea $U = \{a, b, c, d, e, f, g\}$, $A = \{a, d, f, g\}$, $B = \{d, f, g\}$ y $C = \{b, c, e, f\}$. Calcule
   a. $A \cap (B \cup C)$
   b. $(A \cap C) \cup (B \cup C)$
   c. A^c

2. ¿De cuántas maneras pueden seleccionarse cuatro discos compactos a partir de seis discos compactos diferentes?

3. Hay seis estudiantes de bachillerato y cinco de secundaria en el Club de Ajedrez en la escuela secundaria y preparatoria Madison. ¿De cuántas maneras puede formarse un equipo de tres estudiantes de bachillerato y dos estudiantes de secundaria seleccionando los miembros del Club de Ajedrez?

4. Sea $S = \{s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6\}$ el espacio muestral asociado con un experimento que tiene la probabilidad de distribución siguiente:

Resultado	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6
Probabilidad	$\frac{1}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{3}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{3}{12}$	$\frac{1}{12}$

   Calcule la probabilidad del evento $A = \{s_1, s_3, s_6\}$.

5. Una carta se extrae de una baraja de 52 cartas bien mezcladas. ¿Cuál es la probabilidad de que la carta extraída sea un dos o una figura?

6. Sean E y F eventos de un experimento con un espacio muestral S. Suponga que $P(E) = 0.5$, $P(F) = 0.6$ y $P(E \cap F) = 0.2$. Calcule:
   a. $P(E \cup F)$ **b.** $P(E \cap F^c)$

TEMAS ADICIONALES EN PROBABILIDAD

8

EN ESTE CAPÍTULO se desarrollan técnicas adicionales para el cálculo de las probabilidades de ciertos eventos, y se estudia la estadística descriptiva. Comenzamos con el estudio de los problemas que involucran espacios muestrales grandes. En la sección 8.2 se considera el efecto de eventos anteriores sobre la probabilidad de que un evento ocurra, y en la sección 8.3 se explica cómo calcular las probabilidades de ciertos eventos después de que ocurra un evento. A lo largo de nuestro análisis, veremos cómo estas técnicas se aplican a numerosos problemas prácticos en campos tan diversos como el control de calidad y la investigación médica. En el resto del capítulo se dará un vistazo breve a la estadística, la rama de las matemáticas relacionada con la recolección, el análisis y la interpretación de los datos.

¿Cuál es la probabilidad de que una pareja elegida al azar de cierta zona metropolitana tenga un nivel de ingresos alto si ambos esposos trabajan? En el ejemplo 2, página 487, se muestra cómo se usa la distribución de ingresos para determinar esta probabilidad.

8.1 Uso de técnicas de conteo en la probabilidad

Más aplicaciones de las técnicas de conteo

Como se ha visto con anterioridad, un problema en el cual el espacio muestral subyacente tiene un número de elementos pequeño puede resolverse al determinar primero todos los puntos de muestreo de este espacio. Sin embargo, para problemas que involucran espacios muestrales con un gran número de puntos de muestreo, este método no es práctico ni deseable.

En esta sección se verá cómo se emplean las técnicas de conteo estudiadas en el capítulo 7 para ayudarnos a resolver problemas en los cuales los espacios muestrales asociados contienen números grandes de puntos de muestreo. En particular, restringimos la atención al estudio de los espacios muestrales uniformes, es decir, aquellos en los cuales los resultados son igualmente probables. Para espacios como éstos tenemos el resultado siguiente.

Cálculo de la probabilidad de un evento en un espacio muestral uniforme

Sean S un espacio muestral uniforme y E un evento cualquiera. Por tanto

$$P(E) = \frac{\text{Número de resultados en } E}{\text{Número de resultados en } S} = \frac{n(E)}{n(S)} \tag{1}$$

EJEMPLO 1 Una moneda sin truco es lanzada seis veces. ¿Cuál es la probabilidad de que la moneda caiga en cara

a. exactamente tres veces?
b. por lo menos tres veces?
c. en el primer y último lanzamientos?

Solución

a. Cada resultado del experimento puede representarse como una secuencia de caras y cruces. Usando el principio generalizado de la multiplicación, se observa que el número de resultados de este experimento está dado por 2^6 o 64. Sea E el evento de que la moneda cae en cara exactamente tres veces. Como hay $C(6, 3)$ maneras de que eso pueda ocurrir, vemos que la probabilidad requerida es

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{C(6,3)}{64} = \frac{\frac{6!}{3!\,3!}}{64}$$

S es un espacio muestral del experimento.

$$= \frac{\frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2}}{64} = \frac{20}{64} = \frac{5}{16} = .3125$$

b. Sea F el evento de que la moneda cae en cara como máximo tres veces. Por tanto, $n(F)$ está dada por la suma del número de maneras en que la moneda cae en cara cero veces (¡no cae en cara!), el número de maneras en que cae en cara exactamente una vez, el número de maneras en que cae en cara exactamente dos veces y el número de maneras en que cae en cara exactamente tres veces. Es decir,

$$\begin{aligned} n(F) &= C(6, 0) + C(6, 1) + C(6, 2) + C(6, 3) \\ &= \frac{6!}{0!\,6!} + \frac{6!}{1!\,5!} + \frac{6!}{2!\,4!} + \frac{6!}{3!\,3!} \\ &= 1 + 6 + \frac{6 \cdot 5}{2} + \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2} = 42 \end{aligned}$$

Por tanto, la probabilidad requerida es

$$P(F) = \frac{n(F)}{n(S)} = \frac{42}{64} = \frac{21}{32} \approx .6563$$

c. Sea F el evento de que la moneda cae en cara en el primero y último lanzamientos. Por tanto, $n(F) = 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 = 2^4$, de modo que la probabilidad de que el evento ocurra es

$$\begin{aligned} P(F) &= \frac{2^4}{2^6} \\ &= \frac{1}{2^2} \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

■

EJEMPLO 2 Dos naipes se seleccionan al azar (sin reemplazo) de una baraja de 52 naipes bien barajada. ¿Cuál es la probabilidad de que

a. los dos sean ases? **b.** ninguno de ellos sea un as?

Solución

a. El experimento consiste en la selección de 2 naipes de un paquete de 52. Como el orden en el cual se seleccionan los naipes es irrelevante, los puntos de muestreo son combinaciones de 52 naipes tomando 2 a la vez. Ahora hay $C(52, 2)$ maneras de seleccionar 52 naipes tomando 2 a la vez, por lo que el número de elementos en el espacio muestral S está dado por $C(52, 2)$. Luego, observamos que hay $C(4, 2)$ maneras de seleccionar 2 ases de los 4 ases que contiene la baraja. Por consiguiente, si E es el evento de que los dos naipes seleccionados son ases, entonces

$$\begin{aligned} P(E) &= \frac{n(E)}{n(S)} \\ &= \frac{C(4, 2)}{C(52, 2)} = \frac{\frac{4!}{2!\,2}}{\frac{52!}{2!\,50!}} = \frac{4 \cdot 3}{2} \cdot \frac{2}{52 \cdot 51} \\ &= \frac{1}{221} \approx .0045 \end{aligned}$$

b. Sea F el evento de que ninguno de los dos naipes seleccionados es un as. Como hay $C(48, 2)$ maneras de seleccionar dos naipes que no son un as, encontramos que

$$\begin{aligned} P(F) &= \frac{n(F)}{n(S)} = \frac{C(48, 2)}{C(52, 2)} = \frac{\frac{48!}{2!\,46!}}{\frac{52!}{2!\,50!}} = \frac{48 \cdot 47}{2} \cdot \frac{2}{52 \cdot 51} \\ &= \frac{188}{221} \approx .8507 \end{aligned}$$

■

EJEMPLO DE APLICACIÓN 3 **Control de calidad** Un basurero en el departamento de alta fidelidad del edificio 20, un punto de venta de ofertas, contiene 100 cintas de casete en blanco, de las cuales se sabe que 10 están defectuosas. Si un cliente selecciona 6 de las cintas al azar, determine la probabilidad de que

a. dos de ellas estén defectuosas.
b. por lo menos una de ellas esté defectuosa.

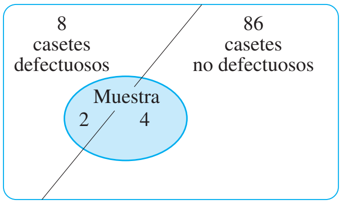


FIGURA 1
Una muestra de 6 casetes seleccionados de 90 casetes sin defectos y 10 casetes defectuosos.

Solución

a. Hay $C(100, 6)$ maneras de seleccionar un conjunto de 6 de 100 casetes, y esto da $n(S)$, el número de resultados en el espacio muestral asociado con el experimento. Luego observamos que hay $C(10, 2)$ maneras de seleccionar un conjunto de 2 casetes defectuosos de 10 casetes defectuosos y $C(90, 4)$ maneras de seleccionar un conjunto de 4 casetes sin defectos de los 90 casetes sin defectos (figura 1). Por tanto, por el principio de multiplicación, hay $C(10, 2) \cdot C(90, 4)$ maneras de seleccionar 2 casetes defectuosos y 4 sin defectos. Por consiguiente, la probabilidad de seleccionar 6 casetes de los cuales 2 no tienen defectos está dada por

$$\begin{aligned}
\frac{C(10,2)\cdot C(90,4)}{C(100,6)} &= \frac{\dfrac{10!}{2!\,8!}\,\dfrac{90!}{4!\,86!}}{\dfrac{100!}{6!\,94!}} \\
&= \frac{10\cdot 9}{2}\cdot\frac{90\cdot 89\cdot 88\cdot 87}{4\cdot 3\cdot 2}\cdot\frac{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}{100\cdot 99\cdot 98\cdot 97\cdot 96\cdot 95} \\
&\approx .096
\end{aligned}$$

b. Sea E el evento de que ninguno de los casetes seleccionados tiene defectos. Por tanto, E^c es el evento de que por lo menos 1 de los casetes está defectuoso. Por la regla de los complementos,

$$P(E^c) = 1 - P(E)$$

Para calcular $P(E)$, observe que hay $C(90, 6)$ maneras de seleccionar un conjunto de 6 casetes sin defectos. Por consiguiente,

$$\begin{aligned}
P(E) &= \frac{C(90,6)}{C(100,6)} \\
P(E^c) &= 1 - \frac{C(90,6)}{C(100,6)} \\
&= 1 - \frac{\dfrac{90!}{6!\,84!}}{\dfrac{100!}{6!\,94!}} \\
&= 1 - \frac{90\cdot 89\cdot 88\cdot 87\cdot 86\cdot 85}{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}\cdot\frac{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}{100\cdot 99\cdot 98\cdot 97\cdot 96\cdot 95} \\
&\approx .478
\end{aligned}$$

El problema del cumpleaños

VIDEO

EJEMPLO DE APLICACIÓN 4 El problema del cumpleaños Un grupo de cinco personas es seleccionado al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que por lo menos dos de ellas cumplan años el mismo día?

Solución Por simplicidad, suponga que ninguna de las cinco personas nació el 29 de febrero de un año bisiesto. Como las cinco personas fueron seleccionadas al azar, también suponemos que es igualmente probable que cada una de ellas cumpla años en cualquiera de los 365 días del año. Si A, B, C, D y F representan las cinco personas, entonces un resultado del experimento puede expresarse por medio de

(a, b, c, d, f), donde las fechas a, b, c, d y f dan los cumpleaños de A, B, C, D y F, respectivamente.

Primero observamos que, dado que hay 365 posibilidades para cada una de las fechas a, b, c, d y f, el principio de multiplicación supone que hay

$$\underset{a}{\boxed{365}} \cdot \underset{b}{\boxed{365}} \cdot \underset{c}{\boxed{365}} \cdot \underset{d}{\boxed{365}} \cdot \underset{f}{\boxed{365}}$$

o 365^5 resultados del experimento. Por consiguiente,

$$n(S) = 365^5$$

donde S denota el espacio muestral del experimento.

Luego, sea E el evento de que dos o más de las cinco personas cumplen años el mismo día. Ahora es necesario calcular $P(E)$. Sin embargo, un cálculo directo de $P(E)$ es relativamente difícil de realizar. Es mucho más fácil calcular $P(E^c)$, donde E^c es el evento de que dos de las cinco personas cumplen años el mismo día, y luego usar la relación

$$P(E) = 1 - P(E^c)$$

Para calcular $P(E^c)$, observe que hay 365 maneras (correspondientes a las 365 fechas) en las cuales el cumpleaños de A puede ocurrir, seguidas por 364 maneras en que podría ocurrir el cumpleaños de B, si B no cumpliera años el mismo día que A, y así sucesivamente. Por consiguiente, según el principio generalizado de la multiplicación,

$$n(E^c) = \underset{\substack{\text{Cumpleaños}\\ \text{de A}}}{365} \cdot \underset{\substack{\text{Cumpleaños}\\ \text{de B}}}{364} \cdot \underset{\substack{\text{Cumpleaños}\\ \text{de C}}}{363} \cdot \underset{\substack{\text{Cumpleaños}\\ \text{de D}}}{362} \cdot \underset{\substack{\text{Cumpleaños}\\ \text{de F}}}{361}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} P(E^c) &= \frac{nE^c}{n(S)} \\ &= \frac{365 \cdot 364 \cdot 363 \cdot 362 \cdot 361}{365^5} \\ P(E) &= 1 - P(E^c) \\ &= 1 - \frac{365 \cdot 364 \cdot 363 \cdot 362 \cdot 361}{365^5} \\ &\approx 0.27 \end{aligned}$$

Podemos extender el resultado obtenido en el ejemplo 4 al caso general que involucra r personas. De hecho, si E denota el evento de que por lo menos dos de las r personas cumplen años el mismo día, un argumento parecido a aquel usado en el ejemplo 4 conduce al resultado

$$P(E) = 1 - \frac{365 \cdot 364 \cdot 363 \cdot \cdots \cdot (365 - r + 1)}{365^r}$$

Si r toma los valores 5, 10, 15, 20, . . . , 50, obtenemos, a su vez, las probabilidades de que por lo menos 2 de 5, 10, 15, 20, . . . , 50 personas, respectivamente, cumplan años el mismo día. Estos resultados se resumen en la tabla 1.

Los resultados muestran que, en un grupo de 23 personas seleccionadas al azar, las probabilidades de que por lo menos 2 de ellas cumplan años el mismo día son mayores que 50%. En un grupo de 50 personas, es probable que por lo menos 2 personas en el grupo cumplan años el mismo día.

TABLA 1

Probabilidad de que por lo menos dos personas en un grupo de r personas seleccionado al azar cumplan años el mismo día

r	$P(E)$
5	.027
10	.117
15	.253
20	.411
22	.476
23	.507
25	.569
30	.706
40	.891
50	.970

Explore y analice

Durante un episodio de *Tonight Show*, un presentador de un programa de entrevistas relacionó "El problema del cumpleaños" con la audiencia, para lo cual observó que en un grupo de 50 o más personas los expertos han calculado que la probabilidad de que por lo menos 2 personas cumplan años el mismo día es muy alta. Para ilustrar este punto, realizó su propio experimento. Solicitó a una persona de la audiencia seleccionada al azar que mencionara su fecha de cumpleaños. El presentador luego preguntó si alguien de la audiencia cumplía el mismo día. La respuesta fue negativa. Repitió el experimento. Una vez más la respuesta fue negativa. Estos resultados, observó el presentador, eran contrarios a las expectativas. En un episodio posterior del programa, el presentador explicó por qué este experimento se había realizado de manera inadecuada. Explique por qué el presentador no logró ilustrar el punto que estaba tratando de exponer en el episodio anterior.

8.1 Ejercicios de autoevaluación

1. Cuatro bolas se extraen al azar sin reemplazarlas de una urna que contiene 10 bolas blancas y 8 rojas. ¿Cuál es la probabilidad de que todas las bolas escogidas sean blancas?

2. Una caja contiene 20 microchips, de los cuales 4 son subestándar. Si 2 de los chips se extraen de la caja, ¿cuál es la probabilidad de que los dos sean subestándar?

Las soluciones de los ejercicios de autoevaluación 8.1 se encuentran en la página 470.

8.1 Preguntas de concepto

1. ¿Cuál es la probabilidad de un evento E en un espacio muestral uniforme S?

2. Suponga que queremos encontrar la probabilidad de que por lo menos dos personas en un grupo de seis personas seleccionadas al azar cumplan años el mismo día.

   a. Si S denota el espacio muestral de este experimento, ¿cuál es $n(5)$?

   b. Si E es el evento de que dos o más de las seis personas en el grupo cumplan años el mismo día, explique cómo usaría $P(E^c)$ para determinar $P(E)$.

8.1 Ejercicios

Una moneda sin truco es lanzada cinco veces. En los ejercicios 1-4, calcule la probabilidad del evento dado.

1. La moneda cae en cara las cinco veces.
2. La moneda cae en cara exactamente una vez.
3. La moneda cae en cara por lo menos una vez.
4. La moneda cae en cara más de una vez.

Dos naipes se seleccionan al azar sin reemplazarlos de una baraja de 52 naipes, bien barajada. En los ejercicios 5-8 calcule la probabilidad del evento dado.

5. Se saca un par.
6. No se saca un par.
7. Se sacan dos naipes negros.
8. Se sacan dos naipes del mismo palo.

Se extraen cuatro bolas al azar sin reemplazarlas de una urna que contiene tres bolas blancas y cinco azules. En los ejercicios 9-12 calcule la probabilidad del evento dado.

9. Dos de las bolas extraídas son blancas y dos azules.
10. Todas las bolas que se extraen son azules.
11. Exactamente tres de las bolas extraídas son azules.
12. Dos o tres de las bolas que se extraen son blancas.

Suponga que la probabilidad de que nazca un niño es igual que la probabilidad de que nazca una niña. En los ejercicios 13-16 calcule la probabilidad de que una familia con tres hijos tenga la composición dada.

13. Dos niños y una niña.
14. Por lo menos una niña.

15. Sin niñas.

16. Los dos hijos mayores son niñas.

17. Un examen consiste en 10 preguntas de verdadero o falso. Si un estudiante contesta al azar cada respuesta, ¿cuál es la probabilidad de que responda exactamente seis preguntas en forma correcta?

18. Selección de personal Jacobs & Johnson, una firma de contabilidad, emplea 14 contadores, de los cuales 8 son contadores públicos certificados. Si se selecciona al azar una delegación de 3 contadores de la empresa para que asistan a una conferencia, ¿cuál es la probabilidad de que se seleccionen 3 contadores públicos certificados?

19. Control de calidad Dos focos se seleccionan al azar de un lote de 24, de los cuales 4 están defectuosos. ¿Cuál es la probabilidad de que
a. los 2 focos estén defectuosos?
b. por lo menos 1 de los focos esté defectuoso?

20. Un cliente de la frutería Cavallaro's Fruit Stand toma una muestra de 3 naranjas al azar de un cajón que contiene 60 naranjas, de las cuales 4 están podridas. ¿Cuál es la probabilidad de que la muestra contenga 1 o más naranjas podridas?

21. Control de calidad Un estante de la tienda Metro Department Store contiene 80 cartuchos de tinta de color para una impresora de inyección de tinta popular. Seis de los cartuchos están defectuosos. Si un cliente selecciona 2 cartuchos al azar del estante, ¿cuál es la probabilidad de que
a. ambos estén defectuosos?
b. por lo menos 1 esté defectuoso?

22. Control de calidad Los juegos electrónicos de beisbol fabricados por Tempco Electronics se venden en lotes de 24. Antes del envío, un inspector de control de calidad selecciona una muestra de 8 juegos de cada lote para prueba. Si la muestra contiene algunos juegos defectuosos, todo el lote se rechaza. ¿Cuál es la probabilidad de que se envíe un lote que contiene exactamente 2 juegos defectuosos?

23. Selección de personal La Autoridad de Tránsito de la Ciudad planea contratar 12 conductores de autobús nuevos. De un grupo de 100 candidatos calificados, de quienes 60 son hombres y 40 mujeres, se seleccionarán 12 nombres por grupo. Suponga que Mary y John Lewis están entre los 100 candidatos calificados.
a. ¿Cuál es la probabilidad de que se seleccione el nombre de Mary? ¿Y de que se seleccione tanto el nombre de Mary como el de John?
b. Si se estipula que se seleccionará un número igual de hombres y de mujeres (6 hombres del grupo de 60 hombres y 6 mujeres del grupo de 40 mujeres), ¿cuál es la probabilidad de que se seleccione el nombre de Mary? ¿Y de que se seleccione el nombre de Mary y el de John?

24. Vivienda pública La Autoridad de Vivienda de la Ciudad ha recibido 50 solicitudes de candidatos calificados para ocho departamentos de interés social. Tres de los departamentos se ubican en el lado norte de la ciudad y cinco están en el lado sur de la misma. Si los departamentos serán asignados por medio de una lotería, ¿cuál es la probabilidad de que
a. un candidato específico sea seleccionado para uno de estos departamentos?
b. dos candidatos calificados específicos sean seleccionados para departamentos en el mismo lado de la ciudad?

25. Un alumno que estudia para un examen de vocabulario conoce el significado de 12 palabras de una lista de 20. Si el examen contiene 10 palabras de la lista de estudio, ¿cuál es la probabilidad de que por lo menos 8 de las palabras del examen sean palabras que el estudiante conoce?

26. Pruebas de manejo El Departamento de Vehículos Motorizados aplica cuatro distintas pruebas escritas de manejo. Una de estas cuatro pruebas se selecciona al azar para cada solicitante de una licencia de conducir. Si un grupo que consiste en dos mujeres y tres hombres solicita una licencia, ¿cuál es la probabilidad de que
a. exactamente a dos de los cinco solicitantes les toque la misma prueba?
b. a las dos mujeres les toque la misma prueba?

27. Selección de marcas Un farmacéutico desea seleccionar tres marcas de aspirinas para vender en su tienda. Hay cinco marcas principales entre las cuales puede elegir: A, B, C, D y E. Si selecciona las tres marcas al azar, ¿cuál es la probabilidad de que seleccione
a. la marca B?
b. las marcas B y C?
c. por lo menos una de las marcas B y C?

28. Blackjack En el juego de blackjack, una mano de 2 naipes compuesta por un as y una figura o un 10 se llama blackjack.
a. Si a un jugador se le reparten 2 naipes de una baraja estándar de 52 naipes bien barajada, ¿cuál es la probabilidad de que el jugador reciba un blackjack?
b. Si a un jugador se le reparten 2 naipes de 2 barajas estándar bien barajadas, ¿cuál es la probabilidad de que el jugador reciba un blackjack?

29. Máquinas tragamonedas Remítase al ejercicio 25, sección 7.3, donde se describe la máquina tragamonedas del "dólar de la suerte". ¿Cuál es la probabilidad de que los tres símbolos del "dólar de la suerte" aparezcan en la ventana de la máquina tragamonedas?

30. Ruleta En 1959 se estableció un récord mundial para la aparición consecutiva más prolongada de un mismo número en una ruleta legal (sin trucar) en el hotel San Juan de Puerto Rico. El número 10 apareció en seis tiradas consecutivas. ¿Cuál es la probabilidad de que ocurra este evento? (Suponga que hay 38 resultados igualmente probables que consisten en números del 1 al 36, 0 y 00.)

En "El juego de los números", una lotería estatal, se extraen cuatro números con reemplazo de una urna que contiene bolas numeradas de 0-9, inclusive. En los ejercicios 31-34 calcule la probabilidad de que una persona que tiene un boleto tenga el boleto ganador indicado.

31. Los cuatro dígitos están en el orden exacto (el gran premio).

32. Dos dígitos consecutivos y especificados en el orden exacto (los primeros dos dígitos, los dos dígitos del medio o los últimos dos dígitos).

33. Un dígito (el primero, segundo, tercero o cuarto dígito).

34. Tres dígitos en el orden exacto.

Una lista de manos de póquer que se clasifica en orden de mayor a menor, se muestra en la tabla adjunta junto con una descripción y un ejemplo de cada mano. Utilice la tabla para responder a los ejercicios 35-40.

Mano	Descripción	Ejemplo
Escalera de color	5 naipes en secuencia del mismo palo	A ♥ 2 ♥ 3 ♥ 4 ♥ 5 ♥
Póquer	4 naipes del mismo valor y cualquier otro naipe	K ♥ K ♦ K ♠ K ♣ 2 ♥
Full	3 naipes del mismo valor y un par	3 ♥ 3 ♦ 3 ♣ 7 ♥ 7 ♦
Color	5 naipes del mismo palo, que no están en secuencia	5 ♥ 6 ♥ 9 ♥ J ♥ K ♥
Escalera	5 naipes en secuencia pero no del mismo palo	10 ♥ J ♦ Q ♣ K ♠ A ♥
Tercia	3 naipes del mismo valor y 2 naipes que no coinciden	K ♥ K ♦ K ♠ 2 ♥ 4 ♦
Dos pares	2 naipes del mismo valor, 2 naipes de cualquier otro valor y 1 naipe que no coincide	K ♥ K ♦ 2 ♥ 2 ♠ 4 ♣
Un par	2 naipes del mismo valor y 3 naipes que no coinciden	K ♥ K ♦ 5 ♥ 2 ♠ 4 ♥

Si una mano de póquer de 5 naipes se reparte de una baraja de 52 naipes bien barajada, ¿cuál es la probabilidad de recibir la mano dada?

35. Una escalera de color (observe que un as puede jugarse como un naipe alto o como un naipe bajo en una secuencia de escalera, es decir, A, 2, 3, 4, 5 o 10, J, Q, K, A. Por consiguiente, hay 10 secuencias posibles para una escalera de un palo.)

36. Una escalera (pero no una escalera de color).

37. Color (pero no una escalera de color).

38. Póquer.

39. Full.

40. Dos pares.

41. **Signos del zodiaco** Hay 12 signos del zodiaco: Aries, Tauro, Géminis, Cáncer, Leo, Virgo, Libra, Escorpio, Sagitario, Capricornio, Acuario y Piscis. Cada signo corresponde a un periodo del calendario diferente de aproximadamente 1 mes. Suponiendo que una persona tiene igual probabilidad bajo un signo que bajo otro, ¿cuál es la probabilidad de que en un grupo de cinco personas por lo menos dos de ellas
a. tienen el mismo signo?
b. nacieron bajo el signo de Aries?

42. **Problema del cumpleaños** ¿Cuál es la probabilidad de que por lo menos dos de los nueve jueces de la Corte Suprema de Estados Unidos cumplan años el mismo día?

43. **Problema del cumpleaños** Cincuenta personas son seleccionadas al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que ninguna de las personas de este grupo coincida en su cumpleaños?

44. **Problema del cumpleaños** Hay 42 presidentes diferentes de Estados Unidos de 1789 a 2000. ¿Cuál es la probabilidad de que por lo menos dos de ellos cumplan años el mismo día? Compare su cálculo con los hechos al revisar un almanaque o alguna otra fuente.

8.1 Soluciones de los ejercicios de autoevaluación

1. La probabilidad de que las 4 bolas seleccionadas sean blancas está dada por

$$\frac{\text{El número de maneras de seleccionar 4 bolas blancas de las 10 bolas que hay en la urna}}{\text{El número de maneras de seleccionar 4 bolas cualquiera de las 18 que hay en la urna}}$$

$$= \frac{C(10, 4)}{C(18, 4)} = \frac{\frac{10!}{4!\,6!}}{\frac{18!}{4!\,14!}} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4 \cdot 3 \cdot 2} \cdot \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 15} \approx .069$$

2. La probabilidad de que ambos chips son subestándar está dada por

$$\frac{\text{El número de maneras de seleccionar 2 chips cualesquiera de los 4 chips subestándar}}{\text{El número de maneras de seleccionar 2 chips cualquiera de los 20 chips}}$$

$$= \frac{C(4, 2)}{C(20, 2)} = \frac{\frac{4!}{2!\,2!}}{\frac{20!}{2!\,18!}} = \frac{4 \cdot 3}{2} \cdot \frac{2}{20 \cdot 19} \approx .032$$

8.2 Probabilidad condicional y eventos independientes

Probabilidad condicional

Suponga que tres ciudades, A, B y C, compiten para ser anfitriones de los Juegos Olímpicos de Verano en 2016. Si cada ciudad tiene la misma probabilidad de ganar el derecho a ser anfitrión de los Juegos, por tanto la probabilidad de que la ciudad A sea anfitriona de los Juegos es $\frac{1}{3}$. Ahora suponga que la ciudad B decide salir de la contienda debido a problemas fiscales. Así, parecería que las probabilidades de la ciudad A de ser anfitriona aumentarán. De hecho, si cada una de las ciudades restantes tiene igual probabilidad, entonces la probabilidad de que la ciudad A sea anfitriona de los Juegos es $\frac{1}{2}$.

En general, la probabilidad de un evento se ve afectada por la ocurrencia de otros eventos y/o por el conocimiento de información relevante para el evento. La adición de condiciones en un problema modifica, básicamente, el espacio muestral subyacente del problema original. Esto conduce a su vez a un cambio en la probabilidad del evento.

EJEMPLO 1 Dos naipes son extraídos sin reemplazarlos de una baraja de 52 naipes bien barajada.

a. ¿Cuál es la probabilidad de que el primer naipe extraído sea un as?
b. ¿Cuál es la probabilidad de que el segundo naipe extraído sea un as, dado que el primer naipe que se extrajo no fue un as?
c. ¿Cuál es la probabilidad de que el segundo naipe extraído sea un as, dado que el primer naipe que se extrajo fue un as?

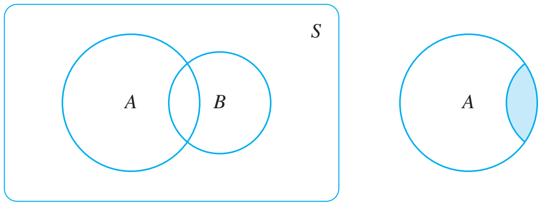
Solución

a. El espacio muestral consiste aquí en 52 resultados igualmente probables, de los cuales 4 son ases. Por consiguiente, la probabilidad de que el primer naipe extraído sea un as es $\frac{4}{52}$, o $\frac{1}{13}$.
b. Una vez que se extrae el primer naipe, quedan 51 en la baraja. En otras palabras, para la segunda fase del experimento, estamos trabajando en un espacio muestral *reducido*. Si el primer naipe que se extrajo no fue un as, entonces este espacio muestral modificado de 51 puntos contiene 4 resultados "favorables" (los 4 ases), de modo que la probabilidad de que el segundo naipe que se extrae sea un as está dada por $\frac{4}{51}$.
c. Si el primer naipe extraído fue un as, entonces quedan 3 ases en la baraja de 51 naipes, de modo que la probabilidad de que el segundo naipe que se extrae sea un as está dada por $\frac{3}{51}$, o $\frac{1}{17}$. ■

Observe que en el ejemplo 1 el que ocurra el primer evento reduce el tamaño del espacio muestral original. La información concerniente al primer naipe extraído también conduce a la consideración de los espacios muestrales modificados: en el inciso (b) la baraja contenía 4 ases y en el inciso (c) la baraja contenía 3 ases.

La probabilidad calculada en el inciso (b) o en el inciso (c) del ejemplo 1 se conoce como **probabilidad condicional**, ya que es la probabilidad de que un evento ocurra, dado que otro evento ha ocurrido ya. Por ejemplo, en el inciso (b) calculamos la probabilidad del evento de que el segundo naipe extraído sea un as, *dado que* el primer naipe que se extrajo no fue un as. En general, dados dos eventos A y B de un experimento, bajo ciertas circunstancias podría calcularse la probabilidad del evento B, dado que el evento A ha ocurrido ya. Esta probabilidad, denotada por $P(B \mid A)$, se llama **probabilidad condicional de B dado A**.

Una fórmula para calcular la probabilidad condicional de B dado A, puede descubrirse con la ayuda de un diagrama de Venn. Considere un experimento con un espacio muestral uniforme S, y suponga que A y B son dos eventos del experimento (figura 2).



(a) Espacio muestral original.

(b) Espacio muestral reducido A. El área sombreada es $A \cap B$.

FIGURA **2**

La condición de que el evento A ha ocurrido indica que los resultados posibles del experimento en la segunda fase están restringidos a aquellos resultados (elementos) del conjunto A. En otras palabras, podemos trabajar con el espacio muestral reducido A en vez del espacio muestral original S del experimento. Luego observamos que, con respecto al espacio muestral reducido A, los resultados del evento B son precisamente aquellos elementos del conjunto $A \cap B$. Así, la probabilidad condicional de B dado A es

$$P(B \mid A) = \frac{\text{Número de elementos en } A \cap B}{\text{Número de elementos en } A}$$

$$= \frac{n(A \cap B)}{n(A)} \qquad n(A) \neq 0$$

Al dividir el numerador y el denominador por $n(S)$, el número de elementos en S, tenemos

$$P(B \mid A) = \frac{\dfrac{n(A \cap B)}{n(S)}}{\dfrac{n(A)}{n(S)}}$$

lo cual es equivalente a la fórmula siguiente.

Probabilidad condicional de un evento

Si A y B son eventos de un experimento y $P(A) \neq 0$, entonces la probabilidad condicional de que el evento B ocurra dado que el evento A ha ocurrido ya es

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \tag{2}$$

EJEMPLO 2 Un par de dados sin truco se lanza. ¿Cuál es la probabilidad de que la suma de los números que caen en la cara superior sea 7, si se sabe que uno de los números es un 5?

Solución Sea A el evento de que la suma de los números que caen en la cara superior es 7, y sea B el evento de que uno de los números es un 5. A partir de los resultados del ejemplo 4, sección 7.5, encontramos que

$$A = \{(6, 1), (5, 2), (4, 3), (3, 4), (2, 5), (1, 6)\}$$
$$B = \{(5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6), (1, 5), (2, 5), (3, 5), (4, 5), (6, 5)\}$$

de modo que

$$A \cap B = \{(5, 2), (2, 5)\}$$

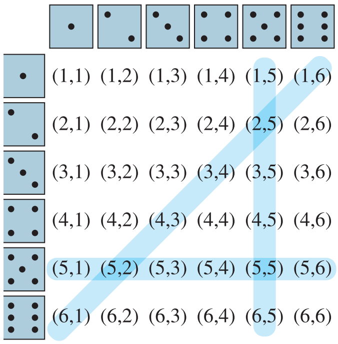


FIGURA 3
$A \cap B = \{(5, 2), (2, 5)\}$

(figura 3). Como el dado no está cargado, cada resultado del experimento es igualmente probable, por tanto,

$$P(A \cap B) = \frac{2}{36} \quad \text{y} \quad P(B) = \frac{11}{36}$$

Recuerde que $n(S) = 36$.

De ahí que la probabilidad de que la suma de los números que cae en la cara superior sea 7, dado que uno de los números es un 5, por virtud de la ecuación (2),

$$P(A \mid B) = \frac{\frac{2}{36}}{\frac{11}{36}} = \frac{2}{11}$$

EJEMPLO DE APLICACIÓN 3 Daltonismo En una prueba realizada por la Armada de Estados Unidos, se encontró que en 1,000 reclutas nuevos (600 hombres y 400 mujeres), 50 de los hombres y 4 de las mujeres eran daltónicos y confundían el rojo con el verde. Dado que un recluta seleccionado al azar de este grupo es daltónico y confunde el rojo con el verde, ¿cuál es la probabilidad de que el recluta sea hombre?

Solución Sea C el evento de que un sujeto seleccionado al azar es daltónico y confunde el rojo y el verde, y sea M el evento de que el sujeto es un recluta hombre. Debido a que 54 de los 1,000 sujetos son daltónicos, tenemos

$$P(C) = \frac{54}{1{,}000} = .054$$

Por consiguiente, por la ecuación (2), la probabilidad de que un sujeto sea hombre, dado que el sujeto es daltónico y confunde el rojo y el verde

$$P(M \mid C) = \frac{P(M \cap C)}{P(C)} = \frac{.05}{.054} = .926$$

Explore y analice

Suponga que A y B son eventos de un experimento y que $P(A) \neq 0$. En n ensayos, el evento A ocurre m veces, el evento B ocurre k veces y los eventos A y B ocurren juntos l veces.

1. Explique por qué es razonable llamar a la razón l/m la frecuencia relativa condicional del evento B dado el evento A.
2. Demuestre cómo las frecuencias relativas l/m, m/n y l/n satisfacen la ecuación

$$\frac{l}{m} = \frac{\frac{l}{n}}{\frac{m}{n}}$$

3. Explique por qué el resultado del inciso 2 sugiere que la ecuación (2)

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \qquad [P(A) \neq 0]$$

es plausible.

En ciertos problemas se conoce la probabilidad de que un evento B ocurra, dado que A ha ocurrido, lo cual se escribe $P(B \mid A)$, y queremos calcular la probabilidad de que A y B ocurran. La solución a este problema se facilita por medio del uso de la fórmula siguiente:

Regla del producto

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B \mid A) \tag{3}$$

Esta fórmula se obtiene a partir de la ecuación (2) al multiplicar ambos lados de la ecuación por $P(A)$. Ilustramos el uso de la regla del producto en los ejemplos siguientes.

VIDEO

EJEMPLO DE APLICACIÓN 4 Estudiantes con licencia de conducir Hay 300 estudiantes de último año en la escuela secundaria Jefferson, de los cuales 140 son hombres. Se sabe que 80% de los hombres y 60% de las mujeres tienen su licencia de conducir. Si un estudiante es seleccionado al azar de esta clase de último año, ¿cuál es la probabilidad de que el estudiante sea

a. un hombre que tiene licencia de conducir?
b. una mujer que no tiene licencia de conducir?

Solución

a. Sea M el evento de que el estudiante es hombre y D el evento de que el estudiante tiene licencia de conducir. Por tanto,

$$P(M) = \frac{140}{300} \quad \text{y} \quad P(D \mid M) = .8$$

El evento de que el estudiante seleccionado al azar es un hombre y tiene licencia de conducir es $M \cap D$, y, por la regla del producto, la probabilidad de que este evento ocurra está dada por

$$\begin{aligned} P(M \cap D) &= P(M) \cdot P(D \mid M) \\ &= \left(\frac{140}{300}\right)(.8) \approx .373 \end{aligned}$$

b. Sea F el evento de que el estudiante es mujer. Por tanto, D^c es el evento de que la estudiante no tiene licencia de conducir. Tenemos

$$P(F) = \frac{160}{300} \quad \text{y} \quad P(D^c \mid F) = 1 - .6 = .4$$

Observe que hemos usado la regla de los complementos en el cálculo de $P(D^c \mid F)$. El evento de que el estudiante seleccionado al azar es una mujer y no tiene licencia de conducir es $F \cap D^c$ y, por tanto, por la regla del producto, la probabilidad de que este evento ocurra está dada por

$$\begin{aligned} P(F \cap D^c) &= P(F) \cdot P(D^c \mid F) \\ &= \left(\frac{160}{300}\right)(.4) \approx .213 \end{aligned}$$

EJEMPLO 5 Dos naipes se extraen sin reemplazarlos de una baraja de 52 naipes bien barajada. ¿Cuál es la probabilidad de que el primer naipe extraído sea un as y el segundo naipe sea una figura?

Solución A es el evento de que el primer naipe extraído es un as y F es el evento de que el segundo naipe extraído es una figura. Por tanto, $P(A) = \frac{4}{52}$. Después de extraer el primer naipe, quedan 51 en la baraja, de los cuales 12 son figuras. Por tanto, la probabilidad de extraer una figura, dado que el primer naipe extraído fue un as está dada por

$$P(F \mid A) = \frac{12}{51}$$

Por la regla del producto, la probabilidad de que el primer naipe extraído sea un as y el segundo naipe extraído sea una figura está dada por

$$\begin{aligned} P(A \cap F) &= P(A) \cdot P(F \mid A) \\ &= \frac{4}{52} \cdot \frac{12}{51} = \frac{4}{221} \approx .018 \end{aligned}$$

Explore y analice

La regla del producto puede ampliarse para abarcar el caso que involucra tres o más eventos. Por ejemplo, si A, B y C son tres eventos de un experimento, entonces puede mostrarse que

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B \mid A) \cdot P(C \mid A \cap B)$$

1. Explique la fórmula con sus palabras.
2. Suponga que 3 naipes son extraídos sin reemplazarlos de una baraja de 52 naipes bien barajada. Use la fórmula dada para calcular la probabilidad de que los 3 naipes sean ases.

La regla del producto puede generalizarse para incluir el caso que involucra cualquier número finito de eventos. Por ejemplo, en el caso que involucra los tres eventos E, F y G, puede mostrarse que

$$P(E \cap F \cap G) = P(E) \cdot P(F \mid E) \cdot P(G \mid E \cap F) \tag{4}$$

Más sobre los diagramas de árbol

La fórmula (4) y sus generalizaciones pueden usarse para resolver problemas que involucran procesos estocásticos. Un **proceso estocástico finito** es un experimento que consiste en un número finito de etapas en las cuales los resultados y las probabilidades asociadas de cada etapa dependen de los resultados y las probabilidades asociadas de las etapas precedentes.

Podemos usar diagramas de árbol como ayuda para resolver problemas que involucran procesos estocásticos finitos. Considere, por ejemplo, el experimento que consiste en extraer 2 naipes sin reemplazarlos de una baraja de 52 naipes bien barajada. ¿Cuál es la probabilidad de que el segundo naipe extraído sea una figura?

Podemos pensar en este experimento como un proceso estocástico con dos etapas. Los eventos asociados con la primera etapa son F, el naipe extraído es una figura, y F^c, el naipe extraído no es una figura. Como hay 12 figuras, tenemos

$$P(F) = \frac{12}{52} \quad \text{y} \quad P(F^c) = 1 - \frac{12}{52} = \frac{40}{52}$$

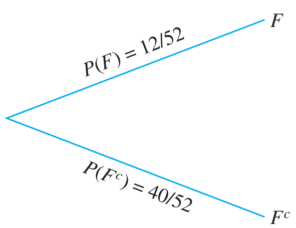


FIGURA 4
F es el evento de que extraer una figura.

Los resultados de este ensayo, junto con las probabilidades asociadas, pueden representarse mediante dos ramas de un diagrama de árbol como muestra la figura 4.

En el segundo ensayo, de nuevo tenemos dos eventos: G, cuando el naipe extraído es una figura, y G^c, cuando el naipe extraído no es una figura. Pero el resultado del segundo ensayo depende del resultado del primer ensayo. Por ejemplo, si el primer naipe extraído fue una figura, entonces el evento G de que el segundo naipe extraído es una figura tiene la probabilidad dada por la *probabilidad condicional* $P(G \mid F)$. Dado que la ocurrencia de una figura en la primera extracción deja 11 figuras en una baraja de 51 naipes para la segunda extracción, vemos que

$$P(G \mid F) = \frac{11}{51}$$

La probabilidad de extraer una figura, dado que ya se ha extraído una figura.

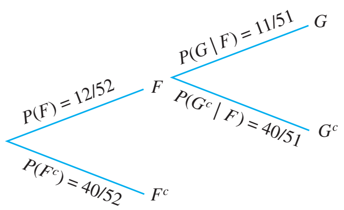


FIGURA 5
G es el evento de que el segundo naipe que se extrae es una figura.

De manera similar, el que ocurra una figura en la primera extracción deja 40 naipes que no son figuras en una baraja de 51 naipes para la segunda extracción. Por consiguiente, la probabilidad de extraer un naipe diferente a una figura en la segunda extracción, dado que el primer naipe que se extrajo fue una figura es

$$P(G^c \mid F^c) = \frac{40}{51}$$

Utilizando estos resultados, ampliamos el diagrama de árbol de la figura 4 para mostrar otras dos ramas del árbol que salen de su rama superior (figura 5).

Para completar el diagrama de árbol, calculamos $P(G \mid F^c)$ y $P(G^c \mid F^c)$, las probabilidades condicionales de que el segundo naipe que se extraiga sea una figura, respectivamente, dado que el primer naipe extraído no es una figura. Encontramos que

$$P(G \mid F^c) = \frac{12}{51} \quad \text{y} \quad P(G^c \mid F^c) = \frac{39}{51}$$

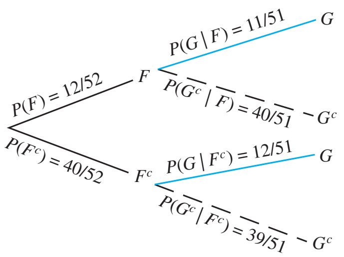


FIGURA 6
Diagrama de árbol que muestra dos ensayos del experimento.

Esto conduce a completar el diagrama de árbol, mostrado en la figura 6, donde se han resaltado las ramas del árbol que conducen a los dos resultados de interés.

Una vez construido el diagrama de árbol asociado con el problema, ahora estamos en posición de responder la pregunta planteada antes: ¿Cuál es la probabilidad de que el segundo naipe sea una figura? Observe que la figura 6 muestra las dos maneras en las cuales una figura puede salir en la segunda extracción, en concreto, las dos G en el extremo derecho del diagrama.

Ahora, por la regla del producto, la probabilidad de que el segundo naipe extraído sea una figura y el primer naipe extraído sea una figura (esto se representa por medio de la rama superior) es

$$P(G \cap F) = P(F) \cdot P(G \mid F)$$

De modo parecido, la probabilidad de que el segundo naipe extraído sea una figura y el primer naipe extraído no sea una figura (esto corresponde a la otra rama) es

$$P(G \cap F^c) = P(F^c) \cdot P(G \mid F^c)$$

Observe que cada una de estas probabilidades se obtiene al tomar el *producto de las probabilidades que aparecen en las ramas respectivas*. Como $G \cap F$ y $G \cap F^c$ son eventos mutuamente excluyentes (¿por qué?), la probabilidad de que el segundo naipe extraído sea una figura está dada por

$$P(G \cap F) + P(G \cap F^c) = P(F) \cdot P(G \mid F) + P(F^c) \cdot P(G \mid F^c)$$

o, en cuanto se reemplazan las probabilidades a la derecha de la expresión por sus valores numéricos,

$$\begin{aligned} P(G \cap F) + P(G \cap F^c) &= \frac{12}{52} \cdot \frac{11}{51} + \frac{40}{52} \cdot \frac{12}{51} \\ &= \frac{3}{13} \end{aligned}$$

EJEMPLO DE APLICACIÓN 6 Control de calidad Los paneles para el televisor de alta definición Pulsar con pantalla LCD ancha de 32 pulgadas se fabrican en tres lugares y luego se envían a la planta principal de Vista Vision para su ensamblaje final. Las plantas A, B y C abastecen 50, 30 y 20%, respectivamente, de los paneles usados por la empresa. El departamento de control de calidad de la misma ha determinado que 1% de los paneles producido por la planta A está defectuoso, mientras que 2% de los paneles producidos por las plantas B y C está defectuoso. ¿Cuál es la probabilidad de que un televisor de alta definición Pulsar de 32 pulgadas, seleccionado al azar, tenga un panel defectuoso?

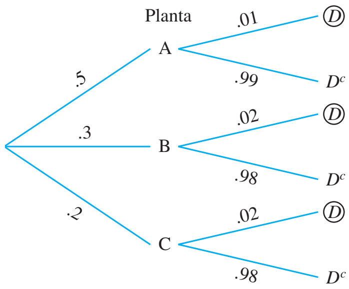


FIGURA 7
Diagrama de árbol que muestra las probabilidades de producir paneles defectuosos en cada planta.

Solución Sean A, B y C los eventos de que el televisor de alta definición elegida tenga un panel fabricado en la planta A, la planta B y la planta C, respectivamente. Además, D es el evento de que una televisión de alta definición tiene un panel defectuoso. Usando la información dada, trazamos el diagrama de árbol mostrado en la figura 7. (Los eventos que resultan en un televisor de alta definición con un panel defectuoso se encierran en un círculo). Tomando el producto de las probabilidades a lo largo de cada rama que conduce a un evento de este tipo y luego sumándolos se obtiene la probabilidad de que un televisor de alta definición elegido al azar tiene un panel defectuoso. Por tanto, la probabilidad requerida está dada por

$$\begin{aligned}(.5)(.01) + (.3)(.02) + (.2)(.02) &= .005 + .006 + .004\\ &= .015\end{aligned}$$

EJEMPLO DE APLICACIÓN 7 Control de calidad Una caja contiene ocho baterías de 9 volts, de las cuales se sabe que dos tienen defectos. Las baterías son seleccionadas una a la vez sin reemplazarlas y se prueban hasta que se encuentra una sin defectos. ¿Cuál es la probabilidad de que el número de baterías probadas sea (a) uno, (b) dos y (c) tres?

Solución Tal vez considere que este experimento es un proceso multietápico hasta con tres etapas. En la primera se selecciona una batería con una probabilidad de $\frac{6}{8}$ de no tener defectos y una probabilidad de $\frac{2}{8}$ de estar defectuosa. Si la batería seleccionada está en buen estado, el experimento se termina. De lo contrario, se selecciona una segunda batería con una probabilidad de $\frac{6}{7}$ y $\frac{1}{7}$, respectivamente, de no tener defectos y tenerlos. Si la segunda batería seleccionada es buena, el experimento se termina. De lo contrario, una tercera batería es seleccionada con una probabilidad de 1 y 0, respectivamente, de no tener defectos y estar defectuosa. El diagrama de árbol asociado con este experimento se muestra en la figura 8, donde N indica el evento de que la batería seleccionada no tiene defectos y D denota el evento de que la batería seleccionada tiene defectos.

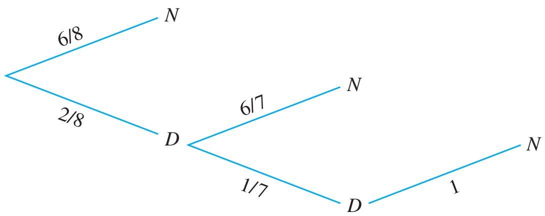


FIGURA 8
En este experimento las baterías son seleccionadas hasta que se encuentra una sin defectos.

Con la ayuda del diagrama de árbol vemos que (a) la probabilidad de que sólo una batería sea seleccionada es $\frac{6}{8} = \frac{3}{4}$, (b) la probabilidad de que dos baterías sean seleccionadas es $\left(\frac{2}{8}\right)\left(\frac{6}{7}\right)$, o $\frac{3}{14}$ y (c) la probabilidad de que las tres baterías sean seleccionadas es $\left(\frac{2}{8}\right)\left(\frac{1}{7}\right)(1) = \frac{1}{28}$.

Eventos independientes

Retomemos el experimento de extraer dos naipes en sucesión sin reemplazarlos de una baraja de 52 naipes bien barajada, como se consideró en el ejemplo 5. Sea E el evento de que el primer naipe extraído no es una figura y F el evento de que el segundo naipe extraído es una figura. De manera intuitiva, es claro que los eventos E y F *no son* independientes uno del otro, debido a que el hecho de que el primer naipe que se extraiga sea una figura o no afecta la probabilidad de que el segundo naipe que se extraiga sea una figura.

Ahora considere el experimento de lanzar una moneda dos veces y observar los resultados: si H es el evento de que en el primer lanzamiento la moneda cae en cara y T es el evento de que en el segundo lanzamiento cae en cruz, entonces intuitivamente queda claro que H y T *son* independientes uno del otro, debido a que el resultado del primer lanzamiento no afecta el resultado del segundo.

En general, dos eventos A y B son independientes si el resultado de uno de ellos no afecta al resultado del otro. De esta manera, tenemos

Eventos independientes

Si A y B son **eventos independientes**, entonces

$$P(A \mid B) = P(A) \quad \text{y} \quad P(B \mid A) = P(B)$$

Al aplicar la regla del producto, podemos obtener una prueba sencilla para determinar la independencia de dos eventos. Suponga que A y B son independientes y que $P(A) \neq 0$ y $P(B) \neq 0$. Por tanto,

$$P(B \mid A) = P(B)$$

De esta manera, por la regla del producto, tenemos

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B \mid A) = P(A) \cdot P(B)$$

En cambio, si esta ecuación es válida, entonces se puede ver que $P(B \mid A) = P(B)$; es decir, A y B son independientes. Por consiguiente, tenemos la prueba siguiente para la independencia de dos eventos.

Prueba para la independencia de dos eventos

Dos eventos A y B son independientes, si y sólo si

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \tag{5}$$

No confunda los eventos *independientes* con los eventos *mutuamente excluyentes*. Lo anterior se refiere a cómo el que ocurra un evento afecta el que ocurra otro, mientras que lo último se refiere a la pregunta de si los eventos pueden ocurrir al mismo tiempo.

EJEMPLO 8 Considere el experimento que consiste en lanzar dos veces una moneda sin truco y observar los resultados. Demuestre que el evento de que la moneda caiga en cara en el primer lanzamiento y en cruz en el segundo lanzamiento son eventos independientes.

Solución Sea A el evento de que el resultado del primer lanzamiento es cara, y B el evento de que el segundo lanzamiento es cruz. El espacio muestral del experimento es

$$S = \{(\text{HH}), (\text{HT}), (\text{TH}), (\text{TT})\}$$
$$A = \{(\text{HH}), (\text{HT})\}$$
$$B = \{(\text{HT}), (\text{TT})\}$$

de manera que

$$A \cap B = \{(\text{HT})\}$$

Luego calculamos

$$P(A \cap B) = \frac{1}{4} \qquad P(A) = \frac{1}{2} \qquad P(B) = \frac{1}{2}$$

y observamos que la ecuación (5) se satisface en este caso. Por consiguiente, A y B son eventos independientes, como se expuso. ■

VIDEO

EJEMPLO DE APLICACIÓN 9 **Estudios médicos** Un estudio realizado por una agencia independiente para la National Lung Society reveló que, de 2,000 mujeres, 680 eran fumadoras empedernidas y 50 tenían enfisema. De las que tenían enfisema, 42 eran también fumadoras empedernidas. Con ayuda de los datos de este estudio, determine si los eventos "ser fumadora empedernida" y "tener enfisema" son eventos independientes.

Solución A denota el evento de que una mujer elegida al azar en este estudio es una fumadora empedernida y B denota el evento de que una mujer elegida al azar en este estudio tiene enfisema. Por tanto, la probabilidad de que una mujer elegida al azar en este estudio sea una fumadora empedernida y tenga enfisema está dada por

$$P(A \cap B) = \frac{42}{2{,}000} = .021$$

Luego,

$$P(A) = \frac{680}{2{,}000} = .34 \quad \text{y} \quad P(B) = \frac{50}{2{,}000} = .025$$

por tanto,

$$P(A) \cdot P(B) = (.34)(.025) = .0085$$

Dado que $P(A \cap B) \neq P(A) \cdot P(B)$, concluimos que A y B no son eventos independientes. ■

La solución de muchos problemas prácticos involucra más de dos eventos independientes. En estos casos utilice el resultado siguiente.

Explore y analice

Sean E y F eventos independientes en un espacio muestral S. ¿Son independientes E^c y F^c?

Independencia de más de dos eventos

Si $E_1, E_2, \ldots, E_n$ son eventos independientes, entonces

$$P(E_1 \cap E_2 \cap \cdots \cap E_n) = P(E_1) \cdot P(E_2) \cdot \cdots \cdot P(E_n) \tag{6}$$

La fórmula (6) establece que la probabilidad de la ocurrencia simultánea de n eventos independientes es igual al producto de las probabilidades de n eventos.

Es importante notar que el simple requerimiento de que los n eventos $E_1, E_2, \ldots, E_n$ satisfagan la fórmula (6) no es suficiente para garantizar que los n eventos son de hecho independientes. Sin embargo, existe un criterio para determinar la independencia de n eventos y puede encontrarse en libros de probabilidad más avanzados.

EJEMPLO 10 Se sabe que los tres eventos A, B y C son independientes y que $P(A) = .2$, $P(B) = .4$ y $P(C) = .5$. Calcule:

a. $P(A \cap B)$ **b.** $P(A \cap B \cap C)$

Solución Usando las fórmulas (5) y (6) encontramos que

a. $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$
$= (.2)(.4) = .08$

b. $P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$
$= (.2)(.4)(.5) = .04$ ■

EJEMPLO DE APLICACIÓN 11 Control de calidad El sistema de bocinas Acrosonic modelo F tiene cuatro componentes: bafle, medios, agudos y un crossover electrónico. El gerente de control de calidad de la empresa ha determinado que, en promedio, 1% los bafles, 0.8% de los medios y 0.5% de los agudos tienen defectos, mientras 1.5% de los crossovers electrónicos tiene defectos. Determine la probabilidad de que un sistema de bocinas seleccionado al azar en cuanto sale de la línea de ensamblaje (antes de la inspección final) no tiene defectos. Suponga que los defectos en la fabricación de los componentes no están relacionados.

Solución Sean A, B, C y D, respectivamente, los eventos de que el bafle, los medios, los agudos y el crossover electrónico tienen defectos. Por tanto,

$$P(A) = .01 \qquad P(B) = .008 \qquad P(C) = .005 \qquad P(D) = .015$$

y las probabilidades de los eventos complementarios correspondientes son

$$P(A^c) = .99 \qquad P(B^c) = .992 \qquad P(C^c) = .995 \qquad P(D^c) = .985$$

El evento de que un sistema de bocinas seleccionado al azar no tenga defectos está dado por $A^c \cap B^c \cap C^c \cap D^c$. Como se supone que los eventos A, B, C y D (y por ende también A^c, B^c, C^c y D^c) son independientes, encontramos que la probabilidad requerida está dada por

$$\begin{aligned} P(A^c \cap B^c \cap C^c \cap D^c) &= P(A^c) \cdot P(B^c) \cdot P(C^c) \cdot P(D^c) \\ &= (.99)(.992)(.995)(.985) \\ &\approx .96 \end{aligned}$$

■

8.2 Ejercicios de autoevaluación

1. Sean A y B eventos en un espacio muestral S tal que $P(A) = .4$, $P(B) = .8$ y $P(A \cap B) = .3$. Calcule:
   a. $P(A \mid B)$ **b.** $P(B \mid A)$

2. Con base en una encuesta citada en *Newsweek*, 29.7% de los encuestados casados que se unieron entre las edades de 20 y 22 (inclusive), 26.9% de aquellos casados entre las edades de 23 y 27, y 45.1% de aquellos casados a la edad de 28 o mayores dijeron que "su matrimonio era menos que 'muy feliz'". Suponga que un encuestado de cada uno de los tres grupos se seleccionó al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que los tres encuestados dijeran que su matrimonio era "menos que muy feliz"?
   Fuente: Marc Bain, *Newsweek*.

Las soluciones de los ejercicios de autoevaluación 8.2 se encuentran en la página 484.

8.2 Preguntas de concepto

1. ¿Qué es la probabilidad condicional? Ilustre el concepto con un ejemplo.

2. Si A y B son eventos de un experimento y $P(A) \neq 0$, entonces ¿cuál es la fórmula para calcular $P(B \mid A)$?

3. Si A y B son eventos de un experimento y la probabilidad condicional $P(B \mid A)$ se conoce, desarrolle la fórmula que puede usarse para calcular la probabilidad del evento de que A y B ocurran.

4. **a.** ¿Cuál es la prueba para determinar la independencia de dos eventos?
   b. ¿Cuál es la diferencia entre eventos mutuamente excluyentes y eventos independientes?

8.2 Ejercicios

1. Sean A y B dos eventos en un espacio muestral S tal que $P(A) = .6$, $P(B) = .5$ y $P(A \cap B) = .2$. Calcule
a. $P(A \mid B)$ **b.** $P(B \mid A)$

2. Sean A y B dos eventos en un espacio muestral S tales que $P(A) = .4$, $P(B) = .6$ y $P(A \cap B) = .3$. Calcule
a. $P(A \mid B)$ **b.** $P(B \mid A)$

3. A y B son dos eventos en un espacio muestral S tal que $P(A) = .6$ y $P(B \mid A) = .5$. Encuentre $P(A \cap B)$.

4. Sean A y B los eventos descritos en el ejercicio 1. Calcule
a. $P(A \mid B^c)$ **b.** $P(B \mid A^c)$
Sugerencia: $(A \cap B^c) \cup (A \cap B) = A$.

En los ejercicios 5-8 determine si los eventos *A* y *B* son independientes.

5. $P(A) = .3$, $P(B) = .6$, $P(A \cap B) = .18$

6. $P(A) = .6$, $P(B) = .8$, $P(A \cap B) = .2$

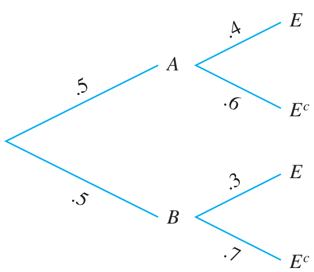
7. $P(A) = .5$, $P(B) = .7$, $P(A \cup B) = .85$

8. $P(A^c) = .3$, $P(B^c) = .4$, $P(A \cap B) = .42$

9. Si A y B son eventos independientes, $P(A) = .4$ y $P(B) = .6$, encuentre
a. $P(A \cap B)$ **b.** $P(A \cup B)$

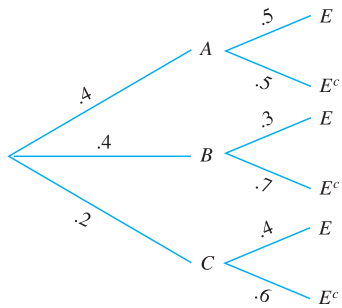
10. Si A y B son eventos independientes, $P(A) = .35$ y $P(B) = .45$, calcule
a. $P(A \cap B)$ **b.** $P(A \cup B)$

11. El diagrama de árbol adjunto representa un experimento que consiste en dos ensayos:



Use el diagrama para calcular
a. $P(A)$ **b.** $P(E \mid A)$
c. $P(A \cap E)$ **d.** $P(E)$
e. ¿$P(A \cap E) = P(A) \cdot P(E)$?
f. ¿A y E son eventos independientes?

12. El diagrama de árbol adjunto representa un experimento que consiste en dos ensayos. Use el diagrama para calcular
a. $P(A)$ **b.** $P(E \mid A)$
c. $P(A \cap E)$ **d.** $P(E)$
e. ¿$P(A \cap E) = P(A) \cdot P(E)$?
f. ¿A y E son eventos independientes?



13. Un experimento consta de dos ensayos independientes. Los resultados del primer ensayo son A y B con probabilidades de ocurrencia iguales a .4 y .6. También hay dos resultados, C y D, en el segundo ensayo con probabilidades de .3 y .7. Trace un diagrama de árbol que represente este experimento, y úselo para encontrar
a. $P(A)$ **b.** $P(C \mid A)$
c. $P(A \cap C)$ **d.** $P(C)$
e. ¿$P(A \cap C) = P(A) \cdot P(C)$?
f. ¿A y C son eventos independientes?

14. Un experimento consta de dos ensayos independientes. Los resultados del primer ensayo son A, B y C, con probabilidades de ocurrencia iguales a .2, .5 y .3, respectivamente. Los resultados del segundo ensayo son E y F, con probabilidades de ocurrencia iguales a .6 y .4. Trace un diagrama de árbol que represente este experimento y úselo para calcular
a. $P(B)$ **b.** $P(F \mid B)$
c. $P(B \cap F)$ **d.** $P(F)$
e. ¿$P(B \cap F) = P(B) \cdot P(F)$?
f. ¿B y F son eventos independientes?

15. Un par de dados sin truco es lanzado. E denota el evento de que el número que cae en la cara superior del primer dado es 5, y F denota el evento de que la suma de los números que cae en la cara superior es 10.
a. Calcule $P(F)$. **b.** Calcule $P(E \cap F)$.
c. Calcule $P(F \mid E)$. **d.** Calcule $P(E)$.
e. ¿E y F son eventos independientes?

16. Un par de dados sin truco es lanzado. Sea E el evento de que el número que cae en la cara superior del primer dado es 4, y F el evento de que la suma de los números que cae en la cara superior es 6.
a. Calcule $P(F)$. **b.** Calcule $P(E \cap F)$.
c. Compute $P(F \mid E)$. **d.** Calcule $P(E)$.
e. ¿E y F son eventos independientes?

17. Un par de dados sin truco es lanzado. ¿Cuál es la probabilidad de la suma de los números que cae en la cara superior es menor que 9, dado que por lo menos uno de los números es 6?

18. Un par de dados es lanzado. ¿Cuál es la probabilidad de que el número que cae en la cara superior del primer dado es 4, si se conoce que la suma de los números que cae en la cara superior es 7?

19. Un par de dados es lanzado. Sea E el evento de que el número que cae en la cara superior del primer dado es 3 y F el evento de que la suma de los números que cae en la cara superior es 7. Determine si E y F son eventos independientes.

20. Un par de dados es lanzado. E denota el evento de que el número que cae en la cara superior del primer dado es un 3, y F denota el evento de que la suma de los números que queda en la cara superior es 6. Determine si E y F son eventos independientes.

21. Un naipe es extraído de una baraja de 52 naipes bien barajada. E denota el evento de que el naipe extraído es negro y F denota el evento de que el naipe extraído es de picas. Determine si E y F son eventos independientes. Dé una explicación intuitiva para su respuesta.

22. Un naipe es extraído de una baraja de 52 naipes bien barajada. E denota el evento de que el naipe extraído es un as y F denota el evento de que el naipe extraído es de diamantes. Determine si E y F son eventos independientes. Dé una explicación intuitiva para su respuesta.

23. **Confiabilidad de productos** La probabilidad de que una batería dure 10 horas o más es .80, y la probabilidad de que dure 15 horas o más es .15. Dado que una batería ha durado 10 horas, calcule la probabilidad de que dure 15 horas o más.

24. Dos naipes son extraídos sin reemplazarlos de una baraja de 52 naipes bien barajada.
a. ¿Cuál es la probabilidad de que el primer naipe extraído sea de corazones?
b. ¿Cuál es la probabilidad de que el segundo naipe extraído no sea de corazones?
c. ¿Cuál es la probabilidad de que el segundo naipe extraído sea de corazones si el primero también lo fue?

25. Cinco bolas negras y cuatro blancas se colocan en una urna. Luego se extraen dos bolas en sucesión. ¿Cuál es la probabilidad de que la segunda bola extraída sea una bola blanca si
a. la segunda bola se extrae sin reemplazar la primera?
b. la primera bola se reemplaza antes de extraer la segunda?

26. **Auditoría de la devolución de impuestos** Un especialista fiscal ha estimado que la probabilidad de que una devolución de impuestos seleccionada al azar sea auditada es .02. Además, estima que la probabilidad de que una devolución auditada resulte en gravámenes adicionales que se aplican al contribuyente es .60. ¿Cuál es la probabilidad de que una devolución de impuestos seleccionada al azar dé como resultado gravámenes adicionales que se aplican al contribuyente?

27. **Matriculación de estudiantes** En cierta escuela de medicina, $\frac{1}{7}$ de los estudiantes es de un grupo minoritario. De los estudiantes que pertenecen al grupo minoritario, $\frac{1}{3}$ son negros.
a. ¿Cuál es la probabilidad de que un estudiante seleccionado al azar de esta escuela de medicina sea negro?
b. ¿Cuál es la probabilidad de que un estudiante seleccionado al azar de esta escuela de medicina sea negro, si se sabe que el estudiante es miembro de un grupo minoritario?

28. **Nivel educativo de los votantes** En una encuesta de 1,000 votantes aptos seleccionados al azar, se encontró que 80 tenían un título universitario. Además, se encontró que 80% de aquellos que tenían un título universitario votó en la última elección presidencial, mientras que 55% de las personas que no tenían un título universitario votó en la última elección presidencial. Suponiendo que la encuesta es representativa de todos los votantes aptos, calcule la probabilidad de que un votante apto seleccionado al azar
a. tenga un título universitario y haya votado en la última elección presidencial.
b. no tiene un título universitario y no votó en la última elección presidencial.
c. votó en la última elección presidencial.
d. no votó en la última elección presidencial.

29. Tres naipes son extraídos sin reemplazarlos de una baraja de 52 naipes bien barajada. ¿Cuál es la probabilidad de que el tercer naipe extraído sea de diamantes?

30. Una moneda es lanzada tres veces. ¿Cuál es la probabilidad de que la moneda caerá en cara
a. por lo menos dos veces?
b. en el segundo lanzamiento, dado que la moneda cayó en cara en el primer lanzamiento?
c. en el tercer lanzamiento, dado que la moneda cayó en cruz en el primer lanzamiento?

31. En una familia de tres hijos, ¿cuál es la probabilidad de que los tres sean niñas, dado que por lo menos uno de ellos es niña? (Suponga que la probabilidad de que nazca un niño es igual que la probabilidad de que nazca una niña.)

32. **Control de calidad** Un fabricante de automóviles obtiene los microprocesadores empleados para regular el consumo de combustible en sus automóviles de tres compañías de microelectrónica: A, B y C. El departamento de control de calidad de la empresa ha determinado que 1% de los microprocesadores producidos por la empresa A tiene defectos, 2% de aquellos producidos por la empresa B está defectuoso y 1.5% de aquellos producidos por la empresa C está defectuoso. Las empresas A, B y C abastecen 45, 25 y 30%, respectivamente, de los microprocesadores usados por la empresa. ¿Cuál es la probabilidad de que un automóvil seleccionado al azar fabricado por la empresa tendrá un microprocesador defectuoso?

33. **Robo de automóviles** Las cifras obtenidas del departamento de policía de una ciudad parecía indicar que, de todos los vehículos motorizados reportados como robados, 64% fue robado por profesionales, mientras que 36% fue robado por aficionados (principalmente para aquellos que roban vehículos para usarlos). De los vehículos supuestamente robados por profesionales, 24% se recuperó en 48 horas, 16% se recuperó después de 48 horas y 60% nunca se recuperó. De los vehículos que se presume fueron robados por aficionados, 38% se recuperó dentro de 48 horas, 58% se recuperó después de 48 horas y 4% nunca se recuperó.
a. Trace un diagrama de árbol que represente estos datos.
b. ¿Cuál es la probabilidad de que un vehículo robado por un profesional en esta ciudad sea recuperado en 48 horas?
c. ¿Cuál es la probabilidad de que un vehículo robado en esta ciudad nunca sea recuperado?

34. **Préstamos para vivienda** La principal responsable de crédito de la compañía hipotecaria La Crosse sumó los préstamos para vivienda que la empresa otorgó en 2007, según el tipo y el plazo del préstamo. Su lista muestra que 70% de los créditos eran hipotecas de tasa fija (F), 25% hipotecas de tasa variable (A) y 5% pertenecían a alguna otra categoría (O) (principalmente préstamos a la palabra y préstamos otorgados bajo el plan de pagos gradual). De las hipotecas de tasa fija, 80% eran préstamos a 30 años y 20% eran préstamos a 15 años; de las hipotecas de tasa variable, 40% eran préstamos a 30 años y 60% eran préstamos a 15 años; por último, de los demás créditos otorgados, 30% eran préstamos a 20 años, 60% eran préstamos a 10 años y 10% eran a un plazo de 5 años o menos.

a. Trace un diagrama de árbol que represente estos datos.
b. ¿Cuál es la probabilidad de que un préstamo para vivienda otorgado por La Crosse tenga una tasa variable y un plazo de 15 años?
c. ¿Cuál es la probabilidad de que un crédito para vivienda otorgado por La Crosse sea por un plazo de 15 años?

35. ADMISIONES A LA UNIVERSIDAD La oficina de admisiones de una universidad privada publicó los datos de admisión siguientes para el año académico anterior: de un grupo de 3,900 candidatos hombres, 40% fueron aceptados por la universidad y 40% de ellos se inscribió después. Asimismo, de un grupo de 3,600 candidatas mujeres, 45% fueron aceptados por la universidad y 40% de ellas se inscribieron después. ¿Cuál es la probabilidad de que

a. un candidato hombre sea aceptado y se inscriba después en la universidad?
b. un estudiante que solicita su admisión sea aceptado por la universidad?
c. un estudiante que solicita su admisión sea aceptado por la universidad y después se inscriba?

36. CONTROL DE CALIDAD Una caja contiene dos series de luces de Navidad defectuosas que se han mezclado de manera inadvertida con ocho series sin defectos. Si las luces se seleccionan una a la vez, sin remplazo, y probado hasta que las dos luces defectuosas se encontraban, ¿cuál es la probabilidad que las dos series defectuosas se encuentren después de exactamente tres ensayos?

37. CONTROL DE CALIDAD Se estima que 0.80% de un envío grande de huevos en cierto supermercado se rompe.

a. ¿Cuál es la probabilidad de que un cliente que selecciona al azar una docena de estos huevos reciba por lo menos un huevo roto?
b. ¿Cuál es la probabilidad de que un cliente que selecciona estos huevos al azar tenga que revisar tres cartones antes de encontrar uno sin ningún huevo roto? (cada cartón contiene una docena de huevos).

38. AYUDA FINANCIERA A ESTUDIANTES Los datos adjuntos se obtuvieron de la oficina de ayuda financiera de cierta universidad:

	Recibir ayuda financiera	No recibir ayuda financiera	Total
Universitarios	4,222	3,898	8,120
Bachilleres	1,879	731	2,610
Total	6,101	4,629	10,730

Sea A el evento de que un estudiante seleccionado al azar de esta universidad es un estudiante universitario, y sea B el evento de que un estudiante seleccionado al azar esté recibiendo ayuda financiera.

a. Calcule cada una de las probabilidades siguientes: $P(A)$, $P(B)$, $P(A \cap B)$, $P(B \mid A)$ y $P(B \mid A^c)$.
b. ¿Los eventos A y B son eventos independientes?

39. EDUCACIÓN E INGRESOS DE EMPLEADOS El departamento de personal de Franklin National Life Insurance Company compiló los datos adjuntos respecto a los ingresos y la educación de los empleados:

	Ingresos de \$50,000 o menos	Ingresos superiores a \$50,000
Universitarios	2,040	840
No universitario	400	720

Sea A el evento de que un empleado elegido al azar tiene un título universitario y B el evento de que los ingresos del empleado elegido son mayores de \$50,000.

a. Calcule cada una de las probabilidades siguientes: $P(A)$, $P(B)$, $P(A \cap B)$, $P(B \mid A)$ y $P(B \mid A^c)$.
b. ¿Los eventos A y B son eventos independientes?

40. Dos naipes son extraídos sin reemplazarlos de una baraja de 52 naipes bien barajada. Sea A el evento de que el primer naipe extraído es de corazones y B el evento de que el segundo naipe extraído es un naipe rojo. Demuestre que los eventos A y B son eventos independientes.

41. INVESTIGACIÓN MÉDICA Un estudio a nivel nacional realizado por la National Cancer Society reveló la información siguiente. De 10,000 personas encuestadas, 3,200 eran "bebedores empedernidos de café" y 160 tenían cáncer de páncreas. De aquellos que tenían cáncer de páncreas, 132 eran bebedores empedernidos de café. Usando los datos de este estudio, determine si los eventos "ser un bebedor empedernido de café" y "tener cáncer de páncreas" son eventos independientes.

42. CAMBIO DEL PROVEEDOR DE SERVICIO DE INTERNET (PSI) Según una encuesta realizada en 2004 de 1,000 estadounidenses adultos con acceso a Internet, una de cuatro familias planean cambiar de PSI en los próximos seis meses. De aquellos que planean cambiar de proveedor, es probable que 1% de las familias opte por una conexión satelital, 27% por una línea de suscripción digital (DSL), 28% por módem por cable, 35% por módem de marcación telefónica y 9% no sabe a qué tipo de proveedor de servicios cambiará.

a. ¿Cuál es la probabilidad de que un encuestado seleccionado al azar que planea cambiar de PSI opte por una conexión de módem de marcación telefónica?
b. ¿Cuál es la probabilidad de que un encuestado seleccionado actualice su servicio a uno de alta velocidad (satélite, DSL o cable)?

Fuente: Ipsos-Insight

43. CONFIABILIDAD DE LOS SISTEMAS DE SEGURIDAD Antes de permitirle la entrada a un área de máxima seguridad en una instalación militar, una persona debe acreditar tres pruebas de identificación independientes: una de patrón de voz, una de huella digital y una de escritura. Si la confiabilidad de la primera prueba es 97%, la confiabilidad de la segunda es 98.5% y la confiabilidad de la tercera es 98.5%, ¿cuál es la probabilidad de que este sistema de seguridad permita que una persona identificada incorrectamente entre en el área de máxima seguridad?

44. **Confiabilidad de un sistema de teatro en casa** En un sistema de teatro en casa, la probabilidad de que los componentes de video necesiten repararse en 1 año es .01, la probabilidad de que los componentes electrónicos que deben repararse en 1 año es .005 y la probabilidad de que los componentes de audio que requieran reparación en 1 año es .001. Suponiendo que los eventos son independientes, calcule la probabilidad de que

a. por lo menos uno de estos componentes necesitará repararse en 1 año.

b. exactamente uno de estos componentes necesitará repararse en 1 año.

45. **Probabilidad de rechazo de un transplante** Las probabilidades de que los tres pacientes programados para recibir transplantes de riñón en el Hospital General sufrirán un rechazo son $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ y $\frac{1}{10}$. Suponiendo que los eventos (rechazo de riñón) son independientes, calcule la probabilidad de que

a. por lo menos un paciente sufra rechazo.

b. exactamente dos pacientes sufran rechazo.

46. **Control de calidad** Copykwik tiene cuatro máquinas fotocopiadoras: A, B, C y D. La probabilidad de que una máquina determinada se avería en un día particular es

$$P(A) = \frac{1}{50} \qquad P(B) = \frac{1}{60} \qquad P(C) = \frac{1}{75} \qquad P(D) = \frac{1}{40}$$

Suponga que hay independencia, ¿cuál es la probabilidad de que un día particular

a. las cuatro máquinas se averíen?

b. ninguna de las máquinas se averíen?

47. **Confiabilidad de productos** El propietario de la tienda Cunningham's Hardware Store ha decidido instalar focos en los locales como una medida contra el vandalismo y el robo. Si la probabilidad es .01 de que cierta marca de focos se funda en un año, calcule el número mínimo de focos que debe instalarse para asegurar que la probabilidad de que por lo menos uno de ellos siga siendo funcional para todo el año es por lo menos .99999. (Suponga que los focos operan en forma independiente.)

48. Sea E cualquier evento en un espacio muestral S.

a. ¿Son independientes E y S? Explique su respuesta.

b. ¿Son independientes E y $\varnothing$? Explique su respuesta.

49. Suponga que la probabilidad de que un evento ocurra en un ensayo es p. Demuestre que la probabilidad de que el evento ocurra por lo menos una vez en n ensayos independientes es $1 - (1 - p)^n$.

50. E y F son eventos mutuamente excluyentes y suponga que $P(F) \neq 0$. Calcule $P(E \mid F)$ e interprete su resultado.

51. Sean E y F eventos tales que $F \subset E$. Calcule $P(E \mid F)$ e interprete su resultado.

52. Suponga que A y B son eventos mutuamente excluyentes y que $P(A \cup B) \neq 0$. ¿Cuánto es $P(A \mid A \cup B)$?

53. E y F son eventos independientes; demuestre que E y F^c son independientes.

En los ejercicios 54-57 determine si el enunciado es verdadero o falso. Si es verdadero, explique por qué lo es. Si es falso, dé un ejemplo para demostrar por qué lo es.

54. Si A y B son mutuamente excluyentes y $P(B) \neq 0$, entonces $P(A \mid B) = 0$.

55. Si A es un evento de un experimento, entonces $P(A \mid A^c) \neq 0$.

56. Si A y B son eventos de un experimento, entonces

$$P(A \cap B) = P(A \mid B) \cdot P(B) = P(B \mid A) \cdot P(A)$$

57. Si A y B son eventos independientes con $P(A) \neq 0$ y $P(B) \neq 0$, entonces $A \cap B \neq \varnothing$.

8.2 Soluciones de los ejercicios de autoevaluación

1. **a.** $P(A \mid B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{.3}{.8} = \dfrac{3}{8}$ **b.** $P(B \mid A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)} = \dfrac{.3}{.4} = \dfrac{3}{4}$

2. Sean A, B y C los eventos de que un encuestado que estuvo casado entre las edades de 20 y 22, entre las edades de 23 y 27, y a la edad de 28 o mayor (respectivamente) dijo que no habían sido "precisamente muy felices en su matrimonio". Por tanto, la probabilidad de que cada uno de los eventos ocurra es $P(A) = .297$, $P(B) = .269$ y $P(C) = .451$. De esta manera, la probabilidad de que los tres encuestados dijeran que no habían sido "precisamente muy felices en su matrimonio" es

$$P(A) \cdot P(B) \cdot P(C) = (.297)(.269)(.451) \approx .036$$

8.3 Teorema de Bayes

Probabilidades *a posteriori*

Suponga que tres máquinas, A, B y C, producen componentes de motor parecidos. La máquina A produce 45% de los componentes totales, la máquina B 30% y la máquina C, 25%. Para el programa de producción usual, 6% de los componentes producidos por la máquina A no cumple con las especificaciones establecidas; para la máquina B y la máquina C, las figuras correspondientes son 4 y 3%, respectivamente. Un componente es seleccionado al azar de la producción total y se encuentra que tiene defectos. ¿Cuál es la probabilidad de que el componente seleccionado haya sido producido por la máquina A?

La respuesta a esta pregunta se encuentra al calcular la probabilidad *después* de que los resultados del experimento se han observado. Estas probabilidades se llaman **probabilidades *a posteriori*** a diferencia de las **probabilidades *a priori***, las cuales dan la posibilidad de que un evento *ocurrirá*, el tema de las últimas secciones.

Retomando el ejemplo bajo consideración, es necesario determinar la probabilidad *a posteriori* para el evento de que el componente seleccionado fue producido por una máquina. Con este fin, sean A, B y C los eventos de que un componente es producido por la máquina A, la máquina B y la máquina C, respectivamente. Podemos representar este experimento con un diagrama de Venn (figura 9).

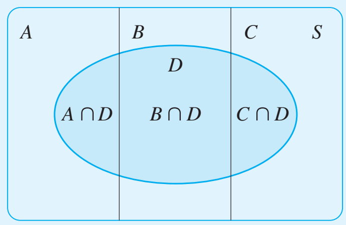


FIGURA 9
D es el evento de que un componente defectuoso sea producido por la máquina *A*, la máquina *B* o la máquina *C*.

Los tres eventos mutuamente excluyentes A, B y C, forman una **partición** del espacio muestral S; es decir, además de ser mutuamente excluyentes, su unión es precisamente S. El evento D de que un componente esté defectuoso es el área sombreada. Al remitirnos de nuevo a la figura 9, vemos que

1. El evento D puede expresarse como

$$D = (A \cap D) \cup (B \cap D) \cup (C \cap D)$$

2. El evento de que un componente está defectuoso y es producido por la máquina A está dado por $A \cap D$.

Por tanto, la probabilidad *a posteriori* de que un componente seleccionado fuera producido por la máquina A está dada por

$$P(A \mid D) = \frac{P(A \cap D)}{P(D)}$$

Luego de dividir tanto el numerador como el denominador entre $P(S)$ y observar que los eventos $A \cap D$, $B \cap D$ y $C \cap D$ son mutuamente excluyentes, se obtiene

$$\begin{aligned} P(A \mid D) &= \frac{P(A \cap D)}{P(D)} \\ &= \frac{P(A \cap D)}{P(A \cap D) + P(B \cap D) + P(C \cap D)} \end{aligned} \tag{7}$$

A continuación, usando la regla del producto, podemos expresar

$$\begin{aligned} P(A \cap D) &= P(A) \cdot P(D \mid A) \\ P(B \cap D) &= P(B) \cdot P(D \mid B) \\ P(C \cap D) &= P(C) \cdot P(D \mid C) \end{aligned}$$

por tanto, la ecuación (7) puede expresarse en la forma

$$P(A \mid D) = \frac{P(A) \cdot P(D \mid A)}{P(A) \cdot P(D \mid A) + P(B) \cdot P(D \mid B) + P(C) \cdot P(D \mid C)} \tag{8}$$

lo cual es un caso especial de un resultado conocido como **teorema de Bayes**.

Observe que la expresión a la derecha de la ecuación (8) involucra las probabilidades $P(A)$, $P(B)$ y $P(C)$ así como las probabilidades condicionales $P(D \mid A)$, $P(D \mid B)$ y $P(D \mid C)$. De hecho, al representar estas probabilidades en un diagrama de árbol, se obtiene la figura 10. Podemos calcular la probabilidad requerida al sustituir las cantidades relevantes en (8), o hacer uso del recurso siguiente:

$$P(A \mid D) = \frac{\text{Producto de las probabilidades a lo largo de la rama que va de } A \text{ a } D}{\text{Suma de productos de las probabilidades a lo largo de cada rama que terminan en } D}$$

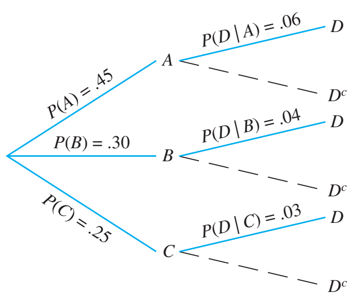


FIGURA **10**
Un diagrama de árbol que muestra las probabilidades de que un componente defectuoso sea producido por la máquina A, la B o la C.

En cualquier caso se obtiene

$$\begin{aligned} P(A \mid D) &= \frac{(.45)(.06)}{(.45)(.06) + (.30)(.04) + (.25)(.03)} \\ &\approx .58 \end{aligned}$$

Antes de estudiar más ejemplos, establezcamos la forma general del teorema de Bayes.

Teorema de Bayes

Sean $A_1, A_2, \ldots, A_n$ una partición de un espacio muestral S, y E un evento de un experimento tal que $P(E) \neq 0$ y $P(A_i) \neq 0$ para $1 \leq i \leq n$. Por tanto, la probabilidad *a posteriori* $P(A_i \mid E)$ $(1 \leq i \leq n)$ está dada por

$$P(A_i \mid E) = \frac{P(A_i) \cdot P(E \mid A_i)}{P(A_1) \cdot P(E \mid A_1) + P(A_2) \cdot P(E \mid A_2) + \cdots + P(A_n) \cdot P(E \mid A_n)} \tag{9}$$

VIDEO

EJEMPLO DE APLICACIÓN 1 Control de calidad Los paneles para la pantalla LCD de 32 pulgadas del televisor Pulsar de alta definición se fabrican en tres lugares y luego se envían a la planta principal de Vista Vision para el ensamblaje final. Las plantas A, B y C abastecen 50, 30 y 20%, respectivamente, de los paneles usados por Vista Vision. El departamento de control de calidad de la empresa ha determinado que 1% de los paneles producidos por la planta A tiene defectos, mientras que 2% de los paneles producidos por las plantas B y C

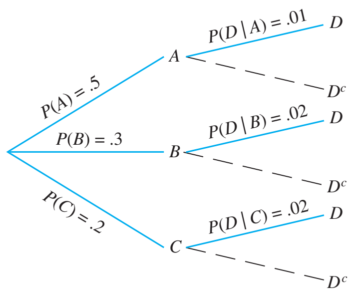


FIGURA 11

$P(C \mid D)$

$= \dfrac{\text{Producto de probabilidades de las ramas que llegan a } D \text{ pasando por } C}{\text{Suma del producto de probabilidades de las ramas que conducen a } D}$

tiene defectos. Si un televisor de alta definición Pulsar de 32 pulgadas es seleccionado al azar y se encuentra que el panel está defectuoso, ¿cuál es la probabilidad de que el panel se haya fabricado en la planta C? (Compare con el ejemplo 6, página 477).

Solución Sean A, B y C los eventos de que el conjunto elegido tiene un panel fabricado en la planta A, la planta B y la planta C, respectivamente. Además, sea D el evento de que un conjunto tiene un panel defectuoso. Usando la información dada, tal vez podamos trazar el diagrama de árbol mostrado en la figura 11. Luego, usando la fórmula (9), encontramos que la probabilidad *a posteriori* requerida esté dada por

$$\begin{aligned} P(C \mid D) &= \frac{P(C) \cdot P(D \mid C)}{P(A) \cdot P(D \mid A) + P(B) \cdot P(D \mid B) + P(C) \cdot P(D \mid C)} \\ &= \frac{(.20)(.02)}{(.50)(.01) + (.30)(.02) + (.20)(.02)} \\ &\approx .27 \end{aligned}$$

EJEMPLO DE APLICACIÓN 2 Distribuciones de ingresos Un estudio en una zona metropolitana grande se realizó para determinar los ingresos anuales de parejas casadas en las cuales los esposos eran los únicos proveedores y de aquellas en las cuales, tanto los esposos como las esposas trabajaban. La tabla 2 proporciona los resultados de este estudio.

TABLA 2

Ingresos anuales de la familia, \$	Parejas casadas, %	Ingresos del grupo donde ambos esposos trabajan, %
150,000 y más	4	65
100,000-149,999	10	73
75,000-99,999	21	68
50,000-74,999	24	63
30,000-49,999	30	43
Menos de 30,000	11	28

a. ¿Cuál es la probabilidad de que una pareja seleccionada al azar de esta zona tenga dos ingresos?

b. Si una pareja elegida al azar tiene dos ingresos, ¿cuál es la probabilidad de que el ingreso anual de esta pareja sea de \$150,000 o más?

c. Si una pareja elegida al azar tiene dos ingresos, ¿cuál es la probabilidad de que el ingreso anual de esta pareja sea mayor de \$49,999 o más?

Solución Sea A el evento de que el ingreso anual de la pareja es de \$150,000 o más; sea B el evento de que el ingreso anual está entre \$100,000 y \$149,999; sea C el evento de que el ingreso anual está entre \$75,000 y \$99,999; etc. Por último, T denota el evento de que ambos esposos trabajan. Las probabilidades de que estos eventos ocurran se muestran en la figura 12.

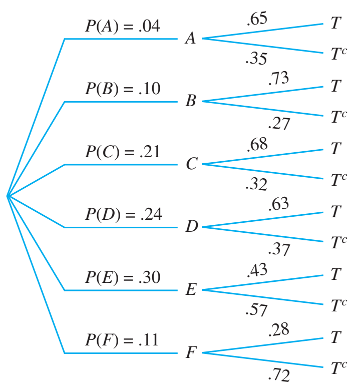


FIGURA 12

a. La probabilidad de que una pareja seleccionada al azar de este grupo tenga dos ingresos está dada por

$$\begin{aligned} P(T) &= P(A) \cdot P(T \mid A) + P(B) \cdot P(T \mid B) + P(C) \cdot P(T \mid C) \\ &\quad + P(D) \cdot P(T \mid D) + P(E) \cdot P(T \mid E) + P(F) \cdot P(T \mid F) \\ &= (.04)(.65) + (.10)(.73) + (.21)(.68) + (.24)(.63) \\ &\quad + (.30)(.43) + (.11)(.28) \\ &= .5528 \end{aligned}$$

b. Usando los resultados del inciso (a) y el teorema de Bayes, encontramos que la probabilidad de que una pareja seleccionada al azar tenga un ingreso anual de \$150,000 o más, dado que ambos esposos trabajan, es

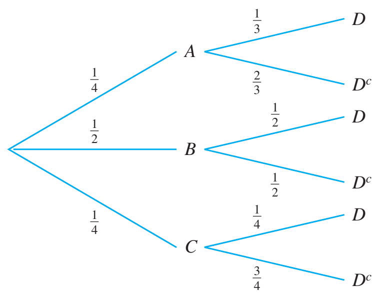
$$P(A \mid T) = \frac{P(A) \cdot P(T \mid A)}{P(T)} = \frac{(.04)(.65)}{.5528}$$
$$\approx .047$$

c. La probabilidad de que una pareja elegida al azar tenga un ingreso anual mayor de \$49,999, dado que ambos esposos trabajan, es

$$P(A \mid T) + P(B \mid T) + P(C \mid T) + P(D \mid T)$$
$$= \frac{P(A) \cdot P(T \mid A) + P(B) \cdot P(T \mid B) + P(C) \cdot P(T \mid C) + P(D) \cdot P(T \mid D)}{P(T)}$$
$$= \frac{(.04)(.65) + (.1)(.73) + (.21)(.68) + (.24)(.63)}{.5528}$$
$$\approx .711$$

8.3 Ejercicios de autoevaluación

1. El diagrama de árbol adjunto representa un experimento en dos etapas. Utilícelo para calcular $P(B \mid D)$.



2. En una elección presidencial reciente, se estimó que la probabilidad de que el candidato republicano fuera elegido era de $\frac{3}{5}$ y por consiguiente la probabilidad de que el candidato demócrata fuera elegido era de $\frac{2}{5}$ (los dos candidatos independientes tenían poca probabilidad de ganar las elecciones). También se estimó que si se elegía al candidato republicano, entonces la probabilidad de que la investigación para un nuevo bombardero tripulado seguiría siendo $\frac{4}{5}$. Pero si el candidato demócrata resultara ganador, entonces la probabilidad de que la investigación continuara sería de $\frac{3}{10}$. La investigación terminó poco después de que el candidato presidencial ganador tomó posesión del cargo. ¿Cuál es la probabilidad de que el candidato republicano gane las elecciones?

Las soluciones de los ejercicios de autoevaluación 8.3 pueden encontrarse en la página 494.

8.3 Preguntas de concepto

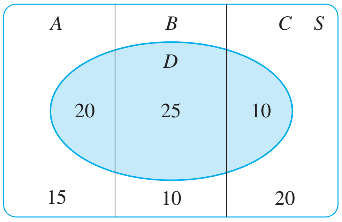
1. ¿Cuáles son las probabilidades *a priori* y las probabilidades *a posteriori*? Dé un ejemplo de cada una.

2. Suponga que los eventos A, B y C forman la partición de un espacio muestral S, y suponga que E es un evento de un experimento tal que $P(E) \neq 0$. Utilice el teorema de Bayes para escribir la fórmula para la probabilidad *a posteriori* $P(A \mid E)$. (Suponga que $P(A)$, $P(B)$, $P(C) \neq 0$.)

3. Remítase a la pregunta 2. Si E es el evento de que un producto se produjo en la fábrica A, la fábrica B o la fábrica C, y $P(E) \neq 0$, ¿qué representa $P(A \mid E)$?

8.3 Ejercicios

En los ejercicios 1-3 remítase al diagrama de Venn adjunto. Un experimento en el cual los tres eventos mutuamente excluyentes *A*, *B* y *C* forman una partición del espacio muestral uniforme *S* representado en el diagrama.

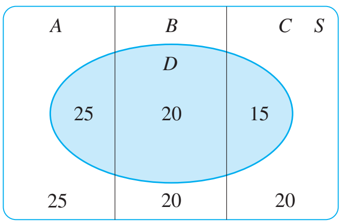


1. Usando la información dada en el diagrama de Venn, trace un diagrama de árbol que ilustre las probabilidades de los eventos A, B, C y D.

2. Calcule: **a.** $P(D)$ **b.** $P(A \mid D)$

3. Calcule: **a.** $P(D^c)$ **b.** $P(B \mid D^c)$

En los ejercicios 4-6, remítase al diagrama de Venn adjunto. Un experimento en el cual los tres eventos mutuamente excluyentes *A*, *B* y *C* forman una partición del espacio muestral uniforme *S* representado en el diagrama.

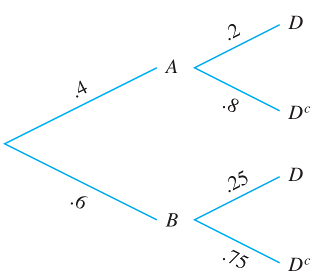


4. Usando la información dada en el diagrama de Venn, trace un diagrama de árbol que ilustre las probabilidades de los eventos A, B, C y D.

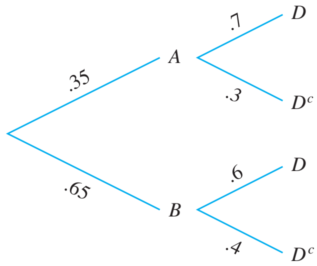
5. Calcule: **a.** $P(D)$ **b.** $P(B \mid D)$

6. Calcule: **a.** $P(D^c)$ **b.** $P(B \mid D^c)$

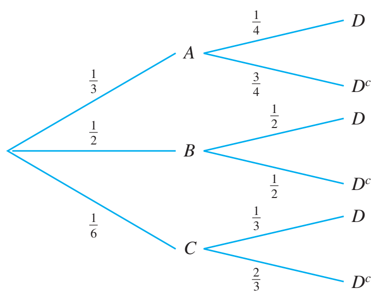
7. El diagrama de árbol adjunto representa un experimento de dos etapas. Use el diagrama de árbol para encontrar
a. $P(A) \cdot P(D \mid A)$ **b.** $P(B) \cdot P(D \mid B)$
c. $P(A \mid D)$



8. El diagrama de árbol adjunto representa un experimento de dos etapas. Use el diagrama de árbol para encontrar
a. $P(A) \cdot P(D \mid A)$ **b.** $P(B) \cdot P(D \mid B)$
c. $P(A \mid D)$



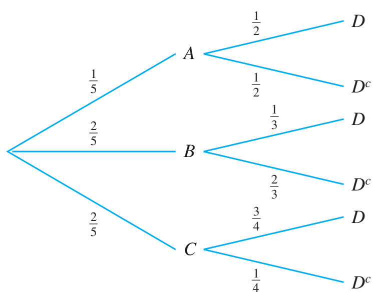
9. El diagrama de árbol adjunto representa un experimento de dos etapas. Utilícelo para calcular
a. $P(A) \cdot P(D \mid A)$ **b.** $P(B) \cdot P(D \mid B)$
c. $P(C) \cdot P(D \mid C)$ **d.** $P(A \mid D)$



10. El diagrama de árbol adjunto representa un experimento de dos etapas. Utilícelo para calcular
a. $P(A \cap D)$ **b.** $P(B \cap D)$ **c.** $P(C \cap D)$ **d.** $P(D)$
e. Verifique:

$$P(A \mid D) = \frac{P(A \cap D)}{P(D)}$$

$$= \frac{P(A) \cdot P(D \mid A)}{P(A) \cdot P(D \mid A) + P(B) \cdot P(D \mid B) + P(C) \cdot P(D \mid C)}$$



En los ejercicios 11-14, remítase al experimento siguiente: dos naipes son extraídos en sucesión sin reemplazarlos de una baraja estándar de 52 naipes.

11. ¿Cuál es la probabilidad de que la primera carta sea de corazones, dado que la segunda carta lo es?

12. ¿Cuál es la probabilidad de que la primera carta sea de corazones, dado que la segunda carta es de diamantes?

13. ¿Cuál es la probabilidad de que la primera carta sea una jota, dado que la segunda carta es un as?

14. ¿Cuál es la probabilidad de que la primera carta sea una figura, dado que la segunda carta es un as?

En los ejercicios 15-18 remítase al experimento siguiente: la urna A contiene cuatro bolas blancas y seis negras. La urna B contiene tres bolas blancas y cinco negras. Una bola es extraída de la urna A y luego se transfiere a la urna B. Luego se extrae una bola de la urna B.

15. Represente las probabilidades asociadas con este experimento de dos etapas en la forma de diagrama de árbol.

16. ¿Cuál es la probabilidad de que la bola transferida sea blanca, dado que la segunda bola extraída era blanca?

17. ¿Cuál es la probabilidad de que la bola transferida sea negra dado que la segunda bola extraída era blanca?

18. ¿Cuál es la probabilidad de que la bola transferida sea negra, dado que la segunda bola extraída era negra?

19. **Política** En 1992 el Senado de Estados Unidos estaba compuesto por 57 demócratas y 43 republicanos. De los demócratas, 38 cumplieron su servicio militar, mientras que 28 de los republicanos también lo cumplieron. Si un senador seleccionado al azar ha cumplido con su servicio militar, ¿cuál es la probabilidad de que sea republicano?

20. **Necesidades de retiro** En una encuesta de 2,000 adultos de 50 años y mayores, de quienes 60% estaban retirados y 40% aún no lo estaban, se formuló la pregunta siguiente: ¿Espera usted que sus necesidades de ingresos varíen de un año al otro en el retiro? De aquellos que estaban retirados, 33% respondió que no y 67% que sí. De aquellos que aún no se retiraban, 28% respondió que no y 72% que sí. Si se seleccionó un encuestado al azar y éste respondió que sí a la pregunta, ¿cuál es la probabilidad de que esté retirado?
Fuente: Sun Life Financial

21. Un experimento consiste en seleccionar una de tres monedas, lanzarlas y observar el resultado: cara o cruz. La primera es una moneda de dos caras, la segunda es una moneda con truco tal que $P(\mathrm{H}) = .75$ y la tercera es una moneda sin truco.
a. ¿Cuál es la probabilidad de que la moneda lanzada caiga en cara?
b. Si la moneda seleccionada cae en cara, ¿cuál es la probabilidad de que esta sea la moneda sin truco?

22. **Conformidad con el cinturón de seguridad** Los datos recabados por el Departamento de Patrullas de Caminos respecto al uso de cinturones de seguridad por los conductores de cierta zona, después de la aprobación de una ley obligatoria, se muestran en la tabla siguiente.

Conductores	Porcentaje de conductores en el grupo	Porcentaje del grupo detenidos por violación en movimiento
Grupo I (usa cinturón de seguridad)	64	.2
Grupo II (no usa cinturón de seguridad)	36	.5

Si un conductor se detiene en esa zona por una violación flagrante, ¿cuál es la probabilidad de que
a. tenga puesto el cinturón de seguridad?
b. no tenga puesto el cinturón de seguridad?

23. **Pruebas sanguíneas** Si cierta enfermedad está presente, entonces una prueba sanguínea lo revelará 95% del tiempo. Pero la prueba también indicará la presencia de la enfermedad 2% de las veces cuando de hecho, la persona a quien se realiza la prueba, no padezca esa enfermedad; es decir, la prueba da un resultado positivo falso 2% de las veces. Si 0.3% de la población general realmente tiene la enfermedad, ¿cuál es la probabilidad de que una persona de la población elegida al azar tenga la enfermedad dado que él o ella dieron positivo en la prueba?

24. **Estudios de opinión** En un estudio para determinar las opiniones de los estadounidenses sobre las compañías de seguros médicos, se planteó la pregunta siguiente a 400 personas nacidas en la década de 1960 y a 600 personas que nacieron antes de dicha década: ¿Cree usted que las compañías de seguros son muy responsables de los altos costos de la salud? De los nacidos en la década de 1960, 212 respondieron de manera afirmativa, mientras que 198 de aquellos que nacieron antes de dicha década dieron una respuesta afirmativa. Si se elige un encuestado al azar entre aquellos que respondieron de manera afirmativa a la pregunta, ¿cuál es la probabilidad de que él o ella hayan nacido en la década de 1960? ¿Y antes de dicha década?
Fuente: GfK Roper Consulting

25. **Control de calidad** Se encontró que una lámpara de alógeno de escritorio fabricada por Luminar tenía defectos. La empresa cuenta con tres plantas donde se fabrican las lámparas. El porcentaje del número total de lámparas de alógeno de escritorio producido por cada planta y la probabilidad de que una lámpara fabricada por esa planta tenga defectos se muestra en la tabla siguiente. ¿Cuál es la probabilidad de que la lámpara defectuosa haya sido fabricada por la planta III?

Planta	Porcentaje de la producción total	Probabilidad de componentes defectuosos
I	35	.015
II	35	.01
III	30	.02

26. **Estudios de opinión** En un estudio realizado con 400 posibles votantes demócratas y 300 posibles votantes republicanos se planteó la pregunta siguiente: ¿Apoya usted o se opone a la legislación que requiere el registro de todos los revólveres? Se obtuvieron los resultados siguientes:

Respuesta	Demócratas, %	Republicanos, %
Apoyo	77	59
Me opongo	14	31
No sé/no acepto	9	10

Si un encuestado elegido al azar en el estudio respondió "Me opongo", ¿cuál es la probabilidad de que él o ella sea un posible votante demócrata?

27. **Distribución de edades de los arrendatarios** Un estudio realizado por Metro Housing Agency en una ciudad de la región centro-norte de Estados Unidos reveló la siguiente información respecto a la distribución de edades de los arrendatarios dentro de la ciudad.

Edad	Población adulta, %	Grupo quienes son arrendatarios, %
21-44	51	58
45-64	31	45
65 y más	18	60

a. ¿Cuál es la probabilidad de que un adulto seleccionado al azar de esta población sea un arrendatario?
b. Si un arrendatario es seleccionado al azar, ¿cuál es la probabilidad de que esté en el grupo de edades de 21 a 44 años?
c. Si un arrendatario es seleccionado al azar, ¿cuál es la probabilidad de que tenga 45 años o sea mayor?

28. **Confiabilidad de los productos** La probabilidad estimada de que un televisor de plasma de marca A, uno de marca B y uno de marca C duren por lo menos 30,000 horas es .90, .85 y .80, respectivamente. De los 4,500 TV de plasma que Ace TV vendió en cierto año, 1,000 eran de la marca A, 1,500 de la marca B y 2,000 de la marca C. Si un TV de plasma vendido por Ace TV ese año es seleccionado al azar y sigue funcionando después de 30,000 horas de uso
a. ¿Cuál es la probabilidad de que sea un TV de la marca A?
b. ¿Cuál es la probabilidad de que no sea un TV de la marca A?

29. **Estudios de opinión** En un estudio realizado en 400 posibles votantes demócratas y 300 posibles votantes republicanos se planteó la pregunta siguiente: ¿Apoya usted o se opone a la legislación que requiere el uso de seguros en los gatillos en las pistolas para impedir el mal uso por parte de los niños? Se obtuvieron los resultados siguientes:

Respuesta	Demócratas, %	Republicanos, %
Apoyo	88	71
Me opongo	7	20
No sé/no acepto	5	9

Si un encuestado elegido al azar en el estudio respondió "Apoyo", ¿cuál es la probabilidad de que sea un posible votante republicano?

30. **Control de calidad** Jansen Electronics tiene cuatro máquinas que producen un componente idéntico para usarlo en sus reproductores de DVD. La proporción de los componentes producidos por cada máquina y la probabilidad de que ese componente tenga defectos se muestran en la tabla siguiente. ¿Cuál es la probabilidad de que un componente seleccionado al azar
a. tenga defectos?
b. haya sido producido por la máquina 1, dado que tiene defectos?
c. haya sido producido por la máquina II, dado que tiene defectos?

Máquina	Proporción de componentes producidos	Probabilidad de componente defectuoso
I	.15	.04
II	.30	.02
III	.35	.02
IV	.20	.03

31. **Índices de delincuencia** Los datos recabados por el Departamento de Justicia sobre el número de personas arrestadas cierto año por delitos graves (asesinato, violación, robo, etc.) revelaron que 89% eran hombres y 11% mujeres. De los hombres, 30% era menor de 18 años, mientras que 27% de las mujeres arrestadas era menor de 18.
a. ¿Cuál es la probabilidad de que una persona arrestada por un delito grave en ese año fuera menor de 18?
b. Si se sabe que una persona arrestada por un delito grave en ese año es menor de 18, ¿cuál es la probabilidad de que la persona sea mujer?

Fuente: Departamento de Justicia

32. **Confiabilidad de las pruebas médicas** Una prueba médica se ha diseñado para detectar la presencia de cierta enfermedad. Entre aquellos que la padecen, la probabilidad de que ésta sea detectada por la prueba es .95. Sin embargo, la probabilidad de que la prueba indique de manera errónea la presencia de la enfermedad en aquellos que en realidad no la tienen es 0.04. Se estima que 4% de la población que se somete a esta prueba padece la enfermedad.
a. Si la prueba administrada a un individuo resulta positiva, ¿cuál es la probabilidad de que la persona tenga en realidad la enfermedad?
b. Si una persona se hace la prueba dos veces y en ambas el resultado es positivo, ¿cuál es la probabilidad de que la persona tenga en realidad la enfermedad? (Suponga que las pruebas son independientes).

33. **Confiabilidad de las pruebas médicas** Remítase al ejercicio 32. Suponga que 20% de las personas que fueron referidas a una clínica para la prueba tienen de hecho la enfermedad. Si la prueba administrada a una persona de este grupo es positiva, ¿cuál es la probabilidad de que la persona tenga en realidad la enfermedad?

34. **Vacío de género** Un estudio del profesorado en las escuelas médicas en 2006 reveló que 32% del profesorado eran mujeres y 68% hombres. De las mujeres, 31% eran profesoras de tiempo completo/adjuntas, 47% profesoras adjuntas y 22% instructores. De los hombres, 51% eran profesores de tiempo completo/adjuntos, 37% profesores adjuntos y 12% instructores. Si un miembro del profesorado en la escuela de medicina de Estados Unidos, seleccionado al azar, ocupa el puesto de profesor de tiempo completo/adjunto, ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer?

Fuente: Association of American Medical Colleges

35. Investigación de bebidas En un estudio de investigación científica sobre las bebidas refrescantes, jugos y leche, 50 estudios fueron patrocinados por la industria alimentaria, y 30 se realizaron sin vínculos corporativos. De aquellos que fueron totalmente patrocinados por la industria alimentaria, 14% de los participantes consideró que los productos eran desfavorables, 23% se mostró neutral y 63% los consideró favorables. De aquellos que no contaban con financiamiento de la industria, 38% consideró los productos desfavorables, 15% se mostraron neutrales y 47% los consideró favorables.

a. ¿Cuál es la probabilidad de que un participante seleccionado al azar considere los productos favorables?

b. Si un participante seleccionado al azar considera los productos favorables, ¿cuál es la probabilidad de que pertenezca a un grupo que participó en un estudio patrocinado por una empresa?

Fuente: Children's Hospital, Boston

36. Selección de jueces de la Corte Suprema En una elección presidencial pasada, se estimó que la probabilidad de que el candidato republicano fuera electo era de $\frac{3}{5}$, y, por consiguiente, la probabilidad de que el candidato demócrata fuera electo era de $\frac{2}{5}$ (los dos candidatos independientes no tuvieron oportunidad de ser elegidos). También se estimó que si el candidato republicano era elegido, la probabilidad de que un juez conservador, moderado o liberal se nombrara como juez de la Corte Suprema (se esperaba un retiro durante el periodo presidencial) era de $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ y $\frac{1}{6}$, respectivamente. Si se elegía el candidato demócrata, las probabilidades de que un juez conservador, moderado o liberal fuera nombrado como juez de la Corte Suprema sería $\frac{1}{8}$, $\frac{3}{8}$ y $\frac{1}{2}$, respectivamente. Un juez conservador se nombró juez de la Corte Suprema durante el periodo presidencial. ¿Cuál es la probabilidad de que el candidato demócrata fue elegido?

37. Selección de personal Los aspirantes a un puesto en una oficina temporal en la Carter Temporary Help Agency que completaron una prueba de mecanografía son colocados luego en los puestos adecuados por Nancy Dwyer y Darla Newberg. Los empleadores que contratan ayuda temporal por medio de la agencia regresan una tarjeta que indica satisfacción o insatisfacción con el desempeño laboral de las personas que contrataron. A partir de experiencias pasadas, se sabe que 80% de los empleados colocados por Nancy se califica como satisfactorio y 70% de aquellos colocados por Darla se califica como satisfactorio. Darla coloca 55% de la ayuda de oficina temporal en la agencia y Nancy el 45% restante. Si el empleado de oficina de Carter se califica como insatisfactorio, ¿cuál es la probabilidad de que él o ella hayan sido colocados por Darla?

38. Investigación médica Con base en los datos obtenidos del National Institute of Dental Research, se ha determinado que 42% de los pacientes de 12 años de edad nunca había tenido caries, 34% de los pacientes de 13 años nunca había tenido caries y 28% de los pacientes de 14 años nunca había tenido caries. Suponga que un niño es seleccionado al azar de un grupo de 24 estudiantes de secundaria que incluye seis adolescentes de 12 años, ocho adolescentes de 13 años y 10 adolescentes de 14 años. Si este adolescente no tiene caries, ¿cuál es la probabilidad de que este adolescente tenga 14 años?

Fuente: National Institute of Dental Research

39. Patrones de voto En una elección reciente del senado, 50% de los votantes de cierto distrito se registró como demócrata, 35% como republicano y 15% como independiente. La senadora demócrata titular del cargo fue reelecta contra sus oponentes republicano e independiente. Las encuestas de salida indicaron que ella ganó 75% de los votos demócratas, 25% de los votos republicanos y 30% de los votos independientes. Suponiendo que la encuesta de salida es precisa, ¿cuál es la probabilidad de que un voto por la titular del cargo fue de un republicano registrado?

40. Tasas de accidentes automovilísticos Una compañía de seguros ha recabado los datos adjuntos relacionados con la edad de los conductores y la tasa de accidentes (la probabilidad de verse involucrados en un accidente durante un periodo de 1 año) para los conductores dentro de ese grupo:

Grupo de edades	Porcentaje de conductores asegurados	Tasa de accidentes, %
Menores de 25	16	5.5
25-44	40	2.5
45-64	30	2
65 y mayores	14	4

¿Cuál es la probabilidad de que un conductor asegurado seleccionado al azar

a. esté involucrado en un accidente durante un periodo de 1 año en particular?

b. que esté involucrado en un accidente sea menor de 25 años?

41. Hábitos personales En una fiesta había 80 invitados hombres. El número de hombres en cada una de cuatro categorías de edades se muestra en la tabla siguiente, la cual proporciona también la probabilidad de que un hombre en la categoría de edades respectiva mantenga sus billetes en el orden de denominación.

Edad	Hombres	Mantener billetes en orden, %
21-34	25	9
35-44	30	61
45-54	15	80
55 y mayores	10	80

Se tomó la billetera de un hombre y los billetes estaban guardados en orden de denominación. ¿Cuál es la probabilidad de que la billetera perteneciera a un invitado hombre entre las edades de 35 y 44 años?

42. Número de votantes por ingresos El número de votantes cayó a ritmo constante a medida que el nivel de ingresos disminuye. La tabla siguiente muestra el porcentaje de votantes aptos de cierta ciudad, clasificados por ingresos, quienes respondieron "No voté" en la elección presidencial de 2000. La tabla proporciona también el número de votantes aptos en la ciudad, clasificado por ingresos.

Ingresos (percentil)	Porcentaje de personas que respondió "No voté"	Votantes aptos
0-16	52	4,000
17-33	31	11,000
34-67	30	17,500
68-95	14	12,500
96-100	12	5,000

Si un votante apto de esta ciudad que votó en la elección es seleccionado al azar, ¿cuál es la probabilidad de que esta persona tenga un ingreso en el percentil de 17-33?

Fuente: The National Election Studies

43. La escala social La tabla siguiente resume los resultados de una encuesta realizada en 1,154 adultos.

Ingreso familiar anual, $	Encuestados dentro de ese rango de ingresos, %	Encuestados que se consideran a sí mismos de la clase		
		Alta, %	Media, %	Baja, %
Menos de $15,000	11.2	0	24	76
$15,000-29,999	18.6	3	60	37
$30,000-49,999	24.5	0	86	14
$50,000-74,999	21.9	2	90	8
$75,000 y más	23.8	5	91	4

a. ¿Cuál es la probabilidad de que un encuestado elegido al azar se considere a sí mismo de la clase media?
b. Si un encuestado elegido al azar se considera a sí mismo de la clase media, ¿cuál es la probabilidad de que el ingreso anual por familia de esa persona está entre $30,000 y $49,999, inclusive?
c. Si un encuestado elegido al azar se considera a sí mismo de la clase media, ¿cuál es la probabilidad de que los ingresos de la persona sean menores o iguales a $29,999 o mayores o iguales a $50,000?

*Fuente: New York Times/*CBS News; *Wall Street Journal Almanac*

44. Obesidad infantil Los investigadores evaluaron a 1,976 niños de 3 años de edad que pertenecían a familias de bajos ingresos en 20 ciudades estadounidenses. Cada niño fue clasificado por raza (blanca, negra o hispana) y por peso (peso normal, sobrepeso u obeso). Los resultados se tabularon como sigue:

Raza	Niños	Peso, %		
		Normal	Sobrepeso	Obeso
Blanca	406	68	18	14
Negra	1,081	68	15	17
Hispana	489	56	20	24

Si un participante en la investigación es seleccionado al azar y se encuentra que es obeso, ¿cuál es la probabilidad de que el niño de 3 años sea blanco? ¿E hispano?

Fuente: American Journal of Public Health

45. Asignaturas universitarias La Oficina de Admisiones y Registros de una universidad importante en el oeste de Estados Unidos publicó la información adjunta respecto a las asignaturas principales contempladas por los alumnos de su clase de primer año:

Asignatura	Estudiantes de 1o. que eligieron esta asignatura como la más importante, %	Mujeres, %	Hombres, %
Administración	24	38	62
Humanidades	8	60	40
Educación	8	66	34
Ciencias sociales	7	58	42
Ciencias naturales	9	52	48
Otras	44	48	52

¿Cuál es la probabilidad de que
a. un estudiante seleccionado al azar de una clase de primer año sea mujer?
b. un estudiante de administración seleccionado al azar de la clase de primer año sea hombre?
c. un estudiante mujer seleccionada al azar de la clase de primer año elija administración como la mejor?

46. Número de votantes por profesión La tabla siguiente muestra el porcentaje de votantes aptos agrupados según su profesión, quienes respondieron "Voté" en la elección presidencial de 2000. La tabla proporciona también el porcentaje de personas en una encuesta clasificada por su profesión.

Profesión	Porcentaje quienes votaron	Porcentaje según su profesión
Profesionales	84	12
Oficinistas	73	24
Obreros	66	32
Sin especialización	57	10
Agricultores	68	8
Amas de casa	66	14

Si un votante apto que participó en la encuesta y votó en la elección es seleccionado al azar, ¿cuál es la probabilidad de que esta persona sea ama de casa?

Fuente: The National Election Studies

47. Diagnósticos médicos Un estudio se realizó entre cierto grupo de miembros sindicales, cuyas pólizas de seguro médico requerían una segunda opinión antes de una cirugía. De los miembros cuyos médicos aconsejaron someterlos a una cirugía, a 20% un segundo médico le informó que no era necesaria una cirugía. De éstos, 70% tomó la segunda opinión del médico y no se sometió a una cirugía. De los miembros a quienes ambos médicos aconsejaron someterse a una cirugía, 95% lo hizo. ¿Cuál es la probabilidad de que un miembro sindical que se sometió a una cirugía le haya aconsejado hacerlo un segundo médico?

48. Fumar y educación De acuerdo con los Centros para el Control y la Prevención de Enfermedades, el porcentaje de adultos de 25 años y mayores que fuman, por nivel educativo, es el siguiente:

Nivel educativo	Sin diploma	Diploma GED	Graduado de bachillerato	Bachillerato parcial	Estudiante universitario	Título universitario
Encuestados, %	26	43	25	23	10.7	7

En un grupo de 140 personas, había 8 sin diploma, 14 con diploma GED, 40 graduados de bachillerato, 24 con bachillerato parcial, 42 eran estudiantes universitarios y 12 tenían un título universitario (suponga que estas categorías son mutuamente excluyentes). Si una persona seleccionada al azar de este grupo era fumadora, ¿cuál es la probabilidad de que sea una persona con un grado universitario?

Fuente: Centros para el Control y la Prevención de Enfermedades

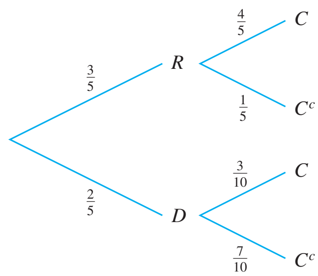
8.3 Soluciones de los ejercicios de autoevaluación

1. Usando las probabilidades dadas en el teorema de Bayes, tenemos que

$$P(B \mid D) = \frac{P(B) \cdot P(D \mid B)}{P(A) \cdot P(D \mid A) + P(B) \cdot P(D \mid B) + P(C) \cdot P(D \mid C)}$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{4}\right)} = \frac{12}{19}$$

2. Sean R y D, respectivamente, los eventos de que el candidato republicano y el candidato demócrata ganaran la elección presidencial. Por tanto, $P(R) = \frac{3}{5}$ y $P(D) = \frac{2}{5}$. Además, C denota el evento de que la investigación para el nuevo bombardero tripulado seguiría. Estos datos pueden mostrarse como en el diagrama de árbol siguiente:



Usando el teorema de Bayes, encontramos que la probabilidad de que el candidato republicano ganara la elección está dada por

$$P(R \mid C^c) = \frac{P(R) \cdot P(C^c \mid R)}{P(R) \cdot P(C^c \mid R) + P(D) \cdot P(C^c \mid D)}$$

$$= \frac{\left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{1}{5}\right)}{\left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{1}{5}\right) + \left(\frac{2}{5}\right)\left(\frac{7}{10}\right)} = \frac{3}{10}$$

8.4 Distribuciones de variables aleatorias

Variables aleatorias

En numerosas situaciones, es conveniente asignar valores numéricos a los resultados de un experimento. Por ejemplo, si un experimento consiste en lanzar un dado y observar el número que cae en la cara superior, entonces es natural asignar los números 1, 2, 3, 4, 5 y 6, respectivamente, a los resultados *uno*, *dos*, *tres*, *cuatro*, *cinco* y *seis* del experimento. Si X denota el resultado del experimento, entonces X asume uno de estos números. Como los valores asumidos por X dependen de los resultados de un experimento de probabilidad, el resultado X se conoce como una variable aleatoria.

> **Variable aleatoria**
>
> Una **variable aleatoria** es una regla que asigna un número a cada resultado de un experimento de probabilidad.

De manera más precisa, una variable aleatoria es una función con un dominio dado por el conjunto de resultados de un experimento de probabilidad y un rango contenido en el conjunto de números reales.

VIDEO

EJEMPLO 1 Una moneda es lanzada tres veces. La variable aleatoria X denota el número de caras que ocurren en tres lanzamientos.

a. Haga una lista de los resultados del experimento; es decir, encuentre el dominio de la función X.

b. Calcule el valor asignado a cada resultado del experimento por la variable aleatoria X.

c. Encuentre el evento que comprende los resultados a los cuales X ha asignado un valor de 2. Este evento se escribe $(X = 2)$ y es el evento que consiste en los resultados en los cuales ocurren dos caras.

TABLA 3

Número de caras en tres lanzamientos de la moneda

Resultado	Valor de X
HHH	3
HHT	2
HTH	2
THH	2
HTT	1
THT	1
TTH	1
TTT	0

TABLA 4

Número de lanzamientos de la moneda antes de que caiga en cara

Resultado	Valor de Y
H	1
TH	2
TTH	3
TTTH	4
TTTTH	5
⋮	⋮

Solución

a. A partir de los resultados del ejemplo 3, sección 7.5 (página 433), vemos que el conjunto de resultados del experimento está dado por el espacio muestral

$$S = \{\text{HHH, HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH, TTT}\}$$

b. Los resultados del experimento se muestran en la primera columna de la tabla 3. El valor correspondiente asignado a cada resultado por la variable aleatoria X (el número de caras) aparece en la segunda columna.

c. Con la ayuda de la tabla 3, vemos que el evento ($X = 2$) está dado por el conjunto

$$\{\text{HHT, HTH, THH}\}$$ ■

EJEMPLO 2 Una moneda es lanzada varias veces hasta que cae en cara. La variable aleatoria Y denota el número de lanzamientos de la moneda en el experimento. ¿Cuáles son los valores de Y?

Solución Los resultados del experimento constituyen el conjunto infinito

$$S = \{\text{H, TH, TTH, TTTH, TTTTH}, \ldots\}$$

Estos resultados del experimento se muestran en la primera columna de la tabla 4. Los valores correspondientes asumidos por la variable aleatoria Y (el número de lanzamientos) aparecen en la segunda columna. ■

EJEMPLO DE APLICACIÓN 3 Confiabilidad de los productos Una lámpara desechable se enciende hasta que se agota la batería. Sea la variable aleatoria Z la duración (en horas) de la vida útil de la batería. ¿Qué valores puede asumir Z?

Solución El valor de Z puede ser cualquier número real no negativo; es decir, los valores posibles de Z comprenden el intervalo $0 \leq Z < \infty$. ■

Una ventaja de trabajar con las variables aleatorias, en vez de hacerlo directamente con los resultados de un experimento, es que las variables aleatorias son funciones que pueden sumarse, restarse y multiplicarse. Debido a esto, los resultados desarrollados en el campo del álgebra y otras áreas de las matemáticas pueden usarse de manera libre como ayuda para resolver problemas en probabilidad y estadística.

Una variable aleatoria se clasifica en tres categorías, dependiendo del conjunto de valores que asume. Una variable aleatoria se llama **discreta finita** si asume sólo un número finito de valores. Por ejemplo, la variable aleatoria X del ejemplo 1 es discreta finita debido a que puede asumir valores de sólo un conjunto finito de números $\{0, 1, 2, 3\}$. Luego, se dice que una variable aleatoria es **discreta infinita** si toma sólo valores infinitos, los cuales pueden acomodarse en secuencia. Por ejemplo, la variable aleatoria Y del ejemplo 2 es discreta infinita debido a que asume valores del conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$, el cual se ha acomodado en la forma de una secuencia finita. Por último, una variable aleatoria se llama **continua** si los valores que puede asumir comprenden un intervalo de números reales. Por ejemplo, la variable aleatoria Z del ejemplo 3 es continua debido a que los valores que puede asumir comprenden el intervalo de números reales no negativos. Para el resto de esta sección, a menos que se indique lo contrario, *se asumirá que todas las variables aleatorias son discretas finitas*.

Distribuciones de probabilidad de las variables aleatorias

En la sección 7.6 aprendimos cómo construir la distribución de probabilidad para un experimento. Ahí, la distribución de probabilidad adoptó la forma de una tabla que dio las probabilidades asociadas con los resultados de un experimento. Dado que las varia-

TABLA 5

Distribución de probabilidad para la variable aleatoria X

x	$P(X = x)$
x_1	p_1
x_2	p_2
x_3	p_3
$\vdots$	$\vdots$
x_n	p_n

bles aleatorias asociadas con un experimento se relacionan con los resultados del mismo, queda claro que debemos poder construir una distribución de probabilidad asociada con la *variable aleatoria* en vez de una asociada con los resultados del experimento. Una distribución de este tipo se llama **distribución de probabilidad de una variable aleatoria** y puede darse en la forma de una fórmula o mostrarse en una tabla que da los distintos valores (numéricos) de la variable aleatoria X y las probabilidades asociadas con estos valores. Por tanto, si $x_1, x_2, \ldots, x_n$ son los valores asumidos por la variable aleatoria x con las probabilidades asociadas $P(X = x_1), P(X = x_2), \ldots, P(X = x_n)$, respectivamente, entonces la distribución de probabilidad requerida de la variable aleatoria X puede esperarse en la forma de la tabla que aparece en la tabla 5, donde $p_i = P(X = x_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

En los ejemplos siguientes, ilustramos la construcción de las distribuciones de probabilidad.

EJEMPLO 4 Encuentre la distribución de probabilidad de la variable aleatoria asociada con el experimento del ejemplo 1.

Solución A partir de los resultados del ejemplo 1, vemos que los valores asumidos por la variable aleatoria X son 0, 1, 2 y 3, que corresponden a los eventos de 0, 1, 2 y 3 caras que ocurren, respectivamente. Remítase a la tabla 3 una vez más, verá que el resultado asociado con el evento $(X = 0)$ está dado por el conjunto {TTT}. Por consiguiente, la probabilidad asociada con la variable aleatoria X cuando asume el valor 0 está dada por

$$P(X = 0) = \frac{1}{8}$$ Note que $n(S) = 8$.

TABLA 6

Distribución de probabilidad

x	$P(X = x)$
0	$\frac{1}{8}$
1	$\frac{3}{8}$
2	$\frac{3}{8}$
3	$\frac{1}{8}$

Luego observe que el evento $(X = 1)$ está dado por el conjunto {HTT, THT, TTH}, de manera que

$$P(X = 1) = \frac{3}{8}$$

De manera similar, podemos calcular $P(X = 2)$ y $P(X = 3)$, lo cual da la distribución de probabilidad mostrada en la tabla 6. ■

TABLA 7

x	$P(X = x)$
2	$\frac{1}{36}$
3	$\frac{2}{36}$
4	$\frac{3}{36}$
5	$\frac{4}{36}$
6	$\frac{5}{36}$
7	$\frac{6}{36}$
8	$\frac{5}{36}$
9	$\frac{4}{36}$
10	$\frac{3}{36}$
11	$\frac{2}{36}$
12	$\frac{1}{36}$

EJEMPLO 5 Sea X la variable aleatoria que da la suma de las caras que caen en la cara superior cuando se lanza un par de dados sin truco. Encuentre la distribución de probabilidad de X.

Solución Los valores asumidos por la variable aleatoria X son $2, 3, 4, \ldots, 12$, que corresponden a los eventos $E_2, E_3, E_4, \ldots, E_{12}$ (vea el ejemplo 4, sección 7.5). Las probabilidades asociadas con la variable aleatoria X cuando X asume los valores $2, 3, 4, \ldots, 12$ son precisamente las probabilidades $P(E_2), P(E_3), \ldots, P(E_{12})$, respectivamente, y pueden calcularse de una manera muy parecida a la solución del ejemplo 3, sección 7.6. Por tanto,

$$P(X = 2) = P(E_2) = \frac{1}{36}$$

$$P(X = 3) = P(E_3) = \frac{2}{36}$$

y así sucesivamente. La distribución de probabilidad de X está dada en la tabla 7. ■

VIDEO

EJEMPLO DE APLICACIÓN 6 Filas de espera Los datos siguientes proporcionan el número de automóviles observados que espera en la fila al principio de intervalos de 2 minutos entre las 3 y 5 p.m. en cierto viernes en el cajero automático del banco Westwood Savings Bank y la frecuencia de ocurren-

TABLA 8

Distribución de probabilidad

x	$P(X = x)$
0	.03
1	.15
2	.27
3	.20
4	.13
5	.10
6	.07
7	.03
8	.02

cia correspondiente. Encuentre la distribución de probabilidad para la variable aleatoria X, donde X denota el número de automóviles observados en la fila de espera.

Automóviles	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Frecuencia de ocurrencia	2	9	16	12	8	6	4	2	1

Solución Al dividir cada número en la última fila de la tabla dada entre 60 (la suma de estos números) se obtienen las probabilidades respectivas asociadas con la variable aleatoria X, cuando X asume los valores 0, 1, 2, . . . , 8. (Aquí usamos la interpretación de la frecuencia relativa de la probabilidad). Por ejemplo,

$$P(X = 0) = \frac{2}{60} \approx .03$$

$$P(X = 1) = \frac{9}{60} = .15$$

y así sucesivamente. La distribución de probabilidad resultante se muestra en la tabla 8. ■

Histogramas

Una distribución de probabilidad de una variable aleatoria puede exhibirse de manera gráfica por medio de un **histograma**. Para construir un histograma de una distribución de probabilidad en particular, localice primero los valores de la variable aleatoria en una recta numérica. Luego, sobre cada uno de estos números, erija un rectángulo con un ancho de 1 y una altura igual a la probabilidad asociada con el valor de la variable aleatoria. Por ejemplo, el histograma de la distribución de probabilidad que aparece en la tabla 6 se muestra en la figura 13. Los histogramas de las distribuciones de probabilidad de los ejemplos 5 y 6 se construyeron de manera similar y se muestran en las figuras 14 y 15, respectivamente.

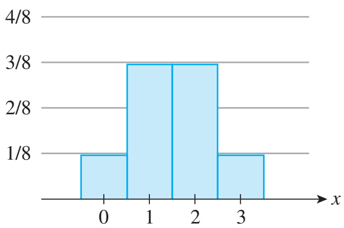


FIGURA 13
Histograma que muestra la distribución de probabilidad para el número de caras que ocurren en tres lanzamientos de monedas.

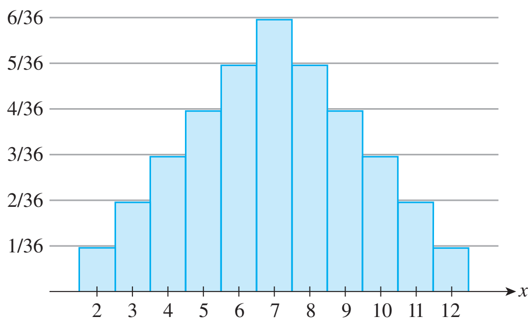


FIGURA 14
Histograma que muestra la distribución de probabilidad para la suma de las caras superiores de dos dados.

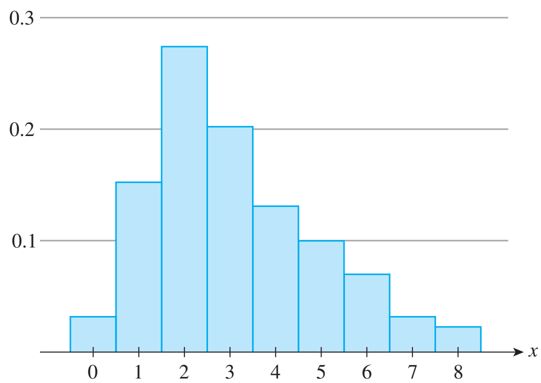


FIGURA 15
Histograma que muestra la distribución de probabilidad para el número de automóviles que esperan en la fila.

Observe que en cada histograma el área de un rectángulo asociado a un valor de una variable aleatoria X da precisamente la probabilidad asociada con el valor de X. Esto se deduce porque cada rectángulo de este tipo, por construcción, tiene un ancho de 1 y una altura que corresponde a la probabilidad asociada con el valor de la variable aleatoria. Otra de las consecuencias derivadas del método de construcción de un histograma es que *la probabilidad asociada con más de un valor de la variable aleatoria X está dada por la suma de las áreas de los rectángulos asociados a los valores de X*. Por ejemplo, en el experimento del lanzamiento de monedas del ejemplo 1, el evento de obtener por lo menos dos caras, que corresponde al evento $(X = 2)$ o $(X = 3)$, está dado por

$$P(X = 2) + P(X = 3)$$

y puede obtenerse del histograma representado en la figura 13 al añadir las áreas asociadas con los valores 2 y 3 de la variable X. Obtenemos

$$P(X = 2) + P(X = 3) = (1)\left(\frac{3}{8}\right) + (1)\left(\frac{1}{8}\right) = \frac{1}{2}$$

Este resultado proporciona un método de cálculo de las probabilidades de los eventos directamente del conocimiento de un histograma de la probabilidad de distribución de la variable aleatoria asociada con el experimento.

EJEMPLO 7 Suponga que la distribución de probabilidad de una variable aleatoria X se representa por medio de un histograma mostrado en la figura 16. Identifique la parte del histograma cuya área da la probabilidad $P(10 \leq X \leq 20)$.

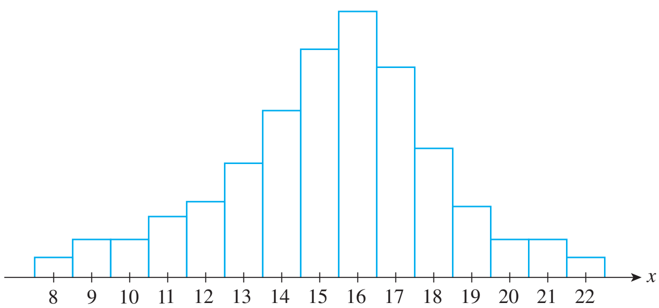


FIGURA **16**

Solución El evento $(10 \leq X \leq 20)$ es el evento que consiste en los resultados relacionados con los valores 10, 11, 12, . . . , 20 de la variable aleatoria X. La probabilidad de este evento $P(10 \leq X \leq 20)$, por consiguiente, está dada por el área con color del histograma de la figura 17.

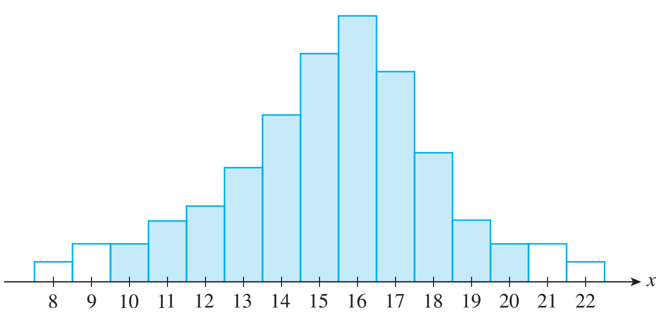


FIGURA **17**
$P(10 \leq X \leq 20)$

■

8.4 Ejercicios de autoevaluación

1. Tres bolas son seleccionadas al azar, sin reemplazarlas, de una urna que contiene cuatro bolas negras y cinco blancas. La variable aleatoria X es el número de bolas negras extraídas.
   a. Haga una lista de los resultados del experimento.
   b. Calcule el valor asignado a cada resultado del experimento por la variable aleatoria X.
   c. Encuentre el evento que consiste en los resultados a los que X ha asignado un valor de 2.

2. Los datos siguientes, extraídos de los registros de la biblioteca Public Library, proporcionan el número de libros prestados a los miembros de la biblioteca durante un periodo de 1 mes:

Libros	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Frecuencia de ocurrencia	780	300	412	205	98	54	57	30	6

   a. Encuentre la distribución de probabilidad de la variable aleatoria X, donde X denota el número de libros revisados durante un periodo de 1 mes por un miembro elegido al azar.
   b. Elabore el histograma que representa esta distribución de probabilidad.

Las soluciones de los ejercicios de autoevaluación 8.4 se encuentra en la página 501.

8.4 Preguntas de concepto

1. ¿Qué es una variable aleatoria? Proporcione un ejemplo.
2. Proporcione un ejemplo de (a) una variable aleatoria discreta finita, (b) una variable aleatoria discreta infinita y (c) una variable aleatoria continua.
3. Suponga que le proporcionan la distribución de probabilidad para una variable aleatoria X. Explique cómo se construye un histograma para esta distribución de probabilidad. ¿Qué representa el área de cada rectángulo en el histograma?

8.4 Ejercicios

1. Tres bolas son seleccionadas al azar, sin reemplazarlas, de una urna que contiene cuatro bolas verdes y seis rojas. Sea la variable aleatoria X el número de bolas verdes extraídas.
   a. Elabore una lista de los resultados del experimento.
   b. Calcule el valor asignado a cada resultado del experimento por la variable aleatoria X.
   c. Encuentre el evento que consiste en los resultados a los cuales X ha asignado un valor de 3.

2. Una moneda es lanzada cuatro veces. Sea la variable aleatoria X el número de cruces que ocurren.
   a. Elabore una lista de los resultados del experimento.
   b. Calcule el valor asignado a cada resultado del experimento por la variable aleatoria X.
   c. Encuentre el evento que consiste en los resultados a los cuales X ha asignado un valor de 2.

3. Un dado es lanzado en forma reiterada hasta que cae un 6 en la cara superior. La variable aleatoria X denota el número de veces que se lanza el dado. ¿Cuáles son los valores que X puede asumir?

4. Se extrae un naipe a la vez, sin reemplazarlo, de una baraja de 52 naipes bien barajada hasta obtener un as. Sea X la variable aleatoria que da el número de naipes extraídos. ¿Qué valores puede asumir X?

5. Sea X la variable aleatoria que da la suma de los números que cae en la cara superior cuando se lanzan dos dados sin truco. Encuentre $P(X = 7)$.

6. Dos naipes se extraen de una baraja de 52 naipes bien barajada. X denota el número de ases obtenidos. Calcule $P(X = 2)$.

En los ejercicios 7-12 proporcione el rango de valores que la variable aleatoria *X* puede asumir y clasifique la variable aleatoria como discreta finita, discreta infinita o continua.

7. X = el número de veces que un dado es lanzado hasta que aparece un 2
8. X = el número de relojes defectuosos en una muestra de 8 relojes
9. X = la distancia en millas que una persona viaja para ir y regresar del trabajo
10. X = el número de horas que un niño ve televisión un día determinado
11. X = el número de veces que un contador toma el examen CP antes de aprobar
12. X = el número de niños en una familia de cuatro hijos
13. La distribución de probabilidad de la variable aleatoria X se muestra en la tabla siguiente:

x	-10	-5	0	5	10	15	20
$P(X = x)$	.20	.15	.05	.1	.25	.1	.15

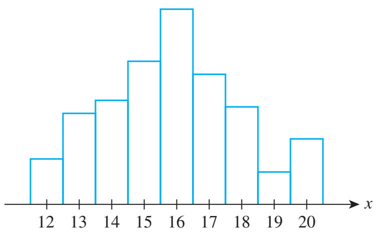
   Calcule:
   a. $P(X = -10)$
   b. $P(X \geq 5)$
   c. $P(-5 \leq X \leq 5)$
   d. $P(X \leq 20)$

14. La distribución de probabilidad de la variable aleatoria X se muestra en la tabla siguiente:

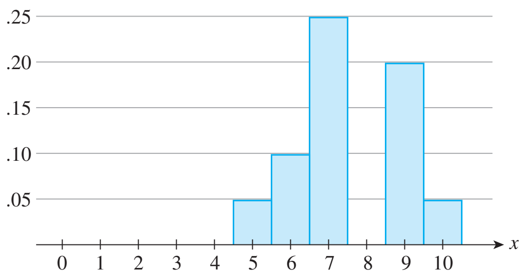
x	-5	-3	-2	0	2	3
$P(X = x)$	.17	.13	.33	.16	.11	.10

Calcule:
a. $P(X \leq 0)$ **b.** $P(X \leq -3)$
c. $P(-2 \leq X \leq 2)$

15. Suponga que la distribución de probabilidad de una variable aleatoria X se representa por el histograma siguiente. Sombree la parte del histograma cuya área da la probabilidad $P(17 \leq X \leq 20)$.



16. Exámenes Un examen que consiste en 10 preguntas de verdadero o falso fue tomado por una clase de 100 estudiantes. La distribución de probabilidad de la variable aleatoria X, donde X denota el número de preguntas respondidas correctamente por un estudiante elegido al azar, se representó mediante el histograma siguiente. Falta el rectángulo con la base centrada en el número 8. ¿Cuál debe ser la altura de este rectángulo?



17. Dos dados son lanzados. Sea la variable aleatoria X el número que cae en la cara superior del primer dado y Y el número que cae en la cara superior del segundo dado.
a. Encuentre las distribuciones de probabilidad de X y Y.
b. Encuentre la distribución de probabilidad de $X + Y$.

18. Distribución de familias por tamaño La Public Housing Authority realizó una encuesta a 1,000 familias en cierta comunidad para determinar la distribución de las familias por tamaño. Los resultados son los siguientes:

Tamaño de la familia	2	3	4	5	6	7	8
Frecuencia de ocurrencia	350	200	245	125	66	10	4

a. Encuentre la distribución de probabilidad de la variable aleatoria X, donde X denota el número de personas en una familia elegida al azar.
b. Elabore el histograma correspondiente a la distribución de probabilidad encontrada en el inciso (a).

19. Filas de espera Los datos siguientes se obtuvieron de un estudio realizado por el gerente de SavMore Supermarket. En él se observó el número de clientes que espera en la fila de la caja rápida al principio de cada intervalo de 3 minutos entre las 9 a.m. y 12 p.m. del sábado.

Clientes	0	1	2	3	4	
Frecuencia de ocurrencia	1	4	2	7	14	
Clientes	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
Frecuencia de ocurrencia	8	10	6	3	4	1

a. Encuentre la distribución de probabilidad de la variable aleatoria X, donde la X denota el número de clientes que se observó en la fila de espera.
b. Elabore el histograma que representa la distribución de probabilidad.

20. Tasas del mercado de dinero Las tasas de interés pagadas por 30 instituciones financieras, cierto día, por cuentas de depósito del mercado de dinero se muestran en la tabla siguiente:

Tasa, %	6	6.25	6.55	6.56
Instituciones	1	7	7	1
Tasa, %	**6.58**	**6.60**	**6.65**	**6.85**
Instituciones	1	8	3	2

La variable aleatoria X denota la tasa de interés pagada por una institución financiera elegida al azar sobre sus cuentas de depósito del mercado de dinero. Encuentre la distribución de probabilidad asociada con estos datos.

21. Pilotos de televisión Después de un sondeo privado de un nuevo programa piloto de televisión, se pidió a los miembros de la audiencia que calificaran el nuevo programa en una escala de 1 a 10 (siendo 10 la calificación más alta). De un grupo de 140 personas, se obtuvieron las respuestas siguientes:

Calificación	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Frecuencia de ocurrencia	1	4	3	11	23	21	28	29	16	4

La variable aleatoria X denota la calificación dada al programa por un miembro de la audiencia elegido al azar. Encuentre la distribución de probabilidad asociada con estos datos.

22. **POBLACIÓN ESTADOUNIDENSE POR EDAD** La tabla siguiente da la distribución de edades de 2002 para la población de Estados Unidos:

Grupo	1	2	3	4	5	6
Edad (en años)	Menos de 5	5-19	20-24	25-44	45-64	65 y mayores
Número (en miles)	19,527	59,716	18,611	83,009	66,088	33,590

La variable aleatoria X denota un grupo de edades elegido al azar dentro de la población. Encuentre la distribución de probabilidad asociada con estos datos.

Fuente: U.S. Census Bureau

En los ejercicios 23 y 24 determine si el enunciado es verdadero o falso. Si es verdadero, explique por qué lo es. Si es falso, dé un ejemplo para mostrar por qué lo es.

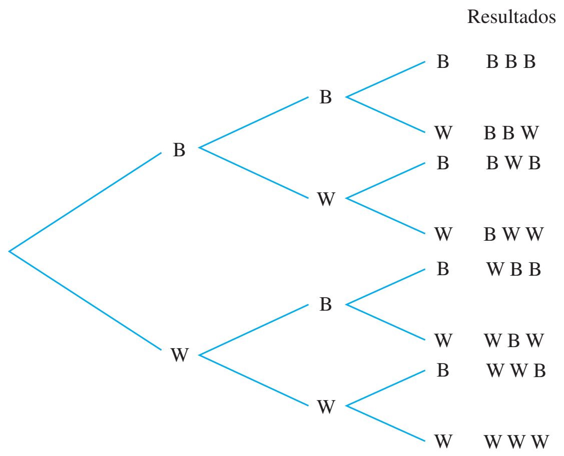
23. Suponga que X es una variable aleatoria discreta finita que asume los valores $x_1, x_2, \ldots, x_n$ y las probabilidades asociadas $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Por tanto, $p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1$.

24. El área de un histograma asociado con una distribución de probabilidad es un número entre 0 y 1.

8.4 Soluciones de los ejercicios de autoevaluación

1. **a.** Usando el diagrama de árbol siguiente, vemos que los resultados del experimento son

$$S = \{\text{BBB, BBW, BWB, BWW, WBB, WBW, WWB, WWW}\}$$



b. Usando los resultados del inciso (a), se obtienen los valores asignados a los resultados del experimento como sigue:

Resultado	BBB	BBW	BWB	BWW	WBB	WBW	WWB	WWW
Valor	3	2	2	1	2	1	1	0

c. El evento requerido es {BBW, BWB, WBB}.

2. **a.** Cada número de la fila inferior de la tabla dada entre 1,942 se divide (la suma de estos números) para obtener las probabilidades asociadas con la variable aleatoria X cuando X toma los valores 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 y 8. Por ejemplo,

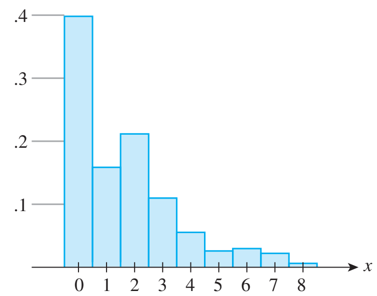
$$P(X = 0) = \frac{780}{1{,}942} \approx .402$$

$$P(X = 1) = \frac{300}{1{,}942} \approx .154$$

La distribución de probabilidad y el histograma requeridos están a continuación.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$P(X = x)$	.402	.154	.212	.106	.050	.028	.029	.015	.003

b.



USO DE LA TECNOLOGÍA

Graficación de un histograma

Calculadora graficadora

Para trazar el histograma de un conjunto de datos determinado, se puede usar una calculadora graficadora como ilustra el ejemplo siguiente.

EJEMPLO DE APLICACIÓN 1 Una encuesta aplicada a 90,000 familias en 1995 reveló el siguiente porcentaje de mujeres que usa una talla de calzado dentro de los rangos dados.

Talla de calzado	<5	$5\text{-}5\frac{1}{2}$	$6\text{-}6\frac{1}{2}$	$7\text{-}7\frac{1}{2}$	$8\text{-}8\frac{1}{2}$	$9\text{-}9\frac{1}{2}$	$10\text{-}10\frac{1}{2}$	$>10\frac{1}{2}$
Mujeres, %	1	5	15	27	29	14	7	2

Fuente: Encuesta de Percepción del Mercado del Calzado

Sea X la variable aleatoria que toma los valores 1 a 8, donde 1 corresponde a una talla de calzado menor que 5, 2 corresponde a una talla de calzado de $5\text{-}5\frac{1}{2}$, etcétera.

a. Elabore un histograma para los datos.
b. ¿Qué porcentaje de mujeres en la encuesta usa una talla de calzado dentro de los rangos de $7\text{-}7\frac{1}{2}$ u $8\text{-}8\frac{1}{2}$?

Solución

a. Introduzca los valores de X como $x_1 = 1, x_2 = 2, \ldots, x_8 = 8$ y los valores correspondientes de Y como $y_1, = 1, y_2 = 5, \ldots, y_8 = 2$. Luego, usando la función **DRAW** del menú Statistics, trazamos el histograma mostrado en la figura T1.

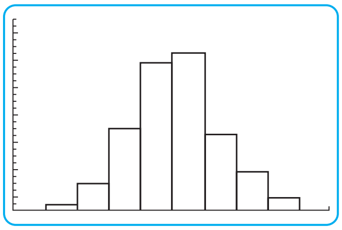


FIGURA **T1**
El histograma para los datos dados, usando la ventana de visualización $[0, 9] \times [0, 35]$.

b. La probabilidad de que una mujer que participa en la encuesta use una talla de calzado dentro de los rangos $7\text{-}7\frac{1}{2}$ u $8\text{-}8\frac{1}{2}$ está dado por

$$P(X = 4) + P(X = 5) = .27 + .29 = .56$$

Esto indica que 56% de las mujeres usa una talla dentro de los rangos $7\text{-}7\frac{1}{2}$ u $8\text{-}8\frac{1}{2}$ ■

Excel

Excel se puede usar para elaborar el histograma para un conjunto de datos determinado, como lo ilustra el ejemplo siguiente.

EJEMPLO DE APLICACIÓN 2 Una encuesta aplicada a 90,000 familias en 1995 reveló el porcentaje siguiente de mujeres que usa una talla de calzado dentro de los rangos dados.

Talla de calzado	<5	$5\text{-}5\frac{1}{2}$	$6\text{-}6\frac{1}{2}$	$7\text{-}7\frac{1}{2}$	$8\text{-}8\frac{1}{2}$	$9\text{-}9\frac{1}{2}$	$10\text{-}10\frac{1}{2}$	$>10\frac{1}{2}$
Mujeres, %	1	5	15	27	29	14	7	2

Fuente: Encuesta de Percepción del Mercado del Calzado

	A	B	C
1	X	Frecuencia	Probabilidad
2	1	1	0.01
3	2	5	0.05
4	3	15	0.15
5	4	27	0.27
6	5	29	0.29
7	6	14	0.14
8	7	7	0.07
9	8	2	0.02
10		100	

FIGURA T2
Hoja de cálculo completada para el ejemplo 2.

Sea X la variable aleatoria que toma los valores de 1 a 8, donde 1 corresponde a una talla de calzado menor que 5, 2 corresponde a una talla de calzado de 5-5$\frac{1}{2}$, y así sucesivamente.

a. Elabore un histograma para los datos.
b. ¿Qué porcentaje de mujeres en la encuesta usan una talla de calzado dentro de los rangos 7-7$\frac{1}{2}$ u 8-8$\frac{1}{2}$?

Solución

a. Introduzca los datos dados en las columnas A y B en una hoja de cálculo, como muestra la figura T2. Resalte los datos de la columna B y seleccione $\boxed{\Sigma}$ de la barra de herramientas. La suma de los números de esta columna (100) aparecerá en la celda B10. En la celda C2, teclee `=B2/100` y luego presione **Enter**. Para extender la fórmula a la celda C9, mueva el puntero al cuadro negro pequeño en la esquina inferior derecha de la celda C2. Arrastre el símbolo + negro que aparece (en la esquina inferior derecha de la celda C2) hasta la celda C9 y luego suéltela. La distribución de probabilidad mostrada en las celdas C2 a C9 aparecerá entonces en su hoja de cálculo. Luego resalte los datos de la columna Probability y seleccione **Chart Wizard** de la barra de herramientas. Seleccione **Column** bajo Chart type: y haga clic en **Next** dos veces. Bajo la ficha Titles, introduzca `Histogram, X` y `Probability` en los cuadros apropiados. Bajo la ficha Legend, haga clic en la casilla **Show legend** para desactivarla. Luego haga clic en **Finish**. Aparecerá el histograma mostrado en la figura T3.

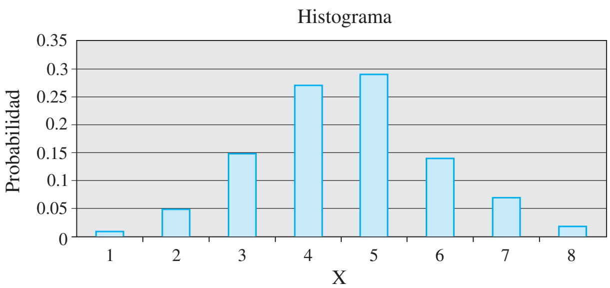


FIGURA T3
El histograma para la variable aleatoria *X*.

b. La probabilidad de que una mujer que participa en la encuesta use una talla de calzado dentro de los rangos de 7-7$\frac{1}{2}$ u 8-8$\frac{1}{2}$ está dada por

$$P(X = 4) + P(X = 5) = .27 + .29 = .56$$

Esto indica que 56% de las mujeres usa una talla de calzado dentro de los rangos 7-7$\frac{1}{2}$ u 8-8$\frac{1}{2}$

Nota: La palabras o caracteres resaltados con negritas y encerrados dentro de un recuadro (por ejemplo, **Enter**) indican que se requiere una acción (hacer clic, seleccionar o presionar). Las palabras o caracteres impresos en azul (por ejemplo, Chart sub-type:) indican las palabras o caracteres que aparecen en la pantalla. Las palabras o caracteres impresos en una fuente tipo máquina de escribir (por ejemplo, `=(-2/3)*A2+2`) indican las palabras o caracteres que deben teclearse e introducirse).

EJERCICIOS CON TECNOLOGÍA

1. Elabore la gráfica del histograma asociado con los datos proporcionados en la tabla 3, página 495. Compare su gráfica con aquella dada en la figura 13, página 497.
2. Elabore la gráfica del histograma asociado con los datos dados en el ejercicio 18, página 500.
3. Elabore la gráfica del histograma asociado con los datos dados en el ejercicio 19, página 500.
4. Elabore la gráfica del histograma asociado con los datos dados en el ejercicio 21, página 500.

8.5 Valor esperado

Media

El valor medio de un conjunto de números es una noción familiar para la mayoría de las personas. Por ejemplo, para calcular el promedio de cuatro números

$$12,\ 16,\ 23,\ 37$$

sencillamente se suman estos números y la suma resultante se divide entre 4, dando el promedio requerido como

$$\frac{12 + 16 + 23 + 37}{4} = \frac{88}{4} = 22$$

En general, tenemos la definición siguiente.

Promedio o media

El **promedio**, o **media**, de n números

$$x_1, x_2, \ldots, x_n$$

es $\bar{x}$ (se lee "x barra"), donde

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$$

TABLA 9

Automóviles	Frecuencia de ocurrencia
0	2
1	9
2	16
3	12
4	8
5	6
6	4
7	2
8	1

EJEMPLO DE APLICACIÓN 1 Tiempos de espera Remítase al ejemplo 6, sección 8.4. Determine el número medio de automóviles que está en la fila de los que esperan usar el cajero automático del banco al principio de cada intervalo de 2 minutos durante el periodo en cuestión.

Solución El número de automóviles, junto con su frecuencia de ocurrencia correspondiente, se reproducen en la tabla 9. Observe que el número 0 (de automóviles) ocurre dos veces, el número 1 ocurre 9 veces, etc. Hay en total

$$2 + 9 + 16 + 12 + 8 + 6 + 4 + 2 + 1 = 60$$

números a promediar. Por consiguiente, el promedio requerido está dado por

$$\frac{(0 \cdot 2) + (1 \cdot 9) + (2 \cdot 16) + (3 \cdot 12) + (4 \cdot 8) + (5 \cdot 6) + (6 \cdot 4) + (7 \cdot 2) + (8 \cdot 1)}{60} \approx 3.1 \qquad \textbf{(10)}$$

o aproximadamente 3.1 automóviles. ■

Valor esperado

Reconsideremos la expresión en el lado izquierdo de la ecuación (10), lo cual da el promedio de la distribución de frecuencia mostrada en la tabla 9. Al dividir cada término por el denominador, la expresión puede rescribirse en la forma

$$0 \cdot \left(\frac{2}{60}\right) + 1 \cdot \left(\frac{9}{60}\right) + 2 \cdot \left(\frac{16}{60}\right) + 3 \cdot \left(\frac{12}{60}\right) + 4 \cdot \left(\frac{8}{60}\right) + 5 \cdot \left(\frac{6}{60}\right)$$
$$+ 6 \cdot \left(\frac{4}{60}\right) + 7 \cdot \left(\frac{2}{60}\right) + 8 \cdot \left(\frac{1}{60}\right)$$

Observe que cada término en la suma es un producto de dos factores; el primero es el valor asumido por la variable aleatoria X, donde X denota el número de automóviles que espera en fila, y el segundo factor es sólo la probabilidad asociada con ese valor de la variable aleatoria. Esta observación sugiere el método general siguiente para calcular el valor esperado (es decir, el promedio o la media) de una variable aleatoria X que asume un número finito de valores del conocimiento de su distribución de probabilidad.

Valor esperado de una variable aleatoria *X*

X denota una variable aleatoria que asume los valores $x_1, x_2, \ldots, x_n$ con las probabilidades asociadas $p_1, p_2, \ldots, p_n$, respectivamente. Por tanto, el **valor esperado** de X, denotado por $E(X)$, está dado por

$$E(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + \cdots + x_np_n \tag{11}$$

Nota Los números $x_1, x_2, \ldots, x_n$ pueden ser positivos, cero o negativos. Por ejemplo, un número de este tipo podría ser positivo si representa una utilidad y negativo si representa una pérdida. ■

TABLA **10**

Distribución de probabilidad

x	$P(X = x)$
0	.03
1	.15
2	.27
3	.20
4	.13
5	.10
6	.07
7	.03
8	.02

EJEMPLO DE APLICACIÓN 2 Tiempos de espera Resolver el ejemplo 1 usando la distribución de probabilidad asociada con el experimento, la cual se reproduce en la tabla 10.

Solución Sea X el número de automóviles que espera en la fila. Por tanto, el número medio de automóviles que espera en la fila está dado por el valor esperado de X, es decir, por

$$\begin{aligned} E(X) &= (0)(0.3) + (1)(.15) + (2)(.27) + (3)(.20) + (4)(.13) \\ &\quad + (5)(.10) + (6)(.07) + (7)(.03) + (8)(.02) \\ &= 3.1 \text{ automóviles} \end{aligned}$$

lo cual concuerda con el resultado anterior. ■

El valor esperado de una variable aleatoria X es una medida de tendencia central de la distribución de probabilidad asociada con X. En ensayos repetidos de un experimento con la variable aleatoria X, el promedio de los valores observados de X se acerca cada vez más al valor esperado de X a medida que el número de ensayos va en aumento. Desde el punto de vista geométrico, el valor esperado de una variable aleatoria X tiene la siguiente interpretación simple: si se hace una lámina con el histograma de una distribución de probabilidad asociada con una variable aleatoria X, entonces el valor esperado de X corresponde al punto sobre la base de la lámina, en el cual la lámina se equilibrará a la perfección cuando el punto esté directamente sobre un fulcro (figura 18).

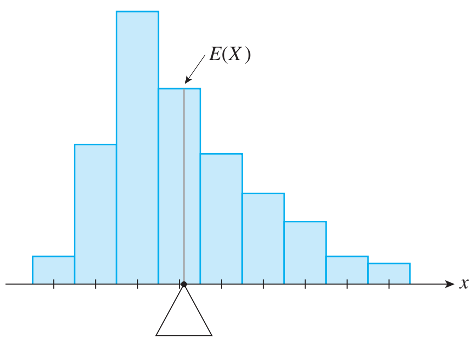


FIGURA **18**
Valor esperado de una variable aleatoria X

EJEMPLO 3 Sea X la variable aleatoria que da la suma de los números que cae en las caras superiores de dos dados sin truco que son lanzados. Calcule el valor esperado, $E(X)$ de X.

Solución La distribución de probabilidad de X, reproducida en la tabla 11, se calculó en el ejemplo 5, sección 8.4. Usando este resultado se obtiene

$$\begin{aligned} E(X) &= 2\left(\frac{1}{36}\right) + 3\left(\frac{2}{36}\right) + 4\left(\frac{3}{36}\right) + 5\left(\frac{4}{36}\right) + 6\left(\frac{5}{36}\right) + 7\left(\frac{6}{36}\right) \\ &\quad + 8\left(\frac{5}{36}\right) + 9\left(\frac{4}{36}\right) + 10\left(\frac{3}{36}\right) + 11\left(\frac{2}{36}\right) + 12\left(\frac{1}{36}\right) \\ &= 7 \end{aligned}$$

TABLA 11

Distribución de probabilidad

x	$P(X = x)$
2	$\frac{1}{36}$
3	$\frac{2}{36}$
4	$\frac{3}{36}$
5	$\frac{4}{36}$
6	$\frac{5}{36}$
7	$\frac{6}{36}$
8	$\frac{5}{36}$
9	$\frac{4}{36}$
10	$\frac{3}{36}$
11	$\frac{2}{36}$
12	$\frac{1}{36}$

Note que, debido a la simetría del histograma de la distribución de probabilidad con respecto a la línea vertical $x = 7$, el resultado podría haberse obtenido sencillamente al inspeccionar la figura 19.

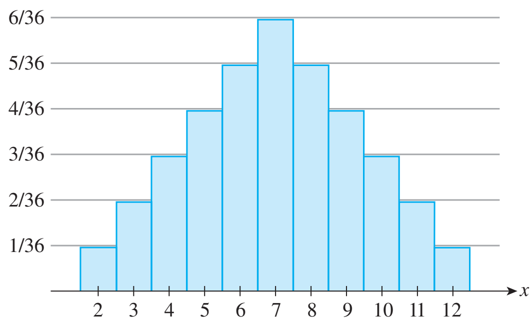


FIGURA 19
Histograma que muestra la distribución de probabilidad para la suma de los números que caen la cara superior de dos dados.

El ejemplo siguiente muestra cómo podemos usar el concepto de valor esperado como ayuda para tomar la mejor decisión de inversión.

VIDEO

EJEMPLO DE APLICACIÓN 4 Utilidades esperadas Un grupo de capital de riesgo intenta comprar uno de dos moteles que actualmente se ofrecen en venta en cierta ciudad. Las condiciones de venta de los dos moteles son similares, aun cuando el Regina Inn tiene 52 habitaciones y está en una ubicación ligeramente mejor que el Merlin Motor Lodge, el cual tiene 60 habitaciones. Los registros obtenidos para cada motel revelan las tasas de ocupación, con las probabilidades correspondientes, durante la temporada de turismo de mayo a septiembre, que se muestran en las tablas siguientes.

REGINA INN					
Tasa de ocupación	.80	.85	.90	.95	1.00
Probabilidad	.19	.22	.31	.23	.05

MERLIN MOTOR LODGE						
Tasa de ocupación	.75	.80	.85	.90	.95	1.00
Probabilidad	.35	.21	.18	.15	.09	.02

La utilidad media por día para cada habitación ocupada en el Regina Inn es \$20, mientras que la utilidad media por cada habitación ocupada en el Merlin Motor Lodge es \$18.

a. Encuentre el número medio de habitaciones ocupadas por día en cada motel.
b. Si el objetivo de los inversionistas es comprar el motel que genera la utilidad diaria más alta, ¿cuál motel deben comprar? (Compare la utilidad diaria esperada de los dos moteles).

Solución

a. Sea X la tasa de ocupación en el Regina Inn. Por tanto, la tasa de ocupación media diaria en el Regina Inn está dada por el valor esperado de X, es decir, está dada por

$$\begin{aligned} E(X) &= (.80)(.19) + (.85)(.22) + (.90)(.31) \\ &\quad + (.95)(.23) + (1.00)(.05) \\ &= .8865 \end{aligned}$$

El número medio de habitaciones ocupadas por día en el Regina es

$$(.8865)(52) \approx 46.1$$

o aproximadamente 46.1 habitaciones. De modo parecido, sea Y la tasa de ocupación en el Merlin Motor Lodge, por tanto tenemos

$$\begin{aligned} E(Y) &= (.75)(.35) + (.80)(.21) + (.85)(.18) + (.90)(.15) \\ &\quad + (.95)(.09) + (1.00)\,(.02) \\ &= .8240 \end{aligned}$$

El número medio de habitaciones ocupadas por día en el Merlin es

$$(.8240)(60) \approx 49.4$$

o aproximadamente 49.4 habitaciones.

b. La utilidad diaria esperada en el Regina está dada por

$$(46.1)(20) = 922$$

o \$922. La utilidad diaria esperada en el Merlin está dada por

$$(49.4)(18) \approx 889$$

o \$889. A partir de estos resultados concluimos que el grupo de capital de riesgo debe comprar el Regina Inn, el cual se espera que produzca una utilidad diaria más alta. ■

EJEMPLO DE APLICACIÓN 5 **Rifa** El Island Club está organizando una rifa para recaudar fondos. Se han vendido 10 mil boletos a \$2 cada uno. Habrá un primer premio de \$3,000, 3 segundos premios de \$1,000 cada uno, 5 terceros premios de \$500 cada uno y 20 premios de consolación de \$100 cada uno. Sea X las ganancias netas (es decir, las ganancias menores que el costo del boleto) asociado con un boleto, encuentre $E(X)$. Interprete sus resultados.

Solución Los valores asumidos por X son $(0 - 2)$, $(100 - 2)$, $(500 - 2)$, $(1{,}000 - 2)$ y $(3{,}000 - 2)$, es decir, -2, 98, 498, 998 y 2,998, los cuales corresponden, respectivamente, al valor de un boleto perdido, un premio de consolación, etc. La distribución de probabilidad de X puede calcularse de la manera usual y aparece en la tabla 12. Usando la tabla, obtenemos

TABLA **12**

Distribución de probabilidad de una rifa

x	$P(X = x)$
-2	.9971
98	.0020
498	.0005
998	.0003
2,998	.0001

$$\begin{aligned} E(X) &= (-2)(.9971) + 98(.0020) + 498(.0005) \\ &\quad + 998(.0003) + 2{,}998(.0001) \\ &= -0.95 \end{aligned}$$

Este valor esperado da la pérdida media a largo plazo (ganancia negativa) del poseedor de un boleto; es decir, si uno participó en una rifa de este tipo al comprar un boleto cada vez, a largo plazo, uno puede esperar perder, en promedio, 95 centavos por rifa. ■

EJEMPLO DE APLICACIÓN 6 Ruleta En el juego de la ruleta según se juega en los casinos de Las Vegas, la rueda se divide en 38 compartimentos numerados del 1 al 36, 0 y 00. Una mitad los números del 1 al 36 son rojos (azules en el libro), la otra mitad negros y el 0 y el 00 grises (figura 20). De los muchos tipos de apuestas que se colocan, un tipo consiste en apostar al color del número ganador resultante. Por ejemplo, podemos colocar cierta suma de dinero en el *azul*. Si el número ganador es azul, ganamos un monto igual a la apuesta colocada y el monto de la apuesta se devuelve; de lo contrario, perdemos el monto de la apuesta. Calcule el valor esperado de las ganancias sobre una apuesta de $1 colocada sobre el *azul*.

FIGURA **20**
Rueda de la ruleta.

Solución Sea X una variable aleatoria cuyos valores son 1 y -1, los cuales corresponden a ganar y perder. Las probabilidades asociadas con los valores 1 y -1 son $\frac{18}{38}$ y $\frac{20}{38}$, respectivamente. Por consiguiente, el valor esperado está dado por

$$\begin{aligned} E(X) &= 1\left(\frac{18}{38}\right) + (-1)\left(\frac{20}{38}\right) = -\frac{2}{38} \\ &\approx -0.053 \end{aligned}$$

Por tanto, si se coloca una apuesta de $1 en el *azul* una y otra vez, se puede esperar perder, en promedio, aproximadamente 5 centavos por apuesta a largo plazo. ■

Los ejemplos 5 y 6 ilustran juegos que no son "justos". Desde luego, la mayoría de los participantes en estos juegos están conscientes de este hecho y participan en ellos por otras razones. En un juego justo, ninguna de las partes tiene una ventaja, situación que se traduce en la condición $E(X) = 0$, donde X toma los valores de las ganancias de un jugador.

EJEMPLO DE APLICACIÓN 7 Juegos justos Mike y Bill juegan cartas con una baraja estándar de 52 naipes. Mike extrae un naipe de la baraja bien barajada y recibe A dólares de Bill si el naipe que extrajo es de diamantes; de lo contrario, Mike paga a Bill un dólar. Determine el valor de A si el juego es justo.

Solución Sea X una variable aleatoria cuyos valores se asocian con ganancias de Mike. Por tanto, X toma el valor A con una probabilidad $P(X = A) = \frac{1}{4}$ (ya que sólo hay 13 diamantes en la baraja) si Mike gana y toma el valor -1 con probabilidad $P(X = -1) = \frac{3}{4}$ si Mike pierde. Dado que se supone que el juego sea justo, el valor esperado $E(X)$ de las ganancias de Mike debe ser igual a cero, es decir,

$$E(X) = A\left(\frac{1}{4}\right) + (-1)\left(\frac{3}{4}\right) = 0$$

Al resolver esta ecuación para A se obtiene $A = 3$. Así, el juego de cartas será justo si Bill hace un pago de $3 cuando Mike extraiga un naipe de diamantes. ■

Pronósticos (posibilidades)

En el lenguaje cotidiano, la probabilidad de que ocurra un evento suele expresarse en términos de *pronósticos a favor* (o *pronósticos en contra*) de la ocurrencia del evento. Por ejemplo, a menudo se escuchan declaraciones como "los pronósticos de que los Dodgers ganen la Serie Mundial esta temporada son 7 a 5" y "los pronósticos de que no llueva mañana son 3 a 2". Retomaremos estos ejemplos más adelante. Pero primero echemos un vistazo a una definición que une estos dos conceptos.

Pronósticos a favor y pronósticos en contra

Si $P(E)$ es la probabilidad de que un evento E ocurra, entonces

1. Los pronósticos a favor de que E ocurra son

$$\frac{P(E)}{1 - P(E)} = \frac{P(E)}{P(E^c)} \qquad [P(E) \neq 1] \tag{12a}$$

2. Los pronósticos en contra de que E ocurra son

$$\frac{1 - P(E)}{P(E)} = \frac{P(E^c)}{P(E)} \qquad [P(E) \neq 1] \tag{12b}$$

Notas

1. Los pronósticos a favor de que ocurra un evento se obtienen mediante la razón de la probabilidad de que el evento se produzca a la probabilidad de que el evento no se produzca. Los pronósticos en contra de que ocurra un evento se obtienen por el recíproco de los pronósticos a favor de la ocurrencia del evento.

2. Siempre que sea posible, los pronósticos se expresan como razones de números enteros. Si los pronósticos a favor de E son $\frac{a}{b}$, decimos que los pronósticos a favor de E son a a b. Si los pronósticos en contra de que E ocurra son $\frac{b}{a}$, decimos que los pronósticos en contra de E son b a a. ■

EJEMPLO DE APLICACIÓN 8 Ruleta Calcule los pronósticos a favor de ganar una apuesta al *azul* en una ruleta estadounidense. ¿Cuáles son los pronósticos en contra de ganar una apuesta al *azul*?

Solución La probabilidad de ganar una apuesta aquí (la probabilidad de que la bola se detenga en un compartimiento azul), está dada por $P = \frac{18}{38}$. Por consiguiente, usando la fórmula (12a), vemos que los pronósticos a favor de ganar una apuesta al *azul* son

$$\frac{P(E)}{1 - P(E)} = \frac{\frac{18}{38}}{1 - \frac{18}{38}} \qquad \text{E, evento de ganar una apuesta al azul}$$

$$= \frac{\frac{18}{38}}{\frac{38 - 18}{38}}$$

$$= \frac{18}{38} \cdot \frac{38}{20}$$

$$= \frac{18}{20} = \frac{9}{10}$$

o 9 a 10. Luego, usando la ecuación (12b), vemos que los pronósticos en contra de ganar una apuesta al *azul* son $\frac{10}{9}$, o 10 a 9. ■

PORTAFOLIO Ann-Marie Martz

PUESTO Director de proyectos senior
INSTITUCIÓN GfK ARBOR

GfK ARBOR, LLC es una firma de investigación de mercados y consultoría. Desarrollamos y aplicamos análisis y metodologías de investigación avanzadas a una amplia gama de problemas de marketing e investigación de mercados. Hemos proporcionado servicios a varias de las corporaciones más grandes de Estados Unidos, así como de muchos otros países del mundo que atienden una amplia gama de industrias. Las estadísticas desempeñan un papel importante en ayudar a nuestros clientes a encontrar soluciones a sus problemas de marketing.

Un fabricante de una marca de jugo quería saber cómo se desempeñaba su marca en general y cómo diversos factores en el mercado afectaban la percepción y el uso de su marca por parte de los consumidores, así como la categoría de jugos en general. Este fabricante estaba iniciando una campaña publicitaria nueva, con la introducción de envases y sabores nuevos, y había reducido el contenido de jugo de su producto.

Se realizó un estudio de seguimiento de un año de duración por Internet con una muestra de consumidores de jugo. Se solicitó a los consumidores sus opiniones y percepciones, y se les preguntó cuáles marcas de jugo consumían.

Utilizando la estadística, pudimos determinar con certeza si el desempeño general de la marca de jugos había mejorado o empeorado con el tiempo. Las calificaciones de opinión y la conciencia de marca, así como los niveles de consumo anteriores a la nueva campaña de publicidad, los envases, sabores y la nueva formulación del artículo producido, se compararon con los niveles de consumo posteriores a estos acontecimientos. A menudo vemos movimiento o cambio con el tiempo, pero estos cambios o diferencias deben ser estadísticamente significativas para nosotros, a fin de decir que de hecho ha habido un cambio.

La información obtenida de esta investigación dio al fabricante de jugo dirección para la publicidad futura y la capacidad de adaptar su publicidad para incluir elementos que atraen a los consumidores y los motivan a comprar esta marca de jugo en particular. El fabricante pudo tomar decisiones informadas sobre si continuar o no con los nuevos envases y sabores, y si se necesitaban modificaciones. Hemos podido determinar que la reducción en el contenido de jugo no tiene efectos perjudiciales sobre las opiniones de los consumidores o el consumo de la marca.

Ahora suponga que los pronósticos a favor de que ocurra un evento son a a b. Por tanto, la ecuación (12a) da

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} &= \frac{P(E)}{1 - P(E)} \\ a[1 - P(E)] &= bP(E) \qquad \text{Multiplicación cruzada} \\ a - aP(E) &= bP(E) \\ a &= (a + b)P(E) \\ P(E) &= \frac{a}{a + b} \end{aligned}$$

lo cual nos lleva al resultado siguiente.

Probabilidad de un evento (dados los pronósticos)

Si los pronósticos a favor de que un evento E ocurra son a y b, por tanto la probabilidad de que E ocurra es

$$P(E) = \frac{a}{a + b} \qquad \textbf{(13)}$$

La ecuación (13) a menudo se usa para determinar las probabilidades subjetivas, como muestra el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 9 Considere cada uno de los enunciados siguientes.

a. "Los pronósticos de que los Dodgers ganen la Serie Mundial esta temporada son 7 a 5."

b. "Los pronósticos de que no llueva mañana son 3 a 2."

Exprese cada uno de estos pronósticos como una probabilidad de que el evento ocurra.

Solución

a. Usando la fórmula (13) con $a = 7$ y $b = 5$ da la probabilidad requerida como

$$\frac{7}{7+5} = \frac{7}{12} \approx .5833$$

b. Aquí el evento es que no lloverá mañana. Usando la fórmula (13) con $a = 3$ y $b = 2$, concluimos que la probabilidad de que mañana no llueva es

$$\frac{3}{3+2} = \frac{3}{5} = .6$$

■

Explore y analice

En la película *Casino*, el ejecutivo de Tangiers Casino, Sam Rothstein (Robert DeNiro), despidió al gerente de las máquinas tragamonedas del casino después de que tres apostadores ganaron tres premios mayores de "un millón de dólares" en un lapso de 20 minutos. Rothstein afirmó que era una estafa y que alguien había entrado en esas máquinas para arreglar las ruedas. Le molestaba especialmente la afirmación del gerente de la máquina tragamonedas de que no había manera de determinar esto. De acuerdo con Rothstein los pronósticos de ganar el premio mayor en una máquina de cuatro ruedas era 1 en $1\frac{1}{2}$ millones, y la probabilidad de ganar el premio mayor en tres máquinas de una fila está en el orden de los "miles de millones". "¡No puede ser! ¡Esto no pasaría!" Para ver por qué Rothstein se sentía tan indignado, calcule los pronósticos de ganar el premio mayor en tres de las máquinas en una sucesión rápida y comente la posibilidad de que esto suceda.

Mediana y moda

Además de la media, hay otras dos medidas de tendencia central de un grupo de datos numéricos: la mediana y la moda de un grupo de números.

Mediana

La **mediana** de un grupo de números acomodados en orden ascendente o descendente es (a) el número medio si hay un número impar de datos o (b) la media de los dos números medios si hay un número par de datos.

EJEMPLO DE APLICACIÓN 10 Tiempos de viaje hacia y desde el trabajo

a. Los tiempos, en minutos, que Susan tarda en ir al trabajo nueve días laborables consecutivos fueron

46 42 49 40 52 48 45 43 50

¿Cuál es la mediana de los tiempos de viaje al trabajo por la mañana?

b. Los tiempos, en minutos, que Susan tarda en regresar del trabajo ocho días laborables consecutivos fueron

37 36 39 37 34 38 41 40

¿Cuál es la mediana de los tiempos de viaje desde el trabajo por la tarde?

Solución

a. Al acomodar los números en orden ascendente tenemos

40 42 43 45 46 48 49 50 52

Aquí tenemos un número impar de entradas siendo el número medio igual a 46, y esto da la mediana requerida.

b. Al acomodar los números en orden ascendente tenemos

34 36 37 37 38 39 40 41

Aquí el número de entradas es par, y la mediana requerida es

$$\frac{37 + 38}{2} = 37.5$$

■

Moda

La **moda** de un grupo de números es el número en el grupo que ocurre con mayor frecuencia.

Nota

Un grupo de datos numéricos puede no tener moda, una moda única, o más de una moda. ■

EJEMPLO 11 Calcule la moda, si hay una, del grupo de números dado.

a. 1, 2, 3, 4, 6 **b.** 2, 3, 3, 4, 6, 8 **c.** 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 8

Solución

a. El conjunto no tiene moda debido a que no hay un número que ocurra con más frecuencia que otros.

b. La moda es 3 debido a que ocurre con mayor frecuencia que las otras.

c. Las modas son 3 y 4 debido a que cada número ocurre tres veces. ■

De las tres medidas de tendencia central de un grupo de datos numéricos, la media es por mucho la más adecuada para el trabajo que requiere cálculos matemáticos.

8.5 Ejercicios de autoevaluación

1. Calcule el valor esperado de una variable aleatoria X que tiene la distribución de probabilidad siguiente:

x	-4	-3	-1	0	1	2
$P(X = x)$	.10	.20	.25	.10	.25	.10

2. El desarrollador del complejo Shoreline Condominiums ha proporcionado la estimación siguiente de la probabilidad de que 20, 25, 30, 35, 40, 45 o 50 de las casas en condominio vertical se vendan dentro del primer mes que se ofrecen para su venta.

Unidades	20	25	30	35	40	45	50
Probabilidad	.05	.10	.30	.25	.15	.10	.05

¿Cuántas casas en condominio vertical puede esperar el desarrollador que se vendan dentro del primer mes que se lanzan al mercado?

Las soluciones de los ejercicios de autoevaluación 8.5 pueden encontrarse en la página 516.

8.5 Preguntas de concepto

1. ¿Cuál es el valor esperado de una variable aleatoria? Proporcione un ejemplo.
2. ¿Qué es un juego justo? ¿Es justo el juego de la ruleta que se juega en los casinos estadounidenses? ¿Por qué?
3. **a.** Si la probabilidad de que un evento E ocurra es $P(E)$, ¿cuáles son las probabilidades a favor de que E ocurra?
   b. Si las probabilidades a favor de que un evento ocurra son a a b, ¿cuál es la probabilidad de que E ocurra?

8.5 Ejercicios

1. Durante el primer año en una universidad que utiliza un sistema de calificación de 4 puntos, un alumno tomó 10 cursos de 3 créditos y obtuvo dos A, tres B, cuatro C y una D.
   a. Calcule la calificación promedio de este estudiante.
   b. Sea X la variable aleatoria que denota el número de puntos que corresponde a una calificación en letra. Encuentre la distribución de probabilidad de la variable aleatoria X y calcule $E(X)$, el valor esperado de X.

2. Los registros que lleva el dietista principal en la cafetería de la universidad durante un periodo de 30 semanas muestran el consumo de leche siguiente a la semana (en galones).

Leche	200	205	210	215	220	225	230	235	240
Semanas	3	4	6	5	4	3	2	2	1

   a. Calcule el número promedio de galones de leche consumida por semana en la cafetería.
   b. Sea la variable aleatoria X el número de galones de leche consumido en una semana en la cafetería. Encuentre la distribución de probabilidad de la variable aleatoria X y calcule $E(X)$, el valor esperado de X.

3. Calcule el valor esperado de una variable aleatoria X que tiene la distribución de probabilidad siguiente:

x	-5	-1	0	1	5	8
$P(X = x)$	.12	.16	.28	.22	.12	.10

4. Calcule el valor esperado de una variable aleatoria X que tiene la distribución de probabilidad siguiente:

x	0	1	2	3	4	5
$P(X = x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$

5. Las ganancias diarias X de un empleado que trabaja por comisión se proporcionan en la distribución de probabilidad siguiente. Calcule las ganancias esperadas del empleado.

x (en \$)	0	25	50	75	100	125	150
$P(X = x)$	.07	.12	.17	.14	.28	.18	.04

6. En una familia de cuatro hijos, ¿cuál es el número esperado de niños? (Suponga que la probabilidad de que nazca un niño es la misma que la probabilidad de que nazca una niña.)

7. Con base en la experiencia pasada, el gerente de la tienda VideoRama Store ha compilado la tabla siguiente, lo cual da las probabilidades de que un cliente que entra en VideoRama Store compre 0, 1, 2, 3 o 4 DVD. ¿Cuántos DVD puede esperarse que compre un cliente que entra a la tienda?

DVD	0	1	2	3	4
Probabilidad	.42	.36	.14	.05	.03

8. Si una muestra de tres baterías se selecciona de un lote de 10, de las cuales dos tienen defectos, ¿cuál es el número esperado de baterías defectuosas?

9. **ACCIDENTES AUTOMOVILÍSTICOS** El número de accidentes que ocurre en cierta intersección conocida como las "Cinco Esquinas" en la tarde del viernes entre las 3 y 6 p.m., junto con las probabilidades correspondientes, se muestra en la tabla siguiente. Calcule el número esperado de accidentes durante el periodo en cuestión.

Accidentes	0	1	2	3	4
Probabilidad	.935	.030	.020	.010	.005

10. **DEMANDA ESPERADA** El propietario de un puesto de periódicos en una comunidad universitaria estima que la demanda semanal de cierta revista es:

Cantidad demandada	10	11	12	13	14	15
Probabilidad	.05	.15	.25	.30	.20	.05

Determine el número de ejemplares de la revista que el propietario del puesto de periódicos puede esperar vender por semana.

11. **Confiabilidad esperada del producto** Un banco tiene dos cajeros automáticos en su oficina principal y dos en cada una de sus tres sucursales. El número de máquinas que se descompusieron un día determinado, junto con las probabilidades correspondientes, se muestra en la tabla siguiente.

Máquinas descompuestas	0	1	2	3	4
Probabilidad	.43	.19	.12	.09	.04

Máquinas descompuestas	5	6	7	8
Probabilidad	.03	.03	.02	.05

Calcule el número esperado de máquinas que se descompondrán un día determinado.

12. **Ventas esperadas** La gerencia de Cambridge Company ha proyectado las ventas de sus productos (en millones de dólares) para el próximo año, con las probabilidades asociadas mostradas en la tabla siguiente:

Ventas	20	22	24	26	28	30
Probabilidad	.05	.10	.35	.30	.15	.05

¿Cuáles son las ventas esperadas por la gerencia para el año próximo?

13. **Predicción de la tasa de interés** Se solicitó a un panel de 50 economistas que predijera la tasa de interés media para el próximo año. Los resultados del estudio se muestran a continuación:

Tasa de interés, %	4.9	5.0	5.1	5.2	5.3	5.4
Economistas	3	8	12	14	8	5

Con base en esta encuesta, ¿cuál es la tasa de interés promedio que el panel espera para el próximo año?

14. **Tasas de desempleo** Se pidió a un panel de 64 economistas que predijeran la tasa de desempleo promedio para el año próximo. Los resultados del estudio son los siguientes:

Tasa de desempleo, %	4.5	4.6	4.7	4.8	4.9	5.0	5.1
Economistas	2	4	8	20	14	12	4

Con base en este estudio, ¿cuál es la tasa de desempleo promedio que el panel espera para el próximo año?

15. **Loterías** En una lotería se venden 5,000 boletos por $1 cada uno. Se otorgará un premio de primer lugar de $2,000, 1 premio de segundo lugar de $500, 3 premios de tercer lugar de $100 y 10 premios de consolación de $25. ¿Cuáles son las ganancias netas esperadas de una persona que compra un boleto?

16. **Primas de seguro de vida** Un hombre quiere comprar una póliza de un seguro de vida con un plazo de 5 años que pagará al beneficiario $20,000 en caso de que el hombre muera durante los próximos 5 años. Usando las tablas del seguro de vida, determina que la probabilidad de que vivirá otros 5 años es 0.96. ¿Cuál es el monto mínimo que puede esperar pagar por su prima?
Sugerencia: la prima mínima ocurre cuando la utilidad esperada de la compañía de seguros es cero.

17. **Primas de seguro de vida** Una mujer compró una póliza de seguro de vida de $10,000, a un plazo de 1 año, por $130. Suponiendo que la probabilidad de que ella viva otro año es 0.992, calcule la ganancia esperada de la empresa.

18. **Pólizas de seguro de vida** Como ventaja adicional, Dennis Taylor recibe una póliza de seguro de vida de $25,000 de su empleador. La probabilidad de que Dennis viva otro año es 0.9935. Si compra la misma cobertura él mismo, ¿cuál es el monto mínimo que puede esperar que le paguen por la póliza?

19. **Utilidad esperada** Max construyó una casa al costo de $450,000 para venderla. Estima que puede vender la casa en $580,000, $570,000 o $560,000, con probabilidades de 0.24, 0.40 y 0.36, respectivamente. ¿Cuál es la utilidad esperada de Max?

20. **Análisis de inversiones** El propietario de Midland Construction Company debe decidirse entre dos proyectos. Estima que el primer proyecto producirá un rendimiento promedio de $180,000 con una probabilidad de 0.7 o una utilidad de $150,000 con una probabilidad de 0.3; el segundo proyecto producirá un rendimiento de $220,000 con una probabilidad de 0.6 o una utilidad de $80,000 con una probabilidad de 0.4. ¿Qué proyecto debe elegir el propietario si quiere maximizar su utilidad esperada?

21. **Televisión por cable** La gerencia de Multivisión, una compañía de televisión por cable, tiene la intención de presentar una oferta por los derechos de televisión por cable en una de dos ciudades, A o B. Si la empresa obtiene los derechos para la ciudad A, cuya probabilidad es 0.2, la utilidad estimada para los próximos 10 años es de $10 millones; si la empresa obtiene los derechos para la ciudad B, cuya probabilidad es 0.3, la utilidad estimada para los próximos 10 años es de $7 millones. El costo de presentar una oferta por los derechos en la ciudad A es de $250,000 y el de presentarla en la ciudad B es de $200,000. Al comparar las utilidades esperadas para cada empresa, determine si la empresa debe hacer una oferta por los derechos de la ciudad A o de la ciudad B.

22. **Ventas esperadas de automóviles** Roger Hunt intenta adquirir una de dos concesionarias de automóviles que están actualmente a la venta en cierta ciudad. Los registros obtenidos de cada una de las dos concesionarias revelan que su volumen de ventas semanal, con las probabilidades correspondientes, es el siguiente:

Dahl Motors

Automóviles vendidos/semana	5	6	7	8
Probabilidad	.05	.09	.14	.24

Automóviles vendidos/semana	9	10	11	12
Probabilidad	.18	.14	.11	.05

Farthington Auto Sales

Automóviles vendidos/semana	5	6	7	8	9	10
Probabilidad	.08	.21	.31	.24	.10	.06

El promedio de utilidad por automóvil en Dahl Motors es $362, y en Farthington Auto Sales es $436.

a. Calcule el número promedio de automóviles vendido semanalmente en cada concesionaria.
b. Si el objetivo de Roger es comprar la concesionaria que genera la mayor utilidad semanal, ¿cuál concesionaria debe comprar? (Compare la utilidad semanal esperada para cada concesionaria).

23. **Ventas esperadas de viviendas** Sally Leonard, una agente de bienes raíces, es reasignada a una zona metropolitana grande donde ha recibido ofertas de empleo de la compañía de bienes raíces A y la compañía de bienes raíces B. El número de casas que ella espera vender en un año en cierta empresa y las probabilidades asociadas se muestran en las tablas siguientes.

Compañía A

Casas vendidas	12	13	14	15	16
Probabilidad	.02	.03	.05	.07	.07

Casas vendidas	17	18	19	20
Probabilidad	.16	.17	.13	.11

Casas vendidas	21	22	23	24
Probabilidad	.09	.06	.03	.01

Compañía B

Casas vendidas	6	7	8	9	10
Probabilidad	.01	.04	.07	.06	.11

Casas vendidas	11	12	13	14
Probabilidad	.12	.19	.17	.13

Casas vendidas	15	16	17	18
Probabilidad	.04	.03	.02	.01

El precio promedio de una casa en el escenario de la compañía A es $308,000, mientras que el precio promedio de una casa en el escenario de la compañía B es $474,000. Si Sally recibe una comisión de 3% sobre las ventas en ambas empresas, ¿cuál oferta de empleo debe aceptar para maximizar su comisión anual esperada?

24. **Análisis de inversiones** Bob, el propietario de Midway Lumber, basa sus proyecciones para los ingresos anuales de la empresa en el desempeño del mercado de la vivienda. Califica el desempeño del mercado como muy fuerte, fuerte, normal, débil o muy débil. Para el año siguiente, Bob estima que las probabilidades de estos resultados son .18, .27, .42, .10 y .03, respectivamente. También piensa que los ingresos correspondientes a estos resultados son $20, $18.8, $16.2, $14 y $12 millones, respectivamente. ¿Cuáles son los ingresos esperados de Bob para el año siguiente?

25. **Proyección de ingresos** María considera que el crecimiento de su negocio para el próximo año está relacionado con el producto interno bruto (PIB). Ella cree que su negocio crecerá (o se contraerá) a la tasa de 5%, 4.5%, 3%, 0% o -0.5% por año si el PIB crece (o se contrae) a la tasa de entre 2 y 2.5%, entre 1.5 y 2%, entre 1 y 1.5%, entre 0 y 1%, y entre -1 y 0%, respectivamente. María ha decidido asignar una probabilidad de .12, .24, .40, .20 y .04, respectivamente, a cada resultado. ¿A qué tasa espera María que crezca su negocio el año siguiente?

26. **Predicciones del clima** Suponga que la probabilidad de que mañana llueva es 0.3.
   a. ¿Cuáles son los pronósticos de que mañana llueva?
   b. ¿Cuáles son los pronósticos de que mañana no llueva?

27. **Ruleta** En la ruleta estadounidense, como se describe en el ejemplo 6, un jugador puede hacer una apuesta separada (dos números adyacentes). En este caso, si el jugador apuesta $1 y la ruleta se detiene en cualquiera de los dos números, gana $17 y recibe su $1 de regreso. Si la ruleta no se detiene en ninguno de los dos números, el jugador pierde su apuesta de $1. Calcule el valor esperado de las ganancias sobre una apuesta separada de $1.

28. **Ruleta** Si un jugador colocó una apuesta de $1 sobre el *azul* y una apuesta de $1 sobre el *negro* en un solo juego de la ruleta estadounidense, ¿cuál sería el valor esperado de sus ganancias?

29. **Ruleta** En la ruleta europea, la rueda se divide en 37 compartimentos numerados del 1 al 36 y 0. (En la ruleta estadounidense hay 38 compartimentos numerados del 1 al 36, 0 y 00). Calcule el valor esperado de las ganancias sobre una apuesta de $1 colocada sobre el *azul* en una ruleta europea.

30. La probabilidad de que el evento E ocurra es .8. ¿Cuáles son los pronósticos a favor de que E ocurra? ¿Cuáles son los pronósticos en contra de que E ocurra?

31. La probabilidad de que un evento E no ocurra es .6. ¿Cuáles son los pronósticos a favor de que E ocurra? ¿Cuáles son los pronósticos en contra de que E ocurra?

32. Los pronósticos a favor de que un evento E ocurra son 9 a 7. ¿Cuál es la probabilidad de que E ocurra?

33. Los pronósticos en contra de que un evento E ocurra son 2 a 3. ¿Cuál es la probabilidad de que E no ocurra?

34. **Pronósticos** Carmen, una representante de ventas por computadora, piensa que los pronósticos de que cierre la venta de una minicomputadora para cierta empresa son 8 a 5. ¿Cuál es la probabilidad (subjetiva) de que Carmen cierre la venta?

35. **Deportes** Steffi piensa que los pronósticos a favor de que gane su partido de tenis mañana son 7 a 5. ¿Cuál es la probabilidad (subjetiva) de que gane su partido mañana?

36. **Deportes** Si un pronosticador deportivo establece que los pronósticos de que cierto boxeador gane una pelea son 4 a 3, ¿cuál es la probabilidad (subjetiva) de que el boxeador gane la pelea?

37. **Pronósticos** Bob, el propietario de Midland Lumber, considera que los pronósticos a favor de que se cierre un trato de negocios son de 9 a 5. ¿Cuál es la probabilidad (subjetiva) de que este trato *no* se concrete?

38. **Ruleta**
   a. Demuestre que, para cualquier número c,
   $$E(cX) = cE(X)$$
   b. Use este resultado para calcular la pérdida esperada si un jugador apuesta $300 al *azul* en un solo juego en la ruleta estadounidense.

   Sugerencia: Use los resultados del ejemplo 6.

39. **Calificaciones de exámenes** En un examen realizado en una clase de 20 estudiantes se obtuvieron las calificaciones siguientes:

40	45	50	50	55	60	60	75	75	80
80	85	85	85	85	90	90	95	95	100

   a. Calcule la calificación media (o promedio), la moda y la mediana de la calificación.
   b. ¿Cuál de estas tres medidas de tendencia central considera que es la menos representativa del conjunto de calificaciones?

40. **TARIFAS SALARIALES** La distribución de frecuencia de las tarifas salariales por hora (en dólares) entre los obreros de cierta fábrica se proporciona en la tabla siguiente. Calcule la tarifa salarial media (o el promedio), la moda y la mediana de la tarifa salarial de estos obreros.

Tarifa salarial	10.70	10.80	10.90	11.00	11.10	11.20
Frecuencia	60	90	75	120	60	45

41. **TIEMPOS DE ESPERA** Repase el ejemplo 6, en la sección 8.4. Calcule la mediana del número de automóviles que espera en fila en el autocajero automático del banco al principio de cada intervalo de 2 minutos durante el periodo en cuestión. Compare su respuesta con la media obtenida en el ejemplo 1, sección 8.5.

42. **CLIMA DE SAN FRANCISCO** La temperatura mínima diaria normal en grados Fahrenheit para los meses de enero a diciembre en San Francisco se presenta a continuación:

46.2 48.4 48.6 49.2 50.7 52.5

53.1 54.2 55.8 54.8 51.5 47.2

Calcule el promedio y la mediana de la temperatura mínima diaria en San Francisco para estos meses.

Fuente: San Francisco Convention y Visitors Bureau

43. **PESO DE LAS PAPAS FRITAS** Los pesos, en onzas, de 10 paquetes de papas fritas son

16.1 16 15.8 16 15.9 16.1 15.9 16 16 16.2

Calcule el promedio y la mediana de estos pesos.

44. **CLIMA DE BOSTON** La humedad relativa matutina, en porcentaje, para los meses de enero a diciembre en Boston se presenta a continuación:

68 67 69 69 71 73

74 76 79 77 74 70

Calcule el promedio y la mediana de estas lecturas de humedad.

Fuente: National Weather Service Forecast Office

En los ejercicios 45 y 46, determine si el enunciado es verdadero o falso. Si es verdadero, explique por qué lo es. Si es falso, proporcione un ejemplo para demostrar por qué lo es.

45. Un juego entre dos personas es justo si el valor esperado para ambas personas es cero.

46. Si las probabilidades a favor de que un evento E ocurra son a a b, entonces la probabilidad de que E^c ocurra es $b/(a + b)$.

8.5 Soluciones de los ejercicios de autoevaluación

1.
$$\begin{aligned} E(X) &= (-4)(.10) + (-3)(.20) + (-1)(.25) \\ &\quad + (0)(.10) + (1)(.25) + (2)(.10) \\ &= -0.8 \end{aligned}$$

2. Sea X el número de casas en condominio vertical que se venderá dentro de 1 mes a partir de que salen al mercado. Por tanto, el número de casa en condominio vertical que el desarrollador espera vender en 1 mes está dado por el valor esperado de X, es decir, por

$$\begin{aligned} E(X) &= 20(.05) + (25)(.10) + 30(.30) + 35(.25) \\ &\quad + 40(.15) + 45(.10) + 50(.05) \\ &= 34.25 \end{aligned}$$

o 34 casas en condominio vertical.

8.6 Varianza y desviación estándar

Varianza

La media o valor esperado de una variable aleatoria permite expresar una propiedad importante de la distribución de probabilidad asociada a la variable aleatoria en términos de un solo número. Pero el conocimiento de la ubicación, o la tendencia central, de una distribución de probabilidad por sí sola no suele ser suficiente para dar una imagen muy precisa de la distribución de probabilidad. Considere, por ejemplo, las dos distribuciones de probabilidad cuyos histogramas se presentan en la figura 21. Ambas distribuciones tienen el mismo valor esperado, o media, de $\mu = 4$ (la letra griega μ se lee “mu”). Observe que la distribución de probabilidad con el histograma mostrado en la figura 21a está muy concentrada alrededor de su media μ, mientras que el histograma mostrado en la figura 21b está muy disperso o extendido en torno a su media.

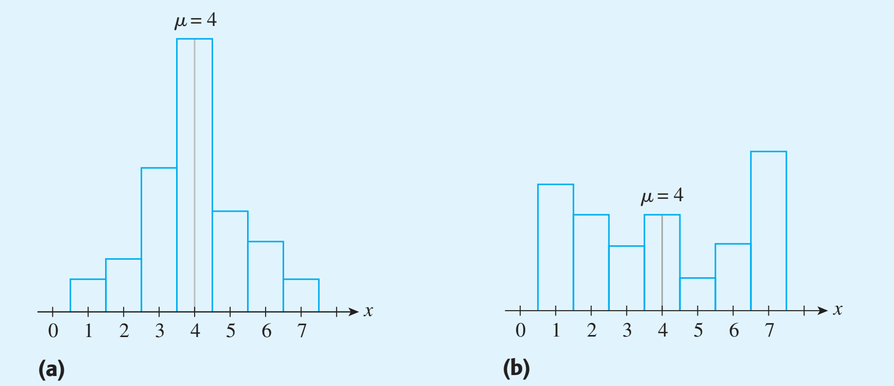


FIGURA **21**
Histogramas de dos distribuciones de probabilidad.

Como otro ejemplo, suponga que Olivia tiene 10 paquetes de papas de la marca A y 10 de la marca B. Después de medir meticulosamente los pesos de cada paquete, ella obtiene los resultados siguientes:

Peso en onzas										
Marca A	16.1	16	15.8	16	15.9	16.1	15.9	16	16	16.2
Marca B	16.3	15.7	15.8	16.2	15.9	16.1	15.7	16.2	16	16.1

En el ejemplo 3, se verifica que los pesos medios para cada una de las dos marcas es 16 onzas. Sin embargo, un examen somero de los datos muestra ahora que los pesos de los paquetes de la marca B presentan una dispersión mucho mayor respecto a la media que los de la marca A.

Una medida del grado de dispersión, o difusión, de una distribución de probabilidad con respecto a su media está dada por la varianza de la variable aleatoria asociada con la distribución de probabilidad. Una distribución de probabilidad con una dispersión pequeña con respecto a su media tendrá una varianza pequeña, mientras que una con una dispersión mayor tendrá una varianza más grande. Por tanto, la varianza de la variable aleatoria asociada con la distribución de probabilidad cuyo histograma aparece en la figura 21a es menor que la varianza de la variable aleatoria asociada con la distribución de probabilidad cuyo histograma se muestra en la figura 21b (vea el ejemplo 1). También, como veremos en el ejemplo 3, la varianza de la variable aleatoria asociada con los pesos de las papas fritas de la marca A es menor que la varianza de la variable aleatoria asociada con los pesos de las papas fritas de la marca B.

Ahora definimos la varianza de una variable aleatoria.

Varianza de una variable aleatoria X

Suponga que una variable aleatoria tiene la distribución de probabilidad

x	x_1	x_2	x_3	$\cdots$	x_n
$P(X = x)$	p_1	p_2	p_3	$\cdots$	p_n

y el valor esperado

$$E(X) = \mu$$

Por tanto, la **varianza** de la variable aleatoria X es

$$\text{Var}(X) = p_1(x_1 - \mu)^2 + p_2(x_2 - \mu)^2 + \cdots + p_n(x_n - \mu)^2 \qquad \textbf{(14)}$$

Veamos un poco más de cerca la ecuación (14). Primero, observe que los números

$$x_1 - \mu, x_2 - \mu, \ldots, x_n - \mu \tag{15}$$

miden las **desviaciones** de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de μ, respectivamente. Por tanto, los números

$$(x_1 - \mu)^2, (x_2 - \mu)^2, \ldots, (x_n - \mu)^2 \tag{16}$$

miden los cuadrados de las desviaciones de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de μ, respectivamente. A continuación, multiplicando cada uno de los números en la ecuación (16) por la probabilidad asociada a cada valor de la variable aleatoria X, los números están ponderados en consecuencia, de modo que su suma es una medida de la varianza de X sobre su media. Un intento por definir la varianza de la variable aleatoria sobre su media de una manera similar utilizando las desviaciones en la ecuación (15), en vez de sus cuadrados, no sería fructífero, ya que algunas de las desviaciones pueden ser positivas, mientras que otras pueden ser negativas y por consiguiente (debido a la cancelación) la suma no proporciona una medida satisfactoria de la varianza de la variable aleatoria.

EJEMPLO 1 Calcular la varianza de la variable aleatoria X y de la variable aleatoria Y cuyas distribuciones de probabilidad se muestran en la tabla siguiente. Estas son las distribuciones de probabilidad asociadas con los histogramas mostrados en la figura 21a-b.

x	$P(X = x)$	y	$P(Y = y)$
1	.05	1	.2
2	.075	2	.15
3	.2	3	.1
4	.375	4	.15
5	.15	5	.05
6	.1	6	.1
7	.05	7	.25

Solución La media de la variable aleatoria X está dada por

$$\begin{aligned}\mu_X &= (1)(.05) + (2)(.075) + (3)(.2) + (4)(.375) + (5)(.15)\\ &\quad + (6)(.1) + (7)(.05)\\ &= 4\end{aligned}$$

Por tanto, usando la ecuación (14) y los datos de la distribución de probabilidad de X, encontramos que la varianza de X está dada por

$$\begin{aligned}\text{Var}(X) &= (.05)(1-4)^2 + (.075)(2-4)^2 + (.2)(3-4)^2\\ &\quad + (.375)(4-4)^2 + (.15)(5-4)^2\\ &\quad + (.1)(6-4)^2 + (.05)(7-4)^2\\ &= 1.95\end{aligned}$$

Luego, encontramos que la media de la variable aleatoria Y está dada por

$$\begin{aligned}\mu_Y &= (1)(.2) + (2)(.15) + (3)(.1) + (4)(.15) + (5)(.05)\\ &\quad + (6)(.1) + (7)(.25)\\ &= 4\end{aligned}$$

Y por tanto la varianza de Y está dada por

$$\begin{aligned}\text{Var}(Y) &= (.2)(1-4)^2 + (.15)(2-4)^2 + (.1)(3-4)^2\\ &\quad + (.15)(4-4)^2 + (.05)(5-4)^2\\ &\quad + (.1)(6-4)^2 + (.25)(7-4)^2\\ &= 5.2\end{aligned}$$

Observe que Var(X) es menor que Var(Y), lo cual confirma nuestras observaciones anteriores acerca de la difusión (o dispersión) de la distribución de probabilidad de X y Y, respectivamente. ■

Desviación estándar

Debido a la ecuación (14), la cual da la varianza de la variable aleatoria X, involucra los cuadrados de las desviaciones, la unidad de medida de Var(X) es el cuadrado de la unidad de medida de los valores de X. Por ejemplo, si los valores asumidos por la variable aleatoria X se miden en unidades de un gramo, entonces Var(X) se medirá en unidades que involucran el *cuadrado* de un gramo. Para remediar esta situación, se trabaja normalmente con la raíz cuadrada de Var(X) en vez de hacerlo con Var(X) misma. La operación previa se llama desviación estándar de X.

Desviación estándar de una variable aleatoria *X*

La **desviación estándar** de una variable aleatoria X denotada por σ (se pronuncia "sigma"), se define por

$$\begin{aligned}\sigma &= \sqrt{\mathrm{Var}(X)}\\ &= \sqrt{p_1(x_1-\mu)^2 + p_2(x_2-\mu)^2 + \cdots + p_n(x_n-\mu)^2}\end{aligned} \tag{17}$$

donde $x_1, x_2, \ldots, x_n$ denotan los valores asumidos por la variable aleatoria X y $p_1 = P(X = x_1), p_2 = P(X = x_2), \ldots, p_n = P(X = x_n)$.

EJEMPLO 2 Calcule las desviaciones estándar de las variables aleatorias X y Y del ejemplo 1.

Solución A partir de los resultados del ejemplo 1, tenemos Var(X) = 1.95 y Var(Y) = 5.2. Tomando sus raíces cuadradas respectivas, tenemos

$$\begin{aligned}\sigma_X &= \sqrt{1.95}\\ &\approx 1.40\\ \sigma_Y &= \sqrt{5.2}\\ &\approx 2.28\end{aligned}$$

■

EJEMPLO DE APLICACIÓN 3 Empaques X y Y denotan las variables aleatorias cuyos valores son los pesos de las marcas de papas fritas A y B, respectivamente (vea la página 517). Calcule las medias y las desviaciones estándar de X y Y, e interprete sus resultados.

Solución Las distribuciones de probabilidad de X y Y pueden calcularse a partir de los datos dados como sigue:

MARCA A			MARCA B		
x	**Frecuencia relativa de ocurrencia**	$P(X = x)$	y	**Frecuencia realtiva de ocurrencia**	$P(Y = y)$
15.8	1	.1	15.7	2	.2
15.9	2	.2	15.8	1	.1
16.0	4	.4	15.9	1	.1
16.1	2	.2	16.0	1	.1
16.2	1	.1	16.1	2	.2
			16.2	2	.2
			16.3	1	.1

Explore y analice

Una fórmula alterna útil para la varianza es

$\sigma^2 = E(X^2) - \mu^2$

donde $E(X^2)$ es el valor esperado de X^2.

1. Establezca la validez de la fórmula.
2. Use la fórmula para verificar los cálculos del ejemplo 3.

Las medias de X y Y están dadas por

$$\begin{aligned}\mu_X &= (.1)(15.8) + (.2)(15.9) + (.4)(16.0) + (.2)(16.1)\\ &\quad + (.1)(16.2)\\ &= 16\\ \mu_Y &= (.2)(15.7) + (.1)(15.8) + (.1)(15.9) + (.1)(16.0)\\ &\quad + (.2)(16.1) + (.2)(16.2) + (.1)(16.3)\\ &= 16\end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(X) &= (.1)(15.8 - 16)^2 + (.2)(15.9 - 16)^2 + (.4)(16 - 16)^2\\ &\quad + (.2)(16.1 - 16)^2 + (.1)(16.2 - 16)^2\\ &= 0.012\\ \mathrm{Var}(Y) &= (.2)(15.7 - 16)^2 + (.1)(15.8 - 16)^2 + (.1)(15.9 - 16)^2\\ &\quad + (.1)(16 - 16)^2 + (.2)(16.1 - 16)^2 + (.2)(16.2 - 16)^2\\ &\quad + (.1)(16.3 - 16)^2\\ &= 0.042\end{aligned}$$

de modo que las desviaciones estándar son

$$\begin{aligned}\sigma_X &= \sqrt{\mathrm{Var}(X)}\\ &= \sqrt{0.012}\\ &\approx 0.11\\ \sigma_Y &= \sqrt{\mathrm{Var}(Y)}\\ &= \sqrt{0.042}\\ &\approx 0.20\end{aligned}$$

Las medias de X y de Y son iguales a 16. Por tanto, el peso medio de un paquete de papas fritas de cualquier marca es 16 onzas. Sin embargo, la desviación estándar de Y es mayor que la de X. Esto indica que los pesos de los paquetes de papas de la marca B están más dispersos con respecto a la media común de 16 que los de la marca A. ■

Explore y analice

Suponga que el peso medio de m paquetes de papas fritas de la marca A es μ_1 y la desviación estándar de la media de su distribución de pesos es σ_1. También suponga que el peso medio de n paquetes de papas de la marca B es μ_2 y la desviación estándar de la media de su distribución de pesos es σ_2.

1. Demuestre que la media de los pesos de los paquetes de la marca A y de la marca B combinados es

$$\mu = \frac{m\mu_1 + n\mu_2}{m + n}$$

2. Si $\mu_1 = \mu_2$, demuestre que la desviación estándar de la media de la distribución de pesos combinados es

$$\sigma = \left(\frac{m\sigma_1^2 + n\sigma_2^2}{m + n}\right)^{1/2}$$

3. Remítase al ejemplo 3, página 519. Usando los resultados de las partes 1 y 2, calcule la media y la desviación estándar de la distribución de pesos combinados.

Desigualdad de Chebychev

La desviación estándar de una variable aleatoria X puede usarse en las estimaciones estadísticas. Por ejemplo, el resultado siguiente, obtenido por el matemático P. L. Chebychev (1821-1894), da un límite sobre la proporción de los valores de X que cae dentro de las desviaciones estándar k del valor esperado de X.

Desigualdad de Chebychev

Sea X una variable aleatoria con el valor esperado μ y la desviación estándar σ. Por tanto, la probabilidad de que un resultado del experimento elegido al azar esté dentro de $\mu - k\sigma$ y $\mu + k\sigma$ es como mínimo $1 - (1/k^2)$; es decir,

$$P(\mu - k\sigma \leq X \leq \mu + k\sigma) \geq 1 - \frac{1}{k^2} \tag{18}$$

Para aclarar este resultado, tomemos $k = 2$ en la desigualdad (18) y calculemos

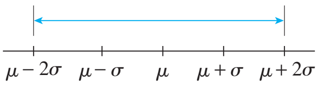


FIGURA **22**
Por lo menos 75% de los resultados cae dentro de este intervalo.

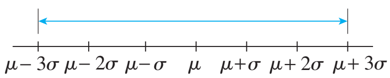
$$P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) \geq 1 - \frac{1}{2^2} = 1 - \frac{1}{4} = .75$$

Esto indica que por lo menos 75% de los resultados del experimento cae dentro de 2 desviaciones estándar de la media (figura 22). Al tomar $k = 3$ en la desigualdad (18), se obtiene

$$P(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma) \geq 1 - \frac{1}{3^2} = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9} \approx .89$$

Esto indica que por lo menos 89% de los resultados del experimento está dentro de 3 desviaciones estándar de la media (figura 23).

FIGURA **23**
Por lo menos 89% de los resultados cae dentro de este intervalo.



EJEMPLO 4 Una distribución de probabilidad tiene una media de 10 y una desviación estándar de 1.5. Use la desigualdad de Chebychev para encontrar un límite sobre la probabilidad de que un resultado del experimento esté entre 7 y 13.

Solución Aquí, $\mu = 10$ y $\sigma = 1.5$. Para determinar el valor de k, note que $\mu - k\sigma = 7$ y $\mu + k\sigma = 13$. Al sustituir los valores apropiados para μ y σ, encontramos que $k = 2$. Al usar la desigualdad de Chebychev (18), vemos que un límite sobre la probabilidad de que un resultado del experimento esté entre 7 y 13 está dado por

$$\begin{aligned} P(7 \leq X \leq 13) &\geq 1 - \left(\frac{1}{2^2}\right) \\ &= \frac{3}{4} \end{aligned}$$

es decir, por lo menos 75%. ■

Nota Los resultados del ejemplo 4 indican que por lo menos 75% de los resultados del experimento está entre $10 - 2\sigma$ y $10 + 2\sigma$, es decir, entre 7 y 13. ■

VIDEO

EJEMPLO DE APLICACIÓN 5 Accidentes industriales Great Northwest Lumber Company emplea 400 trabajadores en sus molinos. Se ha estimado que X, la variable aleatoria que mide el número de trabajadores de los molinos que tiene accidentes industriales durante un periodo de 1 año, está distribuido con una media de 40 y una desviación estándar de 6. Al usar la desigualdad de Chebychev (18), encuentre un límite sobre la probabilidad de que el número de trabajadores que tendrá un accidente industrial en un periodo de 1 año está entre 30 y 50, inclusive.

Solución Aquí, $\mu = 40$ y $\sigma = 6$. Queremos estimar $P(30 \leq X \leq 50)$. Para usar la desigualdad de Chebychev (18), primero determinamos el valor de k a partir de la ecuación

$$\mu - k\sigma = 30 \quad \text{o} \quad \mu + k\sigma = 50$$

Como $\mu = 40$ y $\sigma = 6$ en este caso, vemos que k satisface

$$40 - 6k = 30 \quad \text{y} \quad 40 + 6k = 50$$

a partir de lo cual se deduce que $k = \frac{5}{3}$. Por tanto, un límite sobre la probabilidad de que el número de trabajadores de los molinos que sufren un accidente industrial durante un periodo de 1 año está entre 30 y 50 está dado por

$$\begin{aligned} P(30 \leq X \leq 50) &\geq 1 - \frac{1}{\left(\frac{5}{3}\right)^2} \\ &= \frac{16}{25} \end{aligned}$$

es decir, por lo menos 64%. ■

8.6 Ejercicios de autoevaluación

1. Calcule la media, la varianza y la desviación estándar de la variable aleatoria X con la distribución de probabilidad siguiente:

x	−4	−3	−1	0	2	5
$P(X = x)$	.1	.1	.2	.3	.1	.2

2. James registró los tiempos de viaje siguientes (la duración en minutos que le tomó manejar al trabajo) durante 10 días consecutivos:

55 50 52 48 50 52 46 48 50 51

Calcule la media y la desviación estándar de la variable aleatoria X asociada con estos datos.

Las soluciones a los ejercicios de autoevaluación 8.6 pueden encontrarse en la página 526.

8.6 Preguntas de concepto

1. **a.** ¿Qué es la varianza de una variable aleatoria X?
   b. ¿Qué es la desviación estándar de una variable aleatoria X?
2. ¿Qué mide la desigualdad de Chebychev?

8.6 Ejercicios

En los ejercicios 1-6 se proporciona la distribución de probabilidad de una variable aleatoria *X*. Calcule la media, la varianza y la desviación estándar de *X*.

1.

x	1	2	3	4
$P(X = x)$	.4	.3	.2	.1

2.

x	−4	−2	0	2	4
$P(X = x)$	.1	.2	.3	.1	.3

3.

x	−2	−1	0	1	2
$P(X = x)$	1/16	4/16	6/16	4/16	1/16

4.

x	10	11	12	13	14	15
$P(X = x)$	1/8	2/8	1/8	2/8	1/8	1/8

5.

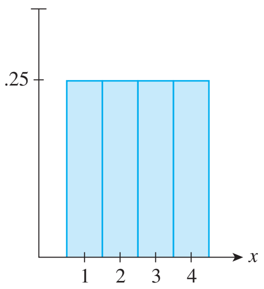
x	430	480	520	565	580
$P(X = x)$	.1	.2	.4	.2	.1

6.

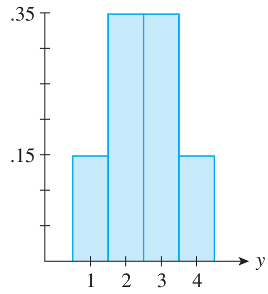
x	-198	-195	-193	-188	-185
$P(X = x)$	.15	.30	.10	.25	.20

7. Los histogramas siguientes representan las distribuciones de probabilidad de las variables aleatorias X y Y. Determine por inspección cuál distribución de probabilidad tiene la varianza más grande.

(a)

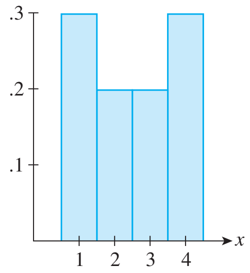


(b)

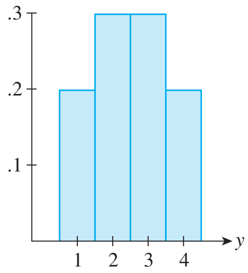


8. Los histogramas siguientes representan las distribuciones de probabilidad de las variables aleatorias X y Y. Determine por inspección cuál distribución de probabilidad tiene la varianza más grande.

(a)

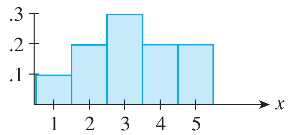


(b)

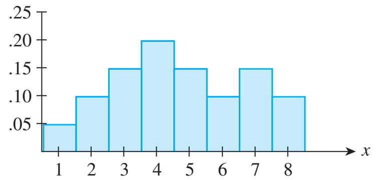


En los ejercicios 9 y 10 calcule la varianza de la distribución de probabilidad para el histograma mostrado.

9.



10.



11. Un experimento consiste en lanzar un dado de ocho lados numerados del 1 al 8 y observar el número que cae en la cara superior. Calcule la media y la varianza de este experimento.

12. REQUISITOS DE EDAD PARA CONDUCIR El requisito de edad mínima para conducir y obtener una licencia regular difiere de un estado a otro. La distribución de frecuencia para este requisito de edad en los 50 estados se proporciona en la tabla siguiente:

Edad mínima	15	16	17	18	19	21
Frecuencia de ocurrencia	1	15	4	28	1	1

a. Describa una variable aleatoria X que esté asociada con estos datos.
b. Encuentre la distribución de probabilidad para la variable aleatoria X.
c. Calcule la media, la varianza y la desviación estándar de X.

13. TASAS DE NATALIDAD Las tasas de natalidad en Estados Unidos para los años 1991-2000 se proporcionan en la tabla siguiente. (El índice de natalidad es el número de nacimientos/1,000 habitantes.)

Año	1991	1992	1993	1994
Tasa de nacimientos	16.3	15.9	15.5	15.2

Año	1995	1996	1997
Tasa de nacimientos	14.8	14.7	14.5

Año	1998	1999	2000
Tasa de nacimientos	14.6	14.5	14.7

a. Describa una variable aleatoria X que esté asociada con estos datos.
b. Encuentre la distribución de probabilidad para la variable aleatoria X.
c. Calcule la media, la varianza y la desviación estándar de X.

Fuente: National Center for Health Statistics

14. ANÁLISIS DE INVERSIONES Paul Hunt está considerando dos iniciativas. Los rendimientos anticipados (en miles de dólares) de cada iniciativa se describen mediante las distribuciones de probabilidad siguientes:

Iniciativa A

Ganancias	**Probabilidd**
-20	.3
40	.4
50	.3

Iniciativa B

Ganancias	**Probabilidd**
-15	.2
30	.5
40	.3

a. Calcule la media y la varianza para cada iniciativa.
b. ¿Cuál inversión le daría a Paul el mayor rendimiento esperado (la media mayor)?
c. ¿En cuál inversión el elemento de riesgo sería menor (es decir, ¿cuál distribución de probabilidad tiene la varianza menor)?

15. ANÁLISIS DE INVERSIONES Rosa Walters está considerando invertir $10,000 en dos fondos de inversión. Los rendimientos anticipados de la apreciación y los dividendos del precio (en cientos de dólares) se describen por medio de las distribuciones siguientes:

Fondo de inversión A

Rendimientos	Probabilidad
-4	.2
8	.5
10	.3

Fondo de inversión B

Rendimientos	Probabilidad
-2	.2
6	.4
8	.4

a. Calcule la media y la varianza asociada con los rendimientos para cada fondo de inversión.
b. ¿Cuál inversión proporcionaría a Rosa el mayor rendimiento esperado (la media mayor)?
c. ¿En cuál inversión sería menor el elemento de riesgo (es decir, cuál distribución de probabilidad tiene la varianza menor)?

16. La distribución del número de chips de chocolate (x) en una galleta se muestra en la tabla siguiente. Calcule la media y la varianza para el número de chips de chocolate en una galleta.

x	0	1	2
$P(X = x)$	.01	.03	.05

x	3	4	5
$P(X = x)$	.11	.13	.24

x	6	7	8
$P(X = x)$	.22	.16	.05

17. La fórmula (14) también puede expresarse en la forma

$$\text{Var}(X) = (p_1x_1^2 + p_2x_2^2 + \cdots + p_nx_n^2) - \mu^2$$

Calcule la varianza de la distribución del ejercicio 1 usando esta fórmula.

18. Calcule la varianza de la distribución del ejercicio 16 usando la fórmula

$$\text{Var}(X) = (p_1x_1^2 + p_2x_2^2 + \cdots + p_nx_n^2) - \mu^2$$

19. Precios de casas El departamento de investigación de mercados de National Real Estate Company realizó una encuesta entre 500 posibles compradores en una zona metropolitana grande para determinar el precio máximo que un posible comprador estaría dispuesto a pagar por una casa. A partir de los datos recabados, se obtuvo la distribución que sigue. Calcule la media, la varianza y la desviación estándar del precio máximo x (en miles de dólares) que estos compradores estarían dispuestos a pagar por una casa.

Precio máximo considerado, x	$P(X = x)$
280	$\frac{10}{500}$
290	$\frac{20}{500}$
300	$\frac{75}{500}$
310	$\frac{85}{500}$
320	$\frac{70}{500}$
350	$\frac{90}{500}$
380	$\frac{90}{500}$
400	$\frac{55}{500}$
450	$\frac{5}{500}$

20. Renta promedio Un estudio de los registros de 85,000 unidades departamentales en la zona más grande de Boston revelaron los datos siguientes:

Año	2002	2003	2004	2005	2006
Renta media, \$	1,352	1,336	1,317	1,308	1,355

Calcule el promedio de la renta media para el año 5 en cuestión. ¿Cuál es la desviación estándar para estos datos?
Fuente: Northeast Apartment Advisors Inc.

21. Tasa de ocupación Un estudio de los registros de 85,000 unidades departamentales en el área más grande de Boston revelaron los datos siguientes:

Año	2002	2003	2004	2005	2006
Tasa de ocupación, %	95.6	94.7	95.2	95.1	96.1

Calcule la tasa de ocupación media para los 5 años en cuestión. ¿Cuál es la desviación estándar para estos datos?
Fuente: Northeast Apartment Advisors Inc.

22. Calificaciones de exámenes La tabla siguiente contiene las calificaciones que 30 estudiantes obtuvieron en un examen de matemáticas:

Calificaciones	90-99	80-89	70-79	60-69	50-59
Estudiantes	4	8	12	4	2

Calcule la media y la desviación estándar de la distribución de los datos.
Sugerencia: Asuma que todas las calificaciones que están dentro de un intervalo de grupo toman el valor medio de ese grupo.

23. Homicidios en Boston El porcentaje de los casos de homicidio resueltos en Boston cada año de 2000 a 2006 se resumen en la tabla siguiente:

Año	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006
Porcentaje	49	50	70	64	36	29	38

Calcule el porcentaje promedio de los casos de homicidio resueltos en Boston por los años 2000 a 2006. ¿Cuál es la desviación estándar para estos datos?
Fuente: Boston Police Department

24. ESTADO CIVIL DE LOS HOMBRES El número de hombres casados (en miles) entre las edades de 20 y 44 en Estados Unidos en 1998 se proporciona en la tabla siguiente:

Edad	20-24	25-29	30-34	35-39	40-44
Hombres	1,332	4,219	6,345	7,598	7,633

Calcule la media y la desviación estándar de los datos dados.

Sugerencia: Vea la sugerencia para el ejercicio 22.

Fuente: U.S. Census Bureau

25. CORREO ENTREGADO El número total de piezas de correo entregadas (en miles de millones) cada año de 2002 a 2006 se proporciona en la tabla siguiente:

Año	2002	2003	2004	2005	2006
Número	203	202	206	212	213

¿Cuál es el número promedio total de piezas de correo entregadas de 2002 a 2006? ¿Cuál es la desviación estándar para estos datos?

Fuente: U.S. Postal Service

26. TV EN EL HOGAR En una encuesta se preguntó a los consumidores cuántos televisores tienen en su casa. Los resultados resumidos en la tabla siguiente:

TV	1	2	3	4	5
Encuestados, %	13.9	26.5	28.6	14.8	16.2

Calcule el número promedio de TV en el hogar de los encuestados. ¿Cuál es la desviación estándar para estos datos?

Fuente: RBC Capital Markets

27. HORAS LABORADAS EN ALGUNOS PAÍSES El número promedio de horas laboradas por año por empleado en Estados Unidos y cinco países europeos, en 2002, se proporciona en la tabla siguiente:

País	Estados Unidos	España	Gran Bretaña	Francia	Alemania Oriental	Noruega
Horas laboradas promedio	1,815	1,807	1,707	1,545	1,428	1,342

Calcule el promedio de horas laboradas por empleado en 2002 para empleados de los seis países. ¿Cuál es la desviación estándar para estos datos?

Fuente: Office of Economic Cooperation and Development

28. ESTADOUNIDENSES SIN SEGURO MÉDICO El número de estadounidenses sin seguro médico, en millones, de 1995 a 2002 se resumen en la tabla siguiente:

Año	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002
Número	40.7	41.8	43.5	44.5	40.2	39.9	41.2	43.6

Calcule el número promedio de estadounidenses sin seguro médico en el periodo de 1995 a 2002. ¿Cuál es la desviación estándar para estos datos?

Fuente: U.S. Census Bureau

29. ACCESO AL CAPITAL Uno de los determinantes clave del crecimiento económico es el acceso al capital. Usando 54 variables para crear un índice de 1-7, siendo 7 el mejor acceso posible al capital, Milken Institute calificó a los países siguientes como los 10 principales países (aunque técnicamente Hong Kong no es un país) por la capacidad de sus empresarios de obtener acceso al capital:

País	Hong Kong	Holanda	Reino Unido	Singapur	Suiza
Índice	5.70	5.59	5.57	5.56	5.55

País	Estados Unidos	Australia	Finlandia	Alemania	Dinamarca
Índice	5.55	5.31	5.24	5.23	5.22

Calcule el promedio de los índices de los 10 principales países. ¿Cuál es la desviación estándar para estos datos?

Fuente: Milken Institute

30. ACCESO AL CAPITAL Repase el ejercicio 29. El Milken Institute también calificó a los países siguientes como los 10 países con peor desempeño por la capacidad de sus empresarios de obtener acceso al capital:

País	Perú	México	Bulgaria	Brasil	Indonesia
Índice	3.76	3.70	3.66	3.50	3.46

País	Colombia	Turquía	Argentina	Venezuela	Rusia
Índice	3.46	3.43	3.20	2.88	2.19

Calcule la media de los índices de los 10 países con peor desempeño. ¿Cuál es la desviación estándar para estos datos?

Fuente: Milken Institute

31. VENTA DE VEHÍCULOS La tasa de ventas anualizada por temporada para automóviles y camiones ligeros en Estados Unidos, en millones de unidades, de mayo de 2003 a abril de 2004, se proporciona en las tablas siguientes:

2003

M	J	J	A	S	O	N	D
16.5	16.5	17.0	18.5	17.0	16.0	17.0	18.0

2004

E	F	M	A
16.3	16.5	16.8	16.5

¿Cuál es la tasa de ventas anualizada media por temporada para los vehículos motorizados en Estados Unidos durante el periodo en cuestión? ¿Cuál es la desviación estándar para estos datos?

Fuente: Autodata

32. **Número de votantes en las elecciones** El porcentaje de la población en edad de votar que emitió su voto en las elecciones presidenciales de 1932 a 2000 se proporciona en la tabla siguiente:

Año de elección	1932	1936	1940	1944	1948	1952	1956	1960	1964
Número de votantes, %	53	57	59	56	51	62	59	59	62
Año de elección	1968	1972	1976	1980	1984	1988	1992	1996	2000
Número de votantes, %	61	55	54	53	53	50	55	49	51

Calcule la media y la desviación estándar de los datos proporcionados.

Fuente: Federal Election Commission

33. Una distribución de probabilidad tiene una media de 42 y una desviación estándar de 2. Use la desigualdad de Chebychev para encontrar un límite sobre la probabilidad de que un resultado del experimento esté entre
a. 38 y 46. **b.** 32 y 52.

34. Una distribución de probabilidad tiene una media de 20 y una desviación estándar de 3. Use la desigualdad de Chebychev para encontrar un límite sobre la probabilidad de que un resultado del experimento esté entre
a. 15 y 25. **b.** 10 y 30.

35. Una distribución de probabilidad tiene una media de 50 y una desviación estándar de 1.4. Use la desigualdad de Chebychev para encontrar el valor de c que garantice que la probabilidad de que un resultado del experimento esté entre $50 - c$ y $50 + c$ es por lo menos 96%.

36. Suponga que X es una variable aleatoria con media μ y desviación estándar σ. Si se observa un número grande de ensayos, ¿qué porcentaje de estos valores se espera como mínimo que estén entre $\mu - 2\sigma$ y $\mu + 2\sigma$?

37. **Confiabilidad de productos** El modelo de lujo de la secadora de cabello producida por Roland Electric tiene una vida media esperada de 24 unidades de tiempo con una desviación estándar de 3 unidades de tiempo. Encuentre un límite sobre la probabilidad de que una de estas secadoras dure entre 20 y 28 unidades de tiempo.

38. **Confiabilidad de productos** Una serie de luces de Navidad tiene una vida esperada de 200 horas y una desviación estándar de 2 horas.
 a. Encuentre un límite sobre la probabilidad de que una de estas series de luces de Navidad dure entre 190 y 210 horas.
 b. Suponga que una ciudad grande utiliza 150,000 de estas series de luces de Navidad como parte de sus decoraciones navideñas. Estime el número de luces que es probable que requiera un reemplazo entre 180 y 220 horas de uso.

39. **Sueldos iniciales** El sueldo medio inicial anual de un licenciado recién egresado en cierta profesión es \$52,000 con una desviación estándar de \$500. Encuentre un límite sobre la probabilidad de que el sueldo inicial de un licenciado recién graduado en esta profesión esté entre \$50,000 y \$54,000?

40. **Control de calidad** El azúcar empacada por cierta máquina tiene un peso medio de 5 lb y una desviación estándar de 0.02 lb. ¿Para qué valores de c el fabricante de la maquinaria puede afirmar que el azúcar empacada por esta máquina tiene un peso entre $5 - c$ y $5 + c$ lb con una probabilidad de por lo menos 96%?

En los ejercicios 41 y 42 determine si el enunciado es verdadero o falso. Si es verdadero, explique por qué lo es. Si es falso, proporcione un ejemplo para demostrar por qué lo es.

41. Tanto la varianza como la desviación estándar de una variable aleatoria miden la difusión de una distribución de probabilidad.

42. La desigualdad de Chebychev es inútil cuando $k \leq 1$.

8.6 Soluciones de los ejercicios de autoevaluación

1. La media de la variable aleatoria X es

$$\begin{aligned}\mu &= (-4)(.1) + (-3)(.1) + (-1)(.2)\\ &\quad + (0)(.3) + (2)(.1) + (5)(.2)\\ &= 0.3\end{aligned}$$

La varianza de X es

$$\begin{aligned}\text{Var}(X) &= (.1)(-4 - 0.3)^2 + (.1)(-3 - 0.3)^2\\ &\quad + (.2)(-1 - 0.3)^2 + (.3)(0 - 0.3)^2\\ &\quad + (.1)(2 - 0.3)^2 + (.2)(5 - 0.3)^2\\ &= 8.01\end{aligned}$$

La desviación estándar de X es

$$\sigma = \sqrt{\text{Var}(X)} = \sqrt{8.01} \approx 2.83$$

2. Primero calculamos la distribución de probabilidad de X a partir

x	Frecuencia relativa de ocurrencia	$P(X = x)$
46	1	.1
48	2	.2
50	3	.3
51	1	.1
52	2	.2
55	1	.1

La media de X es

$$\begin{aligned}\mu &= (.1)(46) + (.2)(48) + (.3)(50)\\ &\quad + (.1)(51) + (.2)(52) + (.1)(55)\\ &= 50.2\end{aligned}$$

La varianza de X es

$$\begin{aligned}\text{Var}(X) &= (.1)(46 - 50.2)^2 + (.2)(48 - 50.2)^2 \\ &\quad + (.3)(50 - 50.2)^2 + (.1)(51 - 50.2)^2 \\ &\quad + (.2)(52 - 50.2)^2 + (.1)(55 - 50.2)^2 \\ &= 5.76\end{aligned}$$

a partir de lo cual se deduce la desviación estándar de

$$\begin{aligned}\sigma &= \sqrt{5.76} \\ &= 2.4\end{aligned}$$

USO DE LA TECNOLOGÍA

Cálculo de la media y la desviación estándar

Podemos usar una calculadora graficadora para obtener la media y la desviación estándar de una variable aleatoria.

EJEMPLO DE APLICACIÓN 1 Distribución de edades de los directores de la empresa Una encuesta realizada en 1995 de las empresas Fortune 1000 reveló la siguiente distribución de edades de los directores de la empresa:

Edad	20-24	25-29	30-34	35-39	40-44	45-49	50-54
Directores	1	6	28	104	277	607	1,142

Edad	55-59	60-64	65-69	70-74	75-79	80-84	85-89
Directores	1,413	1,424	494	159	62	31	5

Fuente: Directorship

Sea X la variable aleatoria que toma los valores 1 a 14, donde 1 corresponde al grupo de edades de 20-24, 2 corresponde al grupo de edades de 25-29, y así sucesivamente.

a. Elabore un histograma para los datos dados.
b. Calcule la media y la desviación estándar de estos datos. Interprete sus resultados.

Solución

a. Introduzca los valores de X como $x_1 = 1, x_2 = 2, \ldots, x_{14} = 14$ y los valores correspondientes de Y son $y_1 = 1, y_2 = 6, \ldots, y_{14} = 5$. Luego, usando la función DRAW del menú Statistics de una calculadora graficadora, se obtiene el histograma mostrado en la figura T1.

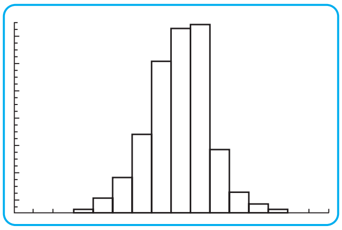


FIGURA **T1**
El histograma para los datos dados, usando la ventana de visualización [0, 16] × [0, 1,500].

b. Usando la función apropiada del menú Statistics, encontramos que $\bar{x} \approx 7.9193$ y $\sigma x \approx 1.6378$; es decir, la media de X es $\mu \approx 7.9$ y la desviación estándar es $\sigma \approx 1.6$. Al interpretar nuestros resultados, vemos que la edad media de los directores está en el intervalo de edades de 55-59 años. ■

(*continúa*)

EJERCICIOS CON TECNOLOGÍA

1. **a.** Elabore la gráfica del histograma asociado con la variable aleatoria X en el ejemplo 1, página 518.
   b. Calcule la media y la desviación estándar para estos datos.
2. **a.** Elabore la gráfica del histograma asociado con la variable aleatoria del ejemplo 1, página 518.
   b. Calcule la media y la desviación estándar de estos datos.
3. **a.** Elabore la gráfica del histograma asociado con los datos dados en el ejercicio 12, página 523.
   b. Calcule la media y la desviación estándar para estos datos.
4. **a.** Elabore la gráfica del histograma asociado con los datos dados en el ejercicio 16, página 524.
   b. Calcule la media y la desviación estándar para estos datos.
5. Una refinadora de azúcar utiliza una máquina para empacar azúcar en paquetes de 5 lb. Para revisar la precisión de la máquina, los paquetes se seleccionan al azar y se pesan. Los resultados son los siguientes:

4.98	5.02	4.96	4.97	5.03
4.96	4.98	5.01	5.02	5.06
4.97	5.04	5.04	5.01	4.99
4.98	5.04	5.01	5.03	5.05
4.96	4.97	5.02	5.04	4.97
5.03	5.01	5.00	5.01	4.98

   a. Describa una variable aleatoria X que se asocie con estos datos.
   b. Encuentre la distribución de probabilidad para la variable aleatoria X.
   c. Calcule la media y la desviación estándar de X.
6. Las calificaciones de 25 estudiantes en un examen de matemáticas son las siguientes:

90	85	74	92	68	94	66
87	85	70	72	68	73	72
69	66	58	70	74	88	90
98	71	75	68			

   a. Describa una variable aleatoria X que se asocie con estos datos.
   b. Encuentre la distribución de probabilidad para la variable aleatoria X.
   c. Calcule la media y la desviación estándar de X.
7. **Estatura de mujeres** Los datos siguientes, obtenidos de los registros del Westwood Health Club, proporcionan las estaturas (a la pulgada más cercana) de 200 miembros mujeres del club:

Estatura	62	$62\frac{1}{2}$	63	$63\frac{1}{2}$	64	$64\frac{1}{2}$	65	$65\frac{1}{2}$	66	
Frecuencia	2	3	4	8	11	20	32	30	18	
Estatura	$66\frac{1}{2}$	67	$67\frac{1}{2}$	68	$68\frac{1}{2}$	69	$69\frac{1}{2}$	70	$70\frac{1}{2}$	71
Frecuencia	18	16	8	10	5	5	4	3	2	1

   a. Trace un histograma para los datos dados.
   b. Calcule la media y la desviación estándar de estos datos.
8. **Distribución de edades en una ciudad** La tabla siguiente contiene la distribución de edades (en años) de los residentes (en cientos) de la ciudad de Monroe que son menores de 40 años:

Edad	0-3	4-7	8-11	12-15	16-19
Residentes	30	42	50	60	50
Edad	20-23	24-27	28-31	32-35	36-39
Residentes	41	50	45	42	34

   Sea X la variable aleatoria que asume los valores de 1 a 10, donde 1 corresponde al rango 0-3, . . . , y 10 corresponde al rango 36-39.
   a. Elabore un histograma para los datos dados.
   b. Calcule la media y la desviación estándar de X.

CAPÍTULO 8 Resumen de las fórmulas y términos principales

FÓRMULAS

1. Probabilidad condicional	$P(B\|A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$
2. Regla del producto	$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B\|A)$
3. Prueba de independencia	$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

4. Teorema de Bayes	$P(A_i \mid E) = \dfrac{P(A_i) \cdot P(E \mid A_i)}{P(A_1) \cdot P(E \mid A_1) + P(A_2) \cdot P(E \mid A_2) + \cdots + P(A_n) \cdot P(E \mid A_n)}$
5. Media de n números	$\bar{x} = \dfrac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$
6. Valor esperado	$E(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + \cdots + x_np_n$
7. Pronósticos a favor de que E ocurra	$\dfrac{P(E)}{P(E^c)}$
8. Pronósticos en contra de que E ocurra	$\dfrac{P(E^c)}{P(E)}$
9. Probabilidad de que un evento ocurra dados los pronósticos	$\dfrac{a}{a+b}$
10. Varianza de una variable aleatoria	$\text{Var}(X) = p_1(x_1 - \mu)^2 + p_2(x_2 - \mu)^2 + \cdots + p_n(x_n - \mu)^2$
11. Desviación estándar de una variable aleatoria	$\sigma = \sqrt{\text{Var}(X)}$
12. Desigualdad de Chebychev	$P(\mu - k\sigma \leq X \leq \mu + k\sigma) \geq 1 - \dfrac{1}{k^2}$

TÉRMINOS

desviación estándar (519)
distribución de probabilidad de una variable aleatoria (496)
eventos independientes (478)
histograma (497)
mediana (511)
moda (512)
probabilidad condicional (471)
proceso estocástico finito (475)
promedio (media) (504)
teorema de Bayes (486)
valor esperado (505)
variable aleatoria (494)
variable aleatoria continua (495)
variable aleatoria discreta finita (495)
variable aleatoria discreta infinita (495)
varianza (517)

CAPÍTULO 8 Preguntas de revisión de conceptos

Llene los espacios en blanco.

1. La probabilidad de que ocurra el evento B, dado que el evento A ha ocurrido ya se llama probabilidad _____ de B dado A.

2. Si el resultado de un evento no depende de otro, entonces se dice que los dos eventos son _____.

3. La probabilidad de que un evento ocurra después de que se han observado los resultados de un experimento se llama _____ _____ _____.

4. Una regla que asigna un número a cada resultado de un experimento de probabilidad se llama variable _____.

5. Si una variable aleatoria asume sólo valores finitos, entonces se llama _____ discreta; si toma muchos valores infinitos que pueden ordenarse en secuencia, entonces se llama _____ discreta; si asume todos los números reales de un intervalo, entonces se dice que es _____.

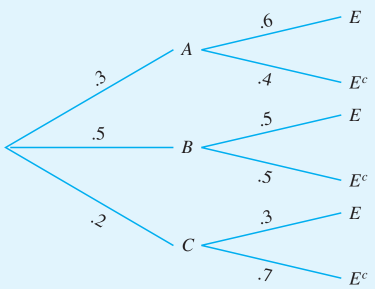
6. El valor esperado de una variable aleatoria X está dado por la _____ de los productos de los valores que toma la variable aleatoria y sus probabilidades asociadas. Por ejemplo, si X asume los valores -2, 3 y 4 con probabilidades asociadas $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ y $\frac{1}{4}$, entonces su valor esperado es _____.

7. **a.** Si la probabilidad de que un evento E ocurra es $P(E)$, entonces los pronósticos a favor de que E ocurra son _____.
b. Si los pronósticos a favor de que un evento E ocurra son a a b, entonces la probabilidad de que E ocurra es _____.

8. Si una variable aleatoria X toma los valores $x_1, x_2, \ldots, x_n$ con probabilidades $p_1, p_2, \ldots, p_n$ y tiene una media de μ, entonces la varianza de X es _____. La desviación estándar de X es _____.

CAPÍTULO 8 Ejercicios de revisión

El diagrama de árbol siguiente representa un experimento que consta de dos ensayos. En los ejercicios 1-5, use el diagrama para encontrar la probabilidad dada.



1. $P(A \cap E)$

2. $P(B \cap E)$

3. $P(C \cap E)$

4. $P(A \mid E)$

5. $P(E)$

6. Sean E y F dos eventos y suponga que $P(E) = .35$, $P(F) = .55$, y $P(E \cup F) = .70$. Encuentre $P(E \mid F)$.

7. Un experimento consiste en lanzar una moneda sin truco tres veces y observar los resultados. Sea A el evento de que por lo menos cae una cara y B el evento de que por lo menos caen dos cruces.
a. Encuentre $P(A)$. **b.** Calcule $P(B)$.
c. ¿A y B son eventos independientes?

8. Control de calidad En un grupo de 20 bolígrafos atómicos en el departamento de artículos de papelería de la tienda Metro Department Store, se sabe que 2 tienen defectos. Si un cliente selecciona 3 de estos bolígrafos, ¿cuál es la probabilidad de que
a. por lo menos 1 tenga defectos?
b. no más de 1 tenga defectos?

9. Cinco personas se seleccionan al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que ninguna de las personas de este grupo haya nacido la misma semana?

10. Un par de dados sin truco son lanzados. ¿Cuál es la probabilidad de que la suma de los números que cae en la cara superior de los dados sea 8 si se sabe que los dos números son diferentes?

Se extraen tres naipes de una baraja estándar de 52 cartas. En los ejercicios 11-14, calcule la probabilidad de cada uno de los eventos dados.

11. Los tres naipes son ases.

12. Los tres naipes son figuras.

13. El segundo y tercer naipes sean rojos.

14. El segundo naipe sea negro, dado que la primera carta era roja.

15. Tres bolas son extraídas al azar, sin reemplazarlas, de una urna que contiene tres bolas blancas y cuatro azules. La variable aleatoria X denota el número de bolas azules extraídas.
a. Elabore una lista de los resultados de este experimento.
b. Calcule el valor asignado a cada resultado de este experimento por la variable aleatoria X.
c. Encuentre la distribución de probabilidad de la variable aleatoria asociada con este experimento.
d. Elabore el histograma que representa esta distribución.

16. Un hombre compró una póliza de seguro de vida de $25,000, a un plazo de 1 año, por $375. Suponiendo que la probabilidad de que viva otro año es .989, calcule la ganancia esperada de la empresa.

17. La distribución de probabilidad de una variable aleatoria X se muestra en la tabla siguiente:

x	$P(X = x)$
0	.1
1	.1
2	.2
3	.3
4	.2
5	.1

a. Calcule $P(1 \leq X \leq 4)$.
b. Calcule la media y la desviación estándar de X.

18. Horario flexible De 320 hombres y 280 mujeres empleados de la oficina central de Gibraltar Insurance Company, 160 de los hombres y 190 de las mujeres tienen un horario de trabajo flexible. Teniendo en cuenta que un empleado de este grupo elegido al azar tiene un horario flexible, ¿cuál es la probabilidad de que el empleado sea un hombre?

19. Control de calidad En una planta de manufactura, tres máquinas, A, B y C, producen 40, 35 y 25%, respectivamente, de la producción total. El departamento de control de calidad de la empresa ha determinado que 1% de los artículos producidos por la máquina A, 1.5% de los artículos producidos por la máquina B y 2% de los artículos producidos por la máquina C está defectuoso. Si se selecciona un elemento al azar y éste está defectuoso, ¿cuál es la probabilidad de que lo haya producido la máquina B?

20. Admisiones al colegio Los solicitantes que deseen ser admitidos en una facultad determinada de una universidad grande están obligados a presentar un examen para detectar problemas de aprendizaje que fue ideado por un servicio de exámenes educativos. De los resultados anteriores, el servicio de exámenes ha estimado que 70% de todos los solicitantes son aptos para la admisión y que 92% de éstos aprueba el examen, mientras que 12% de los estudiantes no aptos para la admisión aprueba el examen. Usando estos resultados, ¿cuál es la probabilidad de que un solicitante de admisión
a. apruebe el examen?
b. apruebe el examen pero en realidad no haya sido apto para admisión?

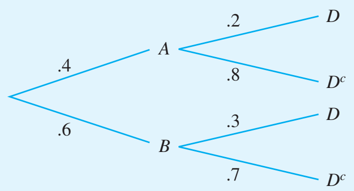
21. Tiempos de traslado hacia y desde el trabajo Bill trabaja en el distrito financiero de Boston. Para ir a su trabajo toma el tren $\frac{3}{5}$ de las veces y maneja $\frac{2}{5}$ de las veces (cuando visita clientes). Si toma el tren, entonces llega a casa a las 6:30 p.m. 85% de las veces, si conduce, entonces llega a casa a las 6:30 p.m. 60% de las veces. Si Bill llega a casa a las 6:30 p.m., ¿cuál es la probabilidad de que haya conducido a su trabajo?

22. **ESTATURAS DE MUJERES** Las estaturas de 4,000 mujeres que participaron en una encuesta se encontraron normalmente distribuidas con una media de 64.5 pulgadas y una desviación estándar de 2.5 pulgadas. Use la desigualdad de Chebychev para estimar la probabilidad de que la estatura de una mujer que participó en la encuesta caiga dentro de 2 desviaciones estándar de la media, es decir, que su estatura esté entre 59.5 y 69.5 pulgadas.

CAPÍTULO 8 Antes de continuar. . .

1. Suponga que A y B son eventos independientes con $P(A) = .3$ y $P(B) = .6$. Encuentre $P(A \cup B)$.

2. El diagrama de árbol siguiente representa un experimento de dos etapas. Use el diagrama para determinar $P(A \mid D)$.



3. Los valores asumidos por una variable aleatoria X y la frecuencia de su ocurrencia se muestran en la tabla siguiente. Encuentre la distribución de probabilidad de X.

x	−3	−2	0	1	2	3
Frecuencia de ocurrencia	4	8	20	24	16	8

4. La distribución de probabilidad de la variable aleatoria X se muestran en la tabla siguiente. Encuentre (a) $P(X \leq 0)$ y (b) $P(-4 \leq X \leq 1)$.

x	−4	−3	−1	0	1	3
$P(X = x)$	.06	.14	.32	.28	.12	.08

5. Calcule la media, la varianza y la desviación estándar de una variable aleatoria X que tiene la distribución de probabilidad siguiente:

x	−3	−1	0	1	3	5
$P(X = x)$	.08	.24	.32	.16	.12	.08

LA DERIVADA

9

EN ESTE CAPÍTULO comenzamos el estudio del cálculo diferencial, el cual, históricamente, fue desarrollado como respuesta al problema de determinar la recta tangente a una curva arbitraria. Pero rápidamente se hizo evidente que la solución de este problema proporcionó a los matemáticos un método para solucionar muchos problemas prácticos que involucran la tasa de cambio de una cantidad con respecto a otra. La herramienta básica empleada en el cálculo diferencial es la *derivada* de una función. El concepto de la derivada se basa, a su vez, en un concepto más fundamental, el del *límite* de una función.

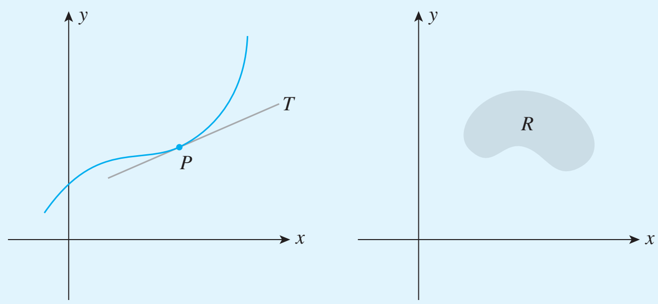
¿Qué sucede con las ventas de una grabación en DVD de una película de cierto éxito durante un periodo de 10 años después de haber sido lanzada por primera vez en el mercado? En el ejemplo 6, de la página 605, podrá observar cómo determinar la tasa de cambio de las ventas para el DVD en los primeros 10 años después de su lanzamiento.

9.1 Límites

Introducción al cálculo

Históricamente, el desarrollo del cálculo, llevado a cabo por Isaac Newton (1642-1727) y Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), fue resultado de la investigación de los siguientes problemas:

1. Determinar la recta tangente hacia una curva en un punto dado sobre la curva (figura 1a).
2. Determinar el área de una región plana delimitada por una curva arbitraria (figura 1b).



(a) ¿Cuál es la pendiente de la recta tangente T en un punto P?

(b) ¿Cuál es el área de la región R?

FIGURA **1**

El problema de la recta tangente podría parecer no estar relacionado con ninguna de las aplicaciones prácticas de las matemáticas, pero como se verá más adelante, el problema para determinar la *tasa de cambio* de una cantidad con respecto a otra es matemáticamente equivalente al problema geométrico para determinar la pendiente de la *recta tangente* hacia una curva en un punto dado sobre la curva. Es precisamente el descubrimiento de la relación entre estos dos problemas lo que estimuló el desarrollo del cálculo en el siglo XVII y lo hizo una herramienta indispensable para la solución de problemas prácticos. Los siguientes son algunos ejemplos de este tipo de problemas:

- Determinar la velocidad de un objeto
- Determinar la tasa de cambio de una población de bacterias con respecto al tiempo
- Determinar la tasa de cambio de la utilidad de una empresa con respecto al tiempo
- Determinar la tasa de cambio de los ingresos de una agencia de viajes con respecto al gasto de la agencia de publicidad

El estudio del problema de la recta tangente llevó a la creación del *cálculo diferencial*, que se basa en el concepto de la *derivada* de una función. El estudio del problema del área llevó a la creación del *cálculo integral*, que se basa en el concepto de la *antiderivada* o la *integral* de una función (la derivada y la integral de una función están estrechamente relacionadas, como se verá en la sección 11.4). Tanto la derivada como la integral de una función se definen en términos de un concepto más fundamental, el límite, nuestro siguiente tema.

Un ejemplo real

De los datos obtenidos en una prueba realizada a un prototipo de un maglev (tren de levitación magnética), que se mueve a lo largo de un monorriel de trayectoria recta, los ingenieros han determinado que la posición del maglev (en pies) desde el origen en el momento t (en segundos) está dada por

$$s = f(t) = 4t^2 \qquad (0 \le t \le 30) \tag{1}$$

donde a f se le llama la **función de posición** del maglev. La posición del maglev en el momento $t = 0, 1, 2, 3, \ldots, 10$, medida a partir de su posición inicial, es

$$f(0) = 0 \quad f(1) = 4 \quad f(2) = 16 \quad f(3) = 36, \ldots \quad f(10) = 400 \text{ pies (figura 2).}$$

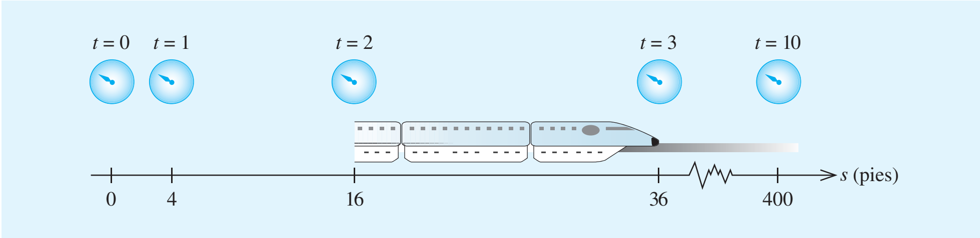


FIGURA 2
El maglev en movimiento a lo largo de un trayecto de un monorriel elevado.

Suponga que se desea determinar la velocidad del maglev en $t = 2$. Esto es sólo la velocidad del tren de levitación magnética, como se muestra en su velocímetro en ese preciso instante. Ahora mismo, el cálculo de esta cantidad utilizada sólo por la ecuación (1) parece ser una tarea imposible, pero tenga en cuenta qué cantidades se *pueden* calcular con esta relación. Obviamente se puede calcular la posición del tren de levitación magnética en cualquier momento t, como lo hicimos antes por algunos valores seleccionados en t. Al utilizar estos valores, se puede calcular entonces la *velocidad promedio* de dicho tren sobre un intervalo de tiempo. Por ejemplo, la velocidad promedio del tren sobre el intervalo de tiempo [2, 4] está dada por

$$\begin{aligned}\frac{\text{Distancia recorrida}}{\text{Tiempo transcurrido}} &= \frac{f(4) - f(2)}{4 - 2}\\ &= \frac{4(4^2) - 4(2^2)}{2}\\ &= \frac{64 - 16}{2} = 24\end{aligned}$$

o 24 pies por segundo.

Aunque esta no es la velocidad del tren de levitación magnética en $t = 2$, ésta proporciona una aproximación de su velocidad en ese momento.

¿Se puede hacerlo mejor? Cuanto menor sea el intervalo de tiempo que elegimos por intuición (con $t = 2$, como el punto extremo izquierdo), mayor será la velocidad promedio sobre dicho intervalo que se aproximará a la velocidad real del tren $t = 2$.*

Ahora se describe este proceso en términos generales. Sea $t > 2$. Entonces, la velocidad promedio del maglev en el intervalo de tiempo $[2, t]$ está dada por

$$\frac{f(t) - f(2)}{t - 2} = \frac{4t^2 - 4(2^2)}{t - 2} = \frac{4(t^2 - 4)}{t - 2} \tag{2}$$

Al elegir los valores de t más cercanos a 2, se obtiene una secuencia de números que dan las velocidades promedio del tren de levitación magnética sobre intervalos de tiempo cada vez más pequeños. Como se observó antes, esta secuencia de números debe acercarse a la *velocidad instantánea* del tren en $t = 2$.

Haga la prueba con algunos ejemplos de los cálculos. Utilice la ecuación (2) y, tomando la secuencia $t = 2.5, 2.1, 2.01, 2.001$ y 2.0001, los cuales se aproximan a 2, determine

*En realidad, cualquier intervalo contiene a $t = 2$.

La velocidad promedio sobre [2, 2.5] es $\dfrac{4(2.5^2 - 4)}{2.5 - 2} = 18$, o 18 pies/segundo.

La velocidad promedio sobre [2, 2.1] es $\dfrac{4(2.1^2 - 4)}{2.1 - 2} = 16.4$, o 16.4 pies/segundo,

y así sucesivamente. Estos resultados se resumen en la tabla 1.

TABLA 1

t se aproxima a 2 desde la derecha.

t	2.5	2.1	2.01	2.001	2.0001
Velocidad promedio sobre [2, *t*]	18	16.4	16.04	16.004	16.0004

La velocidad promedio se aproxima a 16 desde la derecha.

En la tabla 1 se observa que la velocidad promedio del tren de levitación magnética parece acercarse al número 16, ya que se calcula en intervalos de tiempo cada vez más pequeños. Estos cálculos sugieren que la velocidad instantánea del maglev en $t = 2$ es de 16 pies por segundo.

Nota Observe que no se puede obtener la velocidad instantánea del tren en $t = 2$ al sustituir $t = 2$ en la ecuación (2), ya que este valor de t no está en el dominio de la función de la velocidad promedio. ■

Definición intuitiva de un límite

Al considerar la función g definida por

$$g(t) = \frac{4(t^2 - 4)}{t - 2}$$

que da la velocidad promedio del maglev [vea la ecuación (2)].Suponga que se le pide que determine el valor que aproxima a $g(t)$ a medida que t se aproxima al número (fijo) 2. Si se toma la secuencia de los valores de t aproximándose al 2 desde el lado derecho, como se hizo antes, se observa que $g(t)$ se aproxima al número 16. Del mismo modo, si se toma una secuencia de los valores de t aproximándose al 2 desde la izquierda, como por ejemplo $t = 1.5$, 1.9, 1.99, 1.999 y 1.9999, se obtienen los resultados mostrados en la tabla 2.

TABLA 2

t aproximándose a 2 desde la izquierda.

t	1.5	1.9	1.99	1.999	1.9999
$g(t)$	14	15.6	15.96	15.996	15.9996

La velocidad promedio se aproxima a 16 desde la izquierda.

Observe que $g(t)$ se aproxima al número 16 a medida que t se aproxima a 2, esta vez desde el lado izquierdo. En otras palabras, conforme t se aproxima a 2 desde *cualquier* lado del número 2, $g(t)$ se aproxima al 16. En esta situación, se dice que el límite de $g(t)$ conforme t se aproxima a 2 es 16, al escribir

$$\lim_{t \to 2} g(t) = \lim_{t \to 2} \frac{4(t^2 - 4)}{t - 2} = 16$$

La gráfica de la función g, que se muestra en la figura 3, confirma esta observación.

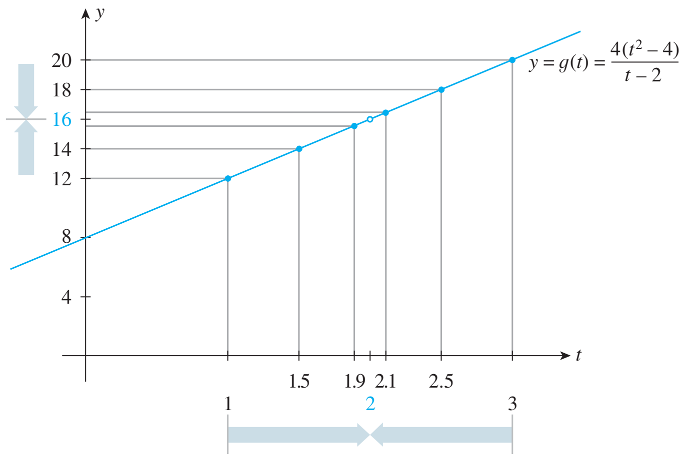


FIGURA 3
Conforme t se aproxima a $t = 2$ desde cualquier dirección, $g(t)$ se aproxima a $y = 16$.

Observe que el punto $t = 2$ no está en el dominio de la función g [por esta razón, el punto (2, 16) no aparece en la gráfica de g]. Sin embargo, esto es intrascendente debido a que el valor, si hubiera alguno, de $g(t)$ en $t = 2$ no juega ningún papel al calcular el límite.

Este ejemplo lleva a la siguiente definición informal.

El límite de una función

La función f tiene el **límite** L conforme x se aproxima a a, al escribir

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

si el valor de $f(x)$ puede estar tan cerca del número L como se desee al tomar a x lo suficientemente cerca de (pero no igual a) a.

Exploración con TECNOLOGÍA

1. Utilice una calculadora graficadora para elaborar la gráfica de

$$g(x) = \frac{4(x^2 - 4)}{x - 2}$$

en la ventana de visualización $[0, 3] \times [0, 20]$.

2. Utilice el ZOOM y el TRACE para describir lo que sucede con los valores de $g(x)$ conforme x se aproxime a 2, primero desde la derecha y después desde la izquierda.
3. ¿Qué le sucede al valor y cuando se trata de evaluar a $g(x)$ en $x = 2$? Explique su respuesta.
4. Reconsidere sus resultados con aquéllos del ejemplo anterior.

Evaluación del límite de una función

Ahora examine algunos de los ejemplos que involucran el cálculo de los límites.

EJEMPLO 1 Sea $f(x) = x^3$ y evalúe el $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$.

Solución La gráfica de f se muestra en la figura 4. Se puede observar que $f(x)$ puede estar tan cerca del número 8 como le plazca al tomar a x lo suficientemente cerca al 2. Por tanto,

$$\lim_{x\to 2} x^3 = 8$$

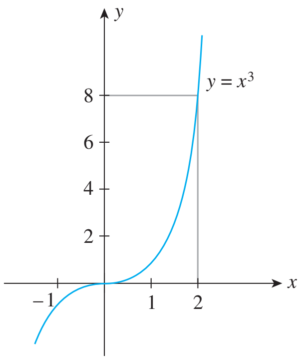


FIGURA 4
$f(x)$ está cerca de 8, conforme x se aproxima a 2.

EJEMPLO 2 Sea

$$g(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{si } x \neq 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

Evalúe el $\lim\limits_{x\to 1}$ de $g(x)$.

Solución El dominio de g es el conjunto de todos los números reales. Desde la gráfica de g mostrada en la figura 5, se observa que $g(x)$ puede estar tan cerca de 3 como se desee al tomar a x lo suficientemente cerca de 1. Así,

$$\lim_{x\to 1} g(x) = 3$$

Observe que $g(1) = 1$, que no es igual al límite de la función g conforme x se aproxima a 1. [Una vez más, el valor de $g(x)$ a $x = 1$ no tiene incidencia en la existencia o valor en el límite de g conforme x se aproxima a 1.]

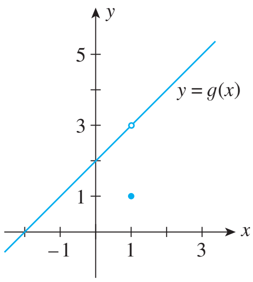


FIGURA 5
El $\lim\limits_{x\to 1}$ de $g(x) = 3$.

EJEMPLO 3 Evalúe el límite de las siguientes funciones conforme x se aproxima al punto indicado.

a. $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$; $x = 0$ **b.** $g(x) = \dfrac{1}{x^2}$; $x = 0$

Solución Las gráficas de las funciones f y g se muestran en la figura 6.

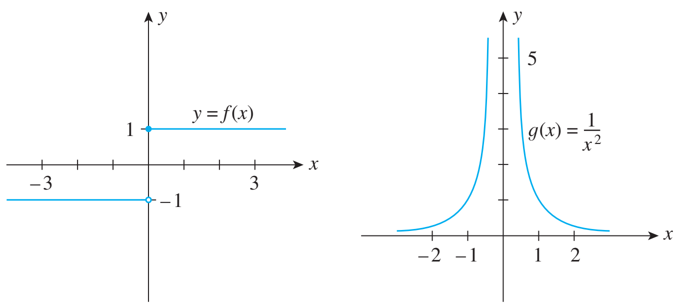


FIGURA 6

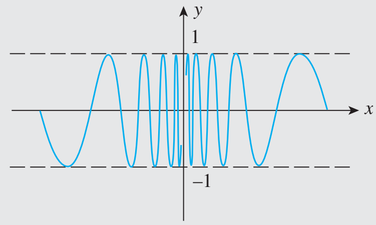
(a) El $\lim\limits_{x\to 0}$ de $f(x)$ no existe. **(b)** El $\lim\limits_{x\to 0}$ de $g(x)$ no existe.

a. En referencia a la figura 6a, se observa que no importa qué tan cerca x esté de cero, $f(x)$ toma el valor de 1 o -1, dependiendo de si x es positivo o negativo. Por consiguiente, no existe un número real *único* L que se aproxime a $f(x)$ a medida que x se aproxime a cero. Se llega a la conclusión de que el límite de $f(x)$ *no* existe conforme x se aproxima a cero.

b. En referencia a la figura 6b, se observa que cuando x se aproxima a cero (por ambos lados), $g(x)$ es creciente sin límite y, por tanto, no se aproxima a cualquier número real en específico. Se concluye, en consecuencia, que el límite de $g(x)$ *no* existe conforme x se aproxima a cero.

Explore y analice

Considere la gráfica de la función h que se representa en la figura siguiente.



Ésta tiene la propiedad de que conforme x se aproxima a cero, ya sea desde la derecha o desde la izquierda, la curva oscila cada vez con mayor frecuencia entre las líneas $y = -1$ y $y = 1$.

1. Explique por qué el límite $\lim_{x \to 0} h(x)$ no existe.
2. Compare esta función con aquéllas del ejemplo 3. Más en concreto, discuta las distintas formas de las funciones que no tienen un límite en $x = 0$.

Hasta ahora hemos dependido del conocimiento de los valores reales de la función o la gráfica de una función cercana a $x = a$ que ayuden a evaluar el límite de la función $f(x)$ conforme x se aproxime a a. Las siguientes propiedades de los límites, que se enumeran sin pruebas, permiten evaluar los límites de las funciones de forma algebraica.

TEOREMA 1
Las propiedades de los límites

Suponga que

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \quad \text{y} \quad \lim_{x \to a} g(x) = M$$

Entonces,

1. $\lim_{x \to a} [f(x)]^r = [\lim_{x \to a} f(x)]^r = L^r$ — *r, un número real*
2. $\lim_{x \to a} cf(x) = c \lim_{x \to a} f(x) = cL$ — *c, un número real*
3. $\lim_{x \to a} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) \pm \lim_{x \to a} g(x) = L \pm M$
4. $\lim_{x \to a} [f(x)g(x)] = [\lim_{x \to a} f(x)][\lim_{x \to a} g(x)] = LM$
5. $\lim_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)} = \dfrac{L}{M}$ — *Dado que $M \neq 0$*

EJEMPLO 4 Utilice el teorema 1 para evaluar los siguientes límites.

a. $\lim_{x \to 2} x^3$ **b.** $\lim_{x \to 4} 5x^{3/2}$ **c.** $\lim_{x \to 1} (5x^4 - 2)$

d. $\lim_{x \to 3} 2x^3\sqrt{x^2 + 7}$ **e.** $\lim_{x \to 2} \dfrac{2x^2 + 1}{x + 1}$

Solución

a.
$$\begin{aligned} \lim_{x \to 2} x^3 &= [\lim_{x \to 2} x]^3 && \text{Propiedad 1} \\ &= 2^3 = 8 && \lim_{x \to 2} x = 2 \end{aligned}$$

b. $\lim_{x \to 4} 5x^{3/2} = 5\left[\lim_{x \to 4} x^{3/2}\right]$ Propiedad 2

$= 5(4)^{3/2} = 40$ Propiedad 1

c. $\lim_{x \to 1} (5x^4 - 2) = \lim_{x \to 1} 5x^4 - \lim_{x \to 1} 2$ Propiedad 3

Para evaluar el $\lim_{x \to 1}$ 2, observe que la función constante $g(x) = 2$ tiene el valor 2 por todos los valores de x. Por tanto, $g(x)$ debe aproximarse el límite 2 conforme x se aproxime a $x = 1$ (¡o cualquier otro punto en cuestión!). Así,

$$\lim_{x \to 1} (5x^4 - 2) = 5(1)^4 - 2 = 3$$

d. $\lim_{x \to 3} 2x^3 \sqrt{x^2 + 7} = 2 \lim_{x \to 3} x^3 \sqrt{x^2 + 7}$ Propiedad 2

$= 2 \lim_{x \to 3} x^3 \lim_{x \to 3} \sqrt{x^2 + 7}$ Propiedad 4

$= 2(3)^3 \sqrt{3^2 + 7}$ Propiedad 1

$= 2(27)\sqrt{16} = 216$

e. $\lim_{x \to 2} \dfrac{2x^2 + 1}{x + 1} = \dfrac{\lim_{x \to 2} (2x^2 + 1)}{\lim_{x \to 2} (x + 1)}$ Propiedad 5

$= \dfrac{2(2)^2 + 1}{2 + 1} = \dfrac{9}{3} = 3$ ■

Formas indeterminadas

Enfaticemos una vez más que la propiedad 5 de los límites es válida sólo cuando el límite de la función que aparece en el denominador no es igual a cero en el número en cuestión.

Si el numerador tiene un límite distinto de cero y el denominador tiene un límite igual a cero, entonces el límite del cociente no existe en el número en cuestión. Este es el caso de la función $g(x) = 1/x^2$ del ejemplo 3b. Aquí, conforme x se aproxime a cero, el numerador se aproxima a 1, pero el denominador se aproxima a cero, por lo que el cociente se hace arbitrariamente mayor. Por consiguiente, como se observó antes, el límite no existe.

Después considere

$$\lim_{x \to 2} \frac{4(x^2 - 4)}{x - 2}$$

el cual se evaluó antes al observar en los valores de la función por x cerca de $x = 2$. Si se trata de evaluar esta expresión mediante la aplicación de la propiedad 5 de los límites, se observa que tanto el numerador como el denominador de la función

$$\frac{4(x^2 - 4)}{x - 2}$$

se aproxima a cero conforme x se aproxima a 2; es decir, se obtiene una expresión de la forma 0/0. En este caso, se dice que el límite del cociente $f(x)/g(x)$ conforme x se aproxima a 2 tiene la **forma indeterminada 0/0**.

Se necesita que se evalúen los límites de este tipo cuando se habla de la derivada de una función, un concepto fundamental en el estudio del cálculo. Como el nombre lo sugiere, la expresión carece de sentido 0/0 no proporciona una solución al problema. Una de las estrategias que pueden ser utilizadas para resolver este tipo de problema es el siguiente.

Estrategia para la evaluación de las formas indeterminadas

1. Reemplace la función dada con una apropiada que tome los mismos valores de la función original en todas partes excepto en $x = a$.
2. Evalúe el límite de esta función conforme x se acerque a a.

Los ejemplos 5 y 6 ilustran esta estrategia.

VIDEO

EJEMPLO 5 Evalúe:

$$\lim_{x \to 2} \frac{4(x^2 - 4)}{x - 2}$$

Solución Ya que tanto el numerador como el denominador de esta expresión se aproximan a cero conforme x se aproxima a 2, se obtiene la forma indeterminada 0/0. Volvemos a escribir

$$\frac{4(x^2 - 4)}{x - 2} = \frac{4(x - 2)(x + 2)}{(x - 2)}$$

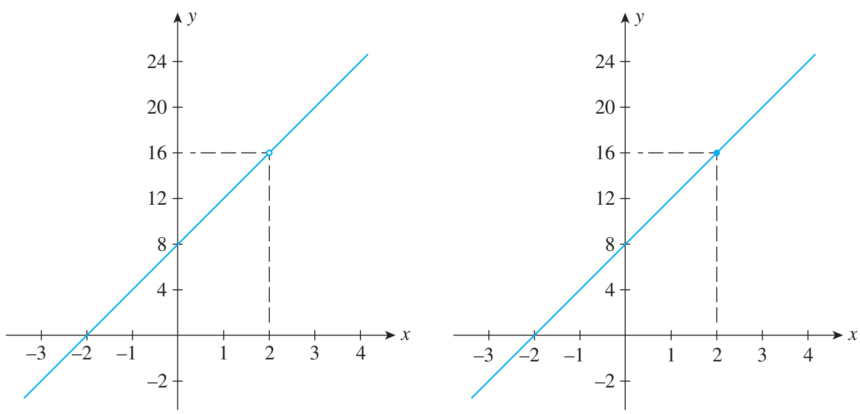
que, al cancelar los factores comunes, es equivalente a $4(x + 2)$, siempre y cuando $x \neq 2$. A continuación, reemplace $4(x^2 - 4)/(x - 2)$ con $4(x + 2)$ y encontramos que

$$\lim_{x \to 2} \frac{4(x^2 - 4)}{x - 2} = \lim_{x \to 2} 4(x + 2) = 16$$

Las gráficas de las funciones

$$f(x) = \frac{4(x^2 - 4)}{x - 2} \quad \text{y} \quad g(x) = 4(x + 2)$$

se muestran en la figura 7. Observe que las gráficas son idénticas, excepto cuando $x = 2$. La función g está definida por todos los valores de x y, en particular, su valor en $x = 2$ es $g(2) = 4(2 + 2) = 16$. Por tanto, el punto (2, 16) está sobre la gráfica de g. Sin embargo, la función f no está definida en $x = 2$. Ya que $f(x) = g(x)$ por todos los valores de x excepto $x = 2$, se deduce que la gráfica de f debe verse exactamente como la gráfica de g, con la excepción de que el punto (2, 16) no se encuentra en la gráfica de f. Esto ilustra el porqué se puede evaluar el límite de f mediante la evaluación del límite de la función "equivalente" g.



(a) $f(x) = \dfrac{4(x^2 - 4)}{x - 2}$ (b) $g(x) = 4(x + 2)$ ■

FIGURA 7
Las gráficas de $f(x)$ y $g(x)$ son idénticas excepto en el punto (2, 16).

Nota Observe que el límite en el ejemplo 5 es el mismo límite que se evalúo antes cuando se habla de la velocidad instantánea del tren de levitación magnética en un momento específico. ■

Exploración con TECNOLOGÍA

1. Utilice la calculadora graficadora para trazar la gráfica de

$$f(x) = \frac{4(x^2 - 4)}{x - 2}$$

en la ventana de visualización $[0, 3] \times [0, 20]$. Después utilice **ZOOM** y **TRACE** para determinar

$$\lim_{x\to 2} \frac{4(x^2 - 4)}{x - 2}$$

2. Utilice la calculadora graficadora para elaborar la gráfica de $g(x) = 4(x + 2)$ en la ventana de visualización $[0, 3] \times [0, 20]$. Después utilice **ZOOM** y **TRACE** para determinar el límite $\lim_{x\to 2} 4(x + 2)$.
¿Qué le sucede al valor y cuando se trata de evaluar a $f(x)$ en $x = 2$? Explique su respuesta.
3. ¿Puede distinguir entre las gráficas de f y g?
4. Concilie sus resultados con los del ejemplo 5.

EJEMPLO 6 Evalúe:

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{1 + h} - 1}{h}$$

Solución Al permitir que h se aproxime a cero, se obtiene la forma indeterminada 0/0. Después, al racionalizar el numerador del cociente al multiplicar tanto el numerador como el denominador por la expresión $(\sqrt{1 + h} + 1)$, se obtiene

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{1 + h} - 1}{h} &= \frac{(\sqrt{1 + h} - 1)(\sqrt{1 + h} + 1)}{h(\sqrt{1 + h} + 1)} \\ &= \frac{1 + h - 1}{h(\sqrt{1 + h} + 1)} \qquad (\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b}) = a - b \\ &= \frac{h}{h(\sqrt{1 + h} + 1)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 + h} + 1}\end{aligned}$$

*(x^2) Vea la página 41.

Por tanto,

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{1 + h} - 1}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{1 + h} + 1} = \frac{1}{\sqrt{1} + 1} = \frac{1}{2}$$

■

Exploración con TECNOLOGÍA

1. Utilice la calculadora graficadora para elaborar la gráfica de $g(x) = \frac{\sqrt{1 + x} - 1}{x}$ en la ventana de visualización $[-1, 2] \times [0, 1]$. Después utilice **ZOOM** y **TRACE** para determinar el $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1 + x} - 1}{x}$ al observar los valores de $g(x)$ conforme x se aproxima a cero desde la izquierda y desde la derecha.
2. Utilice una calculadora graficadora para elaborar la gráfica de $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + x} + 1}$ en la ventana de visualización $[-1, 2] \times [0, 1]$. Después utilice **ZOOM** y **TRACE** para determinar el $\lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{1 + x} + 1}$.
¿Qué sucede con el valor y cuando x toma el valor cero? Explique su respuesta.
3. ¿Puede distinguir entre las gráficas de f y g?
4. Concilie sus resultados con aquéllos del ejemplo 6.

*El símbolo (x^2) indica que un cálculo algebraico o la técnica para resolver el problema utilizada en el ejemplo se revisa en la página dada.

Límites al infinito

Hasta ahora se ha estudiado el límite de una función conforme x se aproxima a un número (finito) a. Existen ocasiones, sin embargo, cuando se desea saber si $f(x)$ se aproxima a un número único a medida que x crece indefinidamente. Considere, por ejemplo, la función P, que da el número de moscas de fruta (*Drosophila*) en un recipiente bajo condiciones controladas de laboratorio, en función de un tiempo t. La gráfica de P se muestra en la figura 8. Se puede observar en la gráfica de P que, a medida que t crece indefinidamente (se hace más y más grande), $P(t)$ se aproxima al número 400. Este número, llamado la *capacidad de carga* del ambiente, se determina por la cantidad del espacio viviente y de los alimentos disponibles, así como otros factores ambientales.

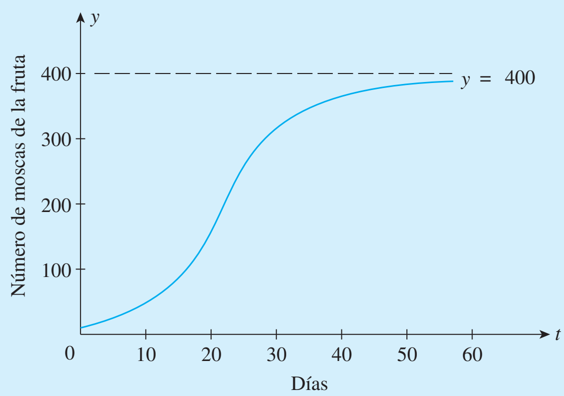


FIGURA **8**
La gráfica de $P(t)$ proporciona la población de las moscas de la fruta en un laboratorio experimental.

Como otro ejemplo, suponga que se da la función

$$f(x) = \frac{2x^2}{1 + x^2}$$

y que se desea determinar qué sucede con $f(x)$ conforme x se hace más y más grande. Al elegir la secuencia de los números 1, 2, 5, 10, 100 y 1,000 y calcular los valores correspondientes de $f(x)$, se obtiene la siguiente tabla de valores:

x	1	2	5	10	100	1,000
$f(x)$	1	1.6	1.92	1.98	1.9998	1.999998

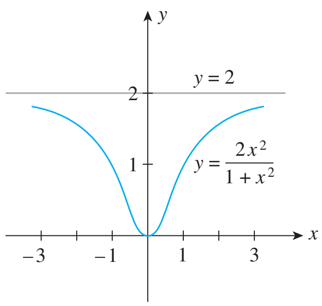


FIGURA **9**
La gráfica de

$$y = \frac{2x^2}{1 + x^2}$$

tiene una asíntota horizontal en $y = 2$.

Desde la tabla, se observa que conforme x se hace más y más grande, $f(x)$ se aproxima más y más a 2. La gráfica de la función f mostrada en la figura 9 confirma esta observación. A la recta $y = 2$ se le da el nombre de **asíntota horizontal**.* En esta situación, se dice que el límite de la función $f(x)$ conforme x crece indefinidamente es 2, se escribe

$$\lim_{x \to \infty} \frac{2x^2}{1 + x^2} = 2$$

En el caso general, la siguiente definición es aplicable para el **límite de una función al infinito**.

*La asíntota se estudiará con mayor detalle en la sección 10.3.

El límite de una función al infinito

La función f tiene el límite L conforme x crece indefinidamente (o, conforme x se aproxima al infinito), al escribir

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L$$

si $f(x)$ puede estar arbitrariamente cerca de L al tomar a x lo suficiente grande.

De forma similar, la función f tiene el límite M conforme x decrece indefinidamente (o conforme x se aproxima al infinito negativo), al escribir

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = M$$

si $f(x)$ puede estar arbitrariamente cerca de M tomando a x negativa y lo suficientemente grande en valor absoluto.

EJEMPLO 7 Sean f y g las funciones

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \quad \text{y} \quad g(x) = \frac{1}{x^2}$$

Evalúe:

a. $\lim_{x\to\infty} f(x)$ y $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ **b.** $\lim_{x\to\infty} g(x)$ y $\lim_{x\to-\infty} g(x)$

Solución Las gráficas de $f(x)$ y $g(x)$ se muestran en la figura 10. En referencia a las gráficas de las funciones respectivas, observamos que

a. $\lim_{x\to\infty} f(x) = 1$ y $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -1$ **b.** $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^2} = 0$ y $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^2} = 0$

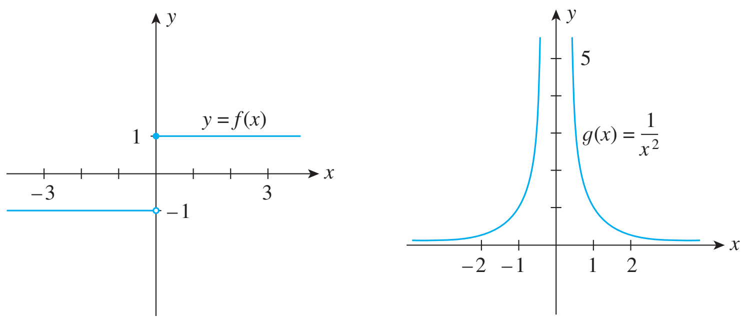


FIGURA 10 **(a)** $\lim_{x\to\infty} f(x) = 1$ y $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -1$ **(b)** $\lim_{x\to\infty} g(x) = 0$ y $\lim_{x\to-\infty} g(x) = 0$ ■

Todas las propiedades de los límites listadas en el teorema 1 son válidas cuando a es reemplazada por ∞ o $-\infty$. Además, se tiene la siguiente propiedad para el límite al infinito.

TEOREMA 2

Para toda $n > 0$,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^n} = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^n} = 0$$

siempre que $\dfrac{1}{x^n}$ esté definido.

Exploración con TECNOLOGÍA

1. Utilice una calculadora graficadora para elaborar las gráficas de

$$y_1 = \frac{1}{x^{0.5}} \qquad y_2 = \frac{1}{x} \qquad y_3 = \frac{1}{x^{1.5}}$$

en la ventana de visualización [0, 200] × [0, 0.5]. ¿Qué podría decir acerca de $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^n}$ si $n = 0.5$, $n = 1$ y $n = 1.5$? ¿Estos resultados están previstos por el teorema 2?

2. Utilice la calculadora graficadora para trazar las gráficas de

$$y_1 = \frac{1}{x} \quad \text{y} \quad y_2 = \frac{1}{x^{5/3}}$$

en la ventana de visualización [−50, 0] × [−0.5, 0]. ¿Qué puede decir acerca de $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^n}$ si $n = 1$ y $n = \frac{5}{3}$? ¿Estos resultados están previstos por el teorema 2?

Sugerencia: Para graficar y_2, escríbala en la forma $y2 = 1/(x\hat{}(1/3))\hat{}5$.

A menudo se utiliza la siguiente técnica para evaluar el límite al infinito de una función racional: *divida el numerador y el denominador de la expresión entre x^n, donde n es la potencia mayor presente en el denominador de la expresión.*

EJEMPLO 8 Evalúe:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2 - x + 3}{2x^3 + 1}$$

Solución Ya que los límites del numerador y del denominador no existen conforme x se aproxima al infinito, la propiedad perteneciente al límite de un cociente (propiedad 5) no es aplicable. Al dividir el numerador y el denominador de la expresión racional entre x^3, se obtiene

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} \frac{x^2 - x + 3}{2x^3 + 1} &= \lim_{x\to\infty} \frac{\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{3}{x^3}}{2 + \dfrac{1}{x^3}} \\ &= \frac{0 - 0 + 0}{2 + 0} = \frac{0}{2} \qquad \text{Utilice el teorema 2.} \\ &= 0\end{aligned}$$

■

EJEMPLO 9 Sea

$$f(x) = \frac{3x^2 + 8y - 4}{2x^2 + 4x - 5}$$

Calcule el $\lim_{x\to\infty}$ de $f(x)$ si éste existe.

Solución De nuevo se observa que la propiedad 5 no es aplicable. Al dividir el numerador y el denominador entre x^2, obtenemos

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2 + 8x - 4}{2x^2 + 4x - 5} = \lim_{x\to\infty} \frac{3 + \frac{8}{x} - \frac{4}{x^2}}{2 + \frac{4}{x} - \frac{5}{x^2}}$$

$$= \frac{\lim_{x\to\infty} 3 + 8 \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} - 4 \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^2}}{\lim_{x\to\infty} 2 + 4 \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} - 5 \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^2}}$$

$$= \frac{3 + 0 - 0}{2 + 0 - 0}$$ Utilice el teorema 2.

$$= \frac{3}{2}$$

EJEMPLO 10 Sea $f(x) = \dfrac{2x^3 - 3x^2 + 1}{x^2 + 2x + 4}$ y evalúe:

a. $\lim_{x\to\infty} f(x)$ **b.** $\lim_{x\to-\infty} f(x)$

Solución

a. Al dividir el numerador y el denominador de la expresión racional entre x^2, obtenemos

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^3 - 3x^2 + 1}{x^2 + 2x + 4} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x - 3 + \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{2}{x} + \frac{4}{x^2}}$$

Ya que el numerador se vuelve mayor arbitrariamente, mientras que el denominador se aproxima a 1 conforme x se aproxima al infinito, se observa que el cociente $f(x)$ se vuelve mayor conforme x se aproxima al infinito. En otras palabras, el límite no existe. Esto se indica al escribir

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^3 - 3x^2 + 1}{x^2 + 2x + 4} = \infty$$

b. Una vez más, al dividir tanto el numerador como el denominador entre x^2, obtenemos

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{2x^3 - 3x^2 + 1}{x^2 + 2x + 4} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x - 3 + \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{2}{x} + \frac{4}{x^2}}$$

En este caso, el numerador se vuelve arbitrariamente mayor en magnitud pero negativo en signo, mientras que el denominador se aproxima a 1 conforme x se aproxima al menos infinito. Sin embargo, el cociente de $f(x)$ decrece indefinidamente, y el límite no existe. Esto se indica al escribir

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{2x^3 - 3x^2 + 1}{x^2 + 2x + 4} = -\infty$$

El ejemplo 11 da una aplicación del concepto del límite de una función al infinito.

EJEMPLO DE APLICACIÓN 11 Funciones del costo promedio

La tienda Custom Office fabrica una línea de escritorios ejecutivos. Se estima que el costo total para la fabricación de x escritorios modelo ejecutivo es $C(x) = 100x + 200{,}000$ dólares por año, así que el costo promedio de fabricación de x número de escritorios está dado por

$$\overline{C}(x) = \frac{C(x)}{x}$$

$$= \frac{100x + 200{,}000}{x} = 100 + \frac{200{,}000}{x}$$

dólares por escritorio. Evalúe el $\lim\limits_{x \to \infty} \overline{C}(x)$ e interprete sus resultados.

Solución

$$\lim_{x \to \infty} \overline{C}(x) = \lim_{x \to \infty} \left(100 + \frac{200{,}000}{x} \right)$$

$$= \lim_{x \to \infty} 100 + \lim_{x \to \infty} \frac{200{,}000}{x} = 100$$

El trazo de la gráfica de la función $\overline{C}(x)$ aparece en la figura 11. El resultado que se obtuvo es completamente esperado si se consideran sus implicaciones económicas. Observe que conforme el nivel de producción aumenta, el costo fijo de fabricación por escritorio, representado por el término $(200{,}000/x)$, disminuye constantemente. El costo promedio debería aproximarse a un costo unitario constante de producción, \$100 en este caso. ■

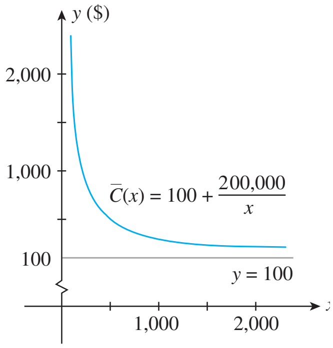
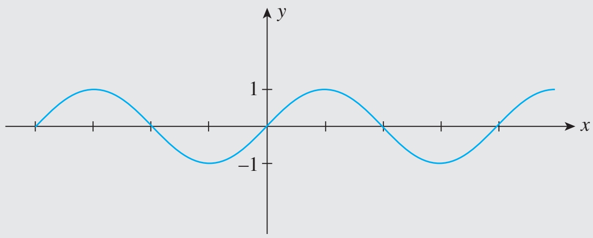


FIGURA 11
Conforme el nivel de fabricación aumenta, el costo promedio se aproxima a \$100 por escritorio.

Explore y analice

Considere la gráfica de la función f indicada en la siguiente figura:



Ésta tiene la propiedad de que la curva oscila entre $y = -1$ y $y = 1$ indefinidamente en ambas direcciones.

1. Explique por qué el $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ y el $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$ no existen.
2. Compare esta función con las del ejemplo 10. Más en específico, discuta las distintas formas en que cada función falla al tener un límite al infinito o a menos infinito.

9.1 Ejercicios de autoevaluación

1. Determine el límite indicado, si este existe.

   a. $\displaystyle \lim_{x \to 3} \frac{\sqrt{x^2 + 7} + \sqrt{3x - 5}}{x + 2}$

   b. $\displaystyle \lim_{x \to -1} \frac{x^2 - x - 2}{2x^2 - x - 3}$

2. El costo promedio por disco (en dólares) en que incurre Herald Records en el prensado de x CD está dado por la función del costo promedio

$$\overline{C}(x) = 1.8 + \frac{3{,}000}{x}$$

   Evalúe el $\lim\limits_{x \to \infty} \overline{C}(x)$ e interprete su resultado.

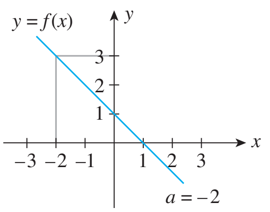
Las soluciones del ejercicio de autoevaluación 9.1 pueden encontrarse en la página 551.

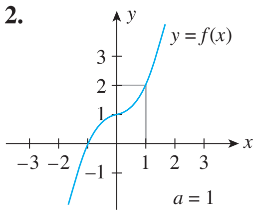
9.1 Preguntas de concepto

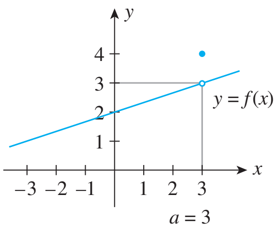
1. Explique el significado del pronunciamiento $\lim_{x\to 2} f(x) = 3$.
2. **a.** Si el $\lim_{x\to 3} f(x) = 5$, ¿qué puede decir acerca de $f(3)$? Explique su respuesta.
   b. Si $f(2) = 6$, qué puede decir acerca del $\lim_{x\to 2} f(x)$? Explique su respuesta.
3. Evalúe y establezca la propiedad de los límites que utiliza en cada paso.
   a. $\lim_{x\to 4} \sqrt{x}(2x^2 + 1)$ **b.** $\lim_{x\to 1} \left(\dfrac{2x^2 + x + 5}{x^4 + 1}\right)^{3/2}$
4. ¿Cuál es la forma indeterminada? Ilustre con un ejemplo.
5. Explique con sus palabras el significado de $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ y $\lim_{x\to -\infty} f(x) = M$.

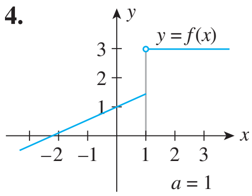
9.1 Ejercicios

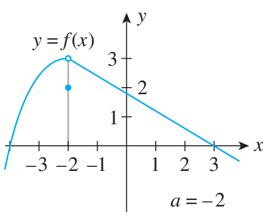
En los ejercicios 1-8, utilice la gráfica de la función dada *f* para determinar el $\lim_{x\to a} f(x)$ en el valor indicado de *a*, si este existe.

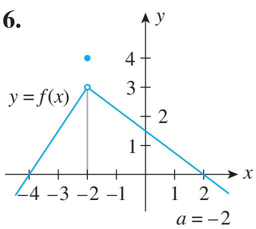
1. 

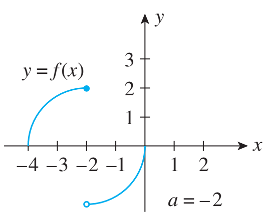
2. 

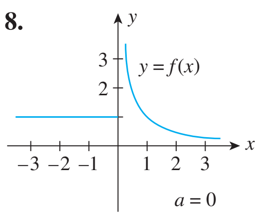
3. 

4. 

5. 

6. 

7. 

8. 

En los ejercicios 9-16, complete la tabla al calcular *f*(*x*) en los valores dados de *x*. Utilice estos resultados para estimar el límite indicado (si éste existe).

9. $f(x) = x^2 + 1$; $\lim_{x\to 2} f(x)$

x	1.9	1.99	1.999	2.001	2.01	2.1
$f(x)$						

10. $f(x) = 2x^2 - 1$; $\lim_{x\to 1} f(x)$

x	0.9	0.99	0.999	1.001	1.01	1.1
$f(x)$						

11. $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$; $\lim_{x\to 0} f(x)$

x	−0.1	−0.01	−0.001	0.001	0.01	0.1
$f(x)$						

12. $f(x) = \dfrac{|x - 1|}{x - 1}$; $\lim_{x\to 1} f(x)$

x	0.9	0.99	0.999	1.001	1.01	1.1
$f(x)$						

13. $f(x) = \dfrac{1}{(x - 1)^2}$; $\lim_{x\to 1} f(x)$

x	0.9	0.99	0.999	1.001	1.01	1.1
$f(x)$						

14. $f(x) = \dfrac{1}{x - 2}$; $\lim_{x\to 2} f(x)$

x	1.9	1.99	1.999	2.001	2.01	2.1
$f(x)$						

15. $f(x) = \dfrac{x^2 + x - 2}{x - 1}$; $\lim_{x\to 1} f(x)$

x	0.9	0.99	0.999	1.001	1.01	1.1
$f(x)$						

16. $f(x) = \dfrac{x-1}{x-1}$; $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$

x	0.9	0.99	0.999	1.001	1.01	1.1
$f(x)$						

En los ejercicios 17-22, trace la gráfica de la función f y evalúe $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, si éste existe, para el valor dado de a.

17. $f(x) = \begin{cases} x-1 & \text{si } x \le 0 \\ -1 & \text{si } x > 0 \end{cases} \quad (a = 0)$

18. $f(x) = \begin{cases} x-1 & \text{si } x \le 3 \\ -2x+8 & \text{si } x > 3 \end{cases} \quad (a = 3)$

19. $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x < 1 \\ 0 & \text{si } x = 1 \\ -x+2 & \text{si } x > 1 \end{cases} \quad (a = 1)$

20. $f(x) = \begin{cases} -2x+4 & \text{si } x < 1 \\ 4 & \text{si } x = 1 \\ x^2+1 & \text{si } x > 1 \end{cases} \quad (a = 1)$

21. $f(x) = \begin{cases} |x| & \text{si } x \ne 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases} \quad (a = 0)$

22. $f(x) = \begin{cases} |x-1| & \text{si } x \ne 1 \\ 0 & \text{si } x = 1 \end{cases} \quad (a = 1)$

En los ejercicios 23-40, determine el límite indicado.

23. $\lim\limits_{x\to 2} 3$

24. $\lim\limits_{x\to -2} -3$

25. $\lim\limits_{x\to 3} x$

26. $\lim\limits_{x\to -2} -3x$

27. $\lim\limits_{x\to 1} (1 - 2x^2)$

28. $\lim\limits_{t\to 3} (4t^2 - 2t + 1)$

29. $\lim\limits_{x\to 1} (2x^3 - 3x^2 + x + 2)$

30. $\lim\limits_{x\to 0} (4x^5 - 20x^2 + 2x + 1)$

31. $\lim\limits_{s\to 0} (2s^2 - 1)(2s + 4)$

32. $\lim\limits_{x\to 2} (x^2 + 1)(x^2 - 4)$

33. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{2x+1}{x+2}$

34. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3+1}{2x^3+2}$

35. $\lim\limits_{x\to 2} \sqrt{x+2}$

36. $\lim\limits_{x\to -2} \sqrt[3]{5x+2}$

37. $\lim\limits_{x\to -3} \sqrt{2x^4 + x^2}$

38. $\lim\limits_{x\to 2} \sqrt{\dfrac{2x^3+4}{x^2+1}}$

39. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{\sqrt{x^2+8}}{2x+4}$

40. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x\sqrt{x^2+7}}{2x - \sqrt{2x+3}}$

En los ejercicios 41-48, determine el límite indicado dado que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 3$ y $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 4$.

41. $\lim\limits_{x\to a} [f(x) - g(x)]$

42. $\lim\limits_{x\to a} 2f(x)$

43. $\lim\limits_{x\to a} [2f(x) - 3g(x)]$

44. $\lim\limits_{x\to a} [f(x)g(x)]$

45. $\lim\limits_{x\to a} \sqrt{g(x)}$

46. $\lim\limits_{x\to a} \sqrt[3]{5f(x) + 3g(x)}$

47. $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{2f(x) - g(x)}{f(x)g(x)}$

48. $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{g(x) - f(x)}{f(x) + \sqrt{g(x)}}$

En los ejercicios 49-62, determine el límite indicado, si éste existe.

49. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{x-1}$

50. $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^2-4}{x+2}$

51. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2-x}{x}$

52. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x^2-3x}{x}$

53. $\lim\limits_{x\to -5} \dfrac{x^2-25}{x+5}$

54. $\lim\limits_{b\to -3} \dfrac{b+1}{b+3}$

55. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x}{x-1}$

56. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x+2}{x-2}$

57. $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^2-x-6}{x^2+x-2}$

58. $\lim\limits_{z\to 2} \dfrac{z^3-8}{z-2}$

59. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}$

Sugerencia: Multiplique por $\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1}$.

60. $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{x-4}{\sqrt{x}-2}$

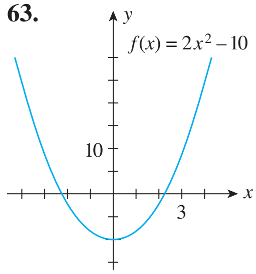
Sugerencia: Vea el ejercicio 59.

61. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-1}{x^3+x^2-2x}$

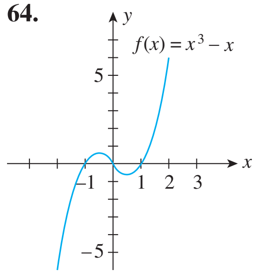
62. $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{4-x^2}{2x^2+x^3}$

En los ejercicios 63-68, utilice la gráfica de la función f para determinar el $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ y el $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$, si existen.

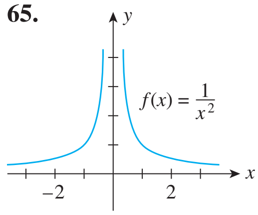
63.



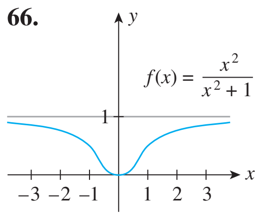
64.



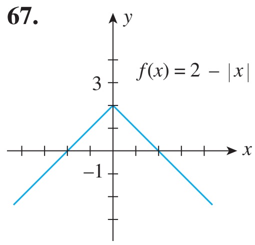
65.



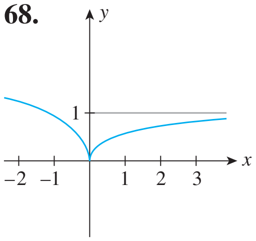
66.



67.



68.



$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{-x} & \text{si } x \le 0 \\ \dfrac{x}{x+1} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

En los ejercicios 69-72, complete la tabla al calcular *f*(*x*) en los valores dados de *x*. Utilice los resultados para saber los límites indicados, si existen.

69. $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$; $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

x	1	10	100	1,000
$f(x)$				

x	−1	−10	−100	−1,000
$f(x)$				

70. $f(x) = \dfrac{2x}{x+1}$; $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

x	1	10	100	1,000
$f(x)$				

x	−5	−10	−100	−1,000
$f(x)$				

71. $f(x) = 3x^3 - x^2 + 10$; $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

x	1	5	10	100	1,000
$f(x)$					

x	−1	−5	−10	−100	−1,000
$f(x)$					

72. $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$; $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

x	1	10	100	−1	−10	−100
$f(x)$						

En los ejercicios 73-80, determine los límites indicados, si existen.

73. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x+2}{x-5}$

74. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{4x^2-1}{x+2}$

75. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{3x^3+x^2+1}{x^3+1}$

76. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^2+3x+1}{x^4-x^2}$

77. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^4+1}{x^3-1}$

78. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{4x^4-3x^2+1}{2x^4+x^3+x^2+x+1}$

79. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^5-x^3+x-1}{x^6+2x^2+1}$

80. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^2-1}{x^3+x^2+1}$

81. Residuos tóxicos Recientemente se encontró que un pozo principal de una ciudad estaba contaminado con tricloroetileno, un compuesto químico cancerígeno, como resultado de un vertedero abandonado que filtraba productos químicos dentro el agua. Se presentó una propuesta a los miembros del consejo de la ciudad indicando el costo, medido en millones de dólares, para eliminar x% de los contaminantes tóxicos, que está dada por

$$C(x) = \frac{0.5x}{100-x} \qquad (0 < x < 100)$$

a. Determine el costo para eliminar 50%, 60%, 70%, 80%, 90% y 95% de los contaminantes.

b. Evalúe

$$\lim_{x\to 100} \frac{0.5x}{100-x}$$

e interprete su resultado.

82. Una situación del fin del mundo La población de cierta raza de conejos introducidos en una isla está dada por

$$P(t) = \frac{72}{9-t} \qquad (0 \le t < 9)$$

donde t es medido en meses.

a. Determine el número inicial de conejos en la isla (en $t = 0$).

b. Demuestre que la población de conejos es creciente sin límite.

c. Trace la gráfica de la función P.

(*Comentario*: a este fenómeno se le conoce como una situación del fin del mundo.)

83. Costo promedio El costo promedio por disco en dólares en que incurre Herald Records en el prensado de x DVD está dado por la función de costo promedio.

$$\overline{C}(x) = 2.2 + \frac{2{,}500}{x}$$

Evalúe el $\lim\limits_{t\to\infty} C(t)$ e interprete su resultado.

84. Concentración de un medicamento en el torrente sanguíneo La concentración de cierto fármaco en el torrente sanguíneo de un paciente en t horas después de la inyección está dada por

$$C(t) = \frac{0.2t}{t^2+1}$$

mg/cm^3. Evalúe el $\lim\limits_{t\to\infty} C(t)$ e interprete su resultado.

85. Ingresos de taquilla Los ingresos totales de taquilla en todo el mundo de una película de larga duración son aproximados por la función

$$T(x) = \frac{120x^2}{x^2+4}$$

donde $T(x)$ se mide en millones de dólares y x es el número de meses desde el lanzamiento de la película.

a. ¿Cuál es el ingreso total de taquilla después del primero, el segundo y el tercer mes?

b. ¿Cuál será el ingreso bruto de la película a largo plazo (cuando x es muy grande)?

86. **Fiabilidad de los chips de computadora** El porcentaje de una determinada marca de chips de computadora que fallarán después de t años de uso se estima en

$$P(t) = 100(1 - e^{-0.1t})$$

a. ¿Qué porcentaje de esta marca de chips de computadoras se espera que sean utilizables después de tres años?
b. Evalúe el $\lim_{t\to\infty} P(t)$. ¿Esperaba este resultado?

87. **Costos de conducir** Un estudio de costo para conducir automóviles sedán de tamaño mediano en 2008 reveló que el costo promedio (pagos del automóvil, la gasolina, el seguro de mantenimiento y la depreciación), medido en centavos/milla, es aproximado por la función

$$C(x) = \frac{1{,}735.2}{x^{1.72}} + 38.6$$

donde x denota el número de millas (en miles) que recorre el automóvil en un año.
a. ¿Cuál es el costo promedio del recorrido de un automóvil sedán de tamaño mediano en 5,000 millas/año? ¿10,000 millas/año? ¿15,000 millas/año? ¿20,000 millas/año? ¿25,000 millas/año?
b. Utilice el inciso (a) para elaborar la gráfica de la función de C.
c. ¿Qué le sucede al costo promedio conforme el número de kilómetros recorridos aumenta sin límite?

Fuente: American Automobile Association

88. **La fotosíntesis** La tasa de producción R en la fotosíntesis está relacionada con la intensidad de la luz I por la función

$$R(I) = \frac{aI}{b + I^2}$$

donde a y b son constantes positivas.
a. Al tomar $a = b = 1$, calcule $R(I)$ por $I = 0, 1, 2, 3, 4$ y 5.
b. Evalúe $\lim_{I\to\infty} R(I)$.
c. Utilice los resultados de los incisos (a) y (b) para elaborar la gráfica de R. Interprete sus resultados.

En los ejercicios 89-94 determine si el pronunciamiento es verdadero o falso. Si es verdadero, explique por qué lo es. Si es falso, explique por qué o proporcione un ejemplo para demostrar por qué lo es.

89. Si el $\lim_{x\to a} f(x)$ existe, entonces f está definida en $x = a$.

90. Si el $\lim_{x\to 0} f(x) = 4$ y el $\lim_{x\to 0} g(x) = 0$, entonces el límite de $\lim_{x\to 0} f(x)g(x) = 0$.

91. Si el $\lim_{x\to 2} f(x) = 3$ y el $\lim_{x\to 2} g(x) = 0$, entonces $\lim_{x\to 2} [f(x)]/[g(x)]$ no existe.

92. Si el $\lim_{x\to 3} f(x) = 0$ y el $\lim_{x\to 3} g(x) = 0$, entonces el $\lim_{x\to 3} [f(x)]/[g(x)]$ no existe.

93. $\lim_{x\to 2}\left(\frac{x}{x+1} + \frac{3}{x-1}\right) = \lim_{x\to 2}\frac{x}{x+1} + \lim_{x\to 2}\frac{3}{x-1}$

94. $\lim_{x\to 1}\left(\frac{2x}{x-1} - \frac{2}{x-1}\right) = \lim_{x\to 1}\frac{2x}{x-1} - \lim_{x\to 1}\frac{2}{x-1}$

95. **La velocidad de una reacción química** Ciertas proteínas, conocidas como enzimas, sirven como catalizadores para las reacciones químicas en los seres vivos. En 1913, Leonor Michaelis y L.M. Menten descubrieron la siguiente fórmula que da la velocidad inicial V (en moles/litro/segundo) en la que la reacción se inicia en términos de la cantidad de sustrato x (la sustancia activa, medida en moles/litros) se presenta:

$$V = \frac{ax}{x + b}$$

donde a y b son constantes positivas. Evalúe

$$\lim_{x\to\infty}\frac{ax}{x+b}$$

e interprete su resultado.

96. Demuestre por medio de un ejemplo que el límite $\lim_{x\to a}[f(x) + g(x)]$ puede existir aunque ni el $\lim_{x\to a} f(x)$ ni el $\lim_{x\to a} g(x)$ existan. ¿Esto contradice el teorema 1?

97. Demuestre por medio de un ejemplo que el $\lim_{x\to a}[f(x)\,g(x)]$ puede existir aunque ni el $\lim_{x\to a} f(x)$ ni el $\lim_{x\to a} g(x)$ existan. ¿Esto contradice el teorema 1?

98. Demuestre por medio de un ejemplo que el $\lim_{x\to a} f(x)/g(x)$ puede existir aunque ni el $\lim_{x\to a} f(x)$ ni el $\lim_{x\to a} g(x)$ existan. ¿Esto contradice el teorema 1?

9.1 Soluciones de los ejercicios de autoevaluación

1. a.
$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x^2+7} + \sqrt{3x-5}}{x+2} = \frac{\sqrt{9+7} + \sqrt{3(3)-5}}{3+2} = \frac{\sqrt{16} + \sqrt{4}}{5} = \frac{6}{5}$$

b. Permitir que x se aproxime a -1 nos lleva a la forma indeterminada 0/0. Por tanto, se procederá de la forma siguiente:

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^2 - x - 2}{2x^2 - x - 3} = \lim_{x\to -1}\frac{(x+1)(x-2)}{(x+1)(2x-3)} = \lim_{x\to -1}\frac{x-2}{2x-3} = \frac{-1-2}{2(-1)-3} = \frac{3}{5}$$

Cancela los factores comunes.

2. $\lim\limits_{x\to\infty} \overline{C}(x) = \lim\limits_{x\to\infty}\left(1.8 + \dfrac{3{,}000}{x}\right)$

$$= \lim_{x\to\infty} 1.8 + \lim_{x\to\infty} \frac{3{,}000}{x}$$

$$= 1.8$$

Nuestros cálculos revelan que, conforme la producción de CD aumenta "sin límite", el costo promedio disminuye y se aproxima al costo unitario de $1.80/disco.

USO DE LA TECNOLOGÍA

Determinación del límite de una función

La calculadora graficadora puede utilizarse para ayudar a determinar el límite de una función, si este existe, como se ilustra en los ejemplos siguientes.

EJEMPLO 1 Sea $f(x) = \dfrac{x^3 - 1}{x - 1}$.

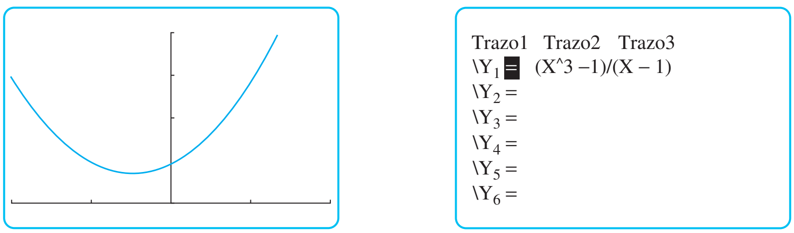
a. Elabore la grafica de f en la ventana de visualización $[-2, 2] \times [0, 4]$.

b. Utilice **ZOOM** para determinar el límite $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3 - 1}{x - 1}$.

c. Verifique su resultado mediante la evaluación algebraica del límite.

Solución

a. La gráfica de f en la ventana de visualización $[-2, 2] \times [0, 4]$ se muestra en la figura T1a.



(a) **(b)**

FIGURA **T1**
(a) La gráfica de

$$f(x) = \frac{x^3 - 1}{x - 1}$$

En la ventana de visualización $[-2, 2] \times [0, 4]$; (b) la pantalla de visualización TI-83/84.

b. Al utilizar el **ZOOM-IN** repetidamente, se observa que el valor de y se aproxima a 3 mientras que el valor de x se aproxima a 1. Por consiguiente, concluimos que

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1} = 3$$

c. Calcule

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x - 1)(x^2 + x + 1)}{x - 1}$$

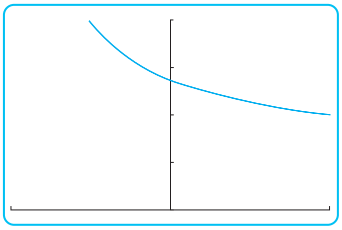
$$= \lim_{x\to 1} (x^2 + x + 1) = 3$$

■

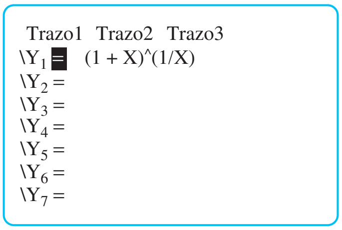
Nota Si se intenta determinar el límite en el ejemplo 1 mediante el uso de la función de evaluación de la calculadora graficadora para calcular el valor de $f(x)$ cuando $x = 1$, observará que la calculadora no muestra el valor y. Esto sucede debido a que $x = 1$ no está en el dominio de f. ■

EJEMPLO 2 Utilice el **ZOOM** para determinar el $\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}$.

Solución Primero trace la gráfica de $f(x) = (1+x)^{1/x}$ en la ventana de visualización compatible. La figura T2a muestra un trazo de f en la ventana $[-1, 1] \times [0, 4]$. Al utilizar el **ZOOM-IN** repetidamente, observará que el $\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x} \approx 2.71828$.



(a)



(b)

FIGURA **T2**
(a) La gráfica de $f(x) = (1+x)^{1/x}$ en la ventana de visualización $[-1, 1] \times [0, 4]$; (b) la ecuación en la pantalla T1-83/84.

El límite $f(x) = (1+x)^{1/x}$ conforme x se aproxima a cero, denotado por la letra e, juega un papel muy importante en el estudio de las matemáticas y sus aplicaciones (vea la sección 3.3). Por tanto,

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x} = e$$

donde, como se acaba de observar, $e \approx 2.71828$. ■

EJEMPLO DE APLICACIÓN 3 Contenido de oxígeno de un tanque

Cuando la basura orgánica es arrojada a un estanque, el proceso de oxidación que se lleva a cabo reduce el contenido de oxígeno en el mismo. Sin embargo, la naturaleza restaurará con el tiempo el contenido de oxígeno a su nivel natural. Suponga que el contenido de oxígeno en t días después de que la basura fuese arrojada dentro del estanque está dada por

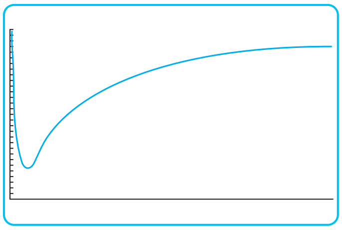
$$f(t) = 100\left(\frac{t^2 + 10t + 100}{t^2 + 20t + 100}\right)$$

por ciento de su nivel normal.

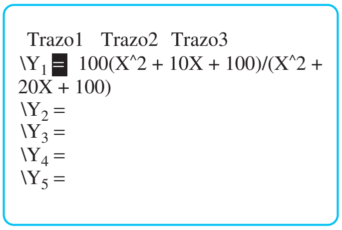
a. Elabore la gráfica de f en la ventana de visualización $[0, 200] \times [70, 100]$.
b. ¿Qué puede decir respecto a $f(t)$ cuándo t es muy grande?
c. Verifique su observación en el inciso (b) al evaluar el $\lim_{x\to\infty} f(t)$.

Solución

a. La gráfica de f se muestra en la figura T3a.
b. En la gráfica de f, parece que $f(t)$ se aproxima a 100 uniformemente conforme t se vuelve mayor. Esta observación indica que eventualmente el contenido de oxígeno del estanque será restituido a su nivel natural.



(a)



(b)

FIGURA **T3**
a) La gráfica de f en la ventana de visualización $[0, 200] \times [70, 100]$; b) la ecuación de la pantalla TI-83/84.

(*continúa*)

c. Para verificar la observación realizada en el inciso (b), calcule

$$\lim_{x\to\infty} f(t) = \lim_{x\to\infty} 100\left(\frac{t^2 + 10t + 100}{t^2 + 20t + 100}\right)$$

$$= 100 \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1 + \dfrac{10}{t} + \dfrac{100}{t^2}}{1 + \dfrac{20}{t} + \dfrac{100}{t^2}}\right) = 100 \qquad \blacksquare$$

EJERCICIOS CON TECNOLOGÍA

En los ejercicios 1-10 determine en primer lugar el límite indicado, trace la gráfica de la función en la ventana de visualización adecuada y utilice a continuación la función de ZOOM-IN de la calculadora.

1. $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{2x^3 - 2x^2 + 3x - 3}{x - 1}$ **2.** $\displaystyle\lim_{x\to -2} \frac{2x^3 + 3x^2 - x + 2}{x + 2}$

3. $\displaystyle\lim_{x\to -1} \frac{x^3 + 1}{x + 1}$ **4.** $\displaystyle\lim_{x\to -1} \frac{x^4 - 1}{x - 1}$

5. $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^3 - x^2 - x + 1}{x^3 - 3x + 2}$ **6.** $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x}$

7. $\displaystyle\lim_{x\to 0} (1 + 2x)^{1/x}$ **8.** $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{2^x - 1}{x}$

9. Demuestre que el $\displaystyle\lim_{x\to 3} \frac{2}{x - 3}$ no existe.

10. Demuestre que el $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{x^3 - 2x + 1}{x - 2}$ no existe.

11. PLANIFICACIÓN DE LA CIUDAD Un desarrollador importante está construyendo un complejo de casas, oficinas, tiendas, escuelas e iglesias en 5,000 acres dentro de la comunidad rural de Marlboro. Como resultado de este desarrollo, los planificadores han estimado que la población de Marlboro (en miles) t años a partir de ahora se dará por

$$P(t) = \frac{25t^2 + 125t + 200}{t^2 + 5t + 40}$$

a. Elabore la gráfica de P en la ventana de visualización $[0, 50] \times [0, 30]$.

b. ¿Cuál será la población de Marlboro a largo plazo?
Sugerencia: Determine $\lim_{t\to\infty} P(t)$.

12. CANTIDAD DE PRECIPITACIÓN PLUVIAL La cantidad total de lluvia (en pulgadas) después de t horas durante una precipitación está dada por

$$T(t) = \frac{0.8t}{t + 4.1}$$

a. Elabore la gráfica de T en la ventana de visualización $[0, 30] \times [0, 0.8]$.

b. ¿Cuál es la cantidad total de lluvia durante esta precipitación?
Sugerencia: Determine el $\lim_{t\to\infty} T(t)$.

9.2 Los límites laterales y la continuidad

Límites laterales

Considere la función f definida por

$$f(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{si } x < 0 \\ x + 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

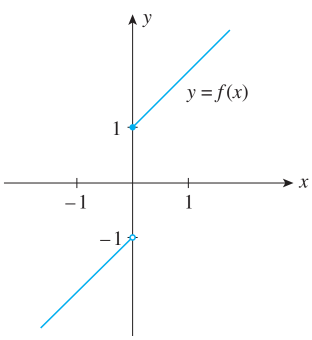


FIGURA 12
La función f no tiene un límite conforme x se aproxima a cero.

Desde la gráfica de f mostrada en la figura 12, observe que la función f no tiene un límite conforme x se aproxima a cero, ya que, no importa cuán cerca x esté de cero, $f(x)$ toma los valores que están cerca de 1 si x es positiva y los valores que están cerca de -1 si x es negativa. Por consiguiente, $f(x)$ no puede estar cerca de un número único L, sin importar qué tan cerca x esté de cero. Ahora, si se le impide a x ser mayor que cero (a la derecha del cero), entonces se observa que $f(x)$ puede ser tan cercana a 1 tanto como se quiera, tomando a x lo suficientemente cerca de cero. En este caso se dice que el límite derecho de f conforme x se aproxima a cero (desde la derecha) es 1, al escribir

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1$$

Del mismo modo, se observa que $f(x)$ puede estar tan cerca de -1 tanto como se desee al colocar a x lo suficientemente cerca, pero a la izquierda de cero. En este caso se dice que el límite izquierdo de f conforme x se aproxima a cero (desde la izquierda) es -1, al escribir

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = -1$$

Estos límites se llaman **límites laterales**. En términos más generales, tenemos las siguientes definiciones.

Límites laterales

La función f tiene el **límite derecho** L conforme x se aproxima a a desde la derecha, al escribir

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = L$$

si los valores de $f(x)$ pueden estar tan cerca de L tanto como se desee, al tomar a x lo suficientemente cerca de (pero no igual a) a y a la derecha de a.

De forma similar, la función f tiene un **límite izquierdo** M conforme x se aproxima a a desde la izquierda, al escribir

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = M$$

si los valores de $f(x)$ pueden estar tan cerca de M tanto como se desee al tomar a x lo suficientemente cerca de (pero no igual a) a y a la izquierda de a.

La conexión entre los límites de un solo lado y los límites de dos lados definidos antes están dados por el siguiente teorema.

TEOREMA 3

Sea f una función que está definida por todos los valores de x cerca de $x = a$ con la posible excepción de a por sí misma. Entonces

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \qquad \text{si y sólo si} \qquad \lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = L$$

Por tanto, el límite existe si y sólo si los límites laterales existen y son iguales.

EJEMPLO 1 Sea

$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{si } x \le 0 \\ \sqrt{x} & \text{si } x > 0 \end{cases} \qquad \text{y} \qquad g(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$$

a. Demuestre que el $\lim_{x\to 0} f(x)$ existe al estudiar los límites laterales de f conforme x se aproxima $x = 0$.

b. Demuestre que el $\lim_{x\to 0} g(x)$ no existe.

Solución

a. Para $x \le 0$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} (-x) = 0$$

y para $x > 0$, se determina

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \sqrt{x} = 0$$

Por tanto,

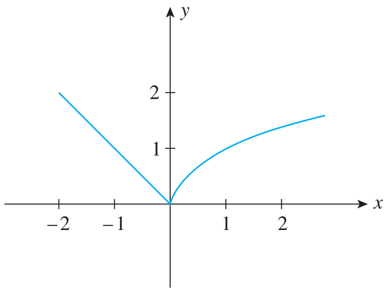
$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0$$

(figura 13a).

b. Se tiene

$$\lim_{x\to 0^-} g(x) = -1 \quad \text{y} \quad \lim_{x\to 0^+} g(x) = 1$$

y ya que los límites laterales no son iguales, se concluye que el $\lim_{x\to 0} g(x)$ no existe (figura 13b).



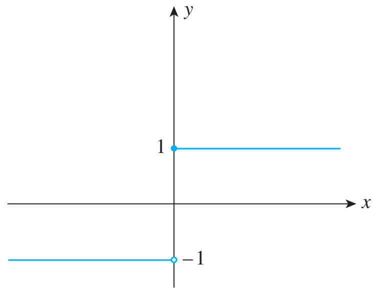


FIGURA 13

(a) El $\lim_{x\to 0} f(x)$ existe. **(b)** El $\lim_{x\to 0} g(x)$ no existe. ■

Funciones continuas

Las funciones continuas desempeñarán un papel importante en la mayor parte del estudio del cálculo. En términos generales, una función es continua en un punto si la gráfica de la función en ese punto está desprovisto de vacíos, saltos o rupturas. Considere, por ejemplo, la gráfica de la función f mostrada en la figura 14.

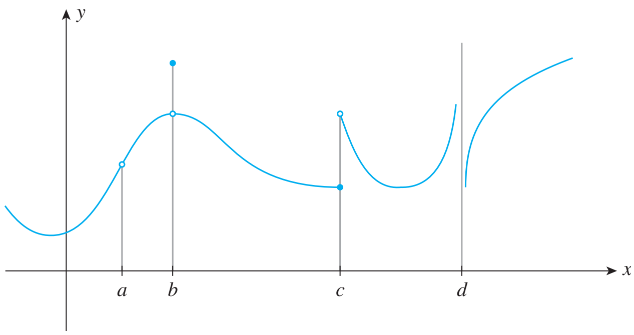


FIGURA 14
La gráfica de esta función no es continua en $x = a$, $x = b$, $x = c$ y $x = d$.

Eche un vistazo más de cerca al comportamiento de f en o cerca de $x = a$, $x = b$, $x = c$ y $x = d$. En primer lugar, considere que f no está definida en $x = a$, es decir, $x = a$ no está en el dominio de f, lo que resulta en un "orificio" en la gráfica de f. Después, observe que el valor de f en b, $f(b)$ no es igual al límite de $f(x)$ conforme x se aproxima a b, lo que resulta en un "salto" en la gráfica de f en $x = b$. La función f no tiene un límite en $x = c$, ya que los límites de la izquierda y de la derecha de $f(x)$ no son iguales, además de provocar un salto en la gráfica de f en $x = c$. Por último, el límite de f no existe en $x = d$, resultando en una ruptura en la gráfica de f. La función f es *discontinua* en cada uno de estos números. Ésta es *continua* en todos los demás.

Continuidad de una función en un número

Una función f es **continua en un número** $x = a$ si se cumplen los siguientes requisitos.

1. $f(a)$ está definida. **2.** El $\lim_{x\to a} f(x)$ existe. **3.** $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$

Por tanto, una función f es continua en $x = a$ si el límite de f en $x = a$ existe y tiene el valor $f(a)$. Geométricamente, f es continua en $x = a$ si la proximidad de x a a implica la proximidad de $f(x)$ a $f(a)$.

Si f no es continua en $x = a$, entonces se dice que f es **discontinua** en $x = a$. Además, f es **continua sobre un intervalo** si f es continua en cada número en el intervalo.

La figura 15 muestra la gráfica de una función continua sobre el intervalo (a, b). Observe que la gráfica de la función sobre el intervalo indicado puede ser trazada sin levantar el lápiz del papel.

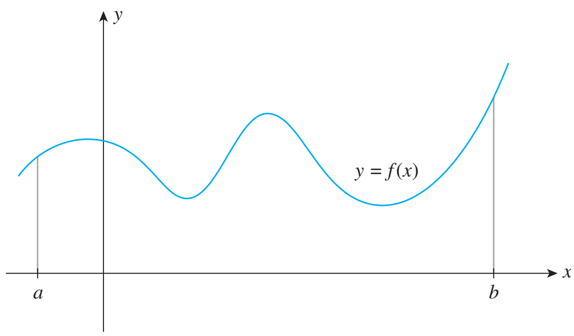


FIGURA 15
La gráfica de f es continua sobre el intervalo (a, b).

EJEMPLO 2 Determine los valores de x por los que cada función es continua.

a. $f(x) = x + 2$ **b.** $g(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$ **c.** $h(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{si } x \neq 2 \\ 1 & \text{si } x = 2 \end{cases}$

d. $F(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ **e.** $G(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$

La gráfica de cada función se muestra en la figura 16.

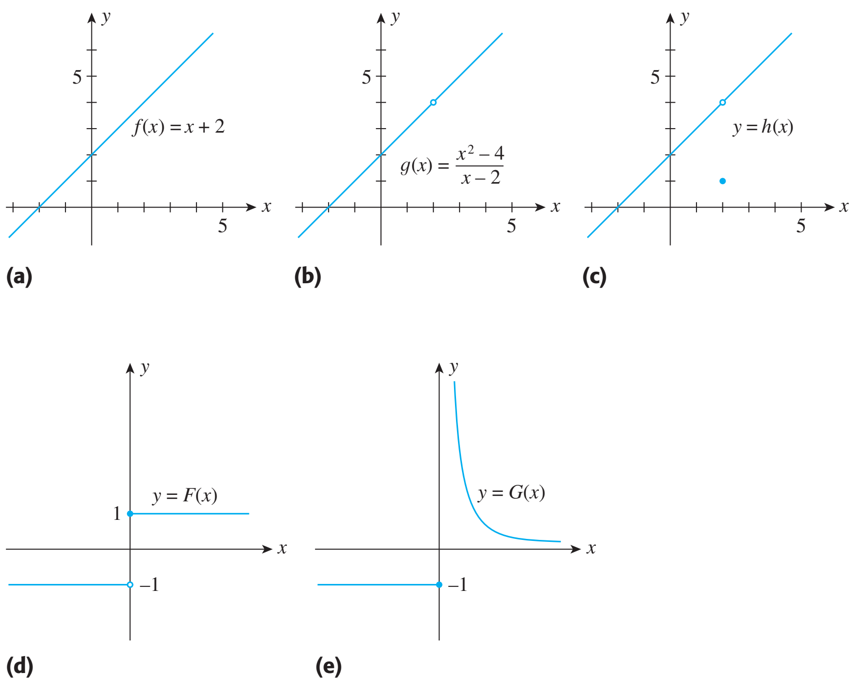


FIGURA 16

Solución

a. La función f es continua en todas partes debido a que a las tres condiciones para la continuidad se cumplen por todos los valores de x.
b. La función g es discontinua en $x = 2$ debido a que g no está definida en ese número. Es continua en todos los demás.
c. La función h es discontinua en $x = 2$ debido a que la tercera condición para la continuidad es violada; el límite de $h(x)$ conforme x se aproxima a 2 existe y tiene el valor 4, pero este límite no es igual a $h(2) = 1$. Ésta es continua para todos los otros valores de x.
d. La función F es continua en todas partes excepto en $x = 0$, donde el límite de $F(x)$ no existe conforme x se aproxima a cero (vea el ejemplo 3a, sección 9.1).
e. Ya que el límite de $G(x)$ no existe conforme x se aproxima a cero, se concluye que G falla al ser continua en $x = 0$. La función G es continua en todos los demás.

Propiedades de las funciones continuas

Las siguientes propiedades de las funciones continuas son una consecuencia directa de la definición de continuidad y las propiedades correspondientes de los límites. Éstas se expresan sin pruebas.

Propiedades de las funciones continuas

1. La función constante $f(x) = c$ es continua en todas partes.
2. La función de identidad $f(x) = x$ es continua en todas partes.

Si f y g son continuas en $x = a$, entonces

3. $[f(x)]^n$, donde n es un número real, es continua en $x = a$ cada vez que se define en ese número.
4. $f \pm g$ es continua en $x = a$.
5. fg es continua en $x = a$.
6. f/g es continua en $x = a$ siempre que $g(a) \neq 0$.

Al utilizar estas propiedades de las funciones continuas, se puede comprobar los siguientes resultados (una prueba está trazada en el ejercicio 100, página 567).

La continuidad de las funciones polinómicas y racionales

1. Una función polinómica $y = P(x)$ es continua en cada valor de x.
2. Una función racional $R(x) = p(x)/q(x)$ es continua en cada valor de x donde $q(x) \neq 0$.

VIDEO

EJEMPLO 3 Determine los valores de x por el que cada función es continua.

a. $f(x) = 3x^3 + 2x^2 - x + 10$ **b.** $g(x) = \dfrac{8x^{10} - 4x + 1}{x^2 + 1}$

c. $h(x) = \dfrac{4x^3 - 3x^2 + 1}{x^2 - 3x + 2}$

Solución

a. La función f es una función polinómica de tercer grado, por lo que $f(x)$ es continua para todos los valores de x.
b. La función g es una función racional. Observe que el denominador de g, es decir, $x^2 + 1$ nunca es igual a cero. Así, se concluye que g es continua para todos los valores de x.

c. La función h es una función racional. Sin embargo, en este caso el denominador de h es igual a cero en $x = 1$ y $x = 2$, lo cual puede verse al factorizarla. Por tanto,

$$x^2 - 3x + 2 = (x - 2)(x - 1)$$

Sin embargo concluimos que h es continua en todas partes, excepto en $x = 1$ y $x = 2$, donde ésta es discontinua. ■

Hasta este punto, la mayoría de las aplicaciones analizadas involucran funciones que son continuas en todas partes. En el ejemplo 4 se considera que una aplicación del campo de la psicología educacional involucra una función discontinua.

EJEMPLO DE APLICACIÓN 4 Curvas de aprendizaje La figura 17 muestra la curva de aprendizaje asociada con una determinada persona. A partir de ningún conocimiento de la materia que se enseña, la persona sigue haciendo progresos hacia la comprensión de ésta durante el intervalo de tiempo $0 \leq t < t_1$. En este caso, el lento progreso de la persona conforme se aproxima el momento t_1, porque él no entiende particularmente un concepto complejo. De repente se produce un gran avance en el momento t_1, impulsando su conocimiento del tema a un nivel superior. La curva es discontinua en t_1.

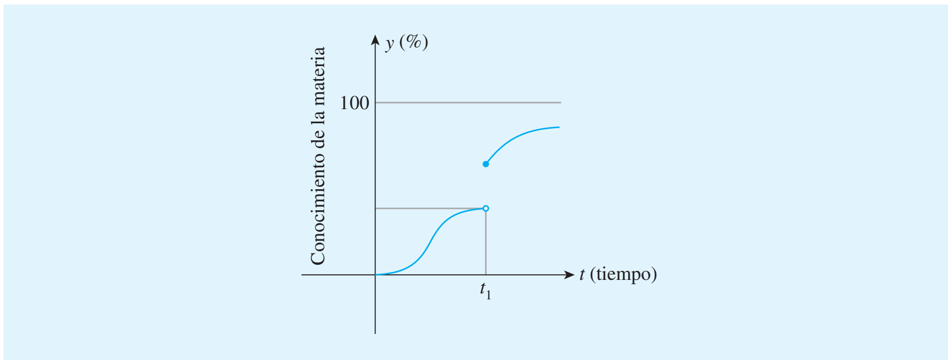


FIGURA 17
Una curva de conocimiento que es discontinua en $t = t_1$ ■

Teorema del valor intermedio

Observe de nuevo al modelo del movimiento del maglev (tren de levitación magnética) en un tramo recto de la vía. Se sabe que el tren no puede desaparecer en cualquier instan-te del tiempo y no puede omitir partes de la pista y reaparecer en algún otro lugar. Para decirlo de otro modo, el tren no puede ocupar la posición s_1 y s_2 sin al menos, en algún momento, ocupar la posición intermedia (figura 18).

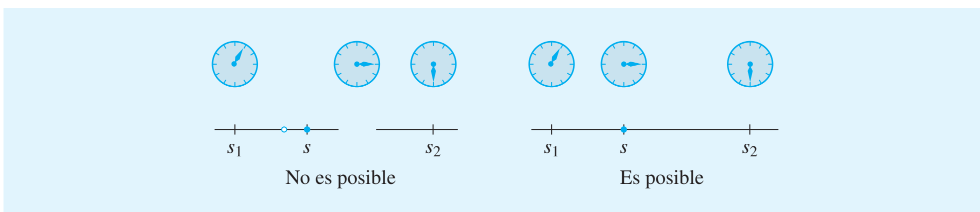


FIGURA 18
La posición del tren de levitación magnética.

Para expresar matemáticamente este hecho, recuerde que la posición del maglev en función del tiempo es descrita por

$$f(t) = 4t^2 \qquad (0 \leq t \leq 10)$$

Suponga que la posición del maglev está en s_1 en algún momento t_1 y su posición es s_2 en algún momento t_2 (figura 19). Entonces si s_3 es cualquier número entre s_1 y s_2 dando una posición intermedia del maglev, debe estar al menos en un t_3 entre t_1 y t_2 dando el tiempo en el que el tren está en s_3, es decir, $f(t_3) = s_3$.

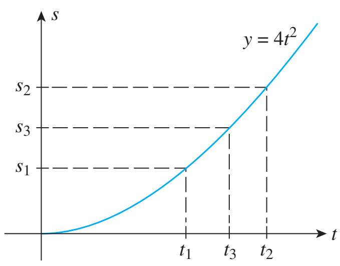


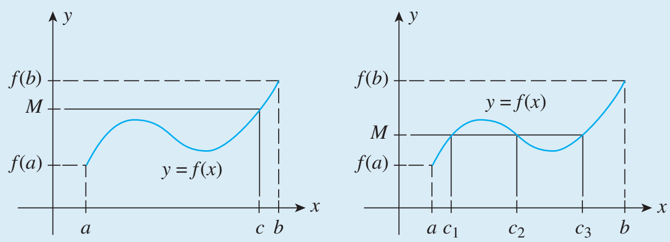
FIGURA 19
Si $s_1 \leq s_3 \leq s_2$, entonces debe haber por lo menos una t_3 $(t_1 \leq t_3 \leq t_2)$ es decir, $f(t_3) = s_3$.

Esta discusión lleva a la esencia del teorema del valor intermedio. La prueba de este teorema se puede encontrar en la mayoría de los libros de cálculo avanzado.

TEOREMA 4

El teorema del valor intermedio

Si f es una función continua sobre un intervalo cerrado $[a, b]$ y M es cualquier número entre $f(a)$ y $f(b)$, entonces existe por lo menos un número c en $[a, b]$ como $f(c) = M$ (figura 20).



(a) $f(c) = M$ **(b)** $f(c_1) = f(c_2) = f(c_3) = M$

Para ilustrar el teorema del valor intermedio, observe de nuevo el ejemplo que involucra el movimiento del maglev (vea la figura 2, página 535). Tome en cuenta que la posición inicial del tren es $f(0) = 0$ y la posición al final de la ejecución de su prueba es $f(10) = 400$. Por otra parte, la función f es continua sobre $[0, 10]$. Así que el teorema del valor intermedio garantiza que si se elige arbitrariamente un número entre 0 y 400, por ejemplo 100, dando la posición del maglev, que debe estar $\bar{t}$ (léase "t barra") entre 0 y 10 en el momento en que el tren está en la posición $s = 100$. Para determinar el valor de $\bar{t}$, se resuelve la ecuación $f(\bar{t}) = s$, o

$$4\bar{t}^2 = 100$$

dando $\bar{t} = 5$ (t debe estar entre 0 y 10).

Es importante recordar cuando utilice el teorema 4 que la función f debe ser continua. La conclusión del teorema del valor intermedio no puede sostenerse si f no es continua (vea el ejercicio 101, página 567).

El siguiente teorema es una consecuencia inmediata del teorema del valor intermedio. No sólo le dice cuando un **cero de una función** f [raíz de la ecuación $f(x) = 0$] existe sino que también da las bases para el método de aproximación de la misma.

TEOREMA 5

La existencia de ceros en una función continua

Si f es una función continua sobre un intervalo cerrado $[a, b]$, y si $f(a)$ y $f(b)$ tiene signos opuestos, existe entonces por lo menos una solución a la ecuación $f(x) = 0$ en el intervalo (a, b) (figura 21).

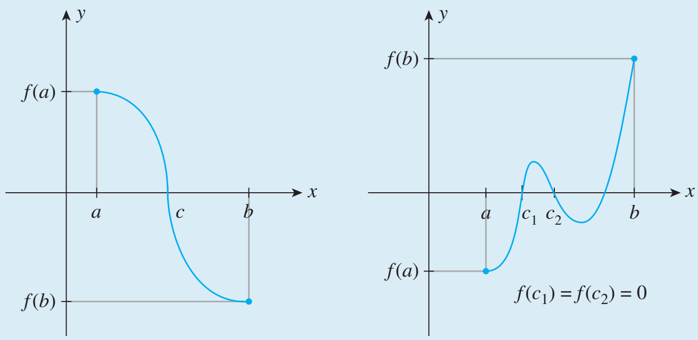


FIGURA **21**
Si $f(a)$ y $f(b)$ tienen signos opuestos, deberá haber por lo menos un número c ($a < c < b$) como $f(c) = 0$.

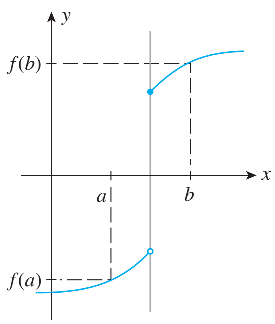


FIGURA **22**
$f(a) < 0$ y $f(b) > 0$, pero la gráfica de f no cruza el eje x entre a y b debido a que f es discontinua.

En términos geométricos, esta propiedad expresa que si la gráfica de una función continua va sobre el eje x y por debajo del eje x, o viceversa, ésta debe *cruzar* el eje x. Esto no es necesariamente cierto si la función es discontinua (figura 22).

EJEMPLO 5 Sea $f(x) = x^3 + x + 1$.

a. Demuestre que f es continua por todos los valores de x.
b. Calcule $f(-1)$ y $f(1)$ y utilice los resultados para deducir que existe por lo menos un número $x = c$, donde c permanece en el intervalo $(-1, 1)$ y $f(c) = 0$.

Solución

a. La función f es una función polinómica de tercer grado y es, por tanto, continua en todas partes.
b. $f(-1) = (-1)^3 + (-1) + 1 = -1$ y $f(1) = 1^3 + 1 + 1 = 3$
Ya que $f(-1)$ y $f(1)$ tienen signos opuestos, el teorema 5 dice que debe haber por lo menos un número $x = c$ con $-1 < c < 1$ como $f(c) = 0$. ■

El siguiente ejemplo demuestra cómo el teorema del valor intermedio puede utilizarse para ayudarlo a determinar el cero de una función.

EJEMPLO 6 Sea $f(x) = x^3 + x - 1$. Ya que f es una función polinómica, ésta es continua en todas partes. Observe que $f(0) = -1$ y $f(1) = 1$ de modo que el teorema 5 garantiza la existencia de por lo menos una de la raíz de la ecuación $f(x) = 0$ en $(0, 1)$.*

Se puede localizar la raíz más precisa al utilizar una vez más el teorema 5 de la manera siguiente: evalúe $f(x)$ en el punto medio de $[0, 1]$, obteniendo

$$f(0.5) = -0.375$$

*Puede demostrarse que f tiene precisamente un cero en (0, 1) (vea el ejercicio 111, sección 10.1).

Debido a que $f(0.5) < 0$ y $f(1) > 0$, el teorema 5 ahora dice que la raíz debe estar en (0.5, 1).

Repita el proceso: evalúe $f(x)$ en el punto medio de [0.5, 1], que es

$$\frac{0.5 + 1}{2} = 0.75$$

Por tanto,

$$f(0.75) = 0.1719$$

Debido a que $f(0.5) < 0$ y $f(0.75) > 0$, el teorema 5 dice que la raíz está en (0.5, 0.75). Este proceso puede ser continuo. La tabla 3 resume los resultados de los cálculos en nueve pasos.

En la tabla 3 se observa que la raíz es aproximadamente de 0.68, con una precisión de dos posiciones decimales. Al continuar el proceso mediante un número de pasos suficiente, puede obtenerse una aproximación tan exacta a la raíz como se desee. ■

TABLA 3

Paso	Raíz de $f(x) = 0$ Permanece en
1	(0, 1)
2	(0.5, 1)
3	(0.5, 0.75)
4	(0.625, 0.75)
5	(0.625, 0.6875)
6	(0.65625, 0.6875)
7	(0.671875, 0.6875)
8	(0.6796875, 0.6875)
9	(0.6796875, 0.6835937)

Nota Al proceso para determinar la raíz de $f(x) = 0$ utilizado en el ejemplo 6 se le llama **método de bisección**. Es crudo pero efectivo. ■

9.2 Ejercicios de autoevaluación

1. Evalúe $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x)$ y $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x)$, donde

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < -1 \\ 1 + \sqrt{x+1} & \text{si } x \geq -1 \end{cases}$$

¿Existe el $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x)$?

2. Determine los valores de x por lo que la función dada es discontinua. En cada número donde f es discontinua, indique cuál(es) condición(es) de continuidad son violadas. Elabore la gráfica de la función.

a. $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 1 & \text{si } x \leq 1 \\ x - 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

b. $g(x) = \begin{cases} -x + 1 & \text{si } x < -1 \\ 2 & \text{si } -1 < x \leq 1 \\ -x + 3 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

Las soluciones de los ejercicios de autoevaluación 9.2 pueden encontrarse en la página 567.

9.2 Preguntas de concepto

1. Explique el significado del pronunciamiento $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = 2$ y $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = 4$.

2. Suponga que el $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = 3$ y $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = 4$.

a. ¿Qué puede decir acerca del $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$? Explique su respuesta.

b. ¿Qué puede decir acerca de $f(1)$? Explique su respuesta.

3. Explique el significado de una función f al ser continua (a) en el número a y (b) sobre el intervalo I.

4. Determine si cada función f es continua o discontinua. Explique su respuesta.

a. $f(t)$ da la altitud de un aeroplano en el momento t.

b. $f(t)$ mide la cantidad total de lluvia en el momento t en el Aeropuerto Municipal.

c. $f(s)$ mide el precio en función de la distancia s para tomar un taxi desde el aeropuerto Kennedy hasta el centro de Manhatan.

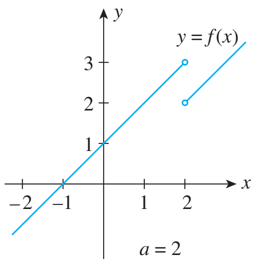
d. $f(t)$ da la tasa de interés aplicada por una institución financiera en el momento t.

5. Explique el teorema del valor intermedio en sus propias palabras.

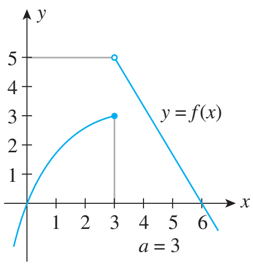
9.2 Ejercicios

En los ejercicios 1-8 utilice la gráfica de la función *f* para determinar $\lim_{x\to a^-} f(x)$, $\lim_{x\to a^+} f(x)$ y $\lim_{x\to a} f(x)$ en el valor indicado de *a*, si el límite existe.

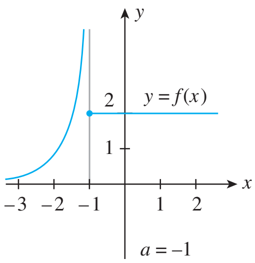
1.



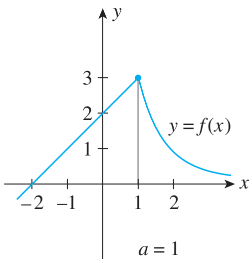
2.



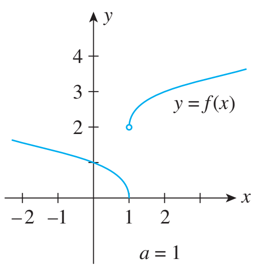
3.



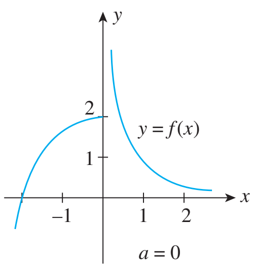
4.



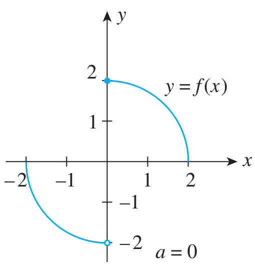
5.



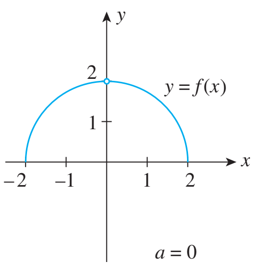
6.



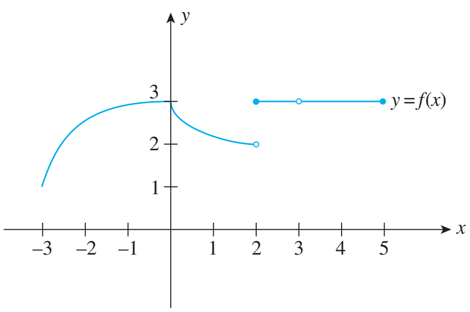
7.



8.



En los ejercicios 9-14 refiérase a la gráfica de la función *f* y determine si cada pronunciamiento es verdadero o falso.

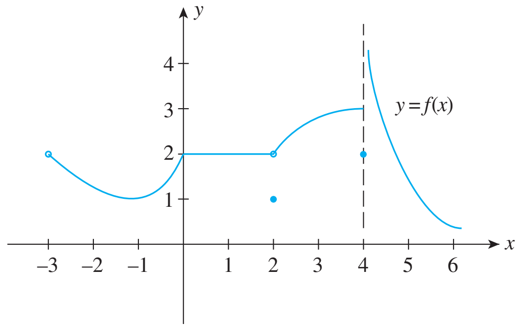


9. $\lim_{x\to -3^+} f(x) = 1$ **10.** $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$

11. $\lim_{x\to 2^-} f(x) = 2$ **12.** $\lim_{x\to 2^+} f(x) = 3$

13. $\lim_{x\to 3} f(x)$ no existe. **14.** $\lim_{x\to 5^-} f(x) = 3$

En los ejercicios 15-20 refiérase a la gráfica de la función *f* y determine si cada pronunciamiento es verdadero o falso.



15. $\lim_{x\to -3^+} f(x) = 2$ **16.** $\lim_{x\to 0} f(x) = 2$

17. $\lim_{x\to 2} f(x) = 1$ **18.** $\lim_{x\to 4^-} f(x) = 3$

19. $\lim_{x\to 4^+} f(x)$ no existe. **20.** $\lim_{x\to 4} f(x) = 2$

En los ejercicios 21-38 determine el límite indicado de un solo lado, si este existe.

21. $\lim_{x\to 1^+} (2x + 4)$ **22.** $\lim_{x\to 1^-} (3x - 4)$

23. $\lim_{x\to 2^-} \dfrac{x - 3}{x + 2}$ **24.** $\lim_{x\to 1^+} \dfrac{x + 2}{x + 1}$

25. $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x}$ **26.** $\lim_{x\to 0^-} \dfrac{1}{x}$

27. $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{x - 1}{x^2 + 1}$ **28.** $\lim_{x\to 2^+} \dfrac{x + 1}{x^2 - 2x + 3}$

29. $\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x}$ **30.** $\lim_{x\to 2^+} 2\sqrt{x - 2}$

31. $\lim_{x\to -2^+} (2x + \sqrt{2 + x})$ **32.** $\lim_{x\to -5^+} x(1 + \sqrt{5 + x})$

33. $\lim_{x\to 1^-} \dfrac{1 + x}{1 - x}$ **34.** $\lim_{x\to 1^+} \dfrac{1 + x}{1 - x}$

35. $\lim_{x\to 2^-} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$ **36.** $\lim_{x\to -3^+} \dfrac{\sqrt{x + 3}}{x^2 + 1}$

37. $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ y $\lim_{x\to 0^-} f(x)$, donde

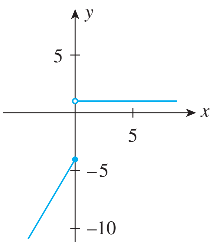
$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

38. $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ y $\lim_{x\to 0^-} f(x)$, donde

$$f(x) = \begin{cases} -x + 1 & \text{si } x \leq 0 \\ 2x + 3 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

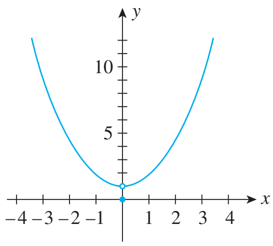
En los ejercicios 39-44 determine el valor de *x*, si hay alguno, en el que cada función es discontinua. En cada número donde *f* es discontinua, determine la(s) condición(es) de continuidad que son violadas.

39.



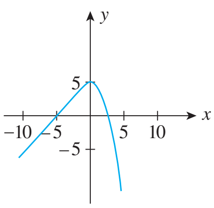
$$f(x) = \begin{cases} 2x - 4 & \text{si } x \le 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

40.



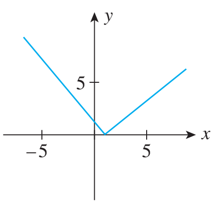
$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{si } x \ne 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

41.



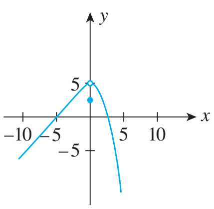
$$f(x) = \begin{cases} x + 5 & \text{si } x \le 0 \\ -x^2 + 5 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

42.



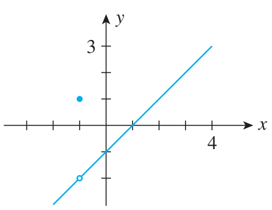
$$f(x) = |x - 1|$$

43.



$$f(x) = \begin{cases} x + 5 & \text{si } x < 0 \\ 2 & \text{si } x = 0 \\ -x^2 + 5 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

44.



$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 1}{x + 1} & \text{si } x \ne -1 \\ 1 & \text{si } x = -1 \end{cases}$$

En los ejercicios 45-56 determine los valores de *x* por los que cada función es continua.

45. $f(x) = 2x^2 + x - 1$

46. $f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 1$

47. $f(x) = \dfrac{2}{x^2 + 1}$

48. $f(x) = \dfrac{x}{2x^2 + 1}$

49. $f(x) = \dfrac{2}{2x - 1}$

50. $f(x) = \dfrac{x + 1}{x - 1}$

51. $f(x) = \dfrac{2x + 1}{x^2 + x - 2}$

52. $f(x) = \dfrac{x - 1}{x^2 + 2x - 3}$

53. $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \le 1 \\ 2x - 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

54. $f(x) = \begin{cases} -2x + 1 & \text{si } x < 0 \\ x^2 + 1 & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$

55. $f(x) = |x + 1|$

56. $f(x) = \dfrac{|x - 1|}{x - 1}$

En los ejercicios 57-60 determine todos los valores de *x* en los cuales la función es discontinua.

57. $f(x) = \dfrac{2x}{x^2 - 1}$

58. $f(x) = \dfrac{1}{(x - 1)(x - 2)}$

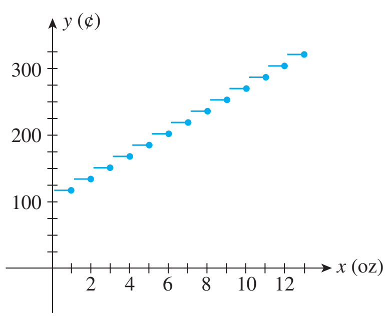
59. $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x}{x^2 - 3x + 2}$

60. $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 2x}$

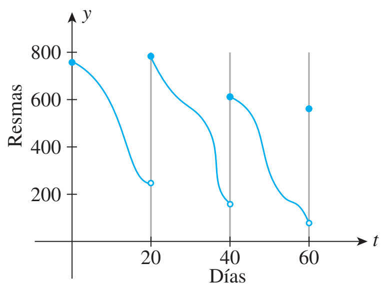
61. FUNCIÓN DE ENVÍO La gráfica de la "función de envío" para el año 2008.

$$f(x) = \begin{cases} 117 & \text{si } 0 < x \le 1 \\ 134 & \text{si } 1 < x \le 2 \\ \vdots & \\ 321 & \text{si } 12 < x \le 13 \end{cases}$$

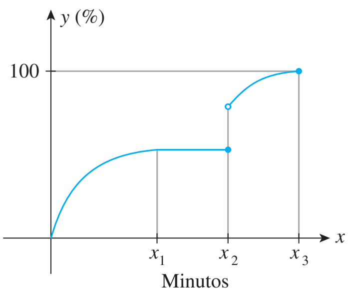
donde x denota el peso de un paquete en onzas y $f(x)$ los gastos de envío en centavos, se muestra en la figura adjunta. Determine los valores de x para los cuales f es discontinua.



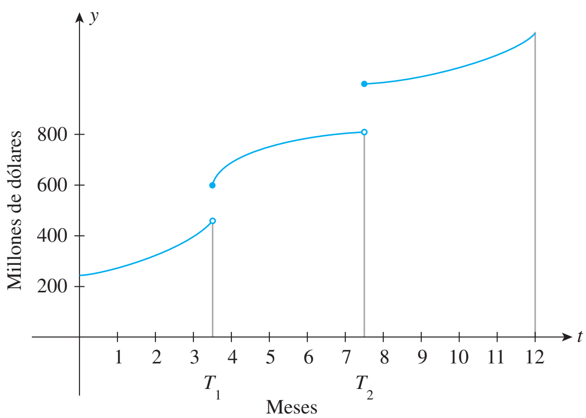
62. **CONTROL DEL INVENTARIO** Como parte de una política óptima de inventario, el gerente de una compañía de suministros de oficina ordena cada 20 días 500 paquetes de papel para fotocopiado. La gráfica adjunta muestra el nivel de inventario *real* de trabajo en un almacén de suministros de oficina durante los primeros 60 días hábiles de 2009. Determine los valores de t por lo que la "función de inventario" es discontinua y proporcione una interpretación de la gráfica.



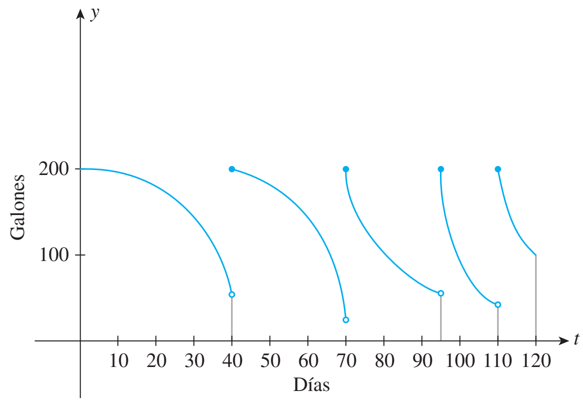
63. **CURVAS DE APRENDIZAJE** En la gráfica siguiente se describen los progresos que Michael hizo para resolver correctamente un problema durante un examen de matemáticas. Aquí, y denota el porcentaje de trabajo realizado, y x está medida en minutos. Proporcione una interpretación de la gráfica.



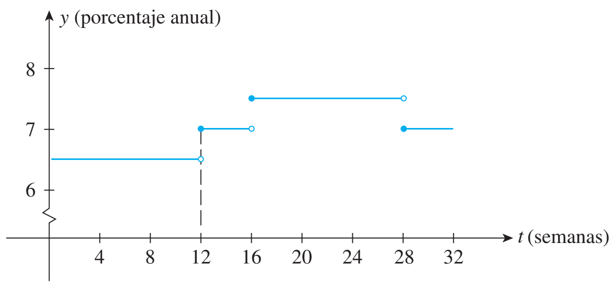
64. **INSTITUCIONES FINANCIERAS CON PROBLEMAS** Franklin Savings and Loans adquirió dos instituciones financieras en crisis en 2009. Una de ellas fue adquirida en el tiempo $t = T_1$ y la otra en el tiempo $t = T_2$ ($t = 0$ corresponde a principios de 2009). La siguiente gráfica muestra la cantidad total de dinero en depósitos con Franklin. Explique la importancia de las discontinuidades de la función en T_1 y T_2.



65. **CONSUMO DE ENERGÍA** La siguiente gráfica muestra la cantidad de petróleo para la calefacción casera que permanece en un tanque de 200 galones en un periodo de 120 días ($t = 0$ corresponde al 1 de octubre). Explique por qué la función es discontinua en $t = 40$, 70, 95 y 110.



66. **TASA DE INTERÉS PRIME** La función P, cuya gráfica es la siguiente, da la tasa prime (tasa de interés que aplican los bancos a sus mejores clientes corporativos) de un determinado país en función del tiempo para las primeras 32 semanas en 2009. Determine los valores de t para el cual P es discontinua e interprete sus resultados.



67. **ADMINISTRACIÓN DE UNA SOLUCIÓN INTRAVENOSA** Una solución de dextrosa es suministrada a un paciente por vía intravenosa. El frasco de un litro (L) que contiene la solución es eliminado y reemplazado por otro, tan pronto disminuya el contenido a 5% aproximadamente de la cantidad inicial (1 L). La tasa de descarga es constante, y toma 6 horas a una botella llena descargar 95% del contenido. Elabore una gráfica que muestre la cantidad de solución de dextrosa en una botella del sistema IV durante un periodo de 24 horas, suponiendo que se inició con una botella llena.

68. **COMISIONES** El sueldo base mensual de un vendedor a comisión es de \$22,000. Por cada \$50,000 de las ventas por arriba de \$100,000, se le paga una comisión de \$1,000. Elabore una gráfica que demuestre sus ingresos en función del nivel de sus ventas de x. Determine los valores de x por los cuales la función f es discontinua.

69. **TARIFAS DE ESTACIONAMIENTO** La tarifa cobrada por automóvil en un estacionamiento del centro de la ciudad es de \$2.00 por la primera media hora y \$1.00 por cada media hora adicional o fracción, sujeto a un máximo de \$10.00. Determine una función f relacionando la tarifa del estacionamiento con la cantidad de tiempo que un automóvil se deja en el estacionamiento. Elabore la gráfica de f y determine los valores de x por los cuales la función f es discontinua.

70. **Precios de una materia prima** La función que da el costo de una materia prima determinada se define por

$$C(x) = \begin{cases} 5x & \text{si } 0 < x < 10 \\ 4x & \text{si } 10 \le x < 30 \\ 3.5x & \text{si } 30 \le x < 60 \\ 3.25x & \text{si } x \ge 60 \end{cases}$$

donde x es el número de libras de una determinada materia prima vendida y $C(x)$ se mide en dólares. Elabore la gráfica de la función C y determine los valores de x por los que la función C es discontinua.

71. **La ley de Weiss** Con base en la ley de Weiss sobre la tensión de los tejidos, la fuerza S de una corriente eléctrica está relacionada con el tiempo t que la corriente toma para excitar a los tejidos por la fórmula

$$S(t) = \frac{a}{t} + b \qquad (t > 0)$$

donde a y b son constantes positivas.

a. Evalúe $\lim_{t \to 0^+} S(t)$ e interprete su resultado.

b. Evalúe $\lim_{t \to \infty} S(t)$ e interprete su resultado.

(*Nota*: el límite del inciso (b) se llama el umbral de la fuerza de la corriente. ¿Por qué?)

72. **La energía gastada por un pez** Suponga que un pez nada una distancia de L pies a una velocidad de v pies/seg con respecto al agua y en contra de una corriente que fluye a una tasa de u pies/seg ($u < v$) gasta un total de energía dada por

$$E(v) = \frac{aLv^3}{v - u}$$

donde E se mide en libras por pie (pie/libra) y a es una constante.

a. Evalúe el $\lim_{v \to u^+} E(v)$ e interprete su resultado.

b. Evalúe $\lim_{v \to \infty} E(v)$ e interprete su resultado.

73. Sea

$$f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{si } x \le 1 \\ kx^2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Determine el valor de k que hará de f continua sobre $(-\infty, \infty)$.

74. Sea

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 4}{x + 2} & \text{si } x \ne -2 \\ k & \text{si } x = -2 \end{cases}$$

¿Por qué valor de k será f continua sobre el $(-\infty, \infty)$?

75. **a.** Suponga que f es continua en a y g es discontinua en a. ¿Si la suma de $f + g$ es discontinua en a? Explique su respuesta.

b. Suponga que f y g son ambas discontinuas en a. ¿La suma de $f + g$ es necesariamente discontinua en a? Explique su respuesta.

76. **a.** Suponga que f es continua en a y g es discontinua en a. ¿El producto fg es necesariamente discontinuo en a? Explique su respuesta.

b. Suponga que f y g son ambas discontinuas en a. ¿El producto fg es necesariamente discontinuo en a? Explique su respuesta.

En los ejercicios 77-80 (a) demuestre que la función f es continua para todos los valores de x en el intervalo $[a, b]$ y (b) pruebe que f debe tener por lo menos un cero en el intervalo (a, b) demostrando que $f(a)$ y $f(b)$ tienen signos opuestos.

77. $f(x) = x^2 - 6x + 8$; $a = 1$, $b = 3$

78. $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 14$; $a = 0$, $b = 1$

79. $f(x) = x^3 - 2x^2 + 3x + 2$; $a = -1$, $b = 1$

80. $f(x) = 2x^{5/3} - 5x^{4/3}$; $a = 14$, $b = 16$

En los ejercicios 81-82 utilice el teorema del valor intermedio para determinar el valor de c como $f(c) = M$.

81. $f(x) = x^2 - 4x + 6$ sobre $[0, 3]$; $M = 4$

82. $f(x) = x^2 - x + 1$ sobre $[-1, 4]$; $M = 7$

83. Utilice el método de bisección (vea el ejemplo 6) para determinar la raíz de la ecuación $x^5 + 2x - 7 = 0$ en dos posiciones decimales precisas.

84. Utilice el método de bisección (vea el ejemplo 6) para determinar la raíz de la ecuación $x^3 - x + 1 = 0$ a dos posiciones decimales precisas.

85. **La caída de objetos** Joan mira por una ventana de un edificio de departamentos a una altura de 32 pies del suelo. Un niño lanza una pelota de tenis hacia arriba, por el lado del edificio donde se encuentra la ventana. Suponga que la altura de la pelota (medida en pies) del suelo en el tiempo t es $h(t) = 4 + 64t - 16t^2$.

a. Demuestre que $h(0) = 4$ y $h(2) = 68$.

b. Utilice el teorema del valor intermedio para concluir que la pelota debe cruzar la línea de vista de Joan por lo menos una vez.

c. ¿En qué momento(s) la pelota cruza la línea de vista de Joan? Interprete sus resultados.

86. **El contenido de oxígeno de un estanque** El oxígeno contenido en t días después de que los residuos orgánicos han sido arrojados dentro de un estanque está dado por

$$f(t) = 100\left(\frac{t^2 + 10t + 100}{t^2 + 20t + 100}\right)$$

por ciento de su nivel normal.

a. Demuestre que $f(0) = 100$ y $f(10) = 75$.

b. Utilice el teorema del valor intermedio para concluir que el contenido de oxígeno del estanque debería haber estado a un nivel de 80% en algún momento.

c. ¿A qué hora(s) el contenido de oxígeno está al nivel de 80%?

Sugerencia: Utilice la fórmula cuadrática.

En los ejercicios 87-96 determine si el pronunciamiento es verdadero o falso. Si es verdadero, explique por qué lo es. Si es falso, proporcione un ejemplo para demostrar por qué lo es.

87. Si $f(2) = 4$, entonces $\lim_{x \to 2} f(x) = 4$.

88. Si $\lim_{x \to 0} f(x) = 3$, entonces $f(0) = 3$.

89. Si el $\lim_{x \to 2^+} f(x) = 3$ y $f(2) = 3$, entonces el $\lim_{x \to 2^-} f(x) = 3$.

90. Si $\lim_{x \to 3^-} f(x)$ y $\lim_{x \to 3^+} f(x)$ ambos existen, entonces $\lim_{x \to 3} f(x)$ existe.

91. Si $f(5)$ no está definida, entonces $\lim_{x\to 5^-} f(x)$ no existe.

92. Suponga que la función f está definida sobre el intervalo $[a, b]$. Si $f(a)$ y $f(b)$ tiene el mismo signo, entonces f no tiene ningún cero en $[a, b]$.

93. Si $\lim_{x\to a^-} f(x) = L$ y $\lim_{x\to a^+} f(x) = L$, entonces $f(a) = L$.

94. Si $\lim_{x\to a} f(x) = L$, entonces $\lim_{x\to a^+} f(x) - \lim_{x\to a^-} f(x) \neq 0$.

95. Si f es continua por todos $x \neq 0$ y $f(0) = 0$, entonces $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$.

96. Si $\lim_{x\to a} f(x) = L$ y $g(a) = M$, entonces el $\lim_{x\to a} f(x)g(x) = LM$.

97. Suponga que f es continua sobre $[a, b]$ y $f(a) < f(b)$. Si M es un número que permanece fuera del intervalo $[f(a), f(b)]$, entonces no existe un número $a < c < b$ tal como $f(c) = M$. ¿Esto contradice el teorema del valor intermedio?

98. Sea $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 + 1}$.
  a. Demuestre que f es continua por todos los valores de x.
  b. Demuestre que $f(x)$ es no negativa por todos los valores de x.
  c. Demuestre que f tiene un cero en $x = 0$. ¿Esto contradice el teorema 5?

99. Sea $f(x) = x - \sqrt{1 - x^2}$.
  a. Demuestre que f es continua por todos los valores de x en el intervalo $[-1, 1]$.
  b. Demuestre que f tiene por lo menos un cero en $[-1, 1]$.
  c. Determine los ceros de f en $[-1, 1]$ resolviendo la ecuación $f(x) = 0$.

100. **a.** Demuestre que una función polinómica $y = P(x)$ es continua en cada número x. Siga estos pasos:
  (i) Utilice las propiedades 2 y 3 de las funciones continuas para establecer que la función $g(x) = x^n$, donde n es un entero positivo, es continuo en todas partes.
  (ii) Utilice las propiedades 1 y 5 para demostrar que $f(x) = cx^n$, donde c es una constante y n un entero positivo, es continuo en todas partes.
  (iii) Utilice la propiedad 4 para completar la prueba del resultado.
  b. Demuestre que la función racional $R(x) = p(x)/q(x)$ es continua en cada punto x, donde $q(x) \neq 0$.
  Sugerencia: Utilice el resultado del inciso (a) y la propiedad 6.

101. Demuestre que la conclusión del teorema del valor intermedio no necesariamente se sostiene si f es continua sobre el intervalo $[a, b]$.

9.2 Soluciones de los ejercicios de autoevaluación

1. Para $x < -1$, $f(x) = 1$, y así que

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^-} 1 = 1$$

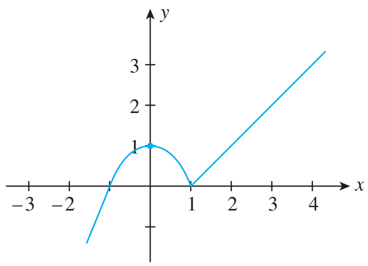
Para $x \geq -1$, $f(x) = 1 + \sqrt{x + 1}$, y así que

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+} (1 + \sqrt{x + 1}) = 1$$

Ya que los límites izquierdos y derechos de f existen conforme x se aproxime a $x = -1$ y ambos sean iguales a 1, concluimos que

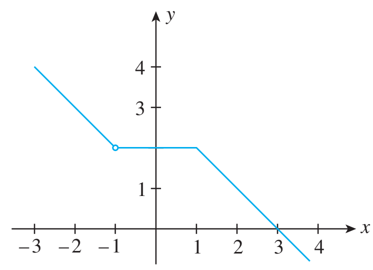
$$\lim_{x\to -1} f(x) = 1$$

2. **a.** La siguiente gráfica de f:



Observe que f es continua en todas partes.

b. La siguiente gráfica de g:

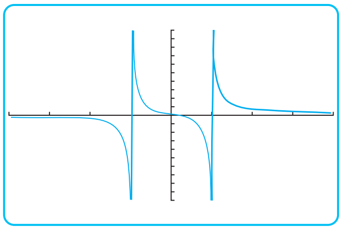


Ya que g no está definida en $x = -1$, es discontinua allí. Ésta es continua en todas partes.

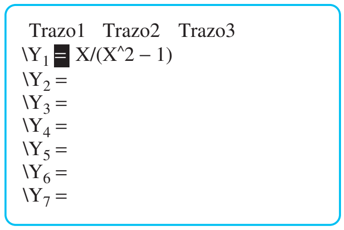
USO DE LA TECNOLOGÍA

Determinación de los puntos de discontinuidad de una función

Se puede reconocer muy a menudo los puntos de discontinuidad de una función f mediante el examen de su gráfica. Por ejemplo, la figura T1a muestra que la gráfica de $f(x) = x/(x^2 - 1)$ obtenida al utilizar una calculadora graficadora. Es evidente que f es discontinua en $x = -1$ y $x = 1$. Esta observación también es corroborada por el hecho de que estos dos puntos no están en el dominio de f.



(a)



(b)

FIGURA T1
(a) La gráfica de

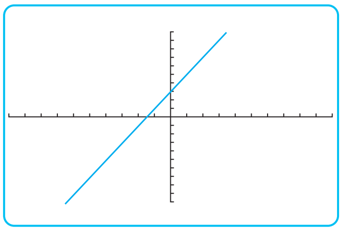
$$f(x) = \frac{x}{x^2 - 1}$$

en la ventana de visualización $[-4, 4] \times [-10, 10]$; (b) la ecuación de la pantalla TI-83/84.

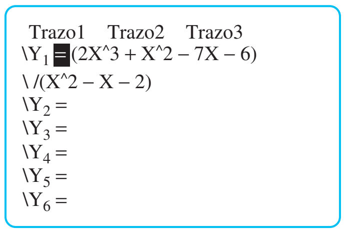
Considere la función

$$g(x) = \frac{2x^3 + x^2 - 7x - 6}{x^2 - x - 2}$$

Al utilizar una calculadora graficadora, obtenemos la gráfica de g mostrada en la figura T2a.



(a)



(b)

FIGURA T2
a) La gráfica de

$$g(x) = \frac{2x^3 + x^2 - 7x - 6}{x^2 - x - 2}$$

en la ventana de visualización estándar, (b) la ecuación de la pantalla TI-83/84.

El examen de esta gráfica no revela algún punto de discontinuidad. Sin embargo, si se factorizan tanto el numerador como el denominador de la expresión racional, observamos que

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{(x + 1)(x - 2)(2x + 3)}{(x + 1)\,(x - 2)} \\ &= 2x + 3 \end{aligned}$$

siempre que $x \neq -1$ y $x \neq 2$, así que su gráfica en efecto se parece a aquélla mostrada en la figura T3.

¡Este ejemplo demuestra la limitación de la calculadora graficadora y recuerda la importancia de estudiar analíticamente las funciones!

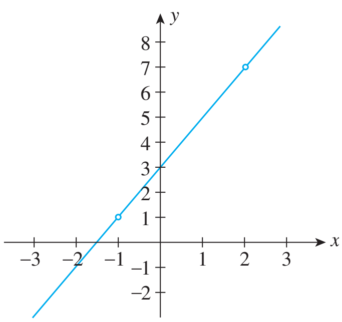


FIGURA T3
La gráfica de g tiene orificios en $(-1, 1)$ y $(2, 7)$.

Representación gráfica de funciones definidas en partes

El siguiente ejemplo ilustra cómo elaborar las gráficas de las funciones definidas en partes en la calculadora graficadora.

EJEMPLO 1 Elabore la gráfica de

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si } x \leq 1 \\ \dfrac{2}{x} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Solución Entra la función

$$y1 = (x + 1)(x \leq 1) + (2/x)(x > 1)$$

La figura T4 muestra la gráfica de la función en la ventana de visualización $[-5, 5] \times [-2, 4]$.

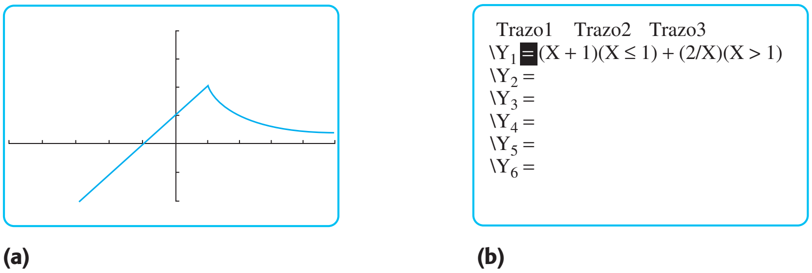


FIGURA **T4**
a) La gráfica de *f* en la ventana de visualización $[-5, 5] \times [-2, 4]$; b) la ecuación de la pantalla TI-83/84.

EJEMPLO DE APLICACIÓN 2 Patrones para ver televisión

El porcentaje de hogares en Estados Unidos, $P(t)$, que ve televisión durante la semana en el horario de 4 p.m. y 4 a.m., está dado por

$$P(t) = \begin{cases} 0.01354t^4 - 0.49375t^3 + 2.58333t^2 + 3.8t + 31.60704 & \text{si } 0 \leq t \leq 8 \\ 1.35t^2 - 33.05t + 208 & \text{si } 8 < t \leq 12 \end{cases}$$

donde t es medido en horas, con $t = 0$ corresponde a las 4 p.m. Elabore la gráfica de P en la ventana de visualización $[0, 12] \times [0, 80]$.

Fuente: A. C. Nielsen Co.

Solución Entra la función

$$y1 = (.01354x\hat{\ }4 - .49375x\hat{\ }3 + 2.58333x\hat{\ }2 + 3.8x + 31.60704)(x \geq 0)(x \leq 8)$$
$$+ (1.35x\hat{\ }2 - 33.05x + 208)(x > 8)(x \leq 12)$$

La figura T5a muestra la gráfica de P.

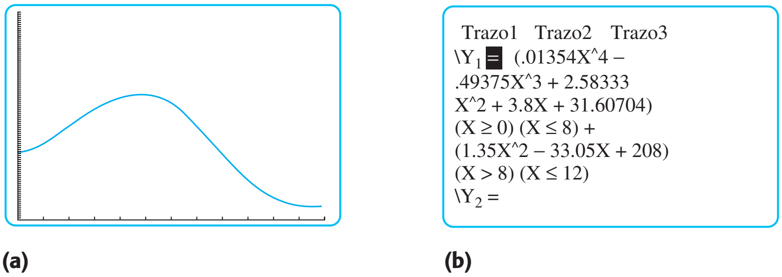


FIGURA **T5**
(a) La gráfica de *P* en la ventana de visualización $[0, 12] \times [0, 80]$; (b) la ecuación de la pantalla TI-83/84.

EJERCICIOS CON TECNOLOGÍA

En los ejercicios 1-8 elabore la gráfica de *f* y determine los puntos de discontinuidad de *f*. Después utilice medios analíticos para verificar su observación y determinar todos los números donde *f* es discontinua.

1. $f(x) = \dfrac{2}{x^2 - x}$

2. $f(x) = \dfrac{3}{\sqrt{x}(x + 1)}$

3. $f(x) = \dfrac{6x^3 + x^2 - 2x}{2x^2 - x}$

4. $f(x) = \dfrac{2x^3 - x^2 - 13x - 6}{2x^2 - 5x - 3}$

5. $f(x) = \dfrac{2x^4 - 3x^3 - 2x^2}{2x^2 - 3x - 2}$

6. $f(x) = \dfrac{6x^4 - x^3 + 5x^2 - 1}{6x^2 - x - 1}$

7. $f(x) = \dfrac{x^3 + x^2 - 2x}{x^4 + 2x^3 - x - 2}$

Sugerencia: $x^4 + 2x^3 - x - 2 = (x^3 - 1)(x + 2)$

8. $f(x) = \dfrac{x^3 - x}{x^{4/3} - x + x^{1/3} - 1}$

Sugerencia: $x^{4/3} - x + x^{1/3} - 1 = (x^{1/3} - 1)(x + 1)$

¿Puede explicar por qué parte de la gráfica no aparece?

(*continúa*)

En los ejercicios 9 y 10 elabore la gráfica de *f* en la ventana de visualización indicada.

9. $f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x \leq 0 \\ \sqrt{4 - x^2} & \text{si } x > 0; [-2, 2] \times [-4, 4] \end{cases}$

10. $f(x) = \begin{cases} -x^2 + x + 2 & \text{si } x \leq 1 \\ 2x^3 - x^2 - 4 & \text{si } x > 1; [-4, 4] \times [-5, 5] \end{cases}$

11. La trayectoria de vuelo de un avión La función

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ -0.00411523x^3 + 0.0679012x^2 & \\ \quad -0.123457x + 0.0596708 & \text{si } 1 \leq x < 10 \\ 1.5 & \text{si } 10 \leq x \leq 100 \end{cases}$$

donde tanto x como $f(x)$ son medidas en unidades de 1,000 pies, que describen la trayectoria de vuelo de un avión que despega desde el punto de origen hasta levantar el vuelo a una altitud de 15,000 pies. Elabore la gráfica de f para visualizar la trayectoria del avión.

12. La industria de las compras para el hogar Según fuentes de la industria, los ingresos procedentes de la industria de compras para el hogar en los años transcurridos desde su creación se puede aproximar por la función

$$R(t) = \begin{cases} -0.03t^3 + 0.25t^2 - 0.12t & \text{si } 0 \leq t \leq 3 \\ 0.57t - 0.63 & \text{si } 3 < t \leq 11 \end{cases}$$

donde $R(t)$ mide el ingreso en millones de dólares y t es medida en años, con $t = 0$ corresponde a principios de 1984. Elabore la gráfica de R.

Fuente: Asociación de Paul Kagan (Paul Kagan Associates)

9.3 La derivada

Un ejemplo intuitivo

En la sección 9.1 se menciona que el problema de determinar la *tasa de cambio* de una cantidad con respecto a otra es matemáticamente equivalente al problema de determinar la *pendiente de la recta tangente* a una curva en un punto dado sobre la curva. Antes de continuar para establecer esta relación, se muestra su credibilidad al mirarla desde un punto de vista intuitivo.

Considere el movimiento del maglev tratado en la sección 9.1. Recuerde que la posición del tren en cualquier momento t está dada por

$$s = f(t) = 4t^2 \qquad (0 \leq t \leq 30)$$

donde s es medido en pies y t en segundos. La gráfica de la función f está trazada en la figura 23.

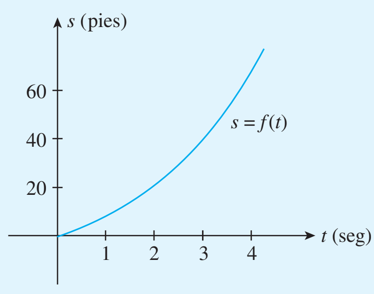
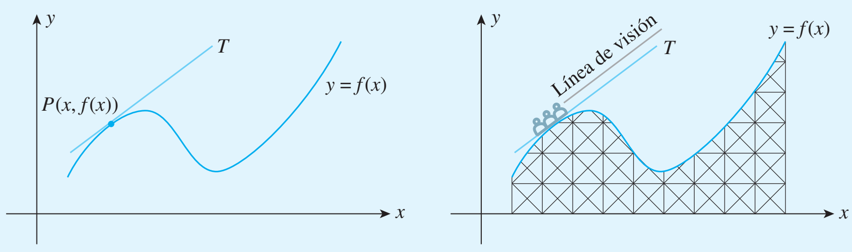


FIGURA **23**
La gráfica muestra la posición del maglev en el momento *t*.

Observe que la gráfica de f se eleva lentamente al principio con mayor rápidez conforme t aumenta, reflejando el hecho de que la velocidad del maglev es creciente en el tiempo. Esta observación sugiere una relación entre la velocidad del maglev en cualquier momento t y la *pendiente* de la curva en el punto correspondiente a este valor t. Por tanto, parecería que puede resolverse el problema de determinar la velocidad del tren en cualquier momento, si se puede determinar una forma de medir la pendiente de la curva en cualquier punto sobre la curva.

Para descubrir un punto de referencia que permita medir la pendiente de una curva, considere la gráfica de una función f como la que se muestra en la figura 24a. Piense en la curva que representa un tramo del riel de una montaña rusa (figura 24b). Cuando el carro está en el punto P de la curva, un pasajero sentado erguido en el carro y mirando hacia el frente tendrá una línea de visión paralela a la línea T, la tangente a la curva en P.

Como lo sugiere la figura 24a, la pendiente de la curva, es decir, la tasa a la cual y es creciente o decreciente con respecto a x, está dada por la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en el punto $P(x, f(x))$. Pero por ahora se demostrará cómo esta relación puede utilizarse para estimar la tasa de cambio de una función desde su gráfica.



(a) *T* es la recta tangente a la curva en *P*. **(b)** *T* es paralela a la línea de visión.

FIGURA **24**

EJEMPLO DE APLICACIÓN 1 Beneficiarios del Seguro Social

La gráfica de la función $y = N(t)$, mostrada en la figura 25, proporciona el número de beneficiarios del Seguro Social desde el inicio 1990 ($t = 0$) hasta el año 2045 ($t = 55$).

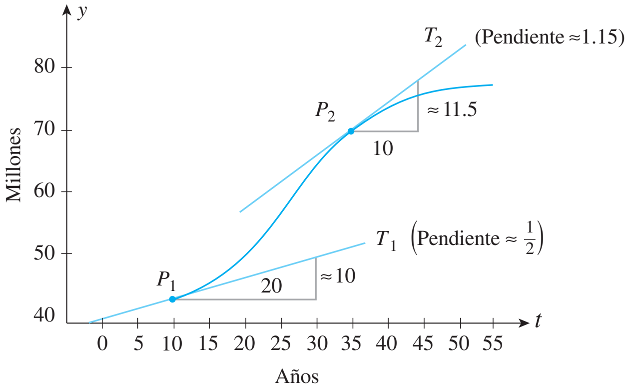


FIGURA **25**
El número de beneficiarios del Seguro Social desde 1990 hasta 2045. Se puede utilizar la pendiente de la recta tangente en los puntos indicados para estimar la tasa en la que el número de beneficiarios del Seguro Social cambiará.

Utilice la gráfica de $y = N(t)$ para estimar la tasa en la que el número de beneficiarios del Seguro Social creció a principios del año 2000 ($t = 10$). ¿Qué tan rápido crecerá el número a principios de 2025 ($t = 35$)? [Asuma que la tasa de cambio de la función N en cualquier valor de t está dada por la pendiente de la recta tangente en el punto $P(t, N(t))$].
Fuente: Social Security Administration

Solución De la figura, se observa que la pendiente de la recta tangente T_1 a la gráfica de $y = N(t)$ en $P_1(10, 44.7)$ es de aproximadamente 0.5. Ésta indica que la cantidad y es creciente a una tasa de $\frac{1}{2}$ por unidad creciente en t, cuando $t = 10$. En otras palabras, a principios del año 2000 el número de beneficiarios del Seguro Social aumentaba a una tasa de aproximadamente 0.5 millones, o 500,000 por año.

La pendiente de la recta tangente T_2 en $P_2(35, 71.9)$ es de aproximadamente 1.15. Ésta indica que al comienzo de 2025 el número de beneficiarios del Seguro Social crecerá a una tasa de aproximadamente 1.15 millones, o 1,150,000 por año. ■

Pendiente de una recta tangente

Con el ejemplo 1 se respondió a la pregunta formulada al elaborar la gráfica de la función N, así como la estimación de la posición de las rectas tangentes. Lo ideal, sin embargo, es resolver un problema analítico siempre que sea posible. Para llevar a cabo esto se necesita una definición precisa de la pendiente de una recta tangente a una curva.

Para definir la recta tangente a una curva C en un punto P sobre la curva, fije P y sea Q cualquier punto sobre C distinto de P (figura 26). La recta a través de P y Q se llama **recta secante**.

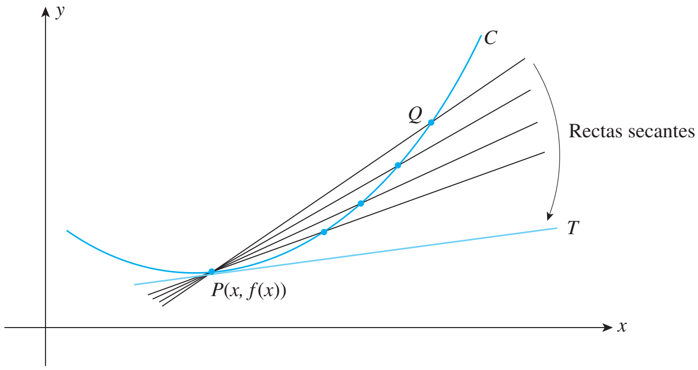


FIGURA 26
Conforme Q se aproxima a P a lo largo de la curva C, las rectas secantes se aproximan a la recta de la tangente T.

Ahora, como al punto Q se le permite avanzar hacia P a lo largo de la curva, la recta secante que pasa a través de P y Q gira alrededor del punto fijo P y se aproxima a una recta fija a través de P. Esta recta fija, que es la posición límite de las rectas secantes a través de P y Q conforme Q se aproxima a P, es la **recta de la tangente a la gráfica de *f*** en el punto P.

El siguiente proceso puede ser descrito de la forma más precisa. Suponga que la curva C es la gráfica de una función f definida por $y = f(x)$. Entonces el punto P es descrito por $P(x, f(x))$ y el punto Q por $Q(x + h, f(x + h))$, en donde h es algún número adecuado distinto de cero (figura 27a). Observe que puede hacer que Q se aproxime a P a lo largo de la curva C, permitiendo que h se aproxime a cero (figura 27b).

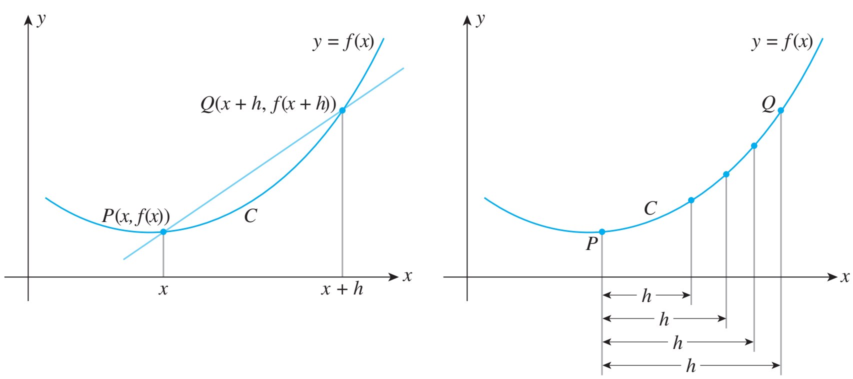


FIGURA 27

(a) Los puntos $P(x, f(x))$ y $Q(x + h, f(x + h))$

(b) Conforme h se aproxima a cero, Q se aproxima a P.

A continuación utilice la fórmula para la pendiente de una recta; puede escribir la pendiente de la recta secante pasando a través de $P(x, f(x))$ y $Q(x + h, f(x + h))$ como

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{(x+h) - x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \tag{3}$$

Como se observó antes, Q se aproxima a P, y por tanto la recta secante que pasa por P y Q se aproxima a la recta tangente T conforme h se aproxima a cero. Así, podría esperarse que la pendiente de la recta secante se aproximara a la pendiente de la recta tangente T conforme h se aproxime a cero. Esto lleva a la siguiente definición.

La pendiente de una recta tangente

La pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en el punto $P(x, f(x))$ está dada por

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \tag{4}$$

si existe.

Las tasas de cambio

Ahora se demuestra que el problema de determinar la pendiente de la recta tangente a la gráfica de una función f en el punto $P(x, f(x))$ es matemáticamente equivalente al problema de determinar la tasa de cambio de f en x. Para ver esto, suponga que se ha dado una función f que describe la relación entre las dos cantidades x y y, es decir, $y = f(x)$. El número $f(x + h) - f(x)$ mide el cambio en y que corresponde a un cambio h en x (figura 28).

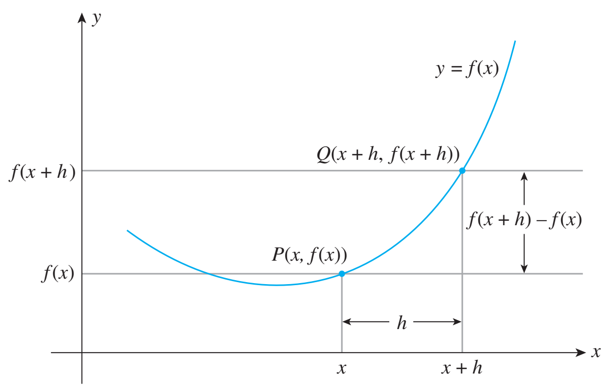


FIGURA 28
$f(x + h) - f(x)$ es el cambio en y que corresponde a un cambio de h en x.

Entonces, **el cociente**

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \tag{5}$$

mide la **tasa promedio de cambio de y con respecto a x** sobre el intervalo $[x, x + h]$. Por ejemplo, si y mide la posición de un automóvil en el momento x, entonces el cociente (5) da la velocidad promedio del automóvil sobre el intervalo de tiempo $[x, x + h]$.

Observe que el cociente de (5) es el mismo que (3). Se llega a la conclusión de que el cociente de (5) también mide la pendiente de la recta secante que pasa por los dos puntos $P(x, f(x))$ y $Q(x + h, f(x + h))$, situada en la gráfica de $y = f(x)$. A continuación, al tomar el límite del cociente de (5) conforme h se aproxima a cero, es decir, al evaluar

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \tag{6}$$

se obtiene la **tasa de cambio de f en x**. Por ejemplo, si y mide la posición de un automóvil en el momento x, entonces el límite (6) da la velocidad del automóvil en el momento x. Para enfatizar, la tasa de cambio de una función f en x se llama la **tasa de cambio**

instantánea de f en x. Ésta se distingue de la tasa promedio de cambio de f, que se calcula sobre un *intervalo* $[x, x + h]$ en lugar de en un *número* x.

Observe que el límite (6) es el mismo que (4). Por consiguiente, el límite del cociente también mide la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $y = f(x)$ en el punto $(x, f(x))$. Lo siguiente resume esta discusión.

Las tasas de cambio promedio e instantánea

La **tasa de cambio promedio** de f sobre el intervalo $[x, x + h]$ o **pendiente de la recta secante** hacia la gráfica de f a través de los puntos $(x, f(x))$ y $(x + h, f(x + h))$ es

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \tag{7}$$

La **tasa de cambio instantánea** de f en x o **pendiente de la recta tangente** a la gráfica de f en $(x, f(x))$ es

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \tag{8}$$

Explore y analice

Explique la diferencia entre la tasa de cambio promedio de una función y la tasa de cambio instantánea de una función.

La derivada

El límite (4) u (8), que mide tanto la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $y = f(x)$ en el punto $P(x, f(x))$ como la tasa de cambio (instantánea) de f en x, se le da un nombre especial: la **derivada de f en x**.

La derivada de una función

La derivada de una función f con respecto a x es la función f' (léase "f prima"),

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \tag{9}$$

El dominio de f' es el conjunto para toda x donde existen los límites.

Por tanto, la derivada de una función f es una función f' que da la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en *cualquier* punto $(x, f(x))$ y también la tasa de cambio de f en x (figura 29).

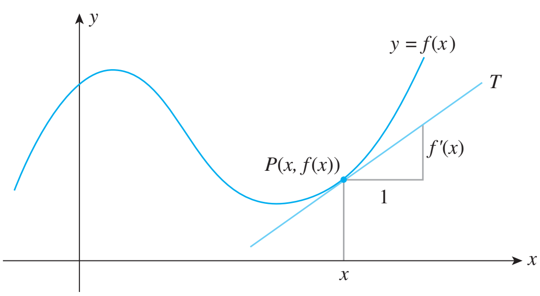


FIGURA 29
La pendiente de la recta tangente en $P(x, f(x))$ es $f'(x)$; f cambia en la tasa de $f'(x)$ unidades por unidad de cambio dentro de x en x.

Otras notaciones para la derivada de f incluyen:

$D_x f(x)$ Léase "d sub x de f de x"

$\dfrac{dy}{dx}$ Léase "d y d x"

y' Léase "y prima"

Las dos últimas se utilizan cuando la regla para f es escrita en la forma $y = f(x)$.

El cálculo de la derivada de f se facilita mediante el uso del siguiente proceso de cuatro pasos.

El proceso de cuatro pasos para determinar $f'(x)$

1. Calcule $f(x + h)$.

2. Forme la diferencia $f(x + h) - f(x)$.

3. Forme el cociente $\dfrac{f(x + h) - f(x)}{h}$

4. Calcule $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x + h) - f(x)}{h}$

EJEMPLO 2 Determine la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $f(x) = 3x + 5$ en cualquier punto $(x, f(x))$.

Solución La pendiente de la recta tangente en cualquier punto sobre la gráfica de f está dada por la derivada de f en x. Para determinar la derivada, utilice el proceso de los cuatro pasos:

Paso 1 $f(x + h) = 3(x + h) + 5 = 3x + 3h + 5$

Paso 2 $f(x + h) - f(x) = (3x + 3h + 5) - (3x + 5) = 3h$

Paso 3 $\dfrac{f(x + h) - f(x)}{h} = \dfrac{3h}{h} = 3$

Paso 4 $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x + h) - f(x)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} 3 = 3$

Se espera este resultado, ya que la recta tangente en cualquier punto sobre una recta debe coincidir con la recta misma y, por tanto, debe tener la misma pendiente que la recta. En este caso la gráfica de f es una recta con pendiente 3. ■

EJEMPLO 3 Sea $f(x) = x^2$.

a. Determine $f'(x)$.
b. Calcule $f'(2)$ e interprete su resultado.

Solución

a. Para determinar $f'(x)$, utilice el proceso de los cuatro pasos:

Paso 1 $f(x + h) = (x + h)^2 = x^2 + 2xh + h^2$

Paso 2 $f(x + h) - f(x) = x^2 + 2xh + h^2 - x^2 = 2xh + h^2 = h(2x + h)$

Paso 3 $\dfrac{f(x + h) - f(x)}{h} = \dfrac{h(2x + h)}{h} = 2x + h$

Paso 4 $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x + h) - f(x)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} (2x + h) = 2x$

b. $f'(2) = 2(2) = 4$. Este resultado indica que la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en el punto (2, 4) es 4. Asimismo indica que la función f también cambia en la tasa de 4 unidades por unidad de cambio en x en $x = 2$. La gráfica de f y la recta tangente en (2, 4) se muestran en la figura 30. ■

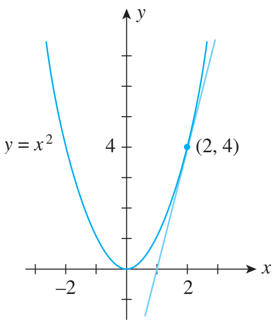


FIGURA 30
La recta de la tangente a la gráfica de $f(x) = x^2$ en (2, 4).

Exploración con TECNOLOGÍA

1. Considere la función $f(x) = x^2$ del ejemplo 3. Suponga que desea calcular $f'(2)$, utilizando la ecuación (9). Por tanto,

$$f'(2) = \lim_{h \to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(2+h)^2 - 2^2}{h}$$

Utilice una calculadora graficadora para elaborar la gráfica de

$$g(x) = \frac{(2+x)^2 - 4}{x}$$

en la ventana de visualización $[-3, 3] \times [-2, 6]$.

2. Utilice **ZOOM** y **TRACE** para determinar $\lim_{h \to 0} g(x)$.
3. Explique por qué el límite que se determina en el inciso 2 es $f'(2)$.

EJEMPLO 4 Sea $f(x) = x^2 - 4x$.

a. Determine $f'(x)$.
b. Determine el punto sobre la gráfica de f donde la recta tangente a la curva es horizontal.
c. Elabore la gráfica de f y la recta de la tangente a la curva en el punto determinado en el inciso (b).
d. ¿Cuál es la tasa de cambio de f en este punto?

Solución

a. Para determinar $f'(x)$, utilice el proceso de los cuatro pasos:

Paso 1 $f(x+h) = (x+h)^2 - 4(x+h) = x^2 + 2xh + h^2 - 4x - 4h$

Paso 2 $f(x+h) - f(x) = x^2 + 2xh + h^2 - 4x - 4h - (x^2 - 4x)$
$= 2xh + h^2 - 4h = h(2x + h - 4)$

Paso 3 $\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = \dfrac{h(2x + h - 4)}{h} = 2x + h - 4$

Paso 4 $f'(x) = \lim_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} (2x + h - 4) = 2x - 4$

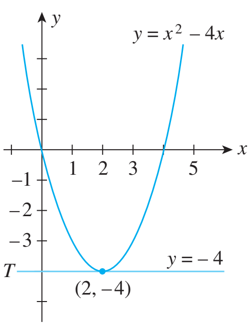


FIGURA **31**
La recta de la tangente a la gráfica de $y = x^2 - 4x$ en $(2, -4)$ es $y = -4$.

b. En un punto sobre la gráfica de f donde la recta tangente a la curva es horizontal y, por tanto, tiene pendiente cero, la derivada f' de f es cero. Por consiguiente, para determinar dicho(s) punto(s) exprese $f'(x) = 0$, lo cual da $2x - 4 = 0$, o $x = 2$. El valor correspondiente de y está dado por $y = f(2) = -4$, y el punto requerido es $(2, -4)$.
c. La gráfica de f y la recta tangente se muestran en la figura 31.
d. La tasa de cambio de f en $x = 2$ es cero. ■

Explore y analice

¿La recta de la tangente a la gráfica de una función puede intersecar la gráfica en más de un punto? Explique su respuesta utilizando ilustraciones.

EJEMPLO 5 Sea $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

a. Determine $f'(x)$.
b. Determine la pendiente de la recta tangente T a la gráfica de f en el punto donde $x = 1$.
c. Determine una ecuación de la recta tangente T en el inciso (b).

Solución

a. Para determinar $f'(x)$, utilice el proceso de los cuatro pasos:

Paso 1 $\quad f(x+h) = \dfrac{1}{x+h}$

Paso 2 $\quad f(x+h) - f(x) = \dfrac{1}{x+h} - \dfrac{1}{x} = \dfrac{x-(x+h)}{x(x+h)} = -\dfrac{h}{x(x+h)}$

Paso 3 $\quad \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = -\dfrac{h}{x(x+h)} \cdot \dfrac{1}{h} = -\dfrac{1}{x(x+h)}$

(x^2) Vea la página 22.

Paso 4 $\quad f'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} -\dfrac{1}{x(x+h)} = -\dfrac{1}{x^2}$

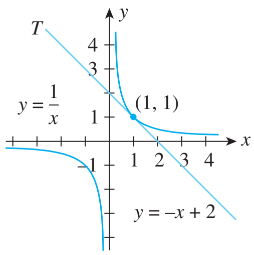


FIGURA 32
La recta de la tangente a la gráfica de $f(x) = 1/x$ en (1, 1).

b. La pendiente de la recta tangente T a la gráfica de f donde $x = 1$ está dada por $f'(1) = -1$.

c. Cuando $x = 1$, $y = (f(1) = 1$ y T es la tangente a la gráfica de f en el punto (1, 1). Desde el inciso (b), se sabe que la pendiente de T es -1. Por tanto, una ecuación de T es

$$\begin{aligned} y - 1 &= -1(x-1) \\ y &= -x + 2 \end{aligned}$$

(figura 32). ■

Exploración con TECNOLOGÍA

1. Utilice los resultados del ejemplo 5 para elaborar la gráfica de $f(x) = 1/x$ y su recta tangente en el punto (1, 1) al elaborar las gráficas de $y_1 = 1/x$ y $y_2 = -x + 2$ en la ventana de visualización $[-4, 4] \times [-4, 4]$.

2. Algunas calculadoras graficadoras dibujan la recta tangente a la gráfica de una función en un punto dado automáticamente, sólo se necesita especificar la función y dar la coordenada x del punto de tangencia. Si su calculadora tiene esta característica, verifique el resultado del inciso 1 sin determinar una ecuación de la recta tangente.

Explore y analice

Tome en cuenta la siguiente alternativa que se aproxima a la definición de la derivada de una función: sea h un número positivo y suponga que $P(x-h, f(x-h))$ y $Q(x+h, f(x+h))$ son dos puntos sobre la gráfica de f.

1. Proporcione una interpretación geométrica y física del cociente

$$\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}$$

Realice un trazo para ilustrar su respuesta.

2. Proporcione una interpretación geométrica y física del límite

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}$$

Trace para ilustrar su respuesta.

3. Explique por qué tiene sentido definir

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}$$

4. Al utilizar la definición dada en el punto 3, formule un proceso similar de cuatro pasos para determinar $f'(x)$ a aquel dado en la página 575 y utilícelo para calcular la derivada de $f(x) = x^2$. Compare su respuesta con la obtenida en el ejemplo 3 de la página 575.

EJEMPLO DE APLICACIÓN 6 Velocidad promedio de un automóvil Suponga que la distancia (en pies) cubierta por un automóvil en movimiento a lo largo de una autopista recta en t segundos comienza a partir del reposo está dada por la función $f(t) = 2t^2$ $(0 \leq t \leq 30)$.

a. Calcule la velocidad promedio del automóvil sobre los intervalos de tiempo [22, 23], [22, 22.1] y [22, 22.01].
b. Calcule la velocidad (instantánea) del automóvil cuando $t = 22$.
c. Compare los resultados obtenidos en el inciso (a) con los obtenidos en el inciso (b).

Solución

a. Primero calcule la velocidad promedio (tasa de cambio promedio de f) sobre el intervalo $[t, t + h]$ utilizando la fórmula (7). Determinamos

$$\begin{aligned}\frac{f(t+h)-f(t)}{h} &= \frac{2(t+h)^2-2t^2}{h}\\ &= \frac{2t^2+4th+2h^2-2t^2}{h}\\ &= 4t+2h\end{aligned}$$

Después, usando $t = 22$ y $h = 1$, determinamos que la velocidad promedio del automóvil sobre el intervalo de tiempo [22, 23] es

$$4(22) + 2(1) = 90$$

o 90 pies por segundo. De manera similar, usando $t = 22$, $h = 0.1$ y $h = 0.01$, determinamos que sus velocidades promedio sobre los intervalos de tiempo [22, 22.1] y [22, 22.01] son 88.2 y 88.02 pies por segundo, respectivamente.

b. Utilice el límite (8), observe que la velocidad instantánea del automóvil en cualquier momento t está dada por

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{f(t+h)-f(t)}{h} &= \lim_{h\to 0}(4t+2h) \qquad \text{Utilice los resultados del inciso (a).}\\ &= 4t\end{aligned}$$

En particular, la velocidad del automóvil 22 segundos desde el reposo $(t = 22)$ está dada por

$$v = 4(22)$$

u 88 pies por segundo.

c. Los cálculos en el inciso (a) muestran que, como los intervalos de tiempo sobre los que la velocidad promedio del automóvil son calculados se vuelven cada vez más pequeños, las velocidades promedio sobre estos intervalos se aproximan a 88 pies por segundo, la velocidad instantánea del automóvil en $t = 22$. ■

VIDEO

EJEMPLO DE APLICACIÓN 7 Demanda de neumáticos La gerencia de Titan Tire Company ha determinado que la función de demanda semanal de sus neumáticos Super Titan está dada por

$$p = f(x) = 144 - x^2$$

donde p se mide en dólares y x en unidades de millar (figura 33).

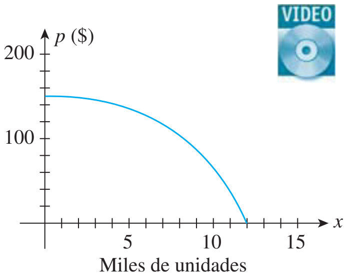


FIGURA **33**
La gráfica de la función de la demanda $p = 144 - x^2$.

a. Determine la tasa de cambio promedio en el precio de un neumático si la cantidad demandada de neumáticos está entre 5,000 y 6,000, entre 5,000 y 5,100 y entre 5,000 y 5,010.
b. ¿Cuál es la tasa de cambio instantánea del precio unitario cuando la cantidad demandada es de 5,000 unidades?

Solución

a. La tasa de cambio promedio del precio unitario de un neumático si la cantidad demandada está entre x y $x + h$ es

$$\begin{aligned}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \frac{[144-(x+h)^2]-(144-x^2)}{h}\\ &= \frac{144-x^2-2xh-h^2-144+x^2}{h}\\ &= -2xh-h\end{aligned}$$

Para determinar la tasa de cambio promedio del precio unitario de un neumático cuando la cantidad demandada está entre 5,000 y 6,000 neumáticos (que es, sobre el intervalo [5, 6]), se toma $x = 5$ y $h = 1$, obteniendo

$$-2(5) - 1 = -11$$

o $-\$11$ por 1,000 neumáticos (recuerde, x está medida en unidades de un millar). De forma similar, al tomar $h = 0.1$ y $h = 0.01$ con $x = 5$, se determina la tasa de cambio promedio del precio unitario cuando las cantidades demandas están entre 5,000 y 5,100 y entre 5,000 y 5,010 son $-\$10.10$ y $-\$10.01$ por 1,000 neumáticos, respectivamente.

b. La tasa de cambio inmediata del precio unitario de un neumático cuando la cantidad demandada es x unidades está dada por

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \lim_{h\to 0}(-2x-h) \qquad \text{Utilice los resultados del inciso (a).}\\ &= -2x\end{aligned}$$

En particular, la tasa de cambio instantánea del precio unitario por neumático cuando la cantidad demandada es 5,000 está dada por $-2(5)$, o, $-\$10$ por 1,000 neumáticos. ■

La derivada de una función provee una herramienta para medir la tasa de cambio de una cantidad con respecto a otra. La tabla 4 enlista otras aplicaciones que involucran este límite.

TABLA **4**

Aplicaciones que involucran la tasa de cambio

x **representa**	y **representa**	$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ **Medidas**	$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ **Medidas**
Tiempo	**Concentración de un fármaco** en el torrente sanguíneo en un tiempo x	Tasa de cambio promedio en la concentración del fármaco sobre un intervalo de tiempo $[a, a + h]$	Tasa de cambio instantánea en la concentración del fármaco en el torrente sanguíneo en el momento $x = a$
Número de artículos vendidos	**Ingresos** a un nivel de ventas de x unidades	Tasa de cambio promedio en el ingreso cuando el nivel de ventas está entre $x = a$ y $x = a + h$	Tasa de cambio instantánea en el ingreso cuando el nivel de ventas es a unidades
Tiempo	**Volumen de ventas** en el momento x	Tasa de cambio promedio en el volumen de ventas sobre el intervalo de tiempo $[a, a + h]$	La tasa de cambio instantánea en el volumen de ventas en un tiempo $x = a$
Tiempo	**Población** de *Drosophila* (moscas de la fruta) en un tiempo x	Tasa de crecimiento promedio de la población de moscas de la fruta sobre el intervalo de tiempo $[a, a + h]$	Tasa de cambio instantánea de la población de moscas de la fruta en un tiempo $x = a$
Temperatura en una reacción química	**Cantidad de producto formado en la reacción química** cuando la temperatura está en x grados	Tasa promedio de formación de producto químico sobre el rango de temperatura $[a, a + h]$	Tasa de formación instantánea de un producto químico cuando la temperatura es a grados

Diferenciación y continuidad

En aplicaciones prácticas encontramos funciones continuas que no son **diferenciables**, es decir, no tienen una derivada, en ciertos valores en el dominio de la función f. Se puede demostrar que una función continua f no es diferenciable en $x = a$ cuando la gráfica de f realiza un cambio brusco de dirección en $(a, f(a))$. A dicho punto se le da el nombre de "esquina". También una función no es diferenciable en un punto donde la recta tangente es vertical, ya que la pendiente de una recta vertical es indefinida. Estas causas se ilustran en la figura 34.

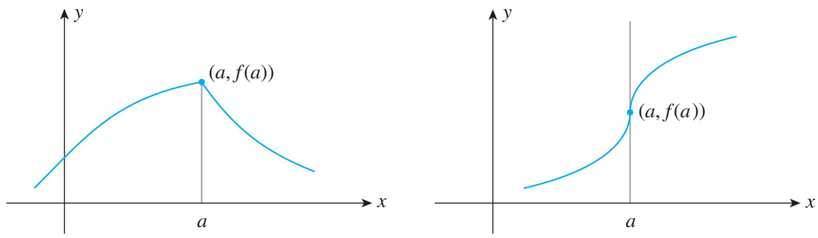


FIGURA **34**

(a) La gráfica realiza un cambio abrupto de dirección en $x = a$.

(b) La pendiente en $x = a$ es indefinida.

El siguiente ejemplo ilustra una función que no es diferenciable en un punto.

EJEMPLO DE APLICACIÓN 8 Los salarios Mary trabaja en las tiendas departamentales B&O donde, en un día entre semana, se le paga \$8 por hora durante las primeras 8 horas y \$12 la hora por las horas extra. La función

$$f(x) = \begin{cases} 8x & \text{si } 0 \leq x \leq 8 \\ 12x - 32 & \text{si } 8 < x \end{cases}$$

da los ingresos de Mary en un día entre semana en el que trabajó x horas. Elabore la gráfica de la función f y explique por qué ésta no es diferenciable en $x = 8$.

Solución La gráfica de f se muestra en la figura 35. Observe que la gráfica de f tiene una esquina en $x = 8$ y, en consecuencia, no es diferenciable en $x = 8$. ■

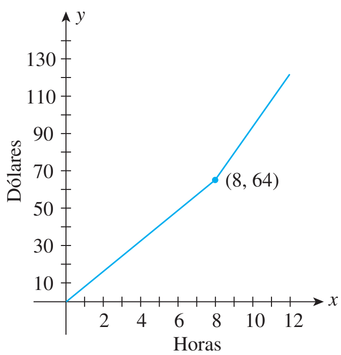


FIGURA **35**
La función f no es diferenciable en (8, 64).

Esta sección se concluye al mencionar la conexión entre la continuidad y la diferenciación de una función en un valor dado $x = a$ en el dominio de f. Al examinar de nuevo la función del ejemplo 8, se aclara que f es continua en todas partes y, en particular, cuando $x = 8$. Esto demuestra que en general la continuidad de una función en $x = a$ no necesariamente implica la diferenciación de la función en ese número. Lo contrario, sin embargo, es verdad: si una función f es diferenciable en $x = a$, entonces esta es continua ahí.

Diferenciación y continuidad

Si una función es diferenciable en $x = a$, entonces ésta es continua en $x = a$.

Vea el ejercicio 62, página 586, como prueba de este resultado.

Explore y analice

Suponga que una función f es diferenciable en $x = a$. ¿Pueden existir dos rectas tangentes a la gráfica de f en el punto $(a, f(a))$? Explique su respuesta.

Exploración con TECNOLOGÍA

1. Utilice una calculadora graficadora para elaborar la gráfica de $f(x) = x^{1/3}$ en la ventana de visualización $[-2, 2] \times [-2, 2]$.
2. Utilice una calculadora graficadora para dibujar la recta tangente a la gráfica de f en el punto (0, 0). ¿Puede explicar por qué el proceso se rompe?

EJEMPLO 9 La figura 36 muestra una parte de la gráfica de una función. Explique por qué la función no es diferenciable en cada uno de los números $x = a, b, c, d, e, f$ y g.

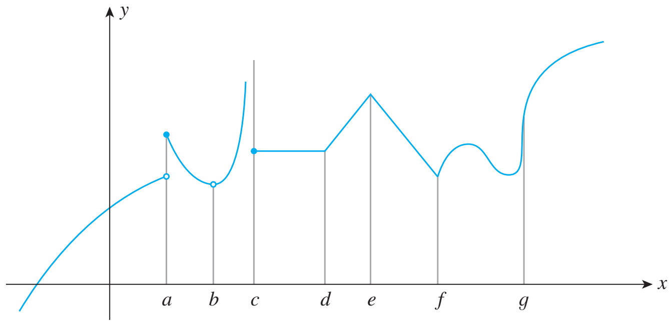


FIGURA **36**
La gráfica de esta función no es diferenciable en los números *a-g*.

Solución La función no es diferenciable en $x = a$, b y c, debido a que ésta es discontinua en cada uno de estos números. La derivada de la función no existe en $x = d$, e y f debido a que ésta tiene un pico en cada punto sobre la gráfica correspondiente a estos números. Finalmente, la función no es diferenciable en $x = g$ debido a que la recta tangente es vertical en $(g, f(g))$. ■

9.3 Ejercicios de autoevaluación

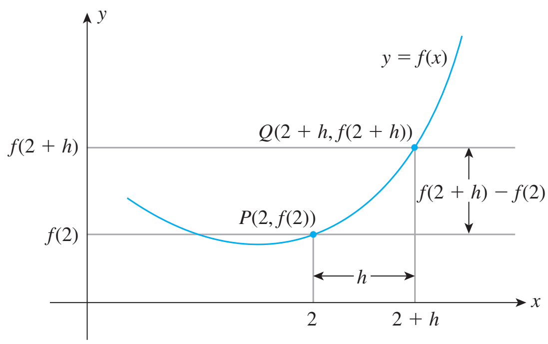
1. Sea $f(x) = -x^2 - 2x + 3$.
   a. Determine la derivada f' de f, utilizando la definición de la derivada.
   b. Determine la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(0, 3)$.
   c. Determine la tasa de cambio de f cuando $x = 0$.
   d. Determine una ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(0, 3)$.
   e. Elabore la gráfica de f y la recta tangente a la curva en el punto $(0, 3)$.

2. Las pérdidas (en millones de dólares) debido a malos préstamos otorgados principalmente en la agricultura, bienes raíces, transporte y energía por parte de Franklin Bank se estiman sean
$$A = f(t) = -t^2 + 10t + 30 \qquad (0 \leq t \leq 10)$$
donde t es el tiempo en años ($t = 0$ que corresponde al inicio de 2002). Qué tan rápido crecieron las pérdidas a inicios de 2005? ¿Al inicio de 2007 y de 2009?

Las soluciones de los ejercicios de autoevaluación 9.3 se encuentran en la página 586.

9.3 Preguntas de concepto

Para las preguntas 1 y 2 refiérase a la siguiente figura.



1. Sean $P(2, f(2))$ y $Q(2 + h, f(2 + h))$ los puntos sobre la gráfica de la función f.
   a. Determine una expresión para la pendiente de la recta secante que pase a través de P y Q.
   b. Determine una expresión para la pendiente de la recta tangente que pasa a través de P.

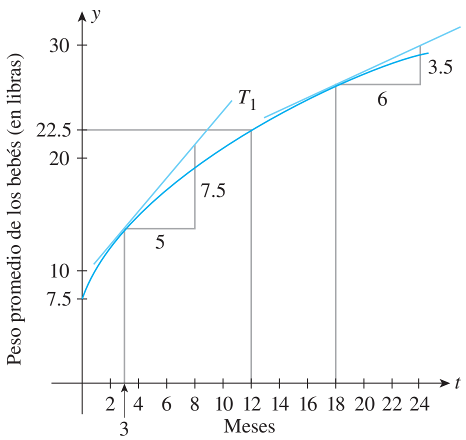
2. Con referencia a la pregunta 1.
   a. Determine una expresión para la tasa de cambio promedio de f sobre el intervalo $[2, 2 + h]$.
   b. Determine una expresión para la tasa de cambio inmediata de f en 2.
   c. Compare sus respuestas del inciso (a) y (b) con aquellas de la pregunta 1.

3. **a.** Proporcione una interpretación geométrica y una física de la expresión
$$\frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$
   b. Proporcione una interpretación geométrica y una física de la expresión
$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

4. ¿Bajo qué condiciones una función no tiene una derivada en un número? Ilustre su respuesta con trazos.

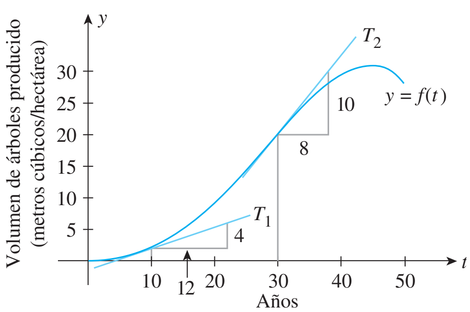
9.3 Ejercicios

1. **PESO PROMEDIO DE UN BEBÉ** La gráfica siguiente muestra las medidas del peso promedio del recién nacido desde el momento del nacimiento ($t = 0$) hasta la edad de 2 años ($t = 24$). Al calcular las pendientes de las rectas tangentes respectivas, calcule la tasa de cambio del peso promedio del bebé cuando $t = 3$ y $t = 18$. ¿Cuál es la tasa de cambio promedio en el peso promedio del bebé durante los primeros años de vida?



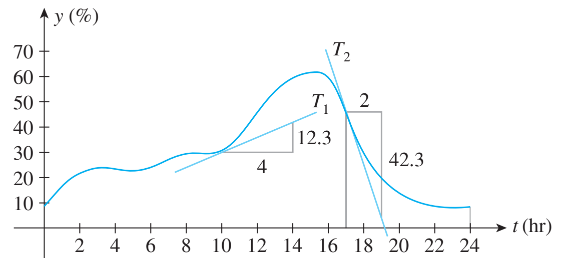
2. **SILVICULTURA** La siguiente gráfica muestra el volumen de árboles que se produce en un bosque de una sola especie. Aquí $f(t)$ está medida en metros cúbicos/hectárea y t en años. Al calcular las pendientes de las rectas tangentes respectivas, calcule la tasa de cambio en la que los árboles han crecido al inicio del año 10 y al inicio del año 30.

Fuente: The Random House Encyclopedia



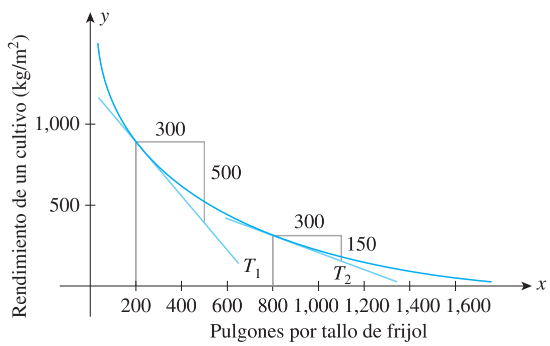
3. **PATRONES PARA VER TELEVISIÓN** La siguiente gráfica muestra el porcentaje de hogares en Estados Unidos que ve televisión durante un periodo de 24 horas en un día laborable ($t = 0$ corresponde a 6 a.m.) Al calcular las pendientes de las rectas tangentes respectivas, calcule la tasa de cambio del porcentaje de hogares que ve la televisión a las 4 p.m. y las 11 p.m.

Fuente: A. C. Nielsen Company

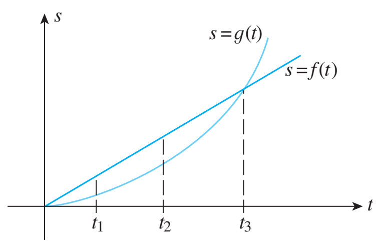


4. **RENDIMIENTO DEL CULTIVO** La productividad y el rendimiento de los cultivos se han reducido por las plagas de insectos. La siguiente gráfica muestra la relación entre el rendimiento de un cultivo determinado $f(x)$, como una función de densidad de pulgones x (los pulgones son pequeños insectos que succionan la savia de las plantas). En este caso, $f(x)$ se mide en kilogramos/4,000 metros cuadrados, y x se mide en cientos de pulgones/tallo de frijol. Al calcular las pendientes de las rectas tangentes respectivas, calcule la tasa de cambio del rendimiento de los cultivos con respecto a la densidad de pulgones, cuando esa densidad es de 200 pulgones/tallo de frijol, y cuando es de 800 pulgones/tallo de frijol.

Fuente: *The Random House Encyclopedia*



5. La posición del automóvil A y el automóvil B, iniciando juntos y viajando por una autopista recta, está dada por $s = f(t)$ y $s = g(t)$, respectivamente, donde s se mide en pies y t se mide en segundos (vea la figura adjunta).



a. ¿Qué automóvil viaja más rápido en t_1?

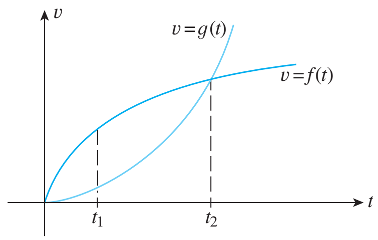
b. ¿Qué puede decir acerca de la velocidad de los automóviles en t_2?

Sugerencia: Compare las rectas tangentes.

c. ¿Qué automóvil viaja más velozmente en t_3?

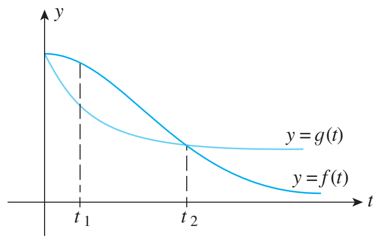
d. ¿Qué puede decir acerca de la posición de los automóviles en t_3?

6. La velocidad del automóvil A y del automóvil B, iniciando juntos y viajando por una autopista recta, está dada por $v = f(t)$ y $v = g(t)$, respectivamente, donde v se mide en metros/segundo y t se mide en segundos (vea la figura adjunta).



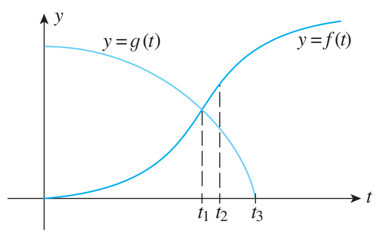
a. ¿Qué puede decir acerca de la velocidad y la aceleración de los dos automóviles en t_1? (La aceleración es la tasa de cambio de la velocidad.)
b. ¿Qué puede decir acerca de la velocidad y la aceleración de los dos automóviles en t_2?

7. Efecto de un bactericida En la siguiente figura, $f(t)$ da la población P_1 de cierta clase de bacterias en el momento t después de que una parte del bactericida A se introdujo en la población en $t = 0$. La gráfica de g da la población P_2 de una bacteria similar en el momento t después de que una parte del bactericida B se introdujo en la población en $t = 0$.
a. ¿Qué población disminuye más rápido en el t_1?
b. ¿Qué población disminuye más rápido en el t_2?



c. ¿Qué bactericida es más eficaz en la reducción de la población de bacterias a corto plazo? ¿A largo plazo?

8. Participación de mercado La siguiente figura muestra el efecto devastador de la apertura de una nueva tienda de descuento en un establecimiento de grandes almacenes en un pequeño pueblo. Los ingresos de la tienda de descuento en el momento t (meses) está dada por $f(t)$ millones de dólares, mientras que la utilidad de las tiendas departamentales ya establecidas en el momento t está dada por $g(t)$ millones de dólares. Responda las siguientes preguntas y dé el valor de t en el que el evento específico se llevó a cabo.



a. Los ingresos de la tienda departamental establecida están disminuyendo a un ritmo más lento.
b. Los ingresos de la tienda departamental establecida disminuyen con más rapidez.
c. Los ingresos de la tienda de descuento superan los de la tienda establecida.
d. Los ingresos de la tienda de descuento aumentan a un ritmo más rápido.

En los ejercicios 9-16, utilice el proceso de los cuatro pasos para determinar la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función dada en cualquier punto.

9. $f(x) = 13$

10. $f(x) = -6$

11. $f(x) = 2x + 7$

12. $f(x) = 8 - 4x$

13. $f(x) = 3x^2$

14. $f(x) = -\frac{1}{2}x^2$

15. $f(x) = -x^2 + 3x$

16. $f(x) = 2x^2 + 5x$

En los ejercicios 17-22, determine la pendiente de la recta tangente a la gráfica de cada función en el punto dado y determine una ecuación de la recta tangente.

17. $f(x) = 2x + 7$ en $(2, 11)$

18. $f(x) = -3x + 4$ en $(-1, 7)$

19. $f(x) = 3x^2$ en $(1, 3)$

20. $f(x) = 3x - x^2$ en $(-2, -10)$

21. $f(x) = -\dfrac{1}{x}$ en $\left(3, -\dfrac{1}{3}\right)$

22. $f(x) = \dfrac{3}{2x}$ en $\left(1, \dfrac{3}{2}\right)$

23. Sea $f(x) = 2x^2 + 1$.
a. Determine la derivada f' de f.
b. Determine una ecuación de la recta tangente a la curva en el punto $(1, 3)$.
c. Elabore la gráfica de f.

24. Sea $f(x) = x^2 + 6x$.
a. Determine la derivada de f' de f.
b. Determine el punto sobre la gráfica de f donde la recta tangente a la curva es horizontal.
Sugerencia: Determine el valor de x para el que $f'(x) = 0$.
c. Elabore la gráfica de f y la recta tangente a la curva en el punto determinado en el inciso (b).

25. Sea $f(x) = x^2 - 2x + 1$.
a. Determine la derivada de f' de f.
b. Determine el punto sobre la gráfica de f donde la recta tangente a la curva es horizontal.
c. Elabore la gráfica de f y la recta tangente a la curva en el punto determinado en el inciso (b).
d. ¿Cuál es la tasa de cambio de f en este punto?

26. Sea $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$.

a. Determine la derivada f' de f.

b. Determine una ecuación de la recta tangente a la curva en el punto $(-1, -\frac{1}{2})$.

c. Elabore la gráfica de f y la recta tangente a la curva en $(-1, -\frac{1}{2})$.

27. Sea $y = f(x) = x^2 + x$.

a. Determine la tasa de cambio promedio de y con respecto a x en el intervalo desde $x = 2$ hasta $x = 3$, desde $x = 2$ hasta $x = 2.5$ y desde $x = 2$ hasta $x = 2.1$.

b. Determine la tasa de cambio (instantánea) de y en $x = 2$.

c. Compare los resultados obtenidos en el inciso (a) con los del inciso (b).

28. Sea $y = f(x) = x^2 - 4x$.

a. Determine la tasa de cambio promedio de y con respecto a x en el intervalo desde $x = 3$ hasta $x = 4$, desde $x = 3$ hasta $x = 3.5$ y desde $x = 3$ hasta $x = 3.1$.

b. Determine la tasa de cambio (instantánea) de y en $x = 3$.

c. Compare los resultados obtenidos en el inciso (a) con los del inciso (b).

29. Velocidad de un automóvil Suponga que la distancia x (en pies) recorrida por un automóvil en movimiento a lo largo de un estrecho camino después de t seg está dada por la función $s = f(t) = 2t^2 + 48t$.

a. Calcule la velocidad promedio de un automóvil por los intervalos de tiempo [20, 21], [20, 20.1] y [20, 20.01].

b. Calcule la velocidad (instantánea) del automóvil cuando $t = 20$.

c. Compare los resultados del inciso (a) con los del inciso (b).

30. Velocidad de una pelota arrojada al aire Una pelota es arrojada hacia arriba con una velocidad inicial de 128 pies/seg, por lo que su altura (en pies) después de t seg está dada por $s(t) = 128t - 16t^2$.

a. ¿Cuál es la velocidad promedio de la pelota en los intervalos de tiempo [2, 3], [2, 2.5] y [2, 2.1]?

b. ¿Cuál es la velocidad instantánea en el momento $t = 2$?

c. ¿Cuál es la velocidad instantánea en el momento $t = 5$? ¿La pelota está elevándose o cayendo en este momento?

d. ¿Cuándo la pelota golpeará el suelo?

31. Durante la construcción de un edificio de gran altura, un trabajador dejó caer accidentalmente su desatornillador eléctrico portátil de una altura de 400 pies. Después de t segundos, el destornillador había caído a una distancia de $s = 16t^2$ pies.

a. ¿Cuánto tiempo tomó al destornillador para llegar al suelo?

b. ¿Cuál fue la velocidad promedio del destornillador entre el momento en que cayó y el tiempo que golpeó el suelo?

c. ¿Cuál fue la velocidad del destornillador en el momento de chocar con el suelo?

32. Un globo aerostático se eleva desde el suelo hasta que su altura después de t segundos es $h = \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}t$ pies $(0 \le t \le 60)$.

a. ¿Cuál es la altura del globo después de 40 segundos?

b. ¿Cuál es la velocidad promedio del globo entre $t = 0$ y $t = 40$ segundos?

c. ¿Cuál es la velocidad del globo después de 40 segundos?

33. A una temperatura de 20 °C, el volumen V (en litros) de 1.33 g de O_2 está relacionada con su presión p (en atmósferas) por la fórmula $V = 1/p$.

a. ¿Cuál es la tasa de cambio promedio de V con respecto a p conforme p aumenta desde $p = 2$ a $p = 3$?

b. ¿Cuál es la tasa de cambio de V con respecto a p cuando $p = 2$?

34. Costo de producción de tablas de surfear El costo total de $C(x)$ (en dólares) incurrido por Aloha Company en la fabricación de x tablas de surfear por día está dada por

$$C(x) = -10x^2 + 300x + 130 \qquad (0 \le x \le 15)$$

a. Determine $C'(x)$.

b. ¿Cuál es la tasa de cambio del costo total cuando el nivel de producción de las tablas para surfear es de 10 por día?

35. Efecto de la publicidad en las utilidades Las utilidades trimestrales (en miles de dólares) de Cunningham Realty está dada por:

$$P(x) = -\frac{1}{3}x^2 + 7x + 30 \qquad (0 \le x \le 50)$$

donde x (en miles de dólares) es la cantidad de dinero que Cunningham gasta trimestralmente en publicidad.

a. Determine $P'(x)$.

b. ¿Cuál es la tasa de cambio de la utilidad trimestral de Cunningham si la cantidad que gasta en publicidad es de \$10,000/trimestre $(x = 10)$ y \$30,000/trimestre $(x = 30)$?

36. Demanda de tiendas de campaña La función de la demanda para tiendas de campaña deportivas de 5×7 está dada por

$$p = f(x) = -0.1x^2 - x + 40$$

donde p se mide en dólares y x se mide en unidades de millar.

a. Determine la tasa de cambio promedio en el precio unitario de una tienda de campaña si la cantidad demandada está entre 5,000 y 5,050; entre 5,000 y 5,010 tiendas de campaña.

b. ¿Cuál es la tasa de cambio del precio unitario si la cantidad demandada es 5,000?

37. PIB de un país El producto interno bruto de un país determinado se prevé que sea

$$N(t) = t^2 + 2t + 50 \qquad (0 \le t \le 5)$$

mil millones de dólares t años a partir de ahora. ¿Cuál será la tasa de cambio del PIB de un país en 2 y 4 años a partir de ahora?

38. Crecimiento de bacterias Bajo un conjunto de condiciones controladas de laboratorio, el tamaño de la población de ciertas bacterias en el momento t (en minutos) está descrita por la función

$$P = f(t) = 3t^2 + 2t + 1$$

Determine la tasa de crecimiento de la población en $t = 10$ min.

39. Temperatura del aire La temperatura del aire a una altura de h pies de la superficie de la tierra es $T = f(h)$ grados Fahrenheit.

a. Dé una interpretación física de $f'(h)$. En unidades.

b. En términos generales, ¿cuál cree que sea el signo de $f'(h)$?

c. Si sabe que $f'(1{,}000) = -0.05$, estime el cambio en la temperatura del aire si la altitud cambia desde 1,000 a 1,001 pies.

40. **INGRESOS DE UNA AGENCIA DE VIAJES** Suponga que el ingreso total obtenido por la Agencia de Viajes Odyssey es $R = f(x)$ miles de dólares si x miles de dólares se gastan en publicidad.

a. ¿Qué

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \qquad (0 < a < b)$$

mide? ¿Cuáles son las unidades?

b. ¿Qué mide $f'(x)$? Dé unidades.

c. Dado que $f'(20) = 3$, ¿cuál es cambio aproximado en los ingresos si Odyssey aumenta su presupuesto de publicidad de \$20,000 a \$21,000?

En los ejercicios 41-46, x y $f(x)$ representan las cantidades dadas. Fije $x = a$ y sea h un número menor positivo. Proporcione una interpretación de las cantidades.

$$\frac{f(a + h) - f(a)}{h} \quad \text{y} \quad \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

41. x denota el tiempo y $f(x)$ denota la población de focas en el momento x.

42. x denota el tiempo y $f(x)$ denota la tasa de interés prime en el tiempo x.

43. x denota el tiempo y $f(x)$ denota la producción industrial de un país.

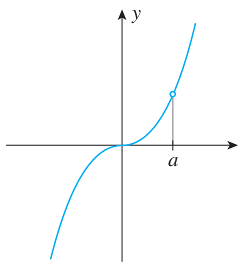
44. x denota el nivel de producción de cierta materia prima, y $f(x)$ denota el costo total en que se incurre al producir x unidades de la materia prima.

45. x denota la altitud y $f(x)$ denota la presión atmosférica.

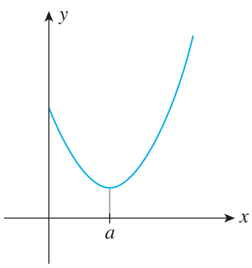
46. x denota la velocidad de un automóvil (en mph), y $f(x)$ denota el ahorro de combustible del automóvil medido en millas por galón (mpg).

Para cada uno de los ejercicios del 47-52 se muestra la gráfica de una función. Para cada función exprese sí o no (a) $f(x)$ tiene un límite en $x = a$, (b) $f(x)$ es continua en $x = a$ y (c) $f(x)$ es diferenciable en $x = a$. Justifique sus respuestas.

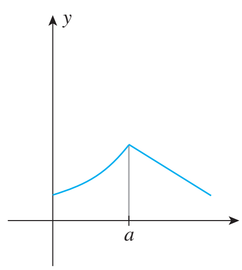
47.



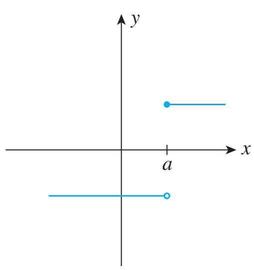
48.



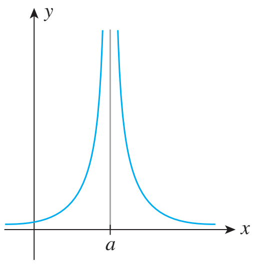
49.



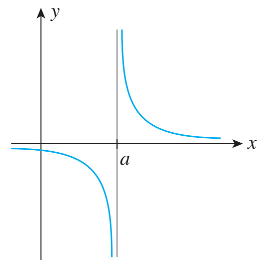
50.



51.



52.



53. La distancia s recorrida (en pies) por una motocicleta que viaja en línea recta e inicia desde el reposo en t seg está dada por la función

$$s(t) = -0.1t^3 + 2t^2 + 24t$$

Calcule la velocidad promedio de la motocicleta en un intervalo de tiempo $[2, 2 + h]$ para $h = 1, 0.1, 0.01, 0.001, 0.0001$ y 0.00001 y utilice sus resultados para calcular la velocidad instantánea de la motocicleta en $t = 2$.

54. El gasto total diario $C(x)$ incurrido por Trappee and Sons para fabricar cajas de salsa picante TexaPep está dada por

$$C(x) = 0.000002x^3 + 5x + 400$$

Calcule

$$\frac{C(100 + h) - C(100)}{h}$$

para $h = 1, 0.1, 0.01, 0.001$ y 0.0001 y utilice sus resultados para calcular la tasa de cambio de la función del costo total cuando el nivel de producción es de 100 cajas por día.

En los ejercicios 55 y 56 determine si el pronunciamiento es verdadero o falso. Si es verdadero, explique por qué lo es. Si es falso, proporcione un ejemplo que demuestre por qué lo es.

55. Si f es continua en $x = a$, entonces f es diferenciable en $x = a$.

56. Si f es continua en $x = a$ y g es diferenciable en $x = a$, entonces el $\lim_{x \to a} f(x)g(x) = f(a)g(a)$.

57. Elabore la gráfica de la función $f(x) = |x + 1|$ y demuestre que la función no tiene una derivada en $x = -1$.

58. Elabore la gráfica de la función $f(x) = 1/(x - 1)$ y demuestre que la función no tiene una derivada en $x = 1$.

59. Sea

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 1 \\ ax + b & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Determine los valores de a y b en las que f es continua y tiene una derivada en $x = 1$. Elabore la gráfica de f.

60. Elabore la gráfica de la función $f(x) = x^{2/3}$. ¿La función es continua en $x = 0$? ¿Existe $f'(0)$? ¿Por qué o por qué no?

61. Demuestre que la derivada de la función $f(x) = |x|$ para $x \neq 0$ está dada por

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Sugerencia: Recuerde la definición del valor absoluto de un número.

62. Demuestre que si una función f es diferenciable en $x = a$, entonces f debe ser continua en ese número.

Sugerencia: Escriba

$$f(x) - f(a) = \left[\frac{f(x) - f(a)}{x - a}\right](x - a)$$

Utilice la regla del producto para los límites y la definición de la derivada para demostrar que

$$\lim_{x \to a} [f(x) - f(a)] = 0$$

9.3 Soluciones de los ejercicios de autoevaluación

1. a. $f'(x)$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{[-(x + h)^2 - 2(x + h) + 3] - (-x^2 - 2x + 3)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-x^2 - 2xh - h^2 - 2x - 2h + 3 + x^2 + 2x - 3}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h(-2x - h - 2)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} (-2x - h - 2) = -2x - 2$$

b. Del resultado del inciso (a), observe que la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en cualquier punto $(x, f(x))$ está dada por

$$f'(x) = -2x - 2$$

En particular, la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en $(0, 3)$ es

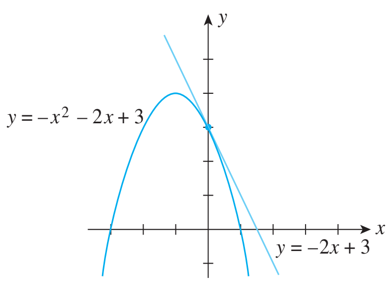
$$f'(0) = -2$$

c. La tasa de cambio de f cuando $x = 0$ está dada por $f'(0) = -2$, o -2, unidades/unidad de cambio en x.

d. Utilice el resultado del inciso (b), observe que la ecuación de la recta tangente requerida es

$$y - 3 = -2(x - 0)$$
$$y = -2x + 3$$

e.



2. La tasa de cambio de las pérdidas en cualquier momento t está dada por $f'(t)$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(t + h) - f(t)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{[-(t + h)^2 + 10(t + h) + 30] - (-t^2 + 10t + 30)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-t^2 - 2th^2 - h^2 + 10t + 10h + 30 + t^2 - 10t - 30)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h(-2t - h + 10)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} (-2t - h + 10)$$

$$= -2t + 10$$

Así, la tasa de cambio de las pérdidas sufridas por el banco a principios de 2005 ($t = 3$) fue

$$f'(3) = -2(3) + 10 = 4$$

En otras palabras, las pérdidas se incrementaron a la tasa de \$4 millones por año. A inicios de 2007 ($t = 5$).

$$f'(5) = -2(5) + 10 = 0$$

y observe que el crecimiento en las pérdidas debidas a malos préstamos fue de cero en este punto. A inicios de 2009 ($t = 7$),

$$f'(7) = -2(7) + 10 = -4$$

y se concluye que las pérdidas fueron decrecientes a una tasa de \$4 millones por año.

USO DE LA TECNOLOGÍA

Graficación de una función y su recta tangente

Para trazar la gráfica de una función f y la recta tangente en cualquier punto sobre la gráfica, puede usar una calculadora graficadora.

EJEMPLO 1 Sea $f(x) = x^2 - 4x$.

a. Determine una ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(3, -3)$.

b. Elabore la gráfica de f y la recta tangente determinada en el inciso (a) del mismo conjunto de ejes.

Solución

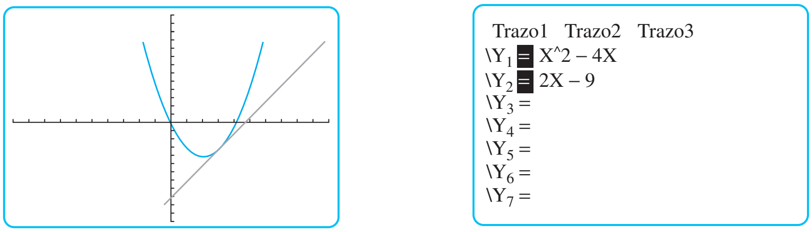
a. La pendiente de la recta tangente en cualquier punto sobre la gráfica de f está dada por $f'(x)$. Pero del ejemplo 4 (página 576) determine $f'(x) = 2x - 4$. Utilice este resultado, observe que la pendiente de la recta tangente requerida es

$$f'(3) = 2(3) - 4 = 2$$

Por último, utilice la forma punto-pendiente de la ecuación de una recta, determine que una ecuación de la recta tangente es

$$\begin{aligned} y - (-3) &= 2(x - 3) \\ y + 3 &= 2x - 6 \\ y &= 2x - 9 \end{aligned}$$

b. La figura T1a muestra la gráfica de f en la ventana de visualización estándar y la recta tangente de interés.



(a) **(b)**

FIGURA **T1**
(a) La gráfica de $f(x) = x^2 - 4x$ y la recta tangente $y = 2x - 9$ en la ventana de visualización estándar; (b) la ecuación de la pantalla TI-83/84.

Nota Algunas de las calculadoras graficadoras trazarán las dos gráficas de una función f y la recta tangente a la gráfica de f en un punto específico cuando la función y el valor específico de x son introducidos.

Determinación de la derivada de una función en un punto dado

La operación de la derivada numérica de una calculadora graficadora puede ser utilizada para dar un valor aproximado de la derivada de una función por un valor dado de x.

EJEMPLO 2 Sea $f(x) = \sqrt{x}$.

a. Utilice la operación de la derivada numérica de una calculadora graficadora para determinar la derivada de f en (4, 2).

b. Determine una ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en (4, 2).

c. Elabore la gráfica de f y la recta tangente sobre el mismo conjunto de ejes.

Solución

a. Utilice la operación de la derivada numérica de una herramienta de graficación, determine que

$$f'(4) = \frac{1}{4}$$

(figura T2).

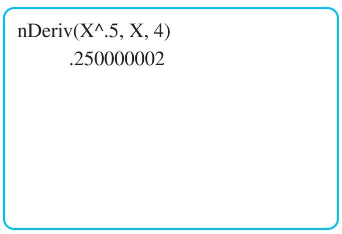


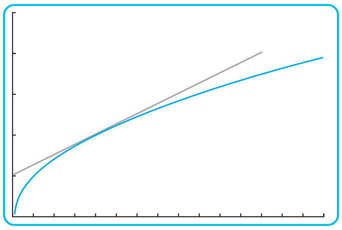
FIGURA **T2**
La pantalla de la derivada numérica TI-83/84.

b. Una ecuación de la recta tangente requerida es

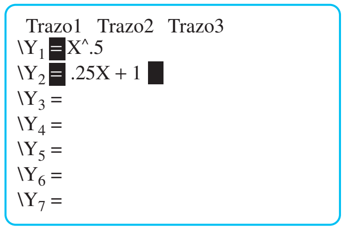
$$\begin{aligned} y - 2 &= \frac{1}{4}(x - 4) \\ y &= \frac{1}{4}x + 1 \end{aligned}$$

(continúa)

c. La figura T3a muestra la gráfica de f y la recta tangente en la ventana de visualización $[0, 15] \times [0, 4]$.



(a)



(b)

FIGURA **T3**
(a) La gráfica de $f(x) = \sqrt{x}$ y la recta tangente $y = \frac{1}{4}x + 1$ en la ventana de visualización $[0, 15] \times [0, 4]$; (b) la ecuación en la pantalla de TI-83/84.

EJERCICIOS CON TECNOLOGÍA

En los ejercicios 1-4, (a) determine una ecuación de la recta tangente a la gráfica de *f* en el punto indicado y (b) elabore la gráfica de *f* y la recta tangente sobre el mismo conjunto de ejes. Utilice la ventana de visualización adecuada.

1. $f(x) = 2x^2 + x - 3$; $(2, 7)$
2. $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$; $(1, 2)$
3. $f(x) = \sqrt{x}$; $(4, 2)$
4. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$; $\left(4, \dfrac{1}{2}\right)$

En los ejercicios 5-8, (a) utilice la operación de la derivada numérica para determinar la derivada de *f* por el valor dado de *x* (a dos lugares deseados de precisión), (b) determine una ecuación de la recta tangente a la gráfica de *f* en el punto indicado y (c) elabore la gráfica de *f* y la recta tangente sobre el mismo conjunto de ejes. Utilice una ventana de visualización adecuada.

5. $f(x) = x^3 + x + 1$; $x = 1$; $(1, 3)$
6. $f(x) = \dfrac{1}{x + 1}$; $x = 1$; $\left(1, \dfrac{1}{2}\right)$
7. $f(x) = x\sqrt{x^2 + 1}$; $x = 2$; $(2, 2\sqrt{5})$
8. $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$; $x = 1$; $\left(1, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$

9. **LOS COSTOS DE CONDUCCIÓN** El costo promedio de tener y conducir un automóvil en Estados Unidos desde 1991 hasta 2001 es aproximado por la función

$$C(t) = 0.06t^2 + 0.74t + 37.3 \qquad (0 \leq t \leq 11)$$

donde $C(t)$ se mide en centavos por milla y t en años, con $t = 0$ correspondiente a principios de 1991.

a. Elabore la gráfica de C en la ventana de visualización $[0, 10] \times [35, 52]$.
b. ¿Cuál fue el costo promedio de conducir un automóvil a principios de 1995?
c. ¿Qué tan rápido fue el cambio del costo promedio de conducir un automóvil a principios de 1995?

Fuente: Automobile Association of America

10. **MODELADO CON LOS DATOS** Las ventas anuales al detalle (o al menudeo) en Estados Unidos desde 1990 hasta 2000 (en miles de dólares) están dadas en la siguiente tabla:

Año	1990	1991	1992	1993	1994	1995
Ventas	471.6	485.4	519.2	553.4	595	625.5

Año	1996	1997	1998	1999	2000
Ventas	656.6	685.6	727.2	781.7	877.7

a. Sea $t = 0$ corresponde a 1990 y utilice la **Regresión cuadrática** para determinar el modelo de regresión de polinomios de segundo grado con base en los datos dados.
b. Elabore la gráfica de la función determinada en el inciso (a) en la ventana de visualización $[0, 10] \times [0, 1{,}000]$.
c. ¿Cuáles fueron las ventas anuales al detalle en Estados Unidos en 1999 ($t = 9$)?
d. Aproximadamente ¿qué tan rápido cambiaron las ventas al detalle en 1999 ($t = 9$)?

Fuente: National Retail Federation

9.4 Reglas básicas de diferenciación

Cuatro reglas básicas

El método utilizado en la sección 9.3 para calcular la derivada de una función se basa en una interpretación fiel de la definición de la derivada como el límite de un cociente. Para determinar la regla para la derivada f' de una función f, primero calcule la diferencia del cociente

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

y después evalúe sus limites conforme h se aproxime a cero. Como tal vez habrá observado, este método es tedioso aún para las funciones relativamente sencillas.

El propósito principal de este capítulo es determinar ciertas reglas que simplificarán el proceso de calcular la derivada de una función. Se utilizará la notación

$$\frac{d}{dx}[f(x)] \qquad \text{Léase "d, d x de f de x"}$$

que significa "la derivada de f con respecto a x en x". Al señalar las reglas de diferenciación, se asume que las funciones de f y g son diferenciables.

Regla 1: La derivada de una constante

$$\frac{d}{dx}(c) = 0 \qquad (c\text{, una constante})$$

La derivada de una función constante es igual a cero.

Ésta se puede observar desde un punto de vista geométrico al recordar que la gráfica de una función constante es una recta paralela al eje x (figura 37). Ya que la recta tangente a una recta en cualquier punto sobre la misma coincide con la recta por sí misma, su pendiente [dada por la derivada de $f(x) = c$] debe ser cero. La definición de la derivada para comprobar este resultado puede también utilizarse al calcular

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{c-c}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} 0 = 0$$

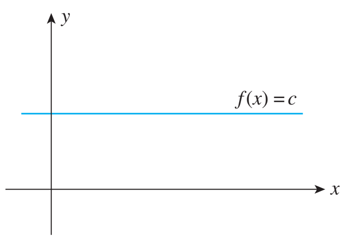


FIGURA **37**
La pendiente de la recta tangente a la gráfica de $f(x) = c$, donde c es una constante, es cero.

EJEMPLO 1

a. Si $f(x) = 28$, entonces

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(28) = 0$$

b. Si $f(x) = -2$, entonces

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(-2) = 0$$

Regla 2: La regla de potencia

Si n es un número real, entonces $\dfrac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$.

Verifique la regla de potencia para el caso especial $n = 2$. Si $f(x) = x^2$, entonces

$$\begin{aligned} f'(x) = \frac{d}{dx}(x^2) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{2xh + h^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h(2x+h)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} (2x + h) = 2x \end{aligned}$$

como se propone demostrar.

La prueba de la regla de potencia para el caso general no es sencilla de demostrar y se omitirá. Sin embargo, se le pedirá que compruebe la regla para el caso especial $n = 3$ en el ejercicio 79, página 599.

EJEMPLO 2

a. Si $f(x) = x$, entonces

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(x) = 1 \cdot x^{1-1} = x^0 = 1$$

b. Si $f(x) = x^8$, entonces

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(x^8) = 8x^7$$

c. Si $f(x) = x^{5/2}$, entonces

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(x^{5/2}) = \frac{5}{2}x^{3/2}$$

■

Para diferenciar una función cuya regla involucra una radical, primero vuelva a escribir la regla utilizando las potencias fraccionales. La expresión resultante puede ser diferenciada entonces al utilizar la regla de potencia.

EJEMPLO 3 Determine la derivada de las siguientes funciones:

a. $f(x) = \sqrt{x}$ **b.** $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$

Solución

a. Vuelva a escribir $\sqrt{x}$ en la forma $x^{1/2}$, obtenga

(x^2) Vea la página 37.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{dx}(x^{1/2}) \\ &= \frac{1}{2}x^{-1/2} = \frac{1}{2x^{1/2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \end{aligned}$$

b. Vuelva a escribir $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$ en la forma $x^{-1/3}$, obtenemos

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{d}{dx}(x^{-1/3}) \\ &= -\frac{1}{3}x^{-4/3} = -\frac{1}{3x^{4/3}} \end{aligned}$$

■

Regla 3: La derivada de una constante que multiplica a una función

$$\frac{d}{dx}[cf(x)] = c\frac{d}{dx}[f(x)] \qquad (c\text{, una constante})$$

La derivada de una constante por una función diferenciable es igual a la constante multiplicada por la derivada de la función.

Este resultado proviene de los siguientes cálculos.
Si $g(x) = cf(x)$, entonces

$$\begin{aligned} g'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{cf(x+h)-cf(x)}{h} \\ &= c\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\ &= cf'(x) \end{aligned}$$

EJEMPLO 4

a. Si $f(x) = 5x^3$, entonces

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{dx}(5x^3) = 5\frac{d}{dx}(x^3) \\ &= 5(3x^2) = 15x^2 \end{aligned}$$

b. Si $f(x) = \dfrac{3}{\sqrt{x}}$, entonces

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{dx}(3x^{-1/2}) \\ &= 3\left(-\frac{1}{2}x^{-3/2}\right) = -\frac{3}{2x^{3/2}} \end{aligned}$$

■

Regla 4: La regla de la suma

$$\frac{d}{dx}[f(x) \pm g(x)] = \frac{d}{dx}[f(x)] \pm \frac{d}{dx}[g(x)]$$

La derivada de la suma (diferencia) de dos funciones diferenciables es igual a la suma (diferencia) de sus derivadas.

Este resultado puede extenderse a la suma y diferencia de cualquier número infinito de las funciones diferenciables. Verifique la regla para la suma de dos funciones.

Si $s(x) = f(x) + g(x)$, entonces

$$\begin{aligned}
s'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{s(x+h) - s(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{[f(x+h) + g(x+h)] - [f(x) + g(x)]}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{[f(x+h) - f(x)] + [g(x+h) - g(x)]}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\
&= f'(x) + g'(x)
\end{aligned}$$

EJEMPLO 5 Determine las derivadas de las siguientes funciones:

a. $f(x) = 4x^5 + 3x^4 - 8x^2 + x + 3$ **b.** $g(t) = \dfrac{t^2}{5} + \dfrac{5}{t^3}$

Solución

a.
$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{d}{dx}(4x^5 + 3x^4 - 8x^2 + x + 3) \\
&= \frac{d}{dx}(4x^5) + \frac{d}{dx}(3x^4) - \frac{d}{dx}(8x^2) + \frac{d}{dx}(x) + \frac{d}{dx}(3) \\
&= 20x^4 + 12x^3 - 16x + 1
\end{aligned}$$

b. Aquí, la variable independiente es t en lugar de x, por lo que es diferenciable con respecto a t. Por tanto,

$$\begin{aligned}
g'(t) &= \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{5}t^2 + 5t^{-3}\right) && \text{Vuelva a escribir } \tfrac{1}{t^3} \text{ como } t^{-3}. \\
&= \frac{2}{5}t - 15t^{-4} = \frac{2}{5}t - \frac{15}{t^4} && \text{Vuelva a escribir } t^{-4} \text{ como } \tfrac{1}{t^4}. \\
&= \frac{2t^5 - 75}{5t^4} && \text{Simplifique.}
\end{aligned}$$

■

EJEMPLO 6 Determine la pendiente y una ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x) = 2x + 1/\sqrt{x}$ en el punto $(1, 3)$.

Solución La pendiente de la recta tangente en cualquier punto sobre la gráfica de f está dada por

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{d}{dx}\left(2x + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) \\
&= \frac{d}{dx}(2x + x^{-1/2}) && \text{Vuelva a escribir } \tfrac{1}{\sqrt{x}} \text{ como } \tfrac{1}{x^{1/2}} = x^{-1/2}. \\
&= 2 - \frac{1}{2}x^{-3/2} && \text{Utilice la regla de la suma.} \\
&= 2 - \frac{1}{2x^{3/2}} && \text{Vuelva a escribir } \tfrac{1}{2}x^{-3/2} \text{ como } \tfrac{1}{2x^{3/2}}.
\end{aligned}$$

En particular, la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en $(1, 3)$ (donde $x = 1$), es

$$f'(1) = 2 - \frac{1}{2(1^{3/2})} = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

Utilice la forma punto-pendiente de la ecuación de una recta con la pendiente $\frac{3}{2}$ y el punto (1, 3), observe que una ecuación de la recta tangente es

$$y - 3 = \frac{3}{2}(x - 1) \qquad y - y_1 = m(x - x_1)$$

Vea la página 75.

o, por la simplificación,

$$y = \frac{3}{2}x + \frac{3}{2}$$

(vea la figura 38).

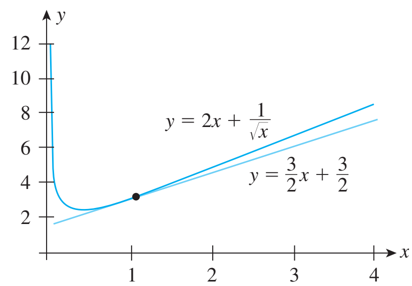


FIGURA 38
La recta de la tangente a la gráfica de $f(x) = 2x + 1/\sqrt{x}$ en (1, 3).

EJEMPLO DE APLICACIÓN 7 Conservación de las especies

Un grupo de biólogos marinos del Neptune Institute of Oceanography recomienda una serie de medidas de conservación que se llevará a cabo durante la próxima década para salvar de la extinción a ciertas especies de ballenas. Después de implementar las medidas de conservación, la población de esta especie se espera que sea

$$N(t) = 3t^3 + 2t^2 - 10t + 600 \qquad (0 \leq t \leq 10)$$

donde $N(t)$ denota la población al final del año t. Determine la tasa de crecimiento de la población de ballenas cuando $t = 2$ y $t = 6$. ¿Qué tan grande será la población de ballenas 8 años después de implementar las medidas de conservación?

Solución La tasa de crecimiento de la población de ballenas en cualquier momento t está dada por

$$N'(t) = 9t^2 + 4t - 10$$

En particular, cuando $t = 2$ y $t = 6$, se tiene

$$\begin{aligned} N'(2) &= 9(2)^2 + 4(2) - 10 \\ &= 34 \\ N'(6) &= 9(6)^2 + 4(6) - 10 \\ &= 338 \end{aligned}$$

Así, la tasa de crecimiento en la población de ballenas será de 34 por año después de 2 años y 338 por año después de 6 años.

La población de ballenas despues de ocho años será

$$\begin{aligned} N(8) &= 3(8)^3 + 2(8)^2 - 10(8) + 600 \\ &= 2{,}184 \end{aligned}$$

La gráfica de la función N aparece en la figura 39. Observe el rápido crecimiento de la población en los últimos años, así como las medidas de conservación comienzan a dar frutos, compare con el crecimiento en los años anteriores.

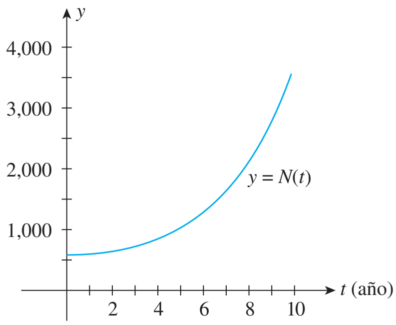


FIGURA 39
La población de ballenas después de t años está dada por $N(t)$.

EJEMPLO DE APLICACIÓN 8 Altitud de un cohete La altitud de un cohete (en pies) t segundos en vuelo está dada por

$$s = f(t) = -t^3 + 96t^2 + 195t + 5 \qquad (t \geq 0)$$

a. Determine una expresión v para la velocidad del cohete en cualquier momento t.
b. Calcule la velocidad del cohete cuando $t = 0$, 30, 50, 65 y 70. Interprete sus resultados.
c. Utilice los resultados, de la solución del inciso (b) y la observación que en el punto más alto dentro de su trayectoria la velocidad del cohete es cero, determine la altitud máxima alcanzada por el cohete.

Solución

a. La velocidad del cohete en cualquier momento t está dada por

$$v = f'(t) = -3t^2 + 192t + 195$$

b. La velocidad del cohete cuando $t = 0$, 30, 50, 65 y 70 está dada por

$$\begin{aligned}
f'(0) &= -3(0)^2 + 192(0) + 195 = 195 \\
f'(30) &= -3(30)^2 + 192(30) + 195 = 3{,}255 \\
f'(50) &= -3(50)^2 + 192(50) + 195 = 2{,}295 \\
f'(65) &= -3(65)^2 + 192(65) + 195 = 0 \\
f'(70) &= -3(70)^2 + 192(70) + 195 = -1{,}065
\end{aligned}$$

o 195, 3,255, 2,295, 0 y $-1{,}065$ pies por segundo (pies/seg).

Por tanto, el cohete tiene una velocidad inicial de 195 pies/segundo en $t = 0$ y acelera a una velocidad de 3,255 pies/segundo en $t = 30$. Cincuenta segundos dentro del vuelo, la velocidad del cohete es 2,295 pies/segundo, que es menor a la velocidad en $t = 30$. Esto significa que el cohete comienza a desacelerar después del periodo inicial de aceleración (más tarde aprenderemos cómo determinar la velocidad máxima del cohete).

La desaceleración continua: la velocidad es 0 pies/segundo en $t = 65$ y $-1{,}065$ pies/seg cuando $t = 70$. Este resultado indica que 70 minutos dentro del vuelo, el cohete se dirige a la tierra con una velocidad de 1,065 pies/seg.

c. Los resultados del inciso (b) muestran que la velocidad del cohete es cero cuando $t = 65$. En ese instante, la altitud máxima del cohete es

$$\begin{aligned}
s = f(65) &= -(65)^3 + 96(65)^2 + 195(65) + 5 \\
&= 143{,}665
\end{aligned}$$

o 143,655 pies. El trazo de la gráfica de f aparece en la figura 40.

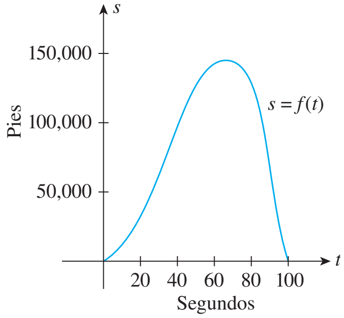


FIGURA 40
La altitud del cohete en t segundos dentro del vuelo está dada por $f(t)$.

Exploración con TECNOLOGÍA

En referencia al ejemplo 8.

1. Utilice una calculadora graficadora para elaborar la gráfica de la función de velocidad
$$v = f'(t) = -3t^2 + 192t + 195$$
utilice la ventana de visualización $[0, 120] \times [-5{,}000, 5{,}000]$. Después, utilice **ZOOM** y **TRACE**, o la capacidad para localizar la raíz de su calculadora graficadora, verifique que $f'(65) = 0$.
2. Elabore la gráfica de la función de posición del cohete
$$s = f(t) = -t^3 + 96t^2 + 195t + 5$$
utilice la ventana de visualización $[0, 120] \times [0, 150{,}000]$. Después utilice **ZOOM** y **TRACE** repetidamente, verifique que la altitud máxima del cohete es 143,655 pies.
3. Utilice **ZOOM** y **TRACE**, o la capacidad para localizar la raíz de su calculadora graficadora para determinar cuándo regresa el cohete a la Tierra.

9.4 Ejercicios de autoevaluación

1. Determine la derivada de cada función utilizando las reglas de diferenciación.
   a. $f(x) = 1.5x^2 + 2x^{1.5}$
   b. $g(x) = 2\sqrt{x} + \dfrac{3}{\sqrt{x}}$
2. Sea $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 2x - 1$.
   a. Calcule $f'(x)$.
   b. ¿Cuál es la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f cuando $x = 2$?
   c. ¿Cuál es la tasa de cambio de la función f en $x = 2$?
3. El producto interno bruto (PIB) de determinada ciudad (en millones de dólares) es descrito por la función
$$G(t) = -2t^3 + 45t^2 + 20t + 6{,}000 \qquad (0 \le t \le 11)$$
donde $t = 0$ corresponde a principios de 2000.
   a. ¿A qué tasa de cambio estaba el PIB a inicios de 2005? ¿A principios de 2007? ¿A finales de 2010?
   b. ¿Cuál fue la tasa promedio de crecimiento del PIB en el periodo 2005-2010?

Las soluciones de los ejercicios de autoevaluación 9.4 se encuentran en la página 599.

9.4 Preguntas de concepto

1. Exprese con sus palabras las siguientes reglas de diferenciación.
   a. La regla para diferenciar una función constante
   b. La regla de potencia
   c. La regla de una constante por una función
   d. La regla de suma
2. Si $f'(2) = 3$ y $g'(2) = -2$, determine
   a. $h'(2)$ si $h(x) = 2f(x)$
   b. $F'(2)$ si $F(x) = 3f(x) - 4g(x)$
3. Suponga que f y g son funciones diferenciables y a y b son números distintos a cero. Determine $F'(x)$ si
   a. $F(x) = af(x) + bg(x)$
   b. $F(x) = \dfrac{f(x)}{a}$

9.4 Ejercicios

En los ejercicios 1-34 determine la derivada de la función *f* mediante el uso de las reglas de diferenciación.

1. $f(x) = -3$
2. $f(x) = 365$
3. $f(x) = x^5$
4. $f(x) = x^7$
5. $f(x) = x^{2.1}$
6. $f(x) = x^{0.8}$
7. $f(x) = 3x^2$
8. $f(x) = -2x^3$
9. $f(r) = \pi r^2$
10. $f(r) = \dfrac{4}{3}\pi r^3$
11. $f(x) = 9x^{1/3}$
12. $f(x) = \dfrac{5}{4}x^{4/5}$

13. $f(x) = 3\sqrt{x}$

14. $f(u) = \dfrac{2}{\sqrt{u}}$

15. $f(x) = 7x^{-12}$

16. $f(x) = 0.3x^{-1.2}$

17. $f(x) = 5x^2 - 3x + 7$

18. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$

19. $f(x) = -x^3 + 2x^2 - 6$

20. $f(x) = x^4 - 2x^2 + 5$

21. $f(x) = 0.03x^2 - 0.4x + 10$

22. $f(x) = 0.002x^3 - 0.05x^2 + 0.1x - 20$

23. $f(x) = \dfrac{x^3 - 4x^2 + 3}{x}$

24. $f(x) = \dfrac{x^3 + 2x^2 + x - 1}{x}$

25. $f(x) = 4x^4 - 3x^{5/2} + 2$

26. $f(x) = 5x^{4/3} - \dfrac{2}{3}x^{3/2} + x^2 - 3x + 1$

27. $f(x) = 3x^{-1} + 4x^{-2}$

28. $f(x) = -\dfrac{1}{3}(x^{-3} - x^6)$

29. $f(t) = \dfrac{4}{t^4} - \dfrac{3}{t^3} + \dfrac{2}{t}$

30. $f(x) = \dfrac{5}{x^3} - \dfrac{2}{x^2} - \dfrac{1}{x} + 200$

31. $f(x) = 2x - 5\sqrt{x}$

32. $f(t) = 2t^2 + \sqrt{t^3}$

33. $f(x) = \dfrac{2}{x^2} - \dfrac{3}{x^{1/3}}$

34. $f(x) = \dfrac{3}{x^3} + \dfrac{4}{\sqrt{x}} + 1$

35. Sea $f(x) = 2x^3 - 4x$. Determine:
a. $f'(-2)$ **b.** $f'(0)$ **c.** $f'(2)$

36. Sea $f(x) = 4x^{5/4} + 2x^{3/2} + x$. Determine:
a. $f'(0)$ **b.** $f'(16)$

En los ejercicios 37-40 determine cada límite al evaluar la derivada de una función adecuada en un punto apropiado.

Sugerencia: Observe la definición de la derivada.

37. $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{(1 + h)^3 - 1}{h}$

38. $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^5 - 1}{x - 1}$

Sugerencia: Sea $h = x - 1$.

39. $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{3(2 + h)^2 - (2 + h) - 10}{h}$

40. $\displaystyle\lim_{t\to 0} \frac{1 - (1 + t)^2}{t(1 + t)^2}$

En los ejercicios 41-44 determine la pendiente y una ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función f en el punto específico.

41. $f(x) = 2x^2 - 3x + 4$; $(2, 6)$

42. $f(x) = -\dfrac{5}{3}x^2 + 2x + 2$; $\left(-1, -\dfrac{5}{3}\right)$

43. $f(x) = x^4 - 3x^3 + 2x^2 - x + 1$; $(1, 0)$

44. $f(x) = \sqrt{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}}$; $\left(4, \dfrac{5}{2}\right)$

45. Sea $f(x) = x^3$.
a. Determine el punto sobre la gráfica de f donde la recta tangente es horizontal.
b. Trace la gráfica de f y dibuje la recta tangente horizontal.

46. Sea $f(x) = x^3 - 4x^2$. Determine el (los) punto(s) sobre la gráfica de f donde la recta tangente es horizontal.

47. Sea $f(x) = x^3 + 1$.
a. Determine el (los) punto(s) sobre la gráfica de f donde la pendiente de la recta tangente es igual a 12.
b. Determine la(s) ecuación(es) de la(s) recta(s) tangente(s) del inciso (a).
c. Elabore la gráfica de f mostrando la(s) recta(s) tangente(s).

48. Sea $f(x) = \frac{2}{3}x^3 + x^2 - 12x + 6$. Determine los valores de x por los que:
a. $f'(x) = -12$
b. $f'(x) = 0$
c. $f'(x) = 12$

49. Sea $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - x^2$. Determine el (los) punto(s) sobre la gráfica de f donde la pendiente de la recta tangente es igual a:
a. $-2x$ **b.** 0 **c.** $10x$

50. Una línea recta perpendicular a y que pasa por el punto de tangencia de la recta tangente se le da el nombre de *normal* a la curva. Determine una ecuación de la recta tangente y la normal a la curva $y = x^3 - 3x + 1$ en el punto $(2, 3)$.

51. **Crecimiento de un tumor canceroso** El volumen de un tumor canceroso esférico está dado por la función

$$V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$$

donde r es el radio del tumor en centímetros. Determine la tasa de cambio en el volumen del tumor cuando
a. $r = \dfrac{2}{3}$ cm **b.** $r = \dfrac{5}{4}$ cm

52. **Velocidad de la sangre en una arteria** la velocidad (en centímetros/segundo) de sangre r cm desde el eje central de una arteria está dada por

$$v(r) = k(R^2 - r^2)$$

donde k es una constante y R es el radio de la arteria (vea la figura adjunta). Suponga que $k = 1{,}000$ y $R = 0.2$ cm. Determine $v(0.1)$ y $v'(0, 1)$ e interprete sus resultados.

Vaso sanguíneo

53. **VENTAS DE CÁMARAS DIGITALES** Con base en las proyecciones realizadas en 2004, los embarques mundiales de cámaras digitales de enfocar y disparar se espera crezcan de acuerdo con la regla.

$$N(t) = 16.3t^{0.8766} \qquad (1 \le t \le 6)$$

donde $N(t)$ está medido en millones y t en años, con $t = 1$ corresponde a 2001.

a. ¿Cuántas cámaras digitales se vendieron en 2001 ($t = 1$)?
b. ¿Qué tan rápido se incrementaron las ventas en 2001?
c. ¿Cuáles fueron las ventas proyectadas en 2005?
d. ¿Qué tan rápido crecieron las ventas proyectadas en 2005?

Fuente: International Data Corp.

54. **COMPRADORES EN LÍNEA** Conforme el uso de Internet crece, también lo hace el número de consumidores que compra en línea. Dicho número, como porcentaje de usuarios de la red, se espera que sea

$$P(t) = 53t^{0.12} \qquad (1 \le t \le 7)$$

donde t se mide en años, con $t = 1$ corresponde a inicios de 2002.

a. ¿Cuántos compradores en línea, como porcentaje de usuarios en la red, hubo a principios de 2007?
b. ¿Qué tan rápido fue el cambio en el número de compradores en línea, como porcentaje de usuarios en la red a principios de 2007?

Fuente: Strategy Analytics

55. **HOGARES DE FAMILIAS CON HIJOS** El porcentaje de familias que fueron hogares de casados con hijos entre 1970 y 2000 es aproximadamente

$$P(t) = \frac{49.6}{t^{0.27}} \qquad (1 \le t \le 4)$$

donde t se mide en décadas, con $t = 1$ corresponde a 1970.

a. ¿Qué porcentaje de familias estuvieron casadas con hijos en 1970? ¿En 1980? ¿En 2000?
b. ¿Qué tan rápido cambió el porcentaje de familias casadas con hijos en 1980? ¿En 1990?

Fuente: U.S. Census Bureau

56. **EFECTO DE LA INTERRUPCIÓN DE LA VELOCIDAD PROMEDIO** Con base en datos de un estudio, la velocidad promedio de su viaje A (en millas/hora) se relaciona con el número de paradas/milla que hace en el viaje x por la ecuación

$$A = \frac{26.5}{x^{0.45}}$$

Calcule dA/dx para $x = 0.25$ y $x = 2$. ¿Cómo afecta la tasa de cambio la velocidad promedio del viaje por el número de paradas/milla?

Fuente: General Motors

57. **VIDEO ESPECTADORES EN LÍNEA** Como la Internet de banda ancha se hace más popular, los servicios de video como YouTube seguirán expandiéndose. El número de video espectadores en línea (en millones) se prevé que crezca con base en la norma

$$N(t) = 52t^{0.531} \qquad (1 \le t \le 10)$$

donde $t = 1$ corresponde a 2003.

a. ¿Cuál será el número proyectado de video espectadores en línea en 2010?
b. ¿Qué tan rápido cambiará el número de espectadores en línea en 2010?

Fuente: eMarketer.com

58. **FUNCIONES DE DEMANDA** Las funciones de demanda para las lámparas de escritorio Luminar está dada por

$$p = f(x) = -0.1x^2 - 0.4x + 35$$

donde x es la cantidad demandada en miles y p el precio unitario en dólares.

a. Determine $f'(x)$.
b. ¿Cuál es la tasa de cambio en el precio unitario cuando la cantidad demandada es de 10,000 unidades ($x = 10$)? ¿Cuál es el precio unitario a ese nivel de demanda?

59. **LA DISTANCIA DE FRENADO DE UN AUTOMÓVIL DE CARRERAS** Durante una prueba realizada por los editores de una revista de automóviles, la distancia de frenado s (en pies) del automóvil de carreras MacPherson X-2 conforme a la regla

$$s = f(t) = 120t - 15t^2 \qquad (t \ge 0)$$

donde t fue el tiempo (en segundos) después de aplicar los frenos.

a. Determine una expresión para la velocidad v del automóvil en cualquier momento t.
b. ¿Cuál fue la velocidad del automóvil cuando aplicó los frenos por primera vez?
c. ¿Cuál fue la distancia de frenado para esa prueba en particular?
Sugerencia: El tiempo de frenado se determina al establecer $v = 0$.

60. **CUENTAS DE MENSAJERÍA INSTANTÁNEA** La mensajería móvil instantánea (MI) es una parte pequeña del uso de MI, pero se espera crezca considerablemente. La función

$$P(t) = 0.257t^2 + 0.57t + 3.9 \qquad (0 \le t \le 4)$$

da las cuentas proyectadas del MI móvil como un porcentaje del total de las cuentas de MI empresarial desde 2006 ($t = 0$) hasta 2010 ($t = 4$).

a. ¿Qué porcentaje del total de las cuentas de MI empresarial se esperan sean cuentas móviles en 2008?
b. ¿Qué tan rápido se espera cambie este porcentaje en 2008?

Fuente: The Radical Group

61. **OBESIDAD INFANTIL** El porcentaje de niños obesos entre 12 y 19 años de edad, en Estados Unidos, ha crecido de forma sorprendente en los años recientes. Dicho porcentaje desde 1980 hasta el 2000 es aproximado por la función

$$P(t) = -0.0105t^2 + 0.735t + 5 \qquad (0 \le t \le 20)$$

donde t se mide en años, con $t = 0$ correspondiente a principios de 1980.

a. ¿Qué porcentaje de niños fueron obesos a principios de 1980? ¿A principios de 1990? ¿A principios de 2000?
b. ¿Qué tan rápido cambió el porcentaje de niños obesos a principios de 1985? ¿A principios de 1990?

Fuente: Centres for Disease Control and Prevention

62. **Gasto en Medicare** Con base en los requisitos de elegibilidad actual, un estudio realizado en 2004 reveló que el gasto federal en programas de ayuda social, en particular de Medicare, crecería enormemente en el futuro. El estudio predice que el gasto en Medicare, como porcentaje del producto interno bruto (PIB), será

$$P(t) = 0.27t^2 + 1.4t + 2.2 \qquad (0 \le t \le 5)$$

por ciento en el año t, donde t se mide en décadas, con $t = 0$ correspondiente a 2000.

a. ¿Qué tan rápido el gasto en Medicare, como porcentaje del PIB, crecerá en 2010? ¿En 2020?

b. ¿Cuál será el gasto previsto de Medicare en 2010? ¿En 2020?

Fuente: Congressional Budget Office

63. **Pesca** La población total de pez dorado de Georges Bank en Nueva Inglaterra entre 1989 y 1999 es aproximada por la función

$$f(t) = 5.303t^2 - 53.977t + 253.8 \qquad (0 \le t \le 10)$$

donde $f(t)$ se mide en miles de toneladas métricas y t en años, con $t = 0$ que corresponde a principios de 1989.

a. ¿Cuál fue la tasa de cambio de la población de pez dorado a principios de 1994? ¿A principios de 1996?

b. Las restricciones a la pesca que fueron impuestas el 7 de diciembre de 1994, ¿fueron medidas eficaces de conservación?

Fuente: New England Fishery Management Council

64. **Eficiencia de los trabajadores** Un estudio de eficiencia realizado por Electra Electronics reveló que el número promedio de walkie-talkies Space Commanders ensamblados por trabajador en t horas después de iniciar su jornada laboral a las 8 a.m. está dado por

$$N(t) = -t^3 + 6t^2 + 15t$$

a. Determine la tasa promedio en la que el trabajador ensamblará los walkie-talkies en t horas después de empezar a trabajar.

b. ¿A qué tasa promedio el trabajador ensamblará walkie-talkies a las 10 a.m.? ¿A 11 a.m.?

c. ¿Cuántos walkie-talkies promedio ensamblará el trabajador entre 10 y 11 a.m.?

65. **Índice de precios al consumidor** El índice de precios al consumidor (IPC) de una economía es descrito por la función

$$I(t) = -0.2t^3 + 3t^2 + 100 \qquad (0 \le t \le 10)$$

donde $t = 0$ corresponde a 1998.

a. ¿A qué tasa cambió el (IPC) en 2003? ¿En 2005? ¿En 2008?

b. ¿Cuál fue la tasa de incremento promedio del IPC durante el periodo de 2003 a 2008?

66. **Efecto de publicidad en las ventas** La relación entre la cantidad de dinero x que Cannon Precision Instruments gasta en publicidad y las ventas totales de la empresa $S(x)$ está dada por la función

$$S(x) = -0.002x^3 + 0.6x^2 + x + 500 \qquad (0 \le x \le 200)$$

donde x se mide en miles de dólares. Determine la tasa de cambio de las ventas con respecto a la cantidad de dinero gastado en publicidad. ¿Las ventas totales de Cannon están aumentando a una tasa más rápida cuando la cantidad de dinero gastado en publicidad (a) $100,000 o (b) $150,000?

67. **Funciones de oferta** La función de oferta de cierta marca de radio satelital está dada por

$$p = f(x) = 0.0001x^{5/4} + 10$$

donde x es la cantidad ofrecida y p es el precio unitario en dólares.

a. Determine $f'(x)$.

b. ¿Cuál es la tasa de cambio del precio unitario si la cantidad ofrecida es de 10,000 radios satelitales?

68. **Crecimiento de la población** Un estudio preparado por la Cámara de Comercio de la ciudad de Sunbelt prevé que la población de la ciudad en los próximos 3 años crecerá según la norma

$$P(t) = 50{,}000 + 30t^{3/2} + 20t$$

donde $P(t)$ denota la población en t meses a partir de hoy. ¿Qué tan rápido aumentará la población en 9 y 16 meses a partir de ahora?

69. **Velocidad promedio de un automóvil en una autopista** La velocidad promedio de un automóvil en un tramo de la autopista 134 entre las 6 y 10 a.m. en un día normal es aproximada por la función

$$f(t) = 20t - 40\sqrt{t} + 50 \qquad (0 \le t \le 4)$$

donde $f(t)$ es medida en mph y t es medida en horas, con $t = 0$ corresponde a las 6 a.m.

a. Calcule $f'(t)$.

b. ¿Cuál es la velocidad promedio de un vehículo en ese tramo de la ruta 134 a las 6 a.m.? ¿A las 7 a.m.? ¿A las 8 a.m.?

c. ¿Qué tan rápido es el cambio de velocidad de un automóvil en ese tramo de la autopista 134 a las 6:30 a.m.? ¿A las 7 a.m.? ¿A las 8 a.m.?

70. **Contención del crecimiento poblacional** Hace cinco años, el gobierno de un estado de las islas del Pacífico lanzó una extensa campaña de propaganda para contener el crecimiento de la población del país. Según el Departamento del Censo, la población (medida en miles de personas) para los siguientes 4 años era de

$$P(t) = -\frac{1}{3}t^3 + 64t + 3{,}000$$

donde t se mide en años y $t = 0$ corresponde al inicio de la campaña. Determine la tasa de cambio de la población a finales de los años 1, 2, 3 y 4. ¿El plan funcionó?

71. **Conservación de las especies** Ciertas especies de tortuga enfrentan la extinción, pues los comerciantes recogen camiones cargados de huevos de tortuga que venden como afrodisíacos. Después de aplicar medidas severas de conservación, se espera que la población de tortugas crezca según la norma

$$N(t) = 2t^3 + 3t^2 - 4t + 1{,}000 \qquad (0 \le t \le 10)$$

donde $N(t)$ denota la población al final del año t. Determine la tasa de crecimiento de la población de tortugas cuando $t = 2$ y $t = 8$. ¿Cuál será la población 10 años después de que las medidas de conservación son aplicadas?

72. Vuelo de un cohete La altitud (en pies) de un cohete en t segundos dentro del vuelo está dada por

$$s = f(t) = -2t^3 + 114t^2 + 480t + 1 \qquad (t \geq 0)$$

a. Determine la expresión v para la velocidad del cohete en cualquier momento t.
b. Calcule la velocidad del cohete cuanto $t = 0, 20, 40$ y 60. Interprete sus resultados.
c. Utilice los resultados de la solución del inciso (b), determine la altitud máxima alcanzada por el cohete.
Sugerencia: En su punto más alto, la velocidad del cohete es cero.

73. Obesidad en Norteamérica El índice de masa corporal (IMC) mide el peso corporal en relación con la altura. Un IMC de 25 a 29.9 se considera sobrepeso, un IMC de 30 o más se considera obesidad y un IMC de 40 o más es obesidad mórbida. El porcentaje de la población norteamericana que es obesa es aproximado por la función

$$P(t) = 0.0004t^3 + 0.0036t^2 + 0.8t + 12 \qquad (0 \leq t \leq 13)$$

donde t se mide en años, con $t = 0$ correspondiente a principios de 1991.
a. ¿Qué porcentaje de la población de Estados Unidos se consideró obeso a principios de 1991? ¿A principios de 2004?
b. ¿Qué tan rápido cambió el porcentaje de la población considerada obesa en Estados Unidos a principios de 1991? ¿A principios de 2004?

(*Nota:* la fórmula para calcular el IMC de una persona está dada en el ejercicio 29, página 834).
Fuente: Centers for Disease Control and Prevention

74. Gasto en cuidado de la salud A pesar de los esfuerzos de contención, el costo del programa Medicare está aumentando. Dos razones fundamentales de ello son una población que envejece y un amplio uso de nuevas tecnologías por parte de los médicos. Con base en datos de la Health Care Financing Administration y el U.S. Census Bureau, el gasto en cuidado de la salud hasta el año 2000 puede aproximarse por la función

$$S(t) = 0.02836t^3 - 0.05167t^2 + 9.60881t + 41.9 \qquad (0 \leq t \leq 35)$$

donde $S(t)$ es el gasto en miles de millones de dólares y t está medido en años, con $t = 0$ correspondiente a principios de 1965.
a. Determine una expresión para la tasa de cambio del gasto en cuidado de la salud en cualquier momento t.
b. ¿Qué tan rápido cambió el gasto en cuidado de la salud a principios de 1980? ¿A principios de 2000?
c. ¿Cuál fue la cantidad del gasto en cuidado de la salud a principios de 1980? ¿A principios de 2000?
Fuente: Health Care Financing Administration and U.S. Census Bureau

75. Envejecimiento de la población La población (en millones) de países desarrollados entre 2005 y 2034 se prevé que sea

$$f(t) = 3.567t + 175.2 \qquad (5 \leq t \leq 35)$$

donde t se mide en años. Por otra parte, la población de los países subdesarrollados y emergentes en el mismo periodo se prevé que sea

$$g(t) = 0.46t^2 + 0.16t + 287.8 \qquad (5 \leq t \leq 35)$$

a. ¿Qué representa la función $D = g + f$?
b. Determine D' y $D'(10)$ e interprete sus resultados.
Fuente: U.S. Census Bureau, United Nations

76. Escasez de enfermeras El número proyectado de enfermeras (en millones) desde 2000 hasta 2015 está dado por

$$N(t) = \begin{cases} 1.9 & \text{si } 0 \leq t < 5 \\ -0.0004t^2 + 0.038t + 1.72 & \text{si } 5 \leq t \leq 15 \end{cases}$$

donde $t = 0$ corresponde a 2000. El número proyectado de puestos de trabajo de enfermería (en millones) para el mismo periodo es

$$J(t) = \begin{cases} -0.0002t^2 + 0.032t + 2 & \text{si } 0 \leq t < 10 \\ -0.0016t^2 + 0.12t + 1.26 & \text{si } 10 \leq t \leq 15 \end{cases}$$

a. Determine la regla para la función $G = J - N$ que proporcione la brecha entre la oferta y la demanda de enfermeras de 2000 a 2015.
b. ¿Qué tan rápido cambia la brecha entre la demanda y la oferta de enfermeras en 2008? ¿En 2012?
Fuente: Department of Health and Human Services

En los ejercicios 77 y 78 determine si el pronunciamiento es verdadero o falso. Si es verdadero, explique por qué lo es. Si es falso proporcione un ejemplo que demuestre por qué lo es.

77. Si f y g son diferenciables, entonces

$$\frac{d}{dx}[2f(x) - 5g(x)] = 2f'(x) - 5g'(x)$$

78. Si $f(x) = \pi^x$, entonces $f'(x) = x\pi^{x-1}$.

79. Compruebe la regla de potencia (regla 2) para el caso especial $n = 3$.
Sugerencia: Calcule el $\lim\limits_{h\to 0}\left[\dfrac{(x+h)^3 - x^3}{h}\right]$.

9.4 Soluciones de los ejercicios de autoevaluación

1. a.
$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{dx}(1.5x^2) + \frac{d}{dx}(2x^{1.5}) \\ &= (1.5)(2x) + (2)(1.5x^{0.5}) \\ &= 3x + 3\sqrt{x} = 3(x + \sqrt{x}) \end{aligned}$$

b.
$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{d}{dx}(2x^{1/2}) + \frac{d}{dx}(3x^{-1/2}) \\ &= (2)\left(\frac{1}{2}x^{-1/2}\right) + (3)\left(-\frac{1}{2}x^{-3/2}\right) \\ &= x^{-1/2} - \frac{3}{2}x^{-3/2} = \frac{1}{2}x^{-3/2}(2x - 3) = \frac{2x-3}{2x^{3/2}} \end{aligned}$$

2. a. $f'(x) = \frac{d}{dx}(2x^3) - \frac{d}{dx}(3x^2) + \frac{d}{dx}(2x) - \frac{d}{dx}(1)$

$= (2)(3x^2) - (3)(2x) + 2$

$= 6x^2 - 6x + 2$

b. La pendiente de la recta tangente a la gráfica de f cuando $x = 2$ está dada por

$$f'(2) = 6(2)^2 - 6(2) + 2 = 14$$

c. La tasa de cambio de f en $x = 2$ está dada por $f'(2)$. Utilice los resultados del inciso (b), observe que la tasa de cambio requerida es de 14 unidades/unidad de cambio en x.

3. a. La tasa a la que el PIB cambia en cualquier momento t $(0 < t < 11)$ está dada por

$$G'(t) = -6t^2 + 90t + 20$$

En particular, las tasas de cambio en el PIB a principios de los años 2005 ($t = 5$), 2007 ($t = 7$) y 2010 ($t = 10$) están dadas por

$$G'(5) = 320 \qquad G'(7) = 356 \qquad G'(10) = 320$$

respectivamente, es decir, \$320 millones por año, \$356 millones por año y \$320 millones por año, respectivamente.

b. La tasa de crecimiento promedio del PIB a principios de 2005 ($t = 5$) a principios de 2010 ($t = 10$) está dada por

$$\frac{G(10) - G(5)}{10 - 5} = \frac{[-2(10)^3 + 45(10)^2 + 20(10) + 6{,}000]}{5} - \frac{[-2(5)^3 + 45(5)^2 + 20(5) + 6{,}000]}{5}$$

$$= \frac{8{,}700 - 6{,}975}{5}$$

o \$345 millones por año.

USO DE LA TECNOLOGÍA

Determinación de la tasa de cambio de una función

La operación de la derivada numérica de la calculadora graficadora se puede utilizar para obtener el valor de la derivada en un valor dado de x. Ya que la derivada de una función $f(x)$ mide la tasa de cambio de la función con respecto a x, la operación de la derivada numérica puede utilizarse para responder preguntas relacionadas a la tasa de cambio de una cantidad y con respecto a otra cantidad x, donde $y = f(x)$, por un valor específico de x.

EJEMPLO 1 Sea $y = 3t^3 + 2\sqrt{t}$.

a. Utilice la operación de la derivada numérica de una calculadora graficadora para determinar qué tan rápido y está cambiando con respecto a t cuando $t = 1$.

b. Verifique el resultados del inciso (a), utilice las reglas de diferenciación de esta sección.

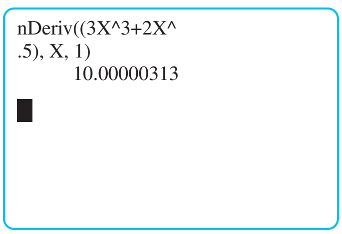


FIGURA T1
La pantalla TI-83/84 de la derivada numérica al calcular $f'(1)$.

Solución

a. Escriba $f(t) = 3t^3 + 2\sqrt{t}$. Utilice la operación de la derivada numérica de una calculadora graficadora, determine la tasa de cambio de y con respecto a t cuando $t = 1$ está dada por $f'(1) = 10$ (figura T1).

b. Aquí, $f(t) = 3t^3 + 2t^{1/2}$ y

$$f'(t) = 9t^2 + 2\left(\frac{1}{2}t^{-1/2}\right) = 9t^2 + \frac{1}{\sqrt{t}}$$

Al utilizar este resultado, observe que $t = 1$, y cambia a la tasa de

$$f'(1) = 9(1^2) + \frac{1}{\sqrt{1}} = 10$$

unidades por cambio de unidad en t, como se obtuvo antes.

EJEMPLO DE APLICACIÓN 2 Ahorro de combustible de los automóviles Con base en los datos obtenidos por el Departamento de Energía de Estados Unidos y Shell Development Company, el ahorro de combustible de un automóvil típico depende de la velocidad con que se conduce y es aproximado por la función

$$\begin{aligned} f(x) = {} & 0.00000310315x^4 - 0.000455174x^3 \\ & + 0.00287869x^2 + 1.25986x \qquad (0 \le x \le 75) \end{aligned}$$

donde x se mide en mph y $f(x)$ en millas por galón (mpg).

a. Utilice la calculadora graficadora para elaborar la función de f sobre el intervalo [0, 75].
b. Determine la tasa de cambio de f cuando $x = 20$ y $x = 50$.
c. Interprete sus resultados.

Fuente: U.S. Department of Energy and the Shell Development Company

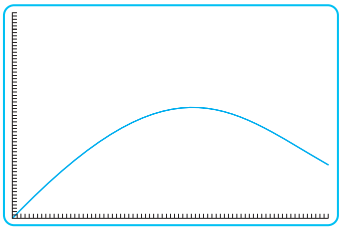


FIGURA **T2**
La gráfica de la función f sobre el intervalo [0, 75].

Solución

a. La gráfica se muestra en la figura T2.
b. Utilice la operación de la derivada numérica de la calculadora graficadora, observe que $f'(20) = .9280996$. La tasa de cambio de f cuando $x = 50$ está dada por $f'(50) = -.3145009995$. (Vea la figura T3a y T3b.)

```
nDeriv(.0000031
0315X^4–.0004551
74X^3+.00287869X
^2+1.25986X, X, 20)

            .9280996
█
```

(a)

```
nDeriv(.0000031
0315X^4–.0004551
74X^3+.00287869X
^2+1.25986X, X, 5
0)
        –.3145009995
```

(b)

FIGURA **T3**
La pantalla de la derivada numérica TI-83/84 al calcular (a) $f'(20)$ y (b) $f'(50)$.

c. Los resultados del inciso (b) indican que cuando un automóvil típico es conducido a 20 mph, su ahorro de combustible aumenta a una tasa de aproximadamente 0.9 mpg por cada 1 mph que incrementa en su velocidad. A una velocidad de 50 mph, su ahorro de combustible disminuye a una tasa de aproximadamente 0.3 mpg por cada 1 mph que incrementa en su velocidad. ■

EJERCICIOS CON TECNOLOGÍA

En los ejercicios 1-6, utilice la operación de la derivada numérica para determinar la tasa de cambio de $f(x)$ en el valor dado de x. Proporcione su respuesta adecuada a cuatro posiciones decimales.

1. $f(x) = 4x^5 - 3x^3 + 2x^2 + 1;\ x = 0.5$

2. $f(x) = -x^5 + 4x^2 + 3;\ x = 0.4$

3. $f(x) = x - 2\sqrt{x};\ x = 3$

4. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x} - 1}{x};\ x = 2$

5. $f(x) = x^{1/2} - x^{1/3};\ x = 1.2$

6. $f(x) = 2x^{5/4} + x;\ x = 2$

7. Monóxido de carbono en la atmósfera La concentración promedio de monóxido de carbono en la atmósfera mundial proyectada se aproxima por la función

$$\begin{aligned} f(t) = {} & 0.881443t^4 - 1.45533t^3 + 0.695876t^2 \\ & + 2.87801t + 293 \qquad (0 \le t \le 4) \end{aligned}$$

donde t se mide en intervalos de 40 años con $t = 0$, correspondiente a principios de 1860, y $f(t)$ está medido en partes por millón por volumen.
a. Elabore la gráfica de f en la ventana de visualización $[0, 4] \times [280, 400]$.
b. Utilice la herramienta de graficación para estimar la rapidez en la que ha cambiado la concentración promedio proyectada de monóxido de carbono a nivel mundial a principios de 1990 ($t = 1$) y a principios de 2000 ($t = 3.5$).

Fuente: Meadows *et al.*, "Beyond the Limits"

(*continúa*)

8. **Propagación del VIH** El número estimado de niños que contraen el VIH a través del contacto madre a hijo en todo el mundo está dada por

$$f(t) = -0.2083t^3 + 3.0357t^2 + 44.0476t + 200.2857 \qquad (0 \leq t \leq 12)$$

donde $f(t)$ se mide en miles y t en años, con $t = 0$ corresponde a 1990.

a. Elabore la gráfica de f en la ventana de visualización $[0, 12] \times [0, 800]$.

b. ¿Qué tan rápido creció el número estimado de niños infectados con el virus VIH a través del contacto madre a hijo a nivel mundial a principios de 2000?

Fuente: Naciones Unidas

9. **Modelado con datos** Un fondo de cobertura es un consorcio de dinero administrado profesionalmente. Los activos (en miles de millones de dólares) de los fondos de cobertura desde principios de 1999 ($t = 0$) hasta principios de 2004 están dados en la siguiente gráfica:

Año	1999	2000	2001	2002	2003	2004
Activos ($ mil millones)	472	517	594	650	817	950

a. Utilice la **CubicReg** para determinar una función polinómica de tercer grado por los datos, $t = 0$ corresponde a principios de 1999.

b. Elabore la gráfica de la función determinada en el inciso (a).

c. Utilice la capacidad de la derivada numérica de su herramienta de graficación para determinar la tasa a la que los fondos de cobertura se incrementaron a principios de 2000 y de 2003.

Fuente: Hennessee Group; Institutional Investor

10. **Modelado con datos** El número de personas (en millones) inscritas en HMO (Organización para el Cuidado de la Salud) desde 1994 hasta 2002 está dada por la siguiente tabla:

Año	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002
Personas	45.4	50.6	58.7	67.0	76.4	81.3	80.9	80.0	74.2

a. Utilice la **QuartReg** para determinar el modelo de regresión de un polinómico de cuarto grado para estos datos $t = 0$ corresponde a 1994.

b. Utilice el modelo para estimar el número de personas inscritas en HMO en 2000. ¿Cómo se compara este número con el número actual?

c. ¿Qué tan rápido fue el cambio del número de personas que reciben su atención en una HMO a principios de 2001?

Fuente: Group Health Association of America

9.5 Reglas del producto y del cociente; derivadas de orden superior

En esta sección se estudian dos o más reglas de diferenciación: la **regla del producto** y la **regla del cociente**.

La regla del producto

La derivada del producto de dos funciones diferenciables está dada por la siguiente regla:

Regla 5: La regla del producto

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f(x)g'(x) + g(x)f'(x)$$

La derivada del producto de dos funciones es la primera función por la derivada de la segunda más la segunda función por la derivada de la primera.

La regla del producto se puede extender hasta el caso que involucra el producto de cualquier número finito de funciones (vea el ejercicio 79, p. 614). La regla del producto se muestra al final de esta sección.

La derivada del producto de dos funciones *no* está dada por el producto de las derivadas de las funciones; es decir, en general

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] \neq f'(x)g'(x)$$

VIDEO

EJEMPLO 1 Determine la derivada de la función

$$f(x) = (2x^2 - 1)(x^3 + 3)$$

Solución Por la regla del producto,

$$\begin{aligned} f'(x) &= (2x^2 - 1)\frac{d}{dx}(x^3 + 3) + (x^3 + 3)\frac{d}{dx}(2x^2 - 1) \\ &= (2x^2 - 1)(3x^2) + (x^3 + 3)(4x) && \text{Vea la página 10.} \\ &= 6x^4 - 3x^2 + 4x^4 + 12x \\ &= 10x^4 - 3x^2 + 12x && \text{Combine los términos semejantes.} \\ &= x(10x^3 - 3x + 12) && \text{Factorice } x. \end{aligned}$$

■

EJEMPLO 2 Diferencie (es decir, determine la derivada de) la función

$$f(x) = x^3(\sqrt{x} + 1)$$

Solución Primero, expresamos la función en forma exponencial, obteniendo

$$f(x) = x^3(x^{1/2} + 1)$$

Por la regla del producto,

$$\begin{aligned} f'(x) &= x^3\frac{d}{dx}(x^{1/2} + 1) + (x^{1/2} + 1)\frac{d}{dx}x^3 \\ &= x^3\left(\frac{1}{2}x^{-1/2}\right) + (x^{1/2} + 1)(3x^2) \\ &= \frac{1}{2}x^{5/2} + 3x^{5/2} + 3x^2 \\ &= \frac{7}{2}x^{5/2} + 3x^2 \end{aligned}$$

■

Nota El problema se puede resolver desarrollando primero el producto antes de diferenciar f. Los ejemplos por lo que esto no es posible serán considerados en la sección 9.6 donde el valor real de la regla del producto será apreciado. ■

La regla del cociente

La derivada del cociente de dos funciones diferenciables está dada por la siguiente regla:

Regla 6: La regla del cociente

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2} \qquad (g(x) \neq 0)$$

Como una ayuda para recordar esta expresión, observe que ésta tiene la siguiente forma:

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{(\text{Denominador})\begin{pmatrix}\text{Derivada del}\\ \text{numerador}\end{pmatrix} - (\text{Numerador})\begin{pmatrix}\text{Derivada del}\\ \text{denominador}\end{pmatrix}}{(\text{Denominador al cuadrado})}$$

Para probar la regla del cociente, vea el ejercicio 80, página 614.

La derivada de un cociente *no* es igual al cociente de las derivadas, es decir

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] \neq \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Por ejemplo, si $f(x) = x^3$ y $g(x) = x^2$, entonces

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{d}{dx}\left(\frac{x^3}{x^2}\right) = \frac{d}{dx}(x) = 1$$

que *no* es igual a

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{\frac{d}{dx}(x^3)}{\frac{d}{dx}(x^2)} = \frac{3x^2}{2x} = \frac{3}{2}x$$

EJEMPLO 3 Determine $f'(x)$ si $f(x) = \dfrac{x}{2x - 4}$.

Solución Al utilizar la regla del cociente, obtenemos

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(2x-4)\frac{d}{dx}(x) - x\frac{d}{dx}(2x-4)}{(2x-4)^2} \\ &= \frac{(2x-4)(1) - x(2)}{(2x-4)^2} \\ &= \frac{2x - 4 - 2x}{(2x-4)^2} = -\frac{4}{(2x-4)^2} \end{aligned}$$

EJEMPLO 4 Determine $f'(x)$ si $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$.

Solución Por la regla del cociente.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(x^2-1)\frac{d}{dx}(x^2+1) - (x^2+1)\frac{d}{dx}(x^2-1)}{(x^2-1)^2} \\ &= \frac{(x^2-1)(2x) - (x^2+1)(2x)}{(x^2-1)^2} \\ &= \frac{2x^3 - 2x - 2x^3 - 2x}{(x^2-1)^2} \\ &= -\frac{4x}{(x^2-1)^2} \end{aligned}$$

EJEMPLO 5 Determine $h'(x)$ si $h(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x^2 + 1}$.

Solución Escriba de nuevo $h(x)$ en la forma $h(x) = \dfrac{x^{1/2}}{x^2 + 1}$. Por la regla del cociente, determinamos

$$\begin{aligned}
h'(x) &= \frac{(x^2 + 1)\dfrac{d}{dx}(x^{1/2}) - x^{1/2}\dfrac{d}{dx}(x^2 + 1)}{(x^2 + 1)^2} \\
&= \frac{(x^2 + 1)(\frac{1}{2}x^{-1/2}) - x^{1/2}(2x)}{(x^2 + 1)^2} \\
&= \frac{\frac{1}{2}x^{-1/2}(x^2 + 1 - 4x^2)}{(x^2 + 1)^2} \qquad \text{Factorice } \tfrac{1}{2}x^{-1/2} \text{ desde el numerador.} \\
&= \frac{1 - 3x^2}{2\sqrt{x}(x^2 + 1)^2}
\end{aligned}$$

■

EJEMPLO DE APLICACIÓN 6 Tasa de cambio de las ventas de DVD Las ventas (en millones de dólares) de un disco DVD de una película de éxito en t años desde la fecha de lanzamiento está dada por

$$S(t) = \frac{5t}{t^2 + 1}$$

a. Determine la tasa a la que las ventas cambian en el momento t.
b. ¿Qué tan rápido cambian las ventas en el momento que los DVD fueron lanzados ($t = 0$)? ¿Dos años desde la fecha de lanzamiento?

Solución

a. La tasa a la que las ventas cambian en el momento t está dada por $S'(t)$. Al utilizar la regla del cociente, obtenemos

$$\begin{aligned}
S'(t) &= \frac{d}{dt}\left[\frac{5t}{t^2 + 1}\right] = 5\frac{d}{dt}\left[\frac{t}{t^2 + 1}\right] \\
&= 5\left[\frac{(t^2 + 1)(1) - t(2t)}{(t^2 + 1)^2}\right] \qquad \text{Vea la página 22.} \\
&= 5\left[\frac{t^2 + 1 - 2t^2}{(t^2 + 1)^2}\right] = \frac{5\,(1 - t^2)}{(t^2 + 1)^2}
\end{aligned}$$

b. La tasa a la que las ventas cambian en el momento del lanzamiento de los DVD está dada por

$$S'(0) = \frac{5(1 - 0)}{(0 + 1)^2} = 5$$

Es decir, han aumentado a una tasa de $5 millones por año.

A dos años de la fecha de lanzamiento, las ventas cambian a la tasa de

$$S'(2) = \frac{5(1 - 4)}{(4 + 1)^2} = -\frac{3}{5} = -0.6$$

Es decir, son decrecientes a una tasa de $600,000 por año.

La gráfica de la función S se muestra en la figura 41.

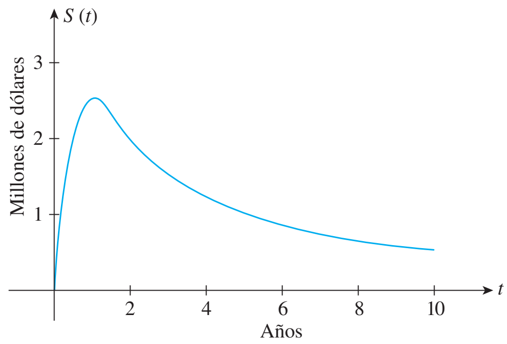


FIGURA 41
Después del incremento espectacular, las ventas comienzan a disminuir.

Exploración con TECNOLOGÍA

En referencia al ejemplo 6.

1. Utilice una calculadora graficadora para elaborar la gráfica de la función S, utilizando la ventana de visualización $[0, 10] \times [0, 3]$.
2. Utilice **TRACE** y **ZOOM** para determinar las coordenadas del punto más alto sobre la gráfica de S en el intervalo $[0, 10]$. Interprete sus resultados.

Explore y analice

Suponga que los ingresos de una empresa están dados por $R(x) = xp(x)$, donde x es el número de unidades del producto vendido a un precio unitario de $p(x)$ dólares.

1. Calcule $R'(x)$ y explique, con sus palabras, la relación entre $R'(x)$ y $p(x)$ y/o su derivada.
2. ¿Qué puede decir acerca de $R'(x)$ si $p(x)$ es una constante? ¿Es lo que esperaba?

VIDEO

EJEMPLO DE APLICACIÓN 7 Tasa de restauración del oxígeno en un estanque Cuando los desechos orgánicos son arrojados dentro de un estanque, el proceso de oxidación da lugar a la reducción del contenido de oxígeno en el estanque. Sin embargo, con el tiempo, la naturaleza restaurará el contenido de oxígeno a su nivel natural. Suponga que el contenido de oxígeno en t días después de que los desechos orgánicos fueron arrojados al estanque está dada por

$$f(t) = 100\left[\frac{t^2 + 10t + 100}{t^2 + 20t + 100}\right] \qquad (0 < t < \infty)$$

por ciento de su nivel normal.

a. Determine una expresión general que dé la tasa de cambio del nivel de oxígeno en el estanque en cualquier momento t.
b. ¿Qué tan rápido cambia el contenido de oxígeno dentro del estanque 1, 10 y 20 días después de que fueron arrojados los desechos orgánicos?

Solución

a. La tasa de cambio del nivel de oxígeno en el estanque en cualquier momento t está dado por la derivada de la función f. Por tanto, la expresión requerida es

$$f'(t) = 100\,\frac{d}{dt}\left[\frac{t^2 + 10t + 100}{t^2 + 20t + 100}\right]$$

$$= 100\left[\frac{(t^2 + 20t + 100)\frac{d}{dt}(t^2 + 10t + 100) - (t^2 + 10t + 100)\frac{d}{dt}(t^2 + 20t + 100)}{(t^2 + 20t + 100)^2}\right]$$

$$= 100\left[\frac{(t^2 + 20t + 100)(2t + 10) - (t^2 + 10t + 100)(2t + 20)}{(t^2 + 20t + 100)^2}\right]$$

Vea la página 22.

$$= 100\left[\frac{2t^3 + 10t^2 + 40t^2 + 200t + 200t + 1{,}000 - 2t^3 - 20t^2 - 20t^2 - 200t - 200t - 2{,}000}{(t^2 + 20t + 100)^2}\right]$$

$$= 100\left[\frac{10t^2 - 1{,}000}{(t^2 + 20t + 100)^2}\right]$$

Combine los términos semejantes en el numerador.

b. La tasa a la que el contenido de oxígeno en el estanque cambia 1 día después de que los residuos orgánicos fueron arrojados está dada por

$$f'(1) = 100\left[\frac{10 - 1{,}000}{(1 + 20 + 100)^2}\right] \approx -6.76$$

Es decir, ésta es arrojada a una tasa de 6.8% por día. Después de 10 días, la tasa es

$$f'(10) = 100\left[\frac{10(10)^2 - 1{,}000}{(10^2 + 20(10) + 100)^2}\right] = 0$$

Es decir, ésta no aumenta ni disminuye. Después de 20 días, la tasa es

$$f'(20) = 100\left[\frac{10(20)^2 - 1{,}000}{(20^2 + 20(20) + 100)^2}\right] \approx 0.37$$

Es decir, el contenido de oxígeno se incrementa a una tasa de 0.37% por día, y el proceso de restauración ha iniciado. ■

Derivadas de orden superior

La derivada f' de una función f es también una función. Como tal, la posibilidad de diferenciación de f' puede ser considerada. Por tanto, la función f' tiene una derivada f'' en un punto x en el dominio de f' si el límite del cociente

$$\frac{f'(x + h) - f'(x)}{h}$$

existe conforme h se aproxima a cero. En otras palabras, ésta es la derivada de la primera derivada.

A la función f'' obtenida de esta forma se le llama **segunda derivada de** la función ***f***, como la derivada f' de f a menudo se le da el nombre de la primera derivada de f. Continuar de esta manera se lleva a considerar la tercera, la cuarta y las derivadas de orden superior de f siempre que existan. Las notaciones para las primeras, segundas, terceras y, en general, *enésimas* derivadas de una función f en un punto x son

$$f'(x), f''(x), f'''(x), \ldots, f^{(n)}(x)$$

o

$$D^1f(x), D^2f(x), D^3f(x), \ldots, D^nf(x)$$

Si f es escrita de la forma $y = f(x)$, entonces las notaciones para estas derivadas son

$$y', y'', y''', \ldots, y^{(n)}$$

$$\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}, \ldots, \frac{d^ny}{dx^n}$$

o

$$D^1y,\ D^2y,\ D^3y,\ \ldots,\ D^ny$$

respectivamente.

EJEMPLO 8 Determine las derivadas de todos los órdenes de la función polinómica

$$f(x) = x^5 - 3x^4 + 4x^3 - 2x^2 + x - 8$$

Solución Tenemos

$$f'(x) = 5x^4 - 12x^3 + 12x^2 - 4x + 1$$

$$f''(x) = \frac{d}{dx}f'(x) = 20x^3 - 36x^2 + 24x - 4$$

$$f'''(x) = \frac{d}{dx}f''(x) = 60x^2 - 72x + 24$$

$$f^{(4)}(x) = \frac{d}{dx}f'''(x) = 120x - 72$$

$$f^{(5)}(x) = \frac{d}{dx}f^{(4)}(x) = 120$$

y, en general,

$$f^{(n)}(x) = 0 \qquad (\text{para } n > 5)$$

EJEMPLO 9 Determine la tercera derivada de la función f definida por $y = x^{2/3}$. ¿Cuál es su dominio?

Solución Tenemos

$$y' = \frac{2}{3}x^{-1/3}$$

$$y'' = \left(\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{1}{3}\right)x^{-4/3} = -\frac{2}{9}x^{-4/3}$$

así que la derivada requerida es

$$y''' = \left(-\frac{2}{9}\right)\left(-\frac{4}{3}\right)x^{-7/3} = \frac{8}{27}x^{-7/3} = \frac{8}{27x^{7/3}}$$

El dominio común de las funciones f', f'', f''' es el conjunto de todos los números reales excepto $x = 0$. El dominio de $y = x^{2/3}$ es el conjunto de todos los números reales. La gráfica de la función $y = x^{2/3}$ aparece en la figura 42.

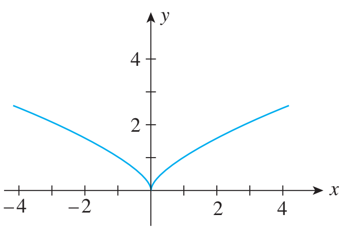


FIGURA 42
La gráfica de la función $y = x^{2/3}$.

Nota Siempre simplifique una expresión antes de diferenciarla para obtener la derivada del siguiente orden.

Como la derivada de una función f en un punto x mide la tasa de cambio de la función f en ese punto, la segunda derivada de f (la derivada de f') mide la tasa de cambio de la derivada f' de la función f. La tercera derivada de la función f, f''', mide la tasa de cambio de f'', y así sucesivamente.

En el capítulo 10 se estudian las aplicaciones que involucran la interpretación geométrica de la segunda derivada de una función. El siguiente ejemplo da la interpretación de la segunda derivada en un papel familiar.

EJEMPLO DE APLICACIÓN 10 Aceleración del maglev (tren de levitación magnética) En referencia al ejemplo de las páginas 534-537, la distancia s (en pies) recorrida por el maglev moviéndose a lo largo de una vía recta t segundos después de iniciar desde el reposo está dada por la función $s = 4t^2$ $(0 \leq t \leq 10)$. ¿Cuál es la aceleración del maglev en cualquier momento t?

Solución La velocidad del maglev t segundos desde el reposo está dada por

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt}(4t^2) = 8t$$

La aceleración del maglev en t segundos desde el reposo está dada por la tasa de cambio de la velocidad de t; es decir,

$$a = \frac{d}{dt}v = \frac{d}{dt}\left(\frac{ds}{dt}\right) = \frac{d^2s}{dt^2} = \frac{d}{dt}(8t) = 8$$

u 8 pies por segundo por segundo, abreviado normalmente 8 pies/seg^2. ■

EJEMPLO DE APLICACIÓN 11 La aceleración y la velocidad de un objeto que cae Una pelota es lanzada al aire desde el techo de un edificio. La altura de la pelota que se mide desde el suelo está dada por

$$s = -16t^2 + 24t + 120$$

donde s es medida en pies y t en segundos. Determine la velocidad y la aceleración después de 3 segundos de que la pelota es lanzada al aire.

Solución La velocidad v y la aceleración a de la pelota en cualquier momento t está dada por

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt}(-16t^2 + 24t + 120) = -32t + 24$$

y

$$a = \frac{d^2s}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{ds}{dt}\right) = \frac{d}{dt}(-32t + 24) = -32$$

Por tanto, la velocidad de la pelota después de 3 segundos de que es lanzada al aire es

$$v = -32(3) + 24 = -72$$

Es decir, la pelota cae a una velocidad de 72 pies/seg. La aceleración de la pelota en caída es de 32 pies/seg^2 en cualquier momento durante el movimiento. ■

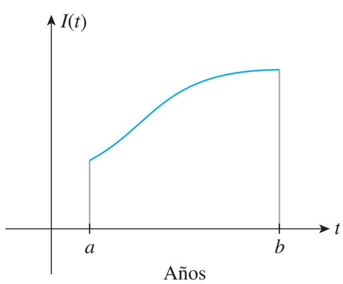


FIGURA 43
El IPC de cierta economía desde el año a hasta el año b está dada por $I(t)$.

Otra interpretación de la segunda derivada de una función, esta vez desde el campo de economía, es la siguiente. Suponga que el índice de precios al consumidor (IPC) de una economía entre los años a y b está descrita por la función $I(t)$ $(a \leq t \leq b)$ (figura 43). Entonces la primera derivada de I en $t = c$, $I'(c)$, donde $a < c < b$, da la tasa de cambio de I en c. La cantidad

$$\frac{I'(c)}{I(c)}$$

llamada la *tasa de cambio relativa de* $I(t)$ con respecto a t en $t = c$, mide la *tasa de inflación* de la economía en $t = c$. La segunda derivada de I en $t = c$, $I''(c)$, da la tasa de cambio de I' en $t = c$. Ahora es posible para $I'(t)$ ser positiva e $I''(t)$ ser negativa en $t = c$ (vea el ejemplo 12). Esto indica que en $t = c$ la economía está experimentando inflación (el IPC es creciente), pero la tasa a la que la inflación crece, de hecho, disminuye. Ésta es precisamente la situación descrita por un economista o por un político cuando afirma que "la inflación se está desacelerando". ¡No podemos saltar a la conclusión de la cita mencionada de que el precio de los bienes y servicios está a punto de caer!

EJEMPLO DE APLICACIÓN 12 Tasa de inflación de una economía

La función

$$I(t) = -0.2t^3 + 3t^2 + 100 \qquad (0 \le t \le 9)$$

da el IPC de una economía, donde $t = 0$ corresponde a 2002.

a. Determine la tasa de inflación a principios de 2008 ($t = 6$).
b. Demuestre que la inflación fue moderada en ese tiempo.

Solución

a. Determinamos $I'(t) = -0.6t^2 + 6t$. Después, calculamos.

$$I'(6) = -0.6(6)^2 + 6(6) = 14.4 \quad \text{y} \quad I(6) = -0.2(6)^3 + 3(6)^2 + 100 = 164.8$$

de la que observamos que la tasa de inflación es

$$\frac{I'(6)}{I(6)} = \frac{14.4}{164.8} \approx 0.0874$$

o aproximadamente 8.7%.

b. Determinamos

$$I''(t) = \frac{d}{dt}(-0.6t^2 + 6t) = -1.2t + 6$$

Puesto que

$$I''(6) = -1.2(6) + 6 = -1.2$$

observamos que I' es de hecho decreciente en $t = 6$ y concluimos que la inflación fue moderada en ese tiempo (figura 44). ■

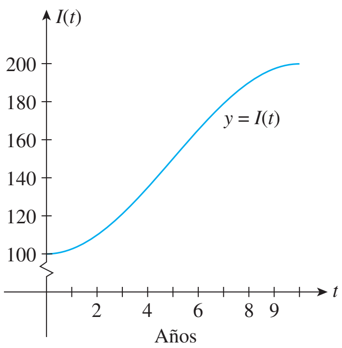


FIGURA **44**
El IPC de una economía está dado, por $I(t)$.

Verificación de la regla del producto

Ahora verificaremos la regla del producto. Si $p(x) = f(x)g(x)$, entonces

$$p'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{p(x+h) - p(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h}$$

Al sumar $-f(x+h)g(x) + f(x+h)g(x)$ (¡que es cero!) al numerador y al factorizar, tenemos

$$\begin{aligned}
p'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)\,[g(x+h) - g(x)] + g(x)\,[f(x+h) - f(x)]}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \left\{ f(x+h)\left[\frac{g(x+h) - g(x)}{h}\right] + g(x)\left[\frac{f(x+h) - f(x)}{h}\right] \right\} \\
&= \lim_{h\to 0} f(x+h)\left[\frac{g(x+h) - g(x)}{h}\right] + \lim_{h\to 0} g(x)\left[\frac{f(x+h) - f(x)}{h}\right] && \text{Por la propiedad 3 de límites} \\
&= \lim_{h\to 0} f(x+h) \cdot \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\
&\quad + \lim_{h\to 0} g(x) \cdot \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} && \text{Por la propiedad 4 de límites} \\
&= f(x)g'(x) + g(x)f'(x)
\end{aligned}$$

Observe que en la segunda desde el último eslabón en la cadena de igualdades, se ha utilizado el hecho de que el $\lim_{h\to 0} f(x+h) = f(x)$ debido a que f es continua en x.

9.5 Ejercicios de autoevaluación

1. Determine la derivada de $f(x) = \dfrac{2x + 1}{x^2 - 1}$.
2. Determine la derivada de
$$f(x) = 2x^5 - 3x^3 + x^2 - 6x + 10$$
3. Las ventas totales de Productos de Seguridad en sus primeros 2 años de operación están dados por
$$S = f(t) = \frac{0.3t^3}{1 + 0.4t^2} \qquad (0 \leq t \leq 2)$$
donde S se mide en millones de dólares y $t = 0$ corresponde a la fecha en la que Productos de Seguridad comenzó a operar. ¿Qué tan rápido se incrementaron las ventas al inicio del segundo año de operación de la empresa?

Las soluciones a los ejercicios de autoevaluación 9.5 pueden encontrarse en la página 614.

9.5 Preguntas de concepto

1. Exprese con sus palabras la regla de la diferenciación.
   a. Regla del producto **b.** Regla del cociente
2. Si $f(1) = 3$, $g(1) = 2$, $f'(1) = -1$ y $g'(1) = 4$, determine
   a. $h'(1)$ si $h(x) = f(x)g(x)$ **b.** $F'(1)$ si $F(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$
3. **a.** ¿Cuál es la segunda derivada de una función f?
   b. ¿Cómo se determina la segunda derivada de una función f, suponiendo que ésta existe?
4. Si $s = f(t)$ dé la posición de un objeto moviéndose sobre una coordenada, ¿qué mide $f'(t)$ y $f''(t)$?

9.5 Ejercicios

En los ejercicios 1-30, determine la derivada de cada función.

1. $f(x) = 2x(x^2 + 1)$
2. $f(x) = 3x^2(x - 1)$
3. $f(t) = (t - 1)(2t + 1)$
4. $f(x) = (2x + 3)(3x - 4)$
5. $f(x) = (3x + 1)(x^2 - 2)$
6. $f(x) = (x + 1)(2x^2 - 3x + 1)$
7. $f(x) = (x^3 - 1)(x + 1)$
8. $f(x) = (x^3 - 12x)(3x^2 + 2x)$
9. $f(w) = (w^3 - w^2 + w - 1)(w^2 + 2)$
10. $f(x) = \dfrac{1}{5}x^5 + (x^2 + 1)(x^2 - x - 1) + 28$
11. $f(x) = (5x^2 + 1)(2\sqrt{x} - 1)$
12. $f(t) = (1 + \sqrt{t})(2t^2 - 3)$
13. $f(x) = (x^2 - 5x + 2)\left(x - \dfrac{2}{x}\right)$
14. $f(x) = (x^3 + 2x + 1)\left(2 + \dfrac{1}{x^2}\right)$
15. $f(x) = \dfrac{1}{x - 2}$
16. $g(x) = \dfrac{3}{2x + 4}$
17. $f(x) = \dfrac{x - 1}{2x + 1}$
18. $f(t) = \dfrac{1 - 2t}{1 + 3t}$
19. $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 1}$
20. $f(u) = \dfrac{u}{u^2 + 1}$
21. $f(s) = \dfrac{s^2 - 4}{s + 1}$
22. $f(x) = \dfrac{x^3 - 2}{x^2 + 1}$
23. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x} + 1}{x^2 + 1}$
24. $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{\sqrt{x}}$
25. $f(x) = \dfrac{x^2 + 2}{x^2 + x + 1}$
26. $f(x) = \dfrac{x + 1}{2x^2 + 2x + 3}$
27. $f(x) = \dfrac{(x + 1)(x^2 + 1)}{x - 2}$
28. $f(x) = (3x^2 - 1)\left(x^2 - \dfrac{1}{x}\right)$
29. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 4} - \dfrac{x - 1}{x^2 + 4}$
30. $f(x) = \dfrac{x + \sqrt{3x}}{3x - 1}$

En los ejercicios 31-34, suponga que *f* y *g* son funciones que son diferenciables en $x = 1$ y que $f(1) = 2$, $f'(1) = -1$, $g(1) = -2$ y $g'(1) = 3$. Determine el valor de $h'(1)$.

31. $h(x) = f(x)g(x)$

32. $h(x) = (x^2 + 1)g(x)$

33. $h(x) = \dfrac{xf(x)}{x + g(x)}$

34. $h(x) = \dfrac{f(x)g(x)}{f(x) - g(x)}$

En los ejercicios 35-38, determine la derivada de cada una de las funciones dadas y evalúe $f'(x)$ en el valor dado de x.

35. $f(x) = (2x - 1)(x^2 + 3); x = 1$

36. $f(x) = \dfrac{2x + 1}{2x - 1}; x = 2$

37. $f(x) = \dfrac{x}{x^4 - 2x^2 - 1}; x = -1$

38. $f(x) = (\sqrt{x} + 2x)(x^{3/2} - x); x = 4$

En los ejercicios 39-42, determine la pendiente y una ecuación de la recta tangente hacia la gráfica de la función *f* en el punto específico.

39. $f(x) = (x^3 + 1)(x^2 - 2); (2, 18)$

40. $f(x) = \dfrac{x^2}{x + 1}; \left(2, \dfrac{4}{3}\right)$

41. $f(x) = \dfrac{x + 1}{x^2 + 1}; (1, 1)$

42. $f(x) = \dfrac{1 + 2x^{1/2}}{1 + x^{3/2}}; \left(4, \dfrac{5}{9}\right)$

En los ejercicios 43-48, determine la primera y segunda derivadas de la función dada.

43. $f(x) = 4x^2 - 2x + 1$

44. $f(x) = -0.2x^2 + 0.3x + 4$

45. $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1$

46. $g(x) = -3x^3 + 24x^2 + 6x - 64$

47. $h(t) = t^4 - 2t^3 + 6t^2 - 3t + 10$

48. $f(x) = x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x - 1$

En los ejercicios 49-52, determine la tercera derivada de la función dada.

49. $f(x) = 3x^4 - 4x^3$

50. $f(x) = 3x^5 - 6x^4 + 2x^2 - 8x + 12$

51. $f(x) = \dfrac{1}{x}$

52. $f(x) = \dfrac{2}{x^2}$

53. Determine una ecuación de la recta tangente hacia la gráfica de la función $f(x) = (x^3 + 1)(3x^2 - 4x + 2)$ en el punto (1, 2).

54. Determine una ecuación de la recta tangente hacia la gráfica de la función $f(x) = \dfrac{3x}{x^2 - 2}$ en el punto (2, 3).

55. Sea $f(x) = (x^2 + 1)(2 - x)$. Determine el (los) punto(s) sobre la gráfica de *f* donde la recta tangente es horizontal.

56. Sea $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 1}$. Determine el (los) punto(s) sobre la gráfica de *f* donde la recta tangente es horizontal.

57. Determine el (los) sobre la gráfica de la función $f(x) = (x^2 + 6)(x - 5)$ donde la pendiente de la recta tangente es igual a -2.

58. Determine el (los) punto(s) sobre la gráfica de la función $f(x) = \dfrac{x + 1}{x - 1}$ donde la pendiente de la recta tangente es igual a $-\frac{1}{2}$.

59. CONCENTRACIÓN DE UN FÁRMACO EN EL TORRENTE SANGUÍNEO La concentración de cierto fármaco en el torrente sanguíneo de un paciente en *t* horas después de la inyección está dada por

$$C(t) = \frac{0.2t}{t^2 + 1}$$

a. Determine la tasa a la que la concentración del fármaco cambia con respecto al tiempo.

b. ¿Qué tan rápido cambia la concentración $\frac{1}{2}$ hora, 1 hora, y 2 horas después de la inyección?

60. COSTO DE LA ELIMINACIÓN DE RESIDUOS TÓXICOS Recientemente se encontró que un pozo principal de una ciudad estaba contaminado con tricloroetileno, un compuesto químico cancerígeno, como resultado de un vertedero abandonado que filtraba productos químicos dentro el agua. Se presentó una propuesta a los miembros del consejo de la ciudad indicando el costo, medido en millones de dólares, para eliminar x% de los contaminantes tóxicos esta dada por

$$C(x) = \frac{0.5x}{100 - x}$$

Determine $C'(80)$, $C'(90)$, $C'(95)$ y $C'(99)$. ¿Qué le dicen sus resultados acerca del costo de eliminar *todos* los contaminantes?

61. DOSIS DE FÁRMACOS Thomas Young ha sugerido la siguiente regla para calcular la dosis de medicina para niños de 1 a 12 años de edad. Si *a* denota la dosis de adultos (en miligramos) y si *t* denota la edad del niño (en años), entonces la dosis para el niño está dada por

$$D(t) = \frac{at}{t + 12}$$

Suponga que la dosis para adultos de una sustancia es de 500 mg. Determine la expresión que dé la tasa de cambio de la dosis de un niño con respecto a su edad. ¿Cuál es la tasa de cambio en la dosis para un niño en relación con su edad para un niño de 6 años? ¿Un niño de 10 años de edad?

62. EFECTO DE UN BACTERICIDA El número de bacterias $N(t)$ en cierto cultivo *t* minutos después de que es introducido un bactericida experimental obedece a la regla

$$N(t) = \frac{10{,}000}{1 + t^2} + 2{,}000$$

Determine la tasa de cambio del número de bacterias en el cultivo 1 minuto y 2 minutos después de que el bactericida fue introducido. ¿Cuál es la población de las bacterias en cultivo 1 minuto y 2 minutos después de haber introducido el bactericida?

63. Funciones de demanda La función de la demanda de relojes de pulsera Sicard está dada por

$$d(x) = \frac{50}{0.01x^2 + 1} \qquad (0 \le x \le 20)$$

donde x (se mide en unidades de millar) es la cantidad demandada por semana y $d(x)$ es el precio unitario en dólares.

a. Determine $d'(x)$.
b. Determine $d'(5)$, $d'(10)$ y $d'(15)$ e interprete sus resultados.

64. Curvas de aprendizaje Por experiencia, Emory Secretarial School sabe que el estudiante promedio que toma Mecanografía avanzada progresará conforme a la regla

$$N(t) = \frac{60t + 180}{t + 6} \qquad (t \ge 0)$$

donde $N(t)$ mide el número de palabras por minuto que el estudiante puede escribir después de t semanas en el curso.

a. Determine una expresión para $N'(t)$.
b. Calcule $N'(t)$ para $t = 1, 3, 4$ y 7 e interprete sus resultados.
c. Elabore la gráfica de la función N. ¿Confirma sus resultados obtenidos en el inciso (b)?
d. ¿Cuál será la velocidad promedio de mecanografiado de un estudiante al final del curso de 12 semanas?

65. Ingresos en taquilla Los ingresos totales de taquilla en todo el mundo para una película de larga duración son aproximados por la función

$$T(x) = \frac{120x^2}{x^2 + 4}$$

donde $T(x)$ se mide en millones de dólares y x es el número de años desde el lanzamiento de la película. ¿A qué velocidad cambian los ingresos totales 1 año, 3 años y 5 años después de su lanzamiento?

66. Niveles de formaldehído Un estudio sobre los niveles de formaldehído en 900 hogares indica que las emisiones de diversas sustancias químicas pueden disminuir con el tiempo. El nivel de formaldehído (partes por millón) en un hogar promedio en un estudio está dada por

$$f(t) = \frac{0.055t + 0.26}{t + 2} \qquad (0 \le t \le 12)$$

donde t es la edad de la casa en años. ¿Qué tan rápido disminuye la tasa promedio del nivel de formaldehído en una casa cuando ésta es nueva? ¿A principios del cuarto año?

Fuente: Bonneville Power Administration

67. Crecimiento de la población Una gran empresa construye un complejo de casas, oficinas, tiendas, escuelas e iglesias en 4,325 acres dentro de la comunidad rural de Glen Cove. Como resultado de este desarrollo, los encargados de la planeación han estimado que la población de Glen Cove (en miles) t años a partir de ahora se dará por

$$P(t) = \frac{25t^2 + 125t + 200}{t^2 + 5t + 40}$$

a. Determine la velocidad en la que la población de Glen Cove cambia con respecto al tiempo.
b. ¿Cuál será la población después de 10 años? ¿A qué tasa aumenta la población cuando $t = 10$?

68. Aceleración de un automóvil La distancia en s (en pies) recorrida por un automóvil después de t segundos partiendo del reposo está dada por

$$s = -t^3 + 8t^2 + 20t \qquad (0 \le t \le 6)$$

Determine una expresión general para la aceleración del automóvil en cualquier momento $t(0 \le t \le 6)$. Demuestre que el automóvil desacelera $2\frac{2}{3}$ segundos después de iniciar desde el reposo.

69. Tasas de criminalidad El número de delitos graves cometidos en Bronxville entre 2000 y 2007 se aproxima por la función

$$N(t) = -0.1t^3 + 1.5t^2 + 100 \qquad (0 \le t \le 7)$$

donde $N(t)$ denota el número de delitos cometidos en el año t, con $t = 0$ corresponde a principios del año 2000. Enfurecidos por el aumento sorprendente en la tasa de criminalidad, los ciudadanos de Bronxville, con la ayuda de la policía local, organizaron un grupo "Vigilancia Vecinal contra la delincuencia" a principios de 2004 para luchar contra esta amenaza.

a. Compruebe que la tasa de criminalidad aumentó desde inicios de 2000 hasta principios de 2007.
Sugerencia: Calcule $N'(0), N'(1), \ldots, N'(7)$.
b. Demuestre que el programa de Vigilancia Vecinal contra el crimen ha funcionado al calcular $N''(4)$, $N''(5)$, $N''(6)$ y $N''(7)$.

70. PIB de una ciudad en vías de desarrollo El producto interno bruto (PIB) de un país en vías de desarrollo desde 2000 hasta 2008 es aproximado por la función

$$G(t) = -0.2t^3 + 2.4t^2 + 60 \qquad (0 \le t \le 8)$$

donde $G(t)$ está en medido en miles de millones de dólares, con $t = 0$ correspondiente a principios de 2000.

a. Calcule $G'(0), G'(1), \ldots, G'(8)$.
b. Calcule $G''(0), G''(1), \ldots, G''(8)$.
c. Utilice los resultados obtenidos en los incisos (a) y (b), demuestre que después de una tasa de crecimiento espectacular en los primeros años, el crecimiento del PIB se congeló.

71. Beneficios por discapacidad El número de personas de edades entre 18 y 64 años que recibe los beneficios por discapacidad a través del Seguro Social, Seguro de Ingreso Suplementario, o ambos, desde 1990 hasta 2000 es aproximado por la función

$$N(t) = 0.00037t^3 - 0.0242t^2 + 0.52t + 5.3 \qquad (0 \le t \le 10)$$

donde $f(t)$ se mide en unidades de millar y t se mide en años, con $t = 0$ correspondiente a principios de 1990. Calcule $N(8)$, $N'(8)$ y $N''(8)$ e interprete sus resultados.

Fuente: Social Security Administration

72. El censo en Estados Unidos El número de estadounidenses entre 45 y 54 años de edad es de aproximadamente

$$N(t) = -0.00233t^4 + 0.00633t^3 - 0.05417t^2 + 1.3467t + 25$$

millones de personas en el año t, con $t = 0$ correspondiente a principios de 1990. Calcule $N'(10)$ y $N''(10)$ e interprete sus resultados.

Fuente: U.S. Census Bureau

73. **Obesidad en Estados Unidos** El índice de masa corporal (IMC) mide el peso corporal en relación a la altura. Un IMC de 25 a 29.9 se considera sobrepeso, un IMC de 30 o más se considera obesidad y un IMC de 40 o más es obesidad mórbida. El porcentaje de la población de Estados Unidos que es obesa es aproximado por la función

$$P(t) = 0.0004t^3 + 0.0036t^2 + 0.8t + 12 \qquad (0 \leq t \leq 13)$$

donde t se mide en años, con $t = 0$ correspondiente a principios de 1991. Demuestre que el promedio de la tasa de cambio del porcentaje de la población norteamericana que se considera obeso fue positiva desde 1991 hasta 2004. ¿Qué significa esto?

Fuente: Centers for Disease Control and Prevention

74. **Depuración del aire** Durante la prueba de una cierta marca de purificador de aire, la cantidad de humo restante en t minutos después de haber iniciado la prueba fue de

$$A(t) = -0.00006t^5 + 0.00468t^4 - 0.1316t^3 + 1.915t^2 - 17.63t + 100$$

por ciento de la cantidad original. Calcule $A'(10)$ y $A''(10)$ e interprete sus resultados.

Fuente: Consumer Reports

En los ejercicios 75-78, determine si el pronunciamiento es verdadero o falso. Si es verdadero, explique por qué lo es. Si es falso, proporcione un ejemplo para demostrar por qué lo es.

75. Si f y g son diferenciables, entonces

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f'(x)g'(x)$$

76. Si f es diferenciable, entonces

$$\frac{d}{dx}[xf(x)] = f(x) + xf'(x)$$

77. Si f es diferenciable, entonces

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{x^2}\right] = \frac{f'(x)}{2x}$$

78. Si la segunda derivada de f existe en $x = a$, entonces $f''(a) = [f'(a)]^2$.

79. Desarrolle la regla del producto para la diferenciación de los siguientes casos que involucran el producto de las tres funciones diferenciables: sea $h(x) = u(x)v(x)w(x)$ y demuestre que $h'(x) = u(x)v(x)w'(x) + u(x)v'(x)w(x) + u'(x)v(x)w(x)$.

Sugerencia: Sea $f(x) = u(x)v(x)$, $g(x) = w(x)$ y $h(x) = f(x)g(x)$ y aplique la regla del producto a la función h.

80. Pruebe la regla del cociente para la diferenciación (regla 6).

Sugerencia: Sea $k(x) = f(x)/g(x)$ y verifique los siguientes pasos:

a. $$\frac{k(x+h) - k(x)}{h} = \frac{f(x+h)g(x) - f(x)g(x+h)}{hg(x+h)g(x)}$$

b. Al sumar $[-f(x)g(x) + f(x)g(x)]$ al numerador y al simplificar, demuestre que

$$\frac{k(x+h) - k(x)}{h} = \frac{1}{g(x+h)g(x)} \times \left\{\left[\frac{f(x+h) - f(x)}{h}\right]\cdot g(x) - \left[\frac{g(x+h) - g(x)}{h}\right]\cdot f(x)\right\}$$

c. $$k'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{k(x+h) - k(x)}{h} = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$$

9.5 Soluciones de los ejercicios de autoevaluación

1. Utilice la regla del cociente para obtener

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(x^2 - 1)\frac{d}{dx}(2x+1) - (2x+1)\frac{d}{dx}(x^2 - 1)}{(x^2 - 1)^2} \\ &= \frac{(x^2 - 1)(2) - (2x+1)(2x)}{(x^2 - 1)^2} \\ &= \frac{2x^2 - 2 - 4x^2 - 2x}{(x^2 - 1)^2} \\ &= \frac{-2x^2 - 2x - 2}{(x^2 - 1)^2} \\ &= \frac{-2(x^2 + x + 1)}{(x^2 - 1)^2} \end{aligned}$$

2. $f'(x) = 10x^4 - 9x^2 + 2x - 6$
$f''(x) = 40x^3 - 18x + 2$
$f'''(x) = 120x^2 - 18$

3. La tasa en la que las ventas totales de la empresa cambian en cualquier momento t está dada por

$$\begin{aligned} S'(t) &= \frac{(1 + 0.4t^2)\frac{d}{dt}(0.3t^3) - (0.3t^3)\frac{d}{dt}(1 + 0.4t^2)}{(1 + 0.4t^2)^2} \\ &= \frac{(1 + 0.4t^2)(0.9t^2) - (0.3t^3)(0.8t)}{(1 + 0.4t^2)^2} \end{aligned}$$

Por tanto, al principio del segundo año de operación, las ventas de Productos de Seguridad se incrementaron a una tasa de

$$S'(1) = \frac{(1 + 0.4)(0.9) - (0.3)(0.8)}{(1 + 0.4)^2} = 0.520408$$

o \$520,408/año.

USO DE LA TECNOLOGÍA

Las reglas del producto y del cociente

EJEMPLO 1 Sea $(x) = (2\sqrt{x} + 0.5x)(0.3x^3 + 2x - \frac{0.3}{x})$. Determine $f'(0.2)$.

Solución Al utilizar la operación de la derivada numérica de la calculadora graficadora, determinamos

$$f'(0.2) = 6.4797499802$$

vea la figura T1.

```
nDeriv((2X^.5+.5
X) (.3X^3+2X–.3/X),
X, .2)
        6.4797499802
█
```

FIGURA **T1**
La pantalla TI-83/84 de la derivada numérica al calcular $f'(0.2)$.

■

EJEMPLO DE APLICACIÓN 2 Importancia del tiempo al tratar ataques cardíacos Según la American Heart Association, la ventaja del tratamiento para los ataques cardíacos depende del tiempo hasta el tratamiento y está descrito por la función

$$f(t) = \frac{0.44t^4 + 700}{0.1t^4 + 7} \qquad (0 \le t \le 24)$$

donde t está medido en horas y $f(t)$ está expresado como un porcentaje.

a. Utilice la calculadora graficadora para trazar la función f utilizando la ventana de visualización $[0, 24] \times [0, 100]$.
b. Utilice la calculadora graficadora para determinar la derivada de f cuando $t = 0$ y $t = 2$.
c. Interprete los resultados obtenidos en el inciso (b).

Fuente: American Heart Association

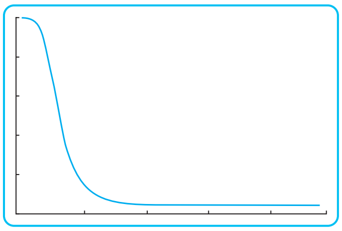


FIGURA **T2**

Solución

a. La gráfica de f se muestra en la figura T2.
b. Al utilizar la operación de la derivada numérica de la calculadora graficadora, obtenemos

$$f'(0) \approx 0$$
$$f'(2) \approx -28.95402429$$

(vea la figura T3).

```
nDeriv((.44X^4+7
00)/(.1X^4+7),X,
0)
          0
```

(a)

```
nDeriv((.44X^4+7
00)/(.1X^4+7),X,
2)
    -28.95402429
```

(b)

FIGURA **T3**
Pantalla TI-83/84 de la derivada numérica (a) al calcular $f'(0)$ y (b) al calcular $f'(2)$.

c. Los resultados del inciso (b) demuestran que no existe una caída en el tratamiento cuando el ataque cardíaco es tratado de inmediato. Sin embargo, el beneficio del tratamiento disminuye a una tasa de aproximadamente 29% por hora cuando el tiempo de tratamiento es de 2 horas. Así, es muy urgente que un paciente que sufre de un ataque cardíaco reciba atención médica tan pronto como sea posible. ■

(*continúa*)

Determinación de la segunda derivada de una función en un punto dado

Algunas calculadoras graficadoras tienen la capacidad de calcular numéricamente la segunda derivada de una función en un punto. Si su calculadora tiene esta capacidad, utilícela para trabajar con los ejemplos y ejercicios de esta sección.

EJEMPLO 3 Utilice la operación de la (segunda) derivada numérica de la calculadora graficadora para determinar la segunda derivada de $f(x) = \sqrt{x}$ cuando $x = 4$.

Solución Al utilizar la operación de la (segunda) derivada numérica, determinamos

$$f''(4) = \text{der2}(x\hat{}.5, x, 4) = -.03125$$

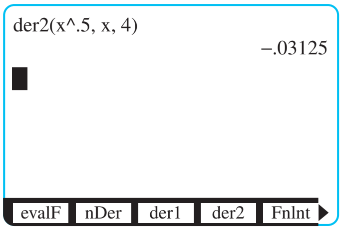


FIGURA T4
La pantalla TI-86 calcula la segunda derivada $f''(4)$.

(figura T4). ■

EJEMPLO DE APLICACIÓN 4 Predominio del Alzheimer en pacientes El número de pacientes con Alzheimer en Estados Unidos está dado por

$$f(t) = -0.02765t^4 + 0.3346t^3 - 1.1261t^2 + 1.7575t + 3.7745 \qquad (0 \le t \le 5)$$

donde $f(t)$ se mide en millones y t en décadas, con $t = 0$ correspondiente a principios de 1990.

a. ¿Qué tan rápido cambiará el número de pacientes con predominio de Alzheimer en Estados Unidos a comienzos de 2030?

b. ¿Qué tan rápido cambia la tasa del número de pacientes con predominio de Alzheimer en Estados Unidos a principios de 2030?

c. Elabore la gráfica de f en la ventana de visualización $[0, 5] \times [0, 12]$.

Fuente: Alzheimer's Association

Solución

a. Al utilizar la operación de la derivada numérica de una calculadora graficadora, determinamos que el número de pacientes con Alzheimer a principios de 2030 puede anticiparse que cambie a la tasa de

$$f'(4) = 1.7311$$

es decir, el número es creciente en la tasa de aproximadamente 1.7 millones de pacientes por década.

b. Al utilizar la operación de la (segunda) derivada numérica de una calculadora graficadora, se determina que

$$f''(4) = 0.4694$$

(figura T5): es decir, la tasa de cambio en el número de pacientes con Alzheimer es creciente en la tasa de aproximadamente 0.5 millones de pacientes por década.

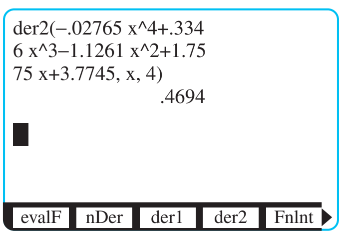


FIGURA T5
La pantalla TI-86 de la segunda derivada calcula $f''(4)$.

c. La figura T6 muestra la gráfica.

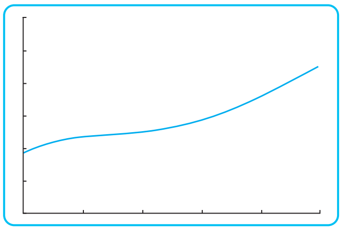


FIGURA **T6**
La gráfica de f en la ventana de visualización $[0, 5] \times [0, 12]$.

EJERCICIOS CON TECNOLOGÍA

En los ejercicios 1-6, utilice la operación de la derivada numérica para determinar la tasa de cambio de $f(x)$ en el valor dado de x. Dé su respuesta a cuatro posiciones decimales precisas.

1. $f(x) = (2x^2 + 1)(x^3 + 3x + 4);\ x = -0.5$
2. $f(x) = (\sqrt{x} + 1)(2x^2 + x - 3);\ x = 1.5$
3. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} + 1};\ x = 3$
4. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}(x^2 + 4)}{x^3 + 1};\ x = 4$
5. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}(1 + x^{-1})}{x + 1};\ x = 1$
6. $f(x) = \dfrac{x^2(2 + \sqrt{x})}{1 + \sqrt{x}};\ x = 1$
7. **Nuevos empleos para la construcción** La presidenta de una compañía de construcción de vivienda asegura que el número de empleos creados para la construcción en los próximos t meses está dado por

$$f(t) = 1.42\left(\frac{7t^2 + 140t + 700}{3t^2 + 80t + 550}\right)$$

donde $f(t)$ está medido en empleos por año. ¿A qué tasa se crearán empleos en la construcción en un año a partir de ahora, suponiendo que su pronóstico sea correcto?

8. **Crecimiento de la población** Una gran empresa está construyendo un complejo de casas, oficinas, tiendas, escuelas e iglesias en 4,325 acres en la comunidad rural de Glen Cove. Como resultado de este desarrollo, los encargados de la planeación han estimado que la población de Glen Cove (en miles) t años a partir de ahora estará dada por

$$P(t) = \frac{25t^2 + 125t + 200}{t^2 + 5t + 40}$$

a. ¿Cuál será la población en 10 años a partir de ahora?
b. ¿A qué tasa se incrementará la población en 10 años a partir de ahora?

En los ejercicios 9-16 determine el valor de la segunda derivada de f en el valor dado de x. Exprese su respuesta correcta a cuatro posiciones decimales.

9. $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1;\ x = -1$
10. $f(x) = 2.5x^5 - 3x^3 + 1.5x + 4;\ x = 2.1$
11. $f(x) = 2.1x^{3.1} - 4.2x^{1.7} + 4.2;\ x = 1.4$
12. $f(x) = 1.7x^{4.2} - 3.2x^{1.3} + 4.2x - 3.2;\ x = 2.2$
13. $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x - 5}{x^3 + 1};\ x = 2.1$
14. $f(x) = \dfrac{x^3 + x + 2}{2x^2 - 5x + 4};\ x = 1.2$
15. $f(x) = \dfrac{x^{1/2} + 2x^{3/2} + 1}{2x^{1/2} + 3};\ x = 0.5$
16. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x} - 1}{2x + \sqrt{x} + 4};\ x = 2.3$
17. **Tasa de quiebras bancarias** La tasa en la que los bancos quebraron entre 1982 y 1994 está dada por

$$f(t) = -0.063447t^4 - 1.953283t^3 + 14.632576t^2 - 6.684704t + 47.458874 \qquad (0 \leq t \leq 12)$$

donde $f(t)$ se mide en el número de bancos por año y t se mide en años, con $t = 0$ corresponde a principios de 1982. Calcule $f''(6)$ e interprete sus resultados.
Fuente: Federal Deposit Insurance Corporation

18. **Modelado con datos** Los ingresos (en miles de millones de dólares) de publicidad por cable para los años 1995 hasta 2000 es la siguiente

Año	1995	1996	1997	1998	1999	2000
Ingresos	5.1	6.6	8.1	9.4	11.1	13.7

a. Utilice la **Regresión cúbica** para determinar el modelo de regresión polinómica para los datos. $t = 0$ corresponde a 1995.
b. Elabore la gráfica de la función f determinada en el inciso (a), utilice la ventana de visualización $[0, 6] \times [0, 14]$.
c. Calcule $f''(5)$ e interprete sus resultados.
Fuente: National Cable Television Association

9.6 La regla de la cadena

La población de los estadounidenses de 55 años y mayores como porcentaje de la población total es aproximado por la función

$$f(t) = 10.72(0.9t + 10)^{0.3} \qquad (0 \le t \le 20)$$

donde t se mide en años con $t = 0$ correspondiente al año 2000 (figura 45).

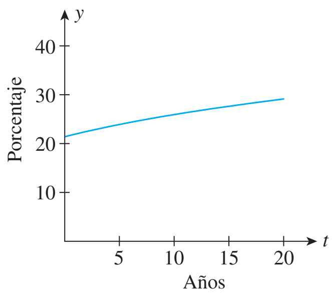


FIGURA **45**
La población de estadounidenses de 55 años de edad y mayores.
Fuente: U.S. Census Bureau

¿Qué tan rápido aumentará la población de 55 años de edad y mayores a principios de 2012? Para responder a esta pregunta, se tiene que evaluar $f'(12)$, donde f' es la derivada de f. Pero las reglas de diferenciación que hemos desarrollado hasta ahora no ayudarán a determinar la derivada de f'.

En esta sección se introducirá otra regla de diferenciación llamada la **regla de la cadena**. Cuando se utiliza en forma conjunta con las normas de diferenciación desarrolladas en las últimas dos secciones, la regla de la cadena permite ampliar en gran medida las clases de funciones que seamos capaces de diferenciar (en el ejercicio 70, página 626, se utilizará la regla de la cadena para responder a estas preguntas planteadas en los ejemplos de introducción).

La regla de la cadena

Al considerar la función $h(x) = (x^2 + x + 1)^2$. Si se fuera a calcular $h'(x)$ utilizando sólo las reglas de diferenciación de las secciones anteriores, entonces la aproximación podría desarrollar a $h(x)$. Por tanto,

$$\begin{aligned} h(x) &= (x^2 + x + 1)^2 = (x^2 + x + 1)(x^2 + x + 1) \\ &= x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1 \end{aligned}$$

de la que determinamos

$$h'(x) = 4x^3 + 6x^2 + 6x + 2$$

Pero, ¿qué hay de la función $H(x) = (x^2 + x + 1)^{100}$? La misma técnica puede ser utilizada para determinar la derivada de la función H, pero la cantidad de trabajo involucrado en este caso sería enorme! Considere también la función $G(x) = \sqrt{x^2 + 1}$. Para cada una de las funciones H y G, las reglas de diferenciación de las secciones anteriores no pueden aplicarse directamente para calcular las derivadas H' y G'.

Observe que ambas H y G son **funciones compuestas**, es decir, cada una está compuesta de, o construida a partir de, funciones simples. Por ejemplo, la función H se compone de las dos funciones simples $f(x) = x^2 + x + 1$ y $g(x) = x^{100}$ de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} H(x) &= g[f(x)] = [f(x)]^{100} \\ &= (x^2 + x + 1)^{100} \end{aligned}$$

De igual forma, observe que la función G está compuesta de las dos funciones más simples $f(x) = x^2 + 1$ y $g(x) = \sqrt{x}$. Por tanto,

$$\begin{aligned} G(x) &= g[f(x)] = \sqrt{f(x)} \\ &= \sqrt{x^2 + 1} \end{aligned}$$

Como un primer paso hacia la determinación de la derivada h' de una función compuesta $h = g \circ f$ definida por $h(x) = g[f(x)]$, escribimos

$$u = f(x) \quad \text{y} \quad y = g[f(x)] = g(u)$$

La dependencia de h sobre g y f está ilustrada en la figura 46. Ya que u es una función de x, se puede calcular la derivada de u con respecto a x, si f es una función diferenciable, obteniendo $du/dx = f'(x)$. Después, si g es una función diferenciable de u, se puede calcular la derivada de g con respecto a u, obteniendo $dy/du = g'(u)$. Ahora, ya que la función h está compuesta por la función g y de la función f, se puede suponer que la regla $h'(x)$ para la derivada h' de h esté dada por una expresión que involucre las reglas para las derivadas de f y g. Pero, ¿cómo se combinan estas derivadas para obtener h'?

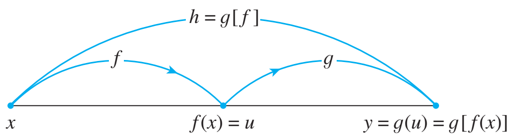


FIGURA 46
La función compuesta $h(x) = g[f(x)]$.

Esta pregunta puede contestarse al interpretar la derivada de cada función como la tasa de cambio de esa función. Por ejemplo, suponga que $u = f(x)$ cambia tres veces tan rápido como x, es decir,

$$f'(x) = \frac{du}{dx} = 3$$

Y suponga que $y = g(u)$ cambia dos veces tan rápido como u, esto es

$$g'(u) = \frac{dy}{du} = 2$$

Después, esperaríamos que $y = h(x)$ cambie seis veces tan rápido como x, es decir,

$$h'(x) = g'(u)f'(x) = (2)(3) = 6$$

o el equivalente,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = (2)(3) = 6$$

Esta observación sugiere el siguiente resultado, el cual afirmamos sin prueba.

Regla 7: La regla de la cadena

Si $h(x) = g[f(x)]$, entonces

$$h'(x) = \frac{d}{dx} g(f(x)) = g'(f(x))f'x \qquad \textbf{(10)}$$

o de forma equivalente, si se escribe $y = h(x) = g(u)$, donde $u = f(x)$, entonces

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \qquad \textbf{(11)}$$

Notas

1. Si se etiqueta la función compuesta h de la siguiente forma

$$h(x) = \underbrace{g\overbrace{[f(x)]}^{\text{dentro de la función}}}_{\text{fuera de la función}}$$

entonces $h'(x)$ es sólo la *derivada* de "fuera de la función" *evaluada* "dentro de la función" por la *derivada* de "dentro de la función".

2. La ecuación 11 puede recordarse al observar que si se "cancela" la de du, entonces

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{\cancel{du}} \cdot \frac{\cancel{du}}{dx} = \frac{dy}{dx}$$

■

La regla de la cadena para las funciones de potencia

Numerosas funciones compuestas tienen la forma especial $h(x) = g(f(x))$, donde g está definida por la regla $g(x) = x^n$ (n, un número real); es decir,

$$h(x) = [f(x)]^n$$

En otras palabras, la función h está dada por la potencia de la función f. Las funciones

$$h(x) = (x^2 + x + 1)^2 \qquad H(x) = (x^2 + x + 1)^{100} \qquad G(x) = \sqrt{x^2 + 1}$$

discutidas con anterioridad son ejemplos de este tipo de función compuesta. Al utilizar el siguiente corolario de la regla de la cadena, la regla de potencia general, se puede determinar la derivada de este tipo de función mucho más fácilmente que mediante el uso directo de la regla de la cadena.

La regla general de potencia

Si la función f es diferenciable y $h(x) = [f(x)]^n$ (n, un número real), entonces

$$h'(x) = \frac{d}{dx}[f(x)]^n = n[f(x)]^{n-1}f'(x) \qquad \textbf{(12)}$$

Para ver esto, observe que $h(x) = g(f(x))$, donde $g(x) = x^n$, así que, por virtud de la regla de cadena, tenemos

$$\begin{aligned} h'(x) &= g'(f(x))f'(x) \\ &= n[f(x)]^{n-1}f'(x) \end{aligned}$$

puesto que $g'(x) = nx^{n-1}$.

EJEMPLO 1 Sea $F(x) = (3x + 1)^2$.

a. Determine $F'(x)$, utilizando la regla general de potencia.
b. Verifique sus resultados sin el beneficio de la regla general de potencia.

Solución

a. Al utilizar la regla general de potencia, obtenemos

$$\begin{aligned} F'(x) &= 2(3x + 1)^1 \frac{d}{dx}(3x + 1) \\ &= 2(3x + 1)(3) \\ &= 6(3x + 1) \end{aligned}$$

b. Primero desarrolle $F(x)$. Por tanto,

$$F(x) = (3x + 1)^2 = 9x^2 + 6x + 1$$

Después, al diferenciar, tenemos

$$\begin{aligned} F'(x) &= \frac{d}{dx}(9x^2 + 6x + 1) \\ &= 18x + 6 \\ &= 6(3x + 1) \end{aligned}$$

como antes. ■

EJEMPLO 2 Al diferenciar la función $G(x) = \sqrt{x^2 + 1}$.

Solución Escriba nuevamente la función $G(x)$ como

$$G(x) = (x^2 + 1)^{1/2}$$

y aplicamos la regla general de potencia, obteniendo

$$\begin{aligned} G'(x) &= \frac{1}{2}(x^2 + 1)^{-1/2}\frac{d}{dx}(x^2 + 1) \\ &= \frac{1}{2}(x^2 + 1)^{-1/2} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} \end{aligned}$$ ■

EJEMPLO 3 Diferencie la función $f(x) = x^2(2x + 3)^5$.

Solución Al aplicar la regla del producto seguida por la regla general de potencia, obtenemos

$$\begin{aligned} f'(x) &= x^2\frac{d}{dx}(2x + 3)^5 + (2x + 3)^5\frac{d}{dx}(x^2) \\ &= (x^2)5(2x + 3)^4 \cdot \frac{d}{dx}(2x + 3) + (2x + 3)^5(2x) \\ &= 5x^2(2x + 3)^4(2) + 2x(2x + 3)^5 \\ &= 2x(2x + 3)^4(5x + 2x + 3) = 2x(7x + 3)(2x + 3)^4 \end{aligned}$$ ■

EJEMPLO 4 Determine $f'(x)$ si $f(x) = (2x^2 + 3)^4(3x - 1)^5$.

Solución Al aplicar la regla del producto, tenemos

$$f'(x) = (2x^2 + 3)^4\frac{d}{dx}(3x - 1)^5 + (3x - 1)^5\frac{d}{dx}(2x^2 + 3)^4$$

Después, aplicamos la regla general de potencia en cada término, para obtener

$$\begin{aligned} f'(x) &= (2x^2 + 3)^4 \cdot 5(3x - 1)^4\frac{d}{dx}(3x - 1) + (3x - 1)^5 \cdot 4(2x^2 + 3)^3\frac{d}{dx}(2x^2 + 3) \\ &= 5(2x^2 + 3)^4(3x - 1)^4 \cdot 3 + 4(3x - 1)^5(2x^2 + 3)^3(4x) \end{aligned}$$

Por último, observe que $(2x^2 + 3)^3(3x - 1)^4$ es común en ambos términos, se puede factorizar y simplificar de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} f'(x) &= (2x^2 + 3)^3(3x - 1)^4[15(2x^2 + 3) + 16x(3x - 1)] \\ &= (2x^2 + 3)^3(3x - 1)^4(30x^2 + 45 + 48x^2 - 16x) \\ &= (2x^2 + 3)^3(3x - 1)^4(78x^2 - 16x + 45) \end{aligned}$$ ■

EJEMPLO 5 Determine $f'(x)$ si $f(x) = \dfrac{1}{(4x^2 - 7)^2}$.

Solución Vuelva a escribir $f(x)$ y después aplique la regla general de potencia, para obtener

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{(4x^2-7)^2}\right] = \frac{d}{dx}(4x^2-7)^{-2} \\ &= -2(4x^2-7)^{-3}\frac{d}{dx}(4x^2-7) \\ &= -2(4x^2-7)^{-3}(8x) = -\frac{16x}{(4x^2-7)^3} \end{aligned}$$

■

EJEMPLO 6 Determine la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función

$$f(x) = \left(\frac{2x+1}{3x+2}\right)^3$$

en el punto $(0, \frac{1}{8})$.

Solución La pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en cualquier punto está dada por $f'(x)$. Para calcular $f'(x)$, usamos la regla general de potencia seguida por la regla del cociente para obtener

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3\left(\frac{2x+1}{3x+2}\right)^2 \frac{d}{dx}\left(\frac{2x+1}{3x+2}\right) \\ &= 3\left(\frac{2x+1}{3x+2}\right)^2 \left[\frac{(3x+2)(2)-(2x+1)(3)}{(3x+2)^2}\right] \\ &= 3\left(\frac{2x+1}{3x+2}\right)^2 \left[\frac{6x+4-6x-3}{(3x+2)^2}\right] \\ &= \frac{3(2x+1)^2}{(3x+2)^4} \end{aligned}$$

(x^2) Vea la página 22.

Combine los términos semejantes y simplifique.

En particular, la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en $(0, \frac{1}{8})$ está dada por

$$f'(0) = \frac{3(0+1)^2}{(0+2)^4} = \frac{3}{16}$$

■

Exploración con TECNOLOGÍA

En referencia al ejemplo 6.

1. Utilice la calculadora graficadora para elaborar la gráfica de la función f, utilizando la ventana de visualización $[-2, 1] \times [-1, 2]$. Después dibuje la recta tangente a la gráfica de f en $(0, \frac{1}{8})$.
2. Para una mejor ilustración, repita el paso 1 utilizando la ventana de visualización $[-1, 1] \times [-0.1, 0.3]$.
3. Utilice la capacidad de diferenciación numérica de la calculadora graficadora para verificar que la pendiente de la recta tangente en $(0, \frac{1}{8})$ sea $\frac{3}{16}$.

VIDEO

EJEMPLO DE APLICACIÓN 7 Crecimiento de la membresía de un club de salud La membresía de The Fitness Center, que se inauguró hace unos años, es aproximada por la función

$$N(t) = 100(64 + 4t)^{2/3} \qquad (0 \le t \le 52)$$

donde $N(t)$ da el número de miembros al principio de la semana t.

a. Determine $N'(t)$.
b. ¿Qué tan rápido aumentó inicialmente la membresía en el club ($t = 0$)?
c. ¿Qué tan rápido se incrementó la membresía a comienzos de la semana 40?
d. ¿Cuál era el número de miembros cuando se inauguró el club? ¿A principios de la semana 40?

Solución

a. Al utilizar la regla general de potencia, obtenemos

$$\begin{aligned} N'(t) &= \frac{d}{dt}\left[100(64 + 4t)^{2/3}\right] \\ &= 100\frac{d}{dt}(64 + 4t)^{2/3} \\ &= 100\left(\frac{2}{3}\right)(64 + 4t)^{-1/3}\frac{d}{dt}(64 + 4t) \\ &= \frac{200}{3}(64 + 4t)^{-1/3}(4) \\ &= \frac{800}{3(64 + 4t)^{1/3}} \end{aligned}$$

b. La tasa en la que la membresía se incrementó cuando el club se abrió por primera vez está dada por

$$N'(0) = \frac{800}{3(64)^{1/3}} \approx 66.7$$

o aproximadamente 67 personas por año.

c. La tasa a la que la membresía se incrementó a principios de la semana 40 está dada por

$$N'(40) = \frac{800}{3(64 + 160)^{1/3}} \approx 43.9$$

o aproximadamente 44 personas por semana.

d. La membresía cuando el club abrió por primera vez está dada por

$$N(0) = 100(64)^{2/3} = 100(16)$$

o aproximadamente 1,600 personas. La membresía a comienzos de la semana 40 está dada por

$$N(40) = 100(64 + 160)^{2/3} \approx 3,688.3$$

o aproximadamente 3,688 personas. ■

Explore y analice

La utilidad P del fabricante de un software depende del número de unidades de su producto vendido. El fabricante estima que venderá x unidades de su producto por semana. Suponga que $P = g(x)$ y $x = f(t)$, donde g y f son funciones diferenciables.

1. Escriba una expresión que dé la tasa de cambio de la utilidad con respecto al número de unidades vendidas.
2. Escriba una expresión que dé la tasa de cambio del número de unidades vendidas por semana.
3. Escriba una expresión que dé la tasa de cambio de la utilidad por semana.

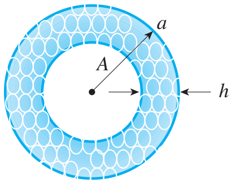


FIGURA 47
Cruza la sección de la aorta.

EJEMPLO DE APLICACIÓN 8 La aterosclerosis La aterosclerosis inicia desde la infancia cuando la placa (masas blandas de material graso) se forma en las paredes arteriales, bloqueando el flujo de sangre por las arterias y que llevan a ataques al corazón, derrames cerebrales y gangrena. Suponga que la sección transversal concebida de la aorta es circular con un radio de a cm y al año t el espesor de la placa (suponga que es uniforme) es $h = g(t)$ cm (figura 47). Entonces el área de la abertura está dada por $A = \pi(a - h)^2$ centímetros cuadrados (cm^2).

Suponga que el radio de la arteria de un individuo es de 1 cm ($a = 1$) y que el espesor de la placa en el año t está dado por

$$h = g(t) = 1 - 0.01(10{,}000 - t^2)^{1/2} \text{ cm}$$

Puesto que el área de la apertura arterial está dada por

$$A = f(h) = \pi(1 - h)^2$$

la tasa a la que A está cambiando con respecto al tiempo está dada por

$$\begin{aligned}\frac{dA}{dt} &= \frac{dA}{dh} \cdot \frac{dh}{dt} = f'(h) \cdot g'(t) && \textit{Por la regla de la cadena}\\ &= 2\pi(1-h)(-1)\left[-0.01\left(\frac{1}{2}\right)(10{,}000 - t^2)^{-1/2}(-2t)\right] && \textit{Utilice dos veces la regla de la cadena.}\\ &= -2\pi(1-h)\left[\frac{0.01t}{(10{,}000-t^2)^{1/2}}\right]\\ &= -\frac{0.02\pi(1-h)t}{\sqrt{10{,}000-t^2}}\end{aligned}$$

Por ejemplo, cuando $t = 50$.

$$h = g(50) = 1 - 0.01(10{,}000 - 2{,}500)^{1/2} \approx 0.134$$

así que

$$\frac{dA}{dt} = -\frac{0.02\pi(1 - 0.134)50}{\sqrt{10{,}000 - 2{,}500}} \approx -0.03$$

Es decir, el área de la abertura arterial disminuye a una tasa de 0.03 cm^2 por año. ■

Explore y analice

Suponga que la población P de un cultivo de ciertas bacterias está dada por $P = f(T)$, donde T es la temperatura del medio. Además, suponga que la temperatura T es una función del tiempo t en segundos, es decir, $T = g(t)$. Dé una interpretación de cada una de las siguientes cantidades.

1. $\dfrac{dP}{dT}$ **2.** $\dfrac{dT}{dt}$ **3.** $\dfrac{dP}{dt}$ **4.** $(f \circ g)(t)$ **5.** $f'(g(t))g'(t)$

9.6 Ejercicios de autoevaluación

1. Determine la derivada de

$$f(x) = -\frac{1}{\sqrt{2x^2 - 1}}$$

2. Suponga que la esperanza de vida al nacer (en años) de una mujer de cierto país está descrita por la función

$$g(t) = 50.02(1 + 1.09t)^{0.1} \qquad (0 \le t \le 150)$$

donde t está medida en años, con $t = 0$ corresponde a principios de 1900.

a. ¿Cuál es la esperanza de vida de una mujer nacida a principios de 1980? ¿A principios de 2000?

b. ¿Qué tan rápido ha cambiado la esperanza de vida de una mujer que nace en cualquier momento t?

Las soluciones de los ejercicios de autoevaluación 9.6 se pueden encontrar en la página 628.

9.6 Preguntas de concepto

1. En sus palabras, describa la regla de la cadena para diferenciar la función compuesta $h(x) = g[f(x)]$.

2. En sus palabras, describa la regla general de potencia para diferenciar la función $h(x) = [f(x)]^n$, donde n es un número real.

3. Si $f(t)$ da el número de unidades de un cierto producto vendido por una empresa después de t días, y $g(x)$ da la utilidad (en dólares) de la venta realizada de x unidades de los productos de la empresa, ¿qué describe $(g \circ f)'(t)$?

4. Suponga que $f(x)$ da la temperatura del aire en la góndola de un globo aerostático cuando está a una altitud de x pies del suelo y $g(t)$ da la altitud del globo en t minutos después de haberse elevado desde el suelo. Determine una función que dé la tasa de cambio de la temperatura del aire en la góndola en el momento t.

9.6 Ejercicios

En los ejercicios 1-48 determine la derivada de cada función.

1. $f(x) = (2x - 1)^4$
2. $f(x) = (1 - x)^3$
3. $f(x) = (x^2 + 2)^5$
4. $f(t) = 2(t^3 - 1)^5$
5. $f(x) = (2x - x^2)^3$
6. $f(x) = 3(x^3 - x)^4$
7. $f(x) = (2x + 1)^{-2}$
8. $f(t) = \frac{1}{2}(2t^2 + t)^{-3}$
9. $f(x) = (x^2 - 4)^{3/2}$
10. $f(t) = (3t^2 - 2t + 1)^{3/2}$
11. $f(x) = \sqrt{3x - 2}$
12. $f(t) = \sqrt{3t^2 - t}$
13. $f(x) = \sqrt[3]{1 - x^2}$
14. $f(x) = \sqrt{2x^2 - 2x + 3}$
15. $f(x) = \dfrac{1}{(2x + 3)^3}$
16. $f(x) = \dfrac{2}{(x^2 - 1)^4}$
17. $f(t) = \dfrac{1}{\sqrt{2t - 3}}$
18. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2x^2 - 1}}$
19. $y = \dfrac{1}{(4x^4 + x)^{3/2}}$
20. $f(t) = \dfrac{4}{\sqrt[3]{2t^2 + t}}$
21. $f(x) = (3x^2 + 2x + 1)^{-2}$
22. $f(t) = (5t^3 + 2t^2 - t + 4)^{-3}$
23. $f(x) = (x^2 + 1)^3 - (x^3 + 1)^2$
24. $f(t) = (2t - 1)^4 + (2t + 1)^4$
25. $f(t) = (t^{-1} - t^{-2})^3$
26. $f(v) = (v^{-3} + 4v^{-2})^3$
27. $f(x) = \sqrt{x + 1} + \sqrt{x - 1}$
28. $f(u) = (2u + 1)^{3/2} + (u^2 - 1)^{-3/2}$
29. $f(x) = 2x^2(3 - 4x)^4$
30. $h(t) = t^2(3t + 4)^3$
31. $f(x) = (x - 1)^2(2x + 1)^4$
32. $g(u) = (1 + u^2)^5(1 - 2u^2)^8$
33. $f(x) = \left(\dfrac{x + 3}{x - 2}\right)^3$
34. $f(x) = \left(\dfrac{x + 1}{x - 1}\right)^5$
35. $s(t) = \left(\dfrac{t}{2t + 1}\right)^{3/2}$
36. $g(s) = \left(s^2 + \dfrac{1}{s}\right)^{3/2}$
37. $g(u) = \sqrt{\dfrac{u + 1}{3u + 2}}$
38. $g(x) = \sqrt{\dfrac{2x + 1}{2x - 1}}$
39. $f(x) = \dfrac{x^2}{(x^2 - 1)^4}$
40. $g(u) = \dfrac{2u^2}{(u^2 + u)^3}$
41. $h(x) = \dfrac{(3x^2 + 1)^3}{(x^2 - 1)^4}$
42. $g(t) = \dfrac{(2t - 1)^2}{(3t + 2)^4}$
43. $f(x) = \dfrac{\sqrt{2x + 1}}{x^2 - 1}$
44. $f(t) = \dfrac{4t^2}{\sqrt{2t^2 + 2t - 1}}$
45. $g(t) = \dfrac{\sqrt{t + 1}}{\sqrt{t^2 + 1}}$
46. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 + 1}}{\sqrt{x^2 - 1}}$
47. $f(x) = (3x + 1)^4(x^2 - x + 1)^3$
48. $g(t) = (2t + 3)^2(3t^2 - 1)^{-3}$

En los ejercicios 49-54 determine $\dfrac{dy}{du}$, $\dfrac{du}{dx}$ y $\dfrac{dy}{dx}$.

49. $y = u^{4/3}$ y $u = 3x^2 - 1$
50. $y = \sqrt{u}$ y $u = 7x - 2x^2$
51. $y = u^{-2/3}$ y $u = 2x^3 - x + 1$
52. $y = 2u^2 + 1$ y $u = x^2 + 1$
53. $y = \sqrt{u} + \dfrac{1}{\sqrt{u}}$ y $u = x^3 - x$
54. $y = \dfrac{1}{u}$ y $u = \sqrt{x} + 1$

55. Suponga que $F(x) = g(f(x))$ y $f(2) = 3$, $f'(2) = -3$, $g(3) = 5$ y $g'(3) = 4$. Determine $F'(2)$.

56. Suponga que $h = f \circ g$. Determine $h'(0)$ dado que $f(0) = 6$, $f'(5) = -2$, $g(0) = 5$ y $g'(0) = 3$.

57. Suponga que $F(x) = f(x^2 + 1)$. Determine $F'(1)$ si $f'(2) = 3$.

58. Sea $F(x) = f(f(x))$. ¿Se deduce que $F'(x) = [f'(x)]^2$?
Sugerencia: Sea $f(x) = x^2$.

59. Suponga que $h = g \circ f$. ¿Se deduce que $h' = g' \circ f'$?
Sugerencia: Sea $f(x) = x$ y $g(x) = x^2$.

60. Suponga que $h = f \circ g$. Demuestre que $h' = (f' \circ g)g'$.

En los ejercicios 61-64 determine una ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto dado.

61. $f(x) = (1 - x)(x^2 - 1)^2$; (2, −9)

62. $f(x) = \left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^2$; (3, 4)

63. $f(x) = x\sqrt{2x^2 + 7}$; (3, 15)

64. $f(x) = \dfrac{8}{\sqrt{x^2 + 6x}}$; (2, 2)

65. TELEVIDENTES El número de televidentes de una serie de televisión presentada hace varios años es aproximado por la función

$$N(t) = (60 + 2t)^{2/3} \qquad (1 \leq t \leq 26)$$

donde $N(t)$ (medida en millones) denota el número semanal de televidentes de las series en la semana t. Determine la tasa de crecimiento de la audiencia semanal al final de la segunda semana y al final de la duodécima semana. ¿Cuántos televidentes hubo en la semana 2? ¿En la semana 24?

66. OUTSOURCING DE EMPLEOS Según un estudio realizado en 2003, el número total de empleos en Estados Unidos que se proyecta a dejar la ciudad por año t, donde $t = 0$ corresponde a principios de 2000, es

$$N(t) = 0.0018425(t + 5)^{2.5} \qquad (0 \leq t \leq 15)$$

donde $N(t)$ está medida en millones. ¿Qué tan rápido cambió el número de empleos que se reclutaron en Estados Unidos en 2005? ¿Qué tan rápido cambiará del número de empleos de Estados Unidos subcontratados a principios de 2010 ($t = 10$)?

Fuente: Forrester Research

67. MADRES TRABAJADORAS El porcentaje de madres que trabaja fuera de casa y tiene hijos menores de 6 años es aproximado por la función

$$P(t) = 33.55(t + 5)^{0.205} \qquad (0 \leq t \leq 21)$$

donde t se mide en años, con $t = 0$ corresponde a principios de 1980. Calcule $P'(t)$. ¿A qué tasa cambió el porcentaje de estas madres a principios de 2000? ¿Cuál fue el porcentaje de estas madres a principios de 2000?

Fuente: U.S. Bureau of Labor Statistics

68. PRECIO DE VENTA DE GRABADORAS DE DVD El auge de la música digital y el mejoramiento del formato DVD son algunas de las razones por las que el precio de venta promedio en grabadoras de DVD independientes se reducirá en los próximos años. La función

$$A(t) = \frac{699}{(t + 1)^{0.94}} \qquad (0 \leq t \leq 5)$$

proporciona el precio promedio de la venta proyectada (en dólares) de grabadoras de DVD independientes en el año t, donde $t = 0$ corresponde a principios de 2002. ¿Qué tan rápida fue la caída del precio promedio de la venta de grabadoras de DVD independientes a principios de 2002? ¿Qué tan rápida fue la caída a principios de 2006?

Fuente: Consumer Electronics Association

69. FONDOS DE RESPONSABILIDAD SOCIAL Desde su creación en 1971, las inversiones de fondos de responsabilidad social, o SRI, han dado rentabilidad a los inversionistas a la par que las inversiones en general. Los activos de los fondos de responsabilidad social (en miles de millones de dólares) desde 1991 hasta 2001 están dados por

$$f(t) = 23.7(0.2t + 1)^{1.32} \qquad (0 \leq t \leq 11)$$

donde $t = 0$ corresponde a principios de 1991.

a. Determine la tasa a la que los activos del SRI fueron cambiando a principios de 2000.

b. ¿Cuáles fueron los activos de SRI a principios de 2000?

Fuente: Thomson Financial Wiesenberger

70. ENVEJECIMIENTO DE LA POBLACIÓN La población estadounidense de 55 años o más como porcentaje de la población total es aproximado por la función

$$f(t) = 10.72(0.9t + 10)^{0.3} \qquad (0 \leq t \leq 20)$$

donde $t = 0$ corresponde a principios de 2000. ¿Cuál fue el porcentaje de la tasa de cambio en la población estadounidense de 55 años y más a principios de 2000? ¿Cuál será el porcentaje de la tasa de cambio de la población estadounidense de 55 años de edad y más en 2010? ¿Cuál será el porcentaje de la población estadounidense de 55 años de edad y más en 2010?

Fuente: U.S. Census Bureau

71. LA CONCENTRACIÓN DE MONÓXIDO DE CARBONO (CO) EN EL AIRE Según un estudio realizado por la gerencia ambiental de Oxnard y la agencia estatal del gobierno, la concentración de CO en el aire se debe al escape de los automóviles en t años a partir de ahora está dada por

$$C(t) = 0.01(0.2t^2 + 4t + 64)^{2/3}$$

partes por millón.

a. Determine la tasa en la que el nivel de CO cambia con respecto al tiempo.

b. Determine la tasa en la que el nivel de CO cambiará en 5 años a partir de ahora.

72. LA CONTINUACIÓN DE LA MATRICULACIÓN ESCOLAR El secretario de la Universidad de Kellogg estima que el total de estudiantes inscritos en la división de Educación Profesional estará dado por

$$N(t) = -\frac{20{,}000}{\sqrt{1 + 0.2t}} + 21{,}000$$

donde $N(t)$ denota el número de estudiantes inscritos en la división en el año t a partir de ahora. Determine una expresión para $N(t)$. ¿Con qué rapidez está aumentando el número de estudiantes inscritos en la actualidad? ¿Qué tan veloz será su incremento en 5 años a partir de ahora?

73. CONTAMINACIÓN DEL AIRE Según la South Coast Air Quality Management District, el nivel de dióxido de nitrógeno, un gas de color marrón que afecta la respiración, presente en la atmósfera en un cierto día de mayo en el centro de Los Ángeles es aproximado por

$$A(t) = 0.03t^3(t - 7)^4 + 60.2 \qquad (0 \leq t \leq 7)$$

donde $A(t)$ se mide por el índice estándar de contaminación y t se mide en horas, con $t = 0$ correspondiente a las 7 a.m.

a. Determine $A'(t)$.
b. Determine $A'(1)$, $A'(3)$ y $A'(4)$ e interprete sus resultados.

Fuente: Los Angeles Times

74. Efecto del impuesto de lujo al consumo Los economistas del gobierno de un país en desarrollo determinaron que la compra de perfumes importados se relaciona con una propuesta al "impuesto de lujo" por la fórmula

$$N(x) = \sqrt{10{,}000 - 40x - 0.02x^2} \qquad (0 \le x \le 200)$$

donde $N(x)$ mide el porcentaje del consumo normal de un perfume cuando un "impuesto al lujo" de x% se le había asignado. Determine la tasa de cambio de $N(x)$ para los impuestos de 10, 100 y 150%.

75. Frecuencia del pulso de un atleta La frecuencia cardíaca (el número de latidos por minuto) de un corredor de larga distancia en t segundos después de salir de la recta de inicio está dada por

$$P(t) = \frac{300\sqrt{\frac{1}{2}t^2 + 2t + 25}}{t + 25} \qquad (t \ge 0)$$

Calcule $P'(t)$. ¿A qué tasa aumentó la frecuencia cardíaca de un atleta 10 segundos, 60 segundos y 2 minutos durante la carrera? ¿Cuál es su frecuencia cardíaca a los 2 minutos durante la carrera?

76. Modelo de aprendizaje Thurstone El psicólogo L.L. Thurstone sugirió la siguiente relación entre el tiempo de aprendizaje T y la longitud de una lista n:

$$T = f(n) = An\sqrt{n - b}$$

donde A y b son constantes que dependen de la persona y la tarea.

a. Calcule dT/dn e interprete su resultado.
b. Para una persona y una tarea determinadas, suponga que $A = 4$ y $b = 4$. Calcule $f'(13)$ y $f'(29)$ e interprete sus resultados.

77. Derrames de hidrocarburos En aguas tranquilas, el derrame de hidrocarburos de una ruptura del casco de un buque cisterna encallado se extiende en todas direcciones. Suponga que la superficie contaminada es un círculo y que su radio aumenta a una velocidad de 2 pies/seg, determine que tan rápido aumenta el área cuando el radio del círculo es de 40 pies.

78. La aterosclerosis Consulte el ejemplo 8, página 624. Suponga que el radio de la arteria de un individuo es de 1 cm y el espesor de la placa (en centímetros) t años a partir de ahora está dada por

$$h = g(t) = \frac{0.5t^2}{t^2 + 10} \qquad (0 \le t \le 10)$$

¿Qué tan rápido la apertura arterial disminuirá en 5 años a partir de ahora?

79. Flujo de tráfico Inaugurada a finales de 1950, la Arteria Central en el centro de Boston fue diseñada para mover 75,000 automóviles por día. El número de automóviles que circulan por día es aproximado por la función

$$x = f(t) = 6.25t^2 + 19.75t + 74.75 \qquad (0 \le t \le 5)$$

donde x se mide en miles y t en décadas, con $t = 0$ correspondiente al inicio de 1959. Suponga que la velocidad promedio del flujo del tráfico en mph está dado por

$$S = g(x) = -0.00075x^2 + 67.5 \qquad (75 \le x \le 350)$$

donde x tiene el mismo significado que antes. ¿Cuál fue la tasa de cambio de la velocidad promedio del flujo del tráfico a principios de 1999? ¿Cuál fue la velocidad promedio del flujo de tráfico en ese momento?
Sugerencia: $S = g[f(t)]$.

80. Tasas de ocupación de un hotel La tasa de ocupación de todas las suites del hotel Wonderland, situado cerca del parque de atracciones, está dada por la función

$$r(t) = \frac{10}{81}t^3 - \frac{10}{3}t^2 + \frac{200}{9}t + 60 \qquad (0 \le t \le 12)$$

donde t se mide en meses, con $t = 0$ corresponde a principios de enero. La dirección ha estimado que el ingreso mensual (en miles de dólares por mes) es aproximado por la función

$$R(r) = -\frac{3}{5{,}000}r^3 + \frac{9}{50}r^2 \qquad (0 \le r \le 100)$$

donde r es la tasa de ocupación.

a. Determine una expresión que dé la tasa de variación del índice de ocupación de Wonderland con respecto al tiempo.
b. Determine una expresión que dé la tasa de variación de la utilidad mensual de Wonderland con respecto a la tasa de ocupación.
c. ¿Cuál es la tasa de variación de la utilidad mensual de Wonderland con respecto al tiempo a principios de enero? ¿A principios de julio?
Sugerencia: Utilice la regla de la cadena para determinar $R'(r(0))r'(0)$ y $R'(r(6))r'(6)$.

81. Efecto de la construcción de vivienda en el empleo El presidente de una importante compañía de construcción de vivienda afirmó que el número de empleos creados en la construcción está dada por

$$N(x) = 1.42x$$

donde x denota el número de viviendas en construcción. Suponga que el número de viviendas construidas en el próximo mes t se espera que sea

$$x(t) = \frac{7t^2 + 140t + 700}{3t^2 + 80t + 550}$$

un millón de unidades por año. Determine una expresión que dé la tasa a la que se crearán los empleos en la construcción en t meses a partir de ahora. ¿A qué tasa se crearán los empleos a 1 año a partir de ahora?

82. Demanda de PC La cantidad demandada por mes, x, de una cierta marca de computadora personal (PC) se relaciona con el precio unitario promedio, p (en dólares) de la PC por la ecuación

$$x = f(p) = \frac{100}{9}\sqrt{810{,}000 - p^2}$$

Se estima que en t meses, a partir de ahora, el precio promedio de una PC estará dada por

$$p(t) = \frac{400}{1 + \frac{1}{8}\sqrt{t}} + 200 \qquad (0 \le t \le 60)$$

dólares. Determine la tasa en la que la cantidad demandada por mes de las PC cambiará en 16 meses a partir de ahora.

83. **DEMANDA DE RELOJES** La ecuación de la demanda por el reloj de pulsera Sicard está dada por

$$x = f(p) = 10\sqrt{\frac{50 - p}{p}} \qquad (0 < p \le 50)$$

donde x (medida en unidades de millar) es la cantidad demandada por semana y p es el precio unitario en dólares. Determine la tasa de cambio de la cantidad demandada de los relojes de pulsera con respecto al precio unitario cuando este es de \$25.

84. **RESERVACIONES PARA UN CRUCERO** La gerencia de operaciones del Cruise World, cruceros de lujo por el Caribe, espera que el porcentaje de jóvenes que reserve su pasaje en sus cruceros en los próximos años se incrementará drásticamente. Han construido el siguiente modelo, que da el porcentaje de los jóvenes pasajeros en el año t:

$$p = f(t) = 50\left(\frac{t^2 + 2t + 4}{t^2 + 4t + 8}\right) \qquad (0 \le t \le 5)$$

Los jóvenes eligen normalmente cruceros más cortos y por lo general gastan menos en su pasaje. El siguiente modelo da una aproximación de la cantidad promedio de dinero R (en dólares) gastados por pasajero sobre un crucero cuando el porcentaje de jóvenes es p:

$$R(p) = 1{,}000\left(\frac{p + 4}{p + 2}\right)$$

Determine la tasa a la que el precio del pasaje promedio cambiará en 2 años a partir de ahora.

En los ejercicios 85-88, determine si el pronunciamiento es verdadero o falso. Si es verdadero, explique por qué lo es. Si es falso, porporcione un ejemplo para demostrar por qué lo es.

85. Si f y g son diferenciables y $h = f \circ g$, entonces $h'(x) = f'[g(x)]g'(x)$.

86. Si f es diferenciable y c es una constante, entonces

$$\frac{d}{dx}[f(cx)] = cf'(cx)$$

87. Si f es diferenciable, entonces

$$\frac{d}{dx}\sqrt{f(x)} = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$$

88. Si f es diferenciable, entonces

$$\frac{d}{dx}\left[f\left(\frac{1}{x}\right)\right] = f'\left(\frac{1}{x}\right)$$

89. En la sección 9.4, demuestre que

$$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$$

en el caso especial cuando $n = 2$. Utilice la regla de la cadena para demostrar que

$$\frac{d}{dx}(x^{1/n}) = \frac{1}{n}x^{1/n-1}$$

por cualquier entero distinto a cero, asumiendo que $f(x) = x^{1/n}$ es diferenciable.
Sugerencia: Sea $f(x) = x^{1/n}$ así que $[f(x)]^n = x$. Diferencie ambos lados con respecto a x.

90. Con la ayuda del ejercicio 89, demuestre que

$$\frac{d}{dx}(x^r) = rx^{r-1}$$

por cualquier número racional r.
Sugerencia: Sea $r = m/n$, donde m y n son enteros, con $n \neq 0$, y escriba $x^r = (x^m)^{1/n}$.

9.6 Soluciones de los ejercicios de autoevaluación

1. Al volver a escribir, tenemos

$$f(x) = -(2x^2 - 1)^{-1/2}$$

Al utilizar la regla general de potencia, determinamos

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{d}{dx}(2x^2 - 1)^{-1/2} \\ &= -\left(-\frac{1}{2}\right)(2x^2 - 1)^{-3/2}\frac{d}{dx}(2x^2 - 1) \\ &= \frac{1}{2}(2x^2 - 1)^{-3/2}(4x) \\ &= \frac{2x}{(2x^2 - 1)^{3/2}} \end{aligned}$$

2. **a.** La esperanza de vida de una mujer nacida a principios de 1980 está dada por

$$g(80) = 50.02[1 + 1.09(80)]^{0.1} \approx 78.29$$

o aproximadamente 78 años. De igual forma, la esperanza de vida de una mujer nacida a principios de 2000 está dada por

$$g(100) = 50.02[1 + 1.09(100)]^{0.1} \approx 80.04$$

o aproximadamente 80 años.

b. La tasa de cambio en la esperanza de vida de una mujer nacida en cualquier momento t está dada por $g'(t)$. Al utilizar la regla general de potencia, tenemos

$$\begin{aligned} g'(t) &= 50.02\frac{d}{dt}(1 + 1.09t)^{0.1} \\ &= (50.02)(0.1)(1 + 1.09t)^{-0.9}\frac{d}{dt}(1 + 1.09t) \\ &= (50.02)(0.1)(1.09)(1 + 1.09t)^{-0.9} \\ &= 5.45218(1 + 1.09t)^{-0.9} \\ &= \frac{5.45218}{(1 + 1.09t)^{-0.9}} \end{aligned}$$

USO DE LA TECNOLOGÍA

Determinación de la derivada de una función compuesta

EJEMPLO 1 Determine la tasa de cambio de $f(x) = \sqrt{x}(1 + 0.02x^2)^{3/2}$ cuando $x = 2.1$.

Solución Al utilizar la operación de la derivada numérica de una calculadora graficadora, determinamos

$$f'(2.1) = 0.5821463392$$

o aproximadamente 0.58 unidades por unidad de cambio en x (vea la figura T1).

```
nDeriv(X^.5(1+.0
2X^2)^1.5, X, 2.1)

     .5821463392
█
```

FIGURA T1
La pantalla TI-83/84 de la derivada numérica para calcular $f'(2.1)$

■

EJEMPLO DE APLICACIÓN 2 Asistencia al parque de diversiones
La gerencia de AstroWorld ("El parque de atracciones del futuro") estima que el numero total de visitantes (en miles) al parque de diversiones en t horas después de la hora de apertura a las 9 a.m., está dado por

$$N(t) = \frac{30t}{\sqrt{2 + t^2}}$$

¿Cuál es la tasa a la que los visitantes son admitidos al parque de diversiones a las 10:30 a.m.?

Solución Al utilizar la operación de la derivada numérica de una calculadora graficadora, determinamos

$$N'(1.5) \approx 6.8481$$

o aproximadamente 6,848 visitantes por hora (vea la figura T2). ■

```
nDeriv((30X)/(2+
X^2)^.5,X,1.5)
      6.848066034
█
```

FIGURA T2
La pantalla TI-83/84 de la derivada numérica al calcular $N'(1.5)$

EJERCICIOS CON TECNOLOGÍA

En los ejercicios 1-6 utilice la operación de la derivada numérica para determinar la tasa de cambio de *f*(*x*) en el valor dado de *x*. Proporcione su respuesta precisa a cuatro posiciones decimales.

1. $f(x) = \sqrt{x^2 - x^4}$; $x = 0.5$
2. $f(x) = x - \sqrt{1 - x^2}$; $x = 0.4$
3. $f(x) = x\sqrt{1 - x^2}$; $x = 0.2$
4. $f(x) = (x + \sqrt{x^2 + 4})^{3/2}$; $x = 1$
5. $f(x) = \dfrac{\sqrt{1 + x^2}}{x^3 + 2}$; $x = -1$
6. $f(x) = \dfrac{x^3}{1 + (1 + x^2)^{3/2}}$; $x = 3$
7. **Producción mundial de automóviles** La producción mundial de automóviles entre 1960 y 1990 está dada por la función
$$f(t) = 16.5\sqrt{1 + 2.2t} \qquad (0 \le t \le 3)$$
donde $f(t)$ se mide en unidades de un millón y t se mide en décadas, con $t = 0$ correspondiente al inicio de 1960. ¿Cuál fue la tasa de cambio de la producción mundial de vehículos a principios de 1970? ¿A principios de 1980?
Fuente: Automotive News
8. **Acumulación de años** Las personas de 40 y 50 años y medio están en los primeros años de inversión. Los estudios demográficos de este tipo son de particular importancia para las instituciones financieras. La función
$$N(t) = 34.4(1 + 0.32125t)^{0.15} \qquad (0 \le t \le 12)$$
da el número proyectado del grupo de personas en esta edad en Estados Unidos (en millones) al año t, donde $t = 0$ corresponde a principios de 1996.
   a. ¿Qué tan grande fue el segmento de la población proyectado a principios de 2005?
   b. ¿Qué tan rápido creció el segmento de la población a principios de 2005?
Fuente: U.S. Census Bureau

9.7 Diferenciación de funciones exponenciales y logarítmicas

La derivada de una función exponencial

Para estudiar los efectos del presupuesto de los planes de reducción del déficit en los diferentes niveles de ingresos, es importante conocer la distribución de los ingresos de las familias norteamericanas. Con base en los datos de House Budget Committee, House Ways and Means Committee y la U.S. Census Bureau, la gráfica de f se muestra en la figura 48 e indica el número de familias norteamericanas y (en millones) en función de sus ingresos anuales x (en miles de dólares) en 1990.

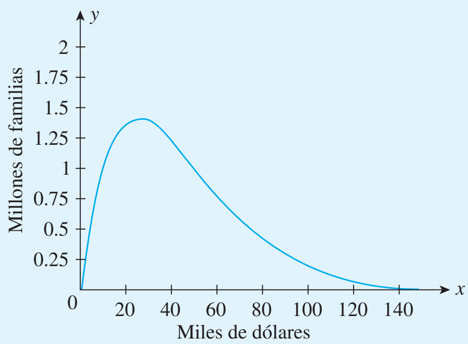


FIGURA 48
La gráfica de f muestra el número de familias frente a su ingreso anual

Fuente: House Budget Committee, House Ways and Means Committee y la U.S. Census Bureau

Observe que la gráfica de f se eleva muy rápidamente, y después declina. En la gráfica de f, se puede ver que la mayoría de las familias norteamericanas ganó menos de \$100,000 por año. De hecho, 95% de las familias norteamericanas ganó menos de \$102,358 por año en 1990 (se hace de nuevo referencia a este modelo en el uso de la tecnología al final de esta sección).

Para el análisis de modelos matemáticos que implican funciones exponenciales y logarítmicas con mayor detalle, se tienen que desarrollar normas para el cálculo de la derivada de estas funciones. Se empieza por observar la regla para el cálculo de la derivada de la función exponencial.

Regla 8: La derivada de la función exponencial

$$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$$

Por tanto, la derivada de la función exponencial con base e es igual a la función misma. Para demostrar la validez de esta regla, calculamos

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{e^x(e^h - 1)}{h} && \text{Escriba } e^{x+h} = e^x e^h \text{ y factorice.} \\
&= e^x \lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h} && \text{¿Por qué?}
\end{aligned}$$

Para evaluar

$$\lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h}$$

TABLA 5

h	$\dfrac{e^h - 1}{h}$
0.1	1.0517
0.01	1.0050
0.001	1.0005
−0.1	0.9516
−0.01	0.9950
−0.001	0.9995

observe la tabla 5, que está construida con la ayuda de una calculadora. Desde la tabla observamos que

$$\lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$$

(Aunque una prueba rigurosa de este hecho es posible, está más allá del alcance de este libro. Vea también el ejemplo 1 de la sección "Uso de la tecnología" de la página 640). Al utilizar este resultado, concluimos que

$$f'(x) = e^x \cdot 1 = e^x$$

como se propuso demostrar.

EJEMPLO 1 Determine la derivada de cada una de las siguientes funciones:

a. $f(x) = x^2 e^x$ **b.** $g(t) = (e^t + 2)^{3/2}$

Solución

a. La regla del producto da

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{dx}(x^2 e^x) = x^2 \frac{d}{dx}(e^x) + e^x \frac{d}{dx}(x^2) \\ &= x^2 e^x + e^x(2x) = xe^x(x + 2) \end{aligned}$$

Ver página 16.

b. Al utilizar la regla general de potencia, determinamos

$$g'(t) = \frac{3}{2}(e^t + 2)^{1/2} \frac{d}{dt}(e^t + 2) = \frac{3}{2}(e^t + 2)^{1/2} e^t = \frac{3}{2} e^t (e^t + 2)^{1/2}$$

■

Exploración con TECNOLOGÍA

Considere la función exponencial $f(x) = b^x$ $(b > 0, b \neq 1)$.

1. Utilice la definición de la derivada de una función para demostrar que

$$f'(x) = b^x \cdot \lim_{h\to 0} \frac{b^h - 1}{h}$$

2. Utilice el resultado del punto 1 para demostrar que

$$\frac{d}{dx}(2^x) = 2^x \cdot \lim_{h\to 0} \frac{2^h - 1}{h}$$

$$\frac{d}{dx}(3^x) = 3^x \cdot \lim_{h\to 0} \frac{3^h - 1}{h}$$

3. Utilice la técnica en la sección "Uso de la tecnología", página 640, para demostrar que (a dos posiciones decimales)

$$\lim_{h\to 0} \frac{2^h - 1}{h} = 0.69 \quad \text{y} \quad \lim_{h\to 0} \frac{3^h - 1}{h} = 1.10$$

4. Concluya de los resultados de los puntos 2 y 3 que

$$\frac{d}{dx}(2^x) \approx (0.69)2^x \quad \text{y} \quad \frac{d}{dx}(3^x) \approx (1.10)3^x$$

(*continúa*)

Así,

$$\frac{d}{dx}(b^x) = k \cdot b^x$$

donde k es una constante apropiada.

5. Los resultados del punto 4 sugieren que, por conveniencia, elija la base b, donde $2 < b < 3$, así que $k = 1$. Este valor de b es $e \approx 2.718281828.\ldots$ Por tanto,

$$\frac{d}{dx}(e^x) \approx e^x$$

Éste es el porqué se prefiere trabajar con la función exponencial $f(x) = e^x$.

Aplicación de la regla de la cadena a las funciones exponenciales

Para ampliar la clase de funciones exponenciales a ser diferenciadas, se apela a la regla de la cadena para obtener la siguiente regla para diferenciar funciones compuestas de la forma $h(x) = e^{f(x)}$. Un ejemplo de dicha función es $h(x) = e^{x^2-2x}$. Aquí, $f(x) = x^2 - 2x$.

Regla 9: Regla de la cadena para funciones exponenciales

Si $f(x)$ es una función diferenciable, entonces

$$\frac{d}{dx}(e^{f(x)}) = e^{f(x)}f'(x)$$

Para ver esto, observe que si $h(x) = g[f(x)]$, donde $g(x) = e^x$, después por virtud de la regla de la cadena,

$$h'(x) = g'(f(x))f'(x) = e^{f(x)}f'(x)$$

ya que $g'(x) = e^x$.

Como ayuda para recordar la regla de la cadena para funciones exponenciales, observe que ésta tiene la siguiente forma:

$$\frac{d}{dx}(e^{f(x)}) = e^{f(x)} \cdot \text{ derivada del exponente}$$

Mismo

EJEMPLO 2 Determine la derivada de cada una de las siguientes funciones:

a. $f(x) = e^{2x}$ **b.** $y = e^{-3x}$ **c.** $g(t) = e^{2t^2+t}$

Solución

a. $f'(x) = e^{2x}\dfrac{d}{dx}(2x) = e^{2x} \cdot 2 = 2e^{2x}$

b. $\dfrac{dy}{dx} = e^{-3x}\dfrac{d}{dx}(-3x) = -3e^{-3x}$

c. $g'(t) = e^{2t^2+t} \cdot \dfrac{d}{dt}(2t^2 + t) = (4t + 1)e^{2t^2+t}$ ■

EJEMPLO 3 Diferencie la función $y = xe^{-2x}$.

Solución Al utilizar la regla del producto, seguida por la regla de la cadena, determinamos

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= x\frac{d}{dx}e^{-2x} + e^{-2x}\frac{d}{dx}(x)\\ &= xe^{-2x}\frac{d}{dx}(-2x) + e^{-2x} && \text{Utilice la regla de la cadena sobre el primer término.}\\ &= -2xe^{-2x} + e^{-2x}\\ &= e^{-2x}(1-2x)\end{aligned}$$

■

EJEMPLO 4 Diferencie la función $g(t) = \dfrac{e^t}{e^t + e^{-t}}$.

Solución Al utilizar la regla del cociente, seguida por la regla de la cadena, determinamos

$$\begin{aligned}g'(t) &= \frac{(e^t + e^{-t})\frac{d}{dt}(e^t) - e^t\frac{d}{dt}(e^t + e^{-t})}{(e^t + e^{-t})^2}\\ &= \frac{(e^t + e^{-t})e^t - e^t(e^t - e^{-t})}{(e^t + e^{-t})^2} && (x^2)\ \text{Vea la página 11.}\\ &= \frac{e^{2t} + 1 - e^{2t} + 1}{(e^t + e^{-t})^2} && e^0 = 1\\ &= \frac{2}{(e^t + e^{-t})^2}\end{aligned}$$

■

EJEMPLO 5 En la sección 3.3 se estudiaron algunas aplicaciones de la función exponencial

$$Q(t) = Q_0e^{kt}$$

donde Q_0 y k son constantes positivas y $t \in [0, \infty)$. Una cantidad $Q(t)$ que crece con base en esta ley experimenta un crecimiento exponencial. Demuestre que para la cantidad $Q(t)$ que experimenta el crecimiento exponencial, la tasa de crecimiento de la cantidad $Q'(t)$ en cualquier momento t es directamente proporcional a la cantidad actual.

Solución Al utilizar la regla de cadena para funciones exponenciales, calculamos la derivada Q' de la función Q. Por tanto,

$$\begin{aligned}Q'(t) &= Q_0e^{kt}\frac{d}{dt}(kt)\\ &= Q_0e^{kt}(k)\\ &= kQ_0e^{kt}\\ &= kQ(t) && Q(t) = Q_0e^{kt}\end{aligned}$$

que es la conclusión deseada. ■

La derivada de ln *x*

Ahora enfoque su atención en la diferenciación de funciones logarítmicas.

Regla 10: La derivada de ln *x*

$$\frac{d}{dx}\ln|x| = \frac{1}{x} \qquad (x \neq 0)$$

Para obtener la regla 10, suponga que $x > 0$ y escriba $f(x) = \ln x$ en la forma equivalente

$$x = e^{f(x)}$$

Para diferenciar ambos lados de la ecuación con respecto a x determinamos, utilizando la regla de cadena,

$$1 = e^{f(x)} \cdot f'(x)$$

de la cual vemos que

$$f'(x) = \frac{1}{e^{f(x)}}$$

o, puesto que $e^{f(x)} = x$,

$$f'(x) = \frac{1}{x}$$

como se propuso demostrar. Se le pide compruebe la regla para el caso $x < 0$ en el ejercicio 85, página 639.

EJEMPLO 6 Determine la derivada de cada función:

a. $f(x) = x \ln x$ **b.** $g(x) = \dfrac{\ln x}{x}$

Solución

a. Al utilizar la regla del producto, obtenemos

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{dx}(x \ln x) = x \frac{d}{dx}(\ln x) + (\ln x)\frac{d}{dx}(x) \\ &= x\left(\frac{1}{x}\right) + \ln x = 1 + \ln x \end{aligned}$$

b. Al utilizar la regla del cociente, obtenemos

$$g'(x) = \frac{x \dfrac{d}{dx}(\ln x) - (\ln x)\dfrac{d}{dx}(x)}{x^2} = \frac{x\left(\dfrac{1}{x}\right) - \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

Explore y analice

Puede obtener la fórmula para la derivada de $f(x) = \ln x$ directamente de la definición de la derivada, de la forma siguiente,

1. Demuestre que

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \ln\left(1 + \frac{h}{x}\right)^{1/h}$$

2. Coloque $m = x/h$ y observe que $m \to \infty$ como $h \to 0$. Entonces, $f'(x)$ puede escribirse en la forma

$$f'(x) = \lim_{m \to \infty} \ln\left(1 + \frac{1}{m}\right)^{m/x}$$

3. Finalmente, utilice tanto el hecho que la función logarítmica natural es continua como la definición del número e para demostrar que

$$f'(x) = \frac{1}{x} \ln\left[\lim_{m \to \infty}\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m\right] = \frac{1}{x}$$

La regla de la cadena para funciones logarítmicas

Para ampliar la clase de funciones logarítmicas para ser diferenciadas, se apela una vez más a la regla de cadena para obtener la siguiente regla para la diferenciación de funciones compuestas de la forma $h(x) = \ln f(x)$, donde $f(x)$ se supone sea una función diferenciable positiva.

Regla 11: Regla de la cadena para funciones logarítmicas

Si $f(x)$ es una función diferenciable, entonces

$$\frac{d}{dx}[\ln f(x)] = \frac{f'x}{f(x)} \qquad [f(x) > 0]$$

Para ver esto, observe que $h(x) = g[f(x)]$, donde $g(x) = \ln x$ $(x > 0)$. Ya que $g'(x) = 1/x$, se tiene, al utilizar la regla de la cadena,

$$\begin{aligned} h'(x) &= g'(f(x))f'(x) \\ &= \frac{1}{f(x)} f'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} \end{aligned}$$

Observe que en el caso especial $f(x) = x$, $h(x) = \ln x$, así que la derivada de h es, por la regla 10, dada por $h'(x) = 1/x$.

EJEMPLO 7 Determine la derivada de la función $f(x) = \ln(x^2 + 1)$.

Solución Al utilizar la regla 11, observamos de inmediato que

$$f'(x) = \frac{\frac{d}{dx}(x^2 + 1)}{x^2 + 1} = \frac{2x}{x^2 + 1}$$

■

Al diferenciar funciones que involucran logaritmos, las reglas de los logaritmos pueden utilizarse como ventaja, como se muestra en los ejemplos 8 y 9.

EJEMPLO 8 Diferencie la función $y = \ln[(x^2 + 1)(x^3 + 2)^6]$.

Solución Primero escribimos nuevamente la función dada y utilizamos las propiedades de los logaritmos:

$$\begin{aligned} y &= \ln[(x^2 + 1)(x^3 + 2)^6] \\ &= \ln(x^2 + 1) + \ln(x^3 + 2)^6 && \ln mn = \ln m + \ln n \\ &= \ln(x^2 + 1) + 6\ln(x^3 + 2) && \ln m^n = n \ln m \end{aligned}$$

Al diferenciar y utilizar la regla 11, obtenemos

$$\begin{aligned} y' &= \frac{\frac{d}{dx}(x^2 + 1)}{x^2 + 1} + \frac{6\frac{d}{dx}(x^3 + 2)}{x^3 + 2} \\ &= \frac{2x}{x^2 + 1} + \frac{6(3x^2)}{x^3 + 2} = \frac{2x}{x^2 + 1} + \frac{18x^2}{x^3 + 2} \end{aligned}$$

■

Exploración con TECNOLOGÍA

Utilice una calculadora graficadora para trazar las gráficas de $f(x) = \ln x$; su primera función derivada $f'(x) = 1/x$; y su segunda función derivada $f''(x) = -1/x^2$, utilizando la misma ventana de visualización $[0, 4] \times [-3, 3]$.

1. ¿Qué puede decir acerca de la gráfica de f'?
2. ¿Qué puede decir acerca de la gráfica de f''?

EJEMPLO 9 Determine la derivada de la función $g(t) = \ln(t^2e^{-t^2})$.

Solución Aquí nuevamente, para salvar todo el trabajo, primero simplificamos la expresión dada utilizando las propiedades de los logaritmos. Tenemos

$$\begin{aligned} g(t) &= \ln(t^2e^{-t^2}) \\ &= \ln t^2 + \ln e^{-t^2} && \ln mn = \ln m + \ln n \\ &= 2\ln t - t^2 && \ln m^n = n\ln m \quad \text{y} \quad \ln e = 1 \end{aligned}$$

Por tanto,

$$g'(t) = \frac{2}{t} - 2t = \frac{2(1 - t^2)}{t}$$

■

Los ejemplos 10 y 11 involucrados determinan la tasa de cambio de una función exponencial.

EJEMPLO DE APLICACIÓN 10 Depreciación de los activos Un activo industrial se amortiza a una tasa, de modo que su valor en libros t años a partir de ahora será de

$$V(t) = 50{,}000e^{-0.4t}$$

dólares. ¿Qué tan rápido el valor en libros del activo cambiará en 3 años a partir de ahora?

Solución La tasa de cambio del valor en libros del activo en t años a partir de ahora es

$$\begin{aligned} V'(t) &= 50{,}000\,\frac{d}{dt}\,e^{-0.4t} \\ &= 50{,}000(-0.4)e^{-0.4t} = -20{,}000e^{-0.4t} \end{aligned}$$

Así, en 3 años a partir de ahora el valor en libros del activo cambiará a una tasa de

$$V'(3) = -20{,}000e^{-0.4(3)} = -20{,}000e^{-1.2} \approx -6023.88$$

es decir, decrece a la tasa de aproximadamente \$6,024 por año. ■

VIDEO

EJEMPLO DE APLICACIÓN 11 Uso de Internet Según los cibernautas, las conexiones a Internet están proliferando a una tasa cada vez mayor. El número de equipos CPU (en millones) se estima sean

$$N(t) = 3.45e^{0.64t} \qquad (0 \le t \le 6)$$

en el año t ($t = 0$ corresponde a principios de 1994). ¿Qué tan rápido creció el número de computadoras CPU a principios de 1996? ¿A principios de 1999?
Fuente: Cibernautas

Solución La tasa de crecimiento de las computadoras CPU en el momento t está dada por

$$\begin{aligned} N'(t) &= (3.45)(0.64)e^{0.64t} \\ &= 2.208e^{0.64t} \end{aligned}$$

En particular, la tasa de crecimiento de las computadoras CPU a principios de 1996 está dada por

$$N'(2) = 2.208e^{0.64(2)} = 7.94138$$

o aproximadamente 7.94 millones de computadoras por año. La tasa de crecimiento de las computadoras CPU a principios de 1999 está dada por

$$N'(5) = 2.208e^{0.64(5)} = 54.16783$$

o aproximadamente 54.17 millones de computadoras por año. ■

9.7 Ejercicios de autoevaluación

1. Determine la primera y segunda derivadas de $f(x) = xe^{-x}$.
2. Determine una ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x) = x \ln(2x + 3)$ en el punto $(-1, 0)$.

Las soluciones de los ejercicios de autoevaluación 9.7 pueden encontrarse en la página 640.

9.7 Preguntas de concepto

1. Exponga la regla para diferenciar (a) $f(x) = e^x$ y (b) $g(x) = e^{f(x)}$, donde f es una función diferenciable.
2. Sea $f(x) = e^{kx}$.
   a. Calcule $f'(x)$.
   b. Utilice el resultado para deducir el signo de f' para el caso $k > 0$ y el caso $k < 0$.
3. Exprese la regla para diferenciar (a) $f(x) = \ln|x|$ $(x \neq 0)$, y $g(x) = \ln f(x)$ $[f(x) > 0]$, donde f es una función diferenciable.

9.7 Ejercicios

En los ejercicios 1-28 determine las derivadas de la función.

1. $f(x) = e^{3x}$
2. $f(x) = 3e^x$
3. $g(t) = e^{-t}$
4. $f(x) = e^{-2x}$
5. $f(x) = e^x + x$
6. $f(x) = 2e^x - x^2$
7. $f(x) = x^3e^x$
8. $f(u) = u^2e^{-u}$
9. $f(x) = \dfrac{2e^x}{x}$
10. $f(x) = \dfrac{x}{e^x}$
11. $f(x) = 3(e^x + e^{-x})$
12. $f(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$
13. $f(w) = \dfrac{e^w + 1}{e^w}$
14. $f(x) = \dfrac{e^x}{e^x + 1}$
15. $f(x) = 2e^{3x-1}$
16. $f(t) = 4e^{3t+2}$
17. $h(x) = e^{-x^2}$
18. $f(x) = e^{x^2-1}$
19. $f(x) = 3e^{-1/x}$
20. $f(x) = e^{1/(2x)}$
21. $f(x) = (e^x + 1)^{25}$
22. $f(x) = (4 - e^{-3x})^3$
23. $f(x) = e^{\sqrt{x}}$
24. $f(t) = -e^{-\sqrt{2t}}$
25. $f(x) = (x - 1)e^{3x+2}$
26. $f(s) = (s^2 + 1)e^{-s^2}$
27. $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$
28. $g(t) = \dfrac{e^{-t}}{1 + t^2}$

En los ejercicios 29-32 determine la segunda derivada de la función.

29. $f(x) = e^{-4x} + 2e^{3x}$
30. $f(t) = 3e^{-2t} - 5e^{-t}$
31. $f(x) = 2xe^{3x}$
32. $f(t) = t^2e^{-2t}$
33. Determine una ecuación de la recta tangente a la gráfica de $y = e^{2x-3}$ en el punto $\left(\frac{3}{2}, 1\right)$.
34. Determine una ecuación de la recta tangente a la gráfica de $y = e^{-x^2}$ en el punto $= \left(1, \frac{1}{e}\right)$.

En los ejercicios 35-62 determine la derivada de la función.

35. $f(x) = 5 \ln x$
36. $f(x) = \ln 5x$
37. $f(x) = \ln(x + 1)$
38. $g(x) = \ln(2x + 1)$
39. $f(x) = \ln x^8$
40. $h(t) = 2 \ln t^5$
41. $f(x) = \ln \sqrt{x}$
42. $f(x) = \ln(\sqrt{x} + 1)$
43. $f(x) = \ln \dfrac{1}{x^2}$
44. $f(x) = \ln \dfrac{1}{2x^3}$
45. $f(x) = \ln(4x^2 - 6x + 3)$

46. $f(x) = \ln(3x^2 - 2x + 1)$

47. $f(x) = \ln \dfrac{2x}{x+1}$

48. $f(x) = \ln \dfrac{x+1}{x-1}$

49. $f(x) = x^2 \ln x$

50. $f(x) = 3x^2 \ln 2x$

51. $f(x) = \dfrac{2 \ln x}{x}$

52. $f(x) = \dfrac{3 \ln x}{x^2}$

53. $f(u) = \ln(u - 2)^3$

54. $f(x) = \ln(x^3 - 3)^4$

55. $f(x) = \sqrt{\ln x}$

56. $f(x) = \sqrt{\ln x + x}$

57. $f(x) = (\ln x)^3$

58. $f(x) = 2(\ln x)^{3/2}$

59. $f(x) = \ln(x^3 + 1)$

60. $f(x) = \ln\sqrt{x^2 - 4}$

61. $f(x) = e^x \ln x$

62. $f(x) = e^x \ln\sqrt{x + 3}$

En los ejercicios 63-66 determine la segunda derivada de la función.

63. $f(x) = \ln 2x$

64. $f(x) = \ln(x + 5)$

65. $f(x) = \ln(x^2 + 2)$

66. $f(x) = (\ln x)^2$

67. Determine una ecuación de la recta tangente a la gráfica de $y = x \ln x$ en el punto (1, 0).

68. Determine una ecuación de la recta tangente hacia la gráfica de $y = \ln x^2$ en el punto (2, ln 4).

69. PORCENTAJE DE REUBICACIÓN DE LA POBLACIÓN Con base en datos obtenidos de Census Bureau, el gerente de Plymouth Van Lines estima que el porcentaje de la población total reubicado en el año t ($t = 0$ corresponde al año 1960) se puede aproximar por la fórmula

$$P(t) = 20.6e^{-0.009t} \qquad (0 \leq t \leq 35)$$

Calcule $P'(10)$, $P'(20)$ y $P'(30)$ e interprete sus resultados.

70. BANCA EN LÍNEA En un estudio elaborado en 2000, el porcentaje de hogares que utiliza la banca en línea se prevé que sea

$$f(t) = 1.5e^{0.78t} \qquad (0 \leq t \leq 4)$$

donde t se mide en años, con $t = 0$ corresponde a principios de 2000.

a. ¿Cuál fue el porcentaje proyectado de hogares que utiliza la banca en línea a principios de 2003?

b. ¿Qué tan rápido fue el cambio en el porcentaje proyectado de hogares que usa la banca en línea al inicio de 2003?

c. ¿Qué tan rápido fue el cambio de la tasa del porcentaje proyectado de hogares que usa la banca en línea a principios de 2003?

Sugerencia: Se quiere $f''(3)$. ¿Por qué?

Fuente: Online Banking Report

71. POBLACIÓN CON MÁS DE 100 AÑOS DE EDAD Con base en datos obtenidos de Census Bureau, el número de estadounidenses con edad de más de 100 años se espera que sea

$$P(t) = 0.07e^{0.54t} \qquad (0 \leq t \leq 4)$$

donde $P(t)$ se mide en millones y t se mide en décadas, con $t = 0$ corresponde a principios de 2000.

a. ¿Cuál fue la población de estadounidenses mayores de 100 a principios de 2000? ¿Cuál será a principios de 2030?

b. ¿Qué tan rápido fue el cambio en la población de estadounidenses con más de 100 años de edad a principios de 2000? ¿Qué tan rápido será el cambio a principios de 2030?

Fuente: U.S. Census Bureau

72. CRECIMIENTO DE LA POBLACIÓN MUNDIAL Después de su tasa de crecimiento cada vez mayor durante las décadas de 1980 y 1990, la tasa de crecimiento de la población mundial se desacelerará considerablemente en el siglo XXI. La función

$$G(t) = 1.58e^{-0.213t}$$

da la tasa anual proyectada en el crecimiento promedio de la población/década en la $t$ava década, con $t = 1$ correspondiente a 2000.

a. ¿Cuál será la tasa proyectada del promedio anual de crecimiento de la población en 2020 ($t = 3$)?

b. ¿Qué tan rápido cambiará la tasa proyectada del promedio anual del crecimiento de la población en 2020?

Fuente: U.S. Census Bureau

73. MUERTES DEBIDAS A DERRAMES CEREBRALES Antes de 1950 poco se sabía acerca de los derrames cerebrales. En 1960, sin embargo, los factores de riesgo como la hipertensión fueron identificados. En los últimos años, el escáner CAT se usa como una herramienta de diagnóstico que ha ayudado a prevenir los derrames cerebrales. Como resultado, la muerte por derrames cerebrales ha disminuido drásticamente. La función

$$N(t) = 130.7e^{-0.1155t^2} + 50 \qquad (0 \leq t \leq 6)$$

da el número de muertes por cada 100,000 habitantes entre 1950 hasta 2010, donde t se mide en décadas, con $t = 0$ correspondiente a 1950.

a. ¿Cuántas muertes debido a derrames cerebrales por cada 100,000 personas hubo en 1950?

b. ¿Qué tan rápido cambió el número de muertes debido a derrames cerebrales por cada 100,000 personas en 1950? ¿En 1960? ¿En 1970? ¿En 1980?

c. Si la tendencia continúa, ¿cuántas muertes debido a derrames cerebrales por cada 100,000 habitantes habrá en 2010?

Fuente: American Heart Association, Centers for Disease Control and National Institute of Health

74. VIAJES EN AVIÓN El transporte aéreo ha ido en aumento de forma espectacular en los últimos 30 años. En un estudio realizado en 2000, la FAA proyectó un crecimiento más exponencial para el transporte aéreo hasta 2010. La función

$$f(t) = 666e^{0.0413t} \qquad (0 \leq t \leq 11)$$

da el número de pasajeros (en millones) en el año t, con $t = 0$ correspondiente a 2000.

a. ¿Cuántos pasajeros por aire estaban allí en 2000? ¿Cuál fue el número previsto de pasajeros por aire para 2005?

b. ¿Cuál fue la tasa de cambio del número de pasajeros por aire en 2005?

Fuente: Federal Aviation Administration

75. Nivel de alcohol en la sangre El porcentaje de alcohol en el torrente sanguíneo de una persona en t h después de haber bebido 8 onzas de whisky está dada por

$$A(t) = 0.23te^{-0.4t} \qquad (0 \leq t \leq 12)$$

a. ¿Cuál es el porcentaje de alcohol en el torrente sanguíneo de una persona después de $\frac{1}{2}$ hora? ¿Después de 8 horas?
b. ¿Qué tan rápido cambia el porcentaje de alcohol en el torrente sanguíneo de una persona después de $\frac{1}{2}$ hora? ¿Después de 8 horas?
Fuente: Enciclopedia Británica

76. Lecturas del termómetro Un termómetro se mueve desde el interior de una casa hasta la terraza. Su temperatura en t minutos después de que se ha movido está dada por

$$T(t) = 30 + 40e^{-0.98t}$$

a. ¿Cuál es la temperatura en el interior de la casa?
b. ¿Qué tan rápido cambia la lectura en el termómetro 1 minuto después de que se sacó de la casa?
c. ¿Cuál es la temperatura al aire libre?
Sugerencia: Evalúe $\lim_{t\to\infty} T(t)$.

77. Promoción de ventas Lady Bug, una cadena de tiendas de ropa para mujer, determinó que t días después del final de una promoción el volumen de ventas estaba dado por

$$S(t) = 20{,}000(1 + e^{-0.5t}) \qquad (0 \leq t \leq 5)$$

dólares.
a. Determine la tasa de cambio en el volumen de ventas de Lady Bug en $t = 1$, $t = 2$, $t = 3$ y $t = 4$.
b. ¿Después de cuántos días el volumen de ventas caerá por debajo de $27,400?

78. Consumo de energía de aparatos El consumo promedio de energía de un refrigerador/congelador típico fabricado por York Industries es de aproximadamente

$$C(t) = 1{,}486e^{-0.073t} + 500 \qquad (0 \leq t \leq 20)$$

kilowatts por hora (kWh) al año, donde t se mide en años, con $t = 0$ correspondiente a 1972.
a. ¿Cuál fue el consumo promedio de energía del refrigerador/congelador York a principios de 1972?
b. Demuestre que el consumo promedio de energía del refrigerador/congelador York disminuye con los años en cuestión.
c. Todos los refrigeradores/congeladores fabricados el 1 de enero de 1990 deben cumplir con los estándares de 950 kWh por año de consumo máximo de energía establecidos por la Ley de Conservación Nacional de Aparatos. Demuestre que el refrigerador/congelador York cumple con este requisito.

79. Precio del perfume La demanda mensual de una determinada marca de perfume está dada por la ecuación

$$p = 100e^{-0.0002x} + 150$$

donde p denota el precio unitario de venta (en dólares) y x denota la cantidad demandada (en frascos de 1 onza).
a. Determine la tasa de cambio del precio por botella cuando $x = 1{,}000$ y $x = 2{,}000$.
b. ¿Cuál es el precio por botella cuando $x = 1{,}000$? ¿Cuando $x = 2{,}000$?

80. Inmunización contra la poliomielitis La poliomielitis, el asesino una vez tan temido, disminuyó notablemente en la década de 1950 en Estados Unidos, después de que Jonas Salk desarrollara la vacuna que inactivaba la polio y que llevó a cabo una inmunización masiva de niños. El número de casos de polio en dicho país desde principios de 1959 hasta principios de 1963 es aproximado por la función

$$N(t) = 5.3e^{0.095t^2 - 0.85t} \qquad (0 \leq t \leq 4)$$

donde $N(t)$ da el número de casos de polio (en miles) y t se mide en años con $t = 0$ correspondiente al comienzo de 1959.
a. Demuestre que la función N es decreciente sobre el intervalo de tiempo en consideración.
b. ¿Qué tan rápido disminuyó el número de casos de polio a principios de 1959? ¿A principios de 1962? (*comentario:* la siguiente presentación de la vacuna oral fue desarrollada por el doctor Albert B. Sabin en 1963, la polio en Estados Unidos había sido, por todos los propósitos prácticos, eliminada).

81. Petróleo utilizado para alimentar la productividad económica Un estudio sobre el uso mundial del petróleo fue desarrollado por una importante compañía petrolera. El estudio predijo que la cantidad de petróleo empleada como combustible para la productividad de un país estaba dada por

$$f(t) = 1.5 + 1.8te^{-1.2t} \qquad (0 \leq t \leq 4)$$

donde $f(t)$ denota el número de barriles por cada $1,000 de la producción económica y t se mide en décadas ($t = 0$ corresponde a 1965). Calcule $f'(0)$, $f'(1)$, $f'(2)$ y $f'(3)$ e interprete sus resultados.

En los ejercicios 82-84 determine si el pronunciamiento es verdadero o falso. Si es verdadero, explique por qué lo es. Si es falso, proporcione un ejemplo que demuestre por qué lo es.

82. Si $f(x) = 3^x$, entonces $f'(x) = x \cdot 3^{x-1}$.

83. Si $f(x) = e^\pi$, entonces $f'(x) = e^\pi$.

84. Si $f(x) = \ln 5$, entonces $f'(x) = \frac{1}{5}$.

85. Demuestre que $\dfrac{d}{dx} \ln|x| = \dfrac{1}{x}$ $(x \neq 0)$ para el caso $x < 0$.

86. Utilice la definición de la derivada para demostrar que

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(x + 1)}{x} = 1$$

9.7 Soluciones de los ejercicios de autoevaluación

1. Al utilizar la regla del producto, obtenemos

$$\begin{aligned} f'(x) &= x\frac{d}{dx}e^{-x} + e^{-x}\frac{d}{dx}x \\ &= -xe^{-x} + e^{-x} = (1-x)e^{-x} \end{aligned}$$

Al utilizar nuevamente la regla del producto, obtenemos

$$\begin{aligned} f''(x) &= (1-x)\frac{d}{dx}e^{-x} + e^{-x}\frac{d}{dx}(1-x) \\ &= (1-x)(-e^{-x}) + e^{-x}(-1) \\ &= -e^{-x} + xe^{-x} - e^{-x} = (x-2)e^{-x} \end{aligned}$$

2. La pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en cualquier punto $(x, f(x))$ que permanece sobre la gráfica de f está dada por $f'(x)$. Al utilizar la regla del producto, se determina

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{dx}[x\ln(2x+3)] \\ &= x\frac{d}{dx}\ln(2x+3) + \ln(2x+3)\cdot\frac{d}{dx}(x) \\ &= x\left(\frac{2}{2x+3}\right) + \ln(2x+3)\cdot 1 \\ &= \frac{2}{2x+3} + \ln(2x+3) \end{aligned}$$

En particular, la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(-1, 0)$ es

$$f'(-1) = \frac{-2}{-2x+3} + \ln 1 = -2$$

Por tanto, al utilizar la forma punto-pendiente de la ecuación de una recta, observamos que la ecuación requerida es

$$\begin{aligned} y - 0 &= -2(x+1) \\ y &= -2x - 2 \end{aligned}$$

USO DE LA TECNOLOGÍA

EJEMPLO 1 Al comienzo de la sección 9.7 hemos demostrado por medio de una tabla de valores de $(e^h - 1)/h$ por todos los valores seleccionados de h la verosimilitud del resultado

$$\lim_{h\to 0}\frac{e^h - 1}{h} = 1$$

Para obtener una confirmación visual de este resultado, elabore la gráfica de

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{x}$$

en la ventana de visualización $[-1, 1] \times [0, 2]$ (figura T1). De la gráfica de f, observe que $f(x)$ parece aproximarse a 1 conforme x se aproxima a 0. ■

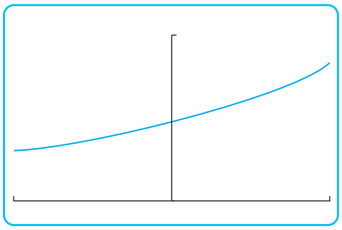


FIGURA T1
Gráfica de f en la ventana de visualización $[-1, 1] \times [0, 2]$

La función de la derivada numérica de una calculadora graficadora dará la derivada de una función exponencial o logarítmica para cualquier valor de x, como lo hizo por las funciones algebraicas.

EJERCICIOS CON TECNOLOGÍA

En los ejercicios 1-6 utilice la operación de la derivada numérica para determinar la tasa de cambio de $f(x)$ en el valor dado de x. Proporcione una respuesta precisa a cuatro posiciones decimales.

1. $f(x) = x^3e^{-1/x}$; $x = -1$
2. $f(x) = (\sqrt{x} + 1)^{3/2}e^{-x}$; $x = 0.5$
3. $f(x) = x^3\sqrt{\ln x}$; $x = 2$
4. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}\ln x}{x+1}$; $x = 3.2$
5. $f(x) = e^{-x}\ln(2x+1)$; $x = 0.5$
6. $f(x) = \dfrac{e^{-\sqrt{x}}}{\ln(x^2+1)}$; $x = 1$
7. **UNA SITUACIÓN DE EXTINCIÓN** El número de cocodrilos de agua salada en una determinada zona del norte de Australia está dado por

$$P(t) = \frac{300e^{-0.024t}}{5e^{-0.024t} + 1}$$

a. ¿Cuántos cocodrilos se encontraban inicialmente en la población?
b. Demuestre que $\lim_{t\to\infty} P(t) = 0$.
c. Elabore la gráfica P en la ventana de visualización $[0, 200] \times [0, 70]$.

(*Comentario:* este fenómeno se conoce como *situación de extinción*).

8. **Ingresos de las familias estadounidenses** Con base en datos, se estima que el número de familias estadounidenses y (en millones) que obtuvo x miles de dólares en 1990 está relacionado con la ecuación

$$y = 0.1584xe^{-0.0000016x^3+0.00011x^2-0.04491x} \qquad (x > 0)$$

a. Elabore la gráfica de la ecuación en la ventana de visualización $[0, 150] \times [0, 2]$.
b. ¿Qué tan rápido y cambia con respecto a x cuando $x = 10$? ¿Cuándo $x = 50$? Interprete sus resultados.

Fuente: House Budget Committee, House Ways and Means Committee, and U.S. Census Bureau

9. **Crecimiento de la población mundial** Con base en datos obtenidos en un estudio, la población mundial (en miles de millones) es aproximada por la función

$$f(t) = \frac{12}{1 + 3.74914e^{-1.42804t}} \qquad (0 \le t \le 4)$$

donde t es medida en medios siglos, con $t = 0$ correspondiente a principios de 1950.
a. Elabore la gráfica de la ventana de visualización $[0, 5] \times [0, 14]$.
b. ¿Qué tan rápido se espera que la población crezca a principios de 2000?

Fuente: United Nations Population Division

10. **Amortización de un préstamo** Los Soto planean garantizar el préstamo de $160,000 para comprar una casa. Están considerando una hipoteca convencional a 30 años al 9% anual sobre saldos insolutos. Se puede demostrar que Los Soto tendrán un saldo pendiente de

$$B(x) = \frac{160{,}000(1.0075^{360} - 1.0075^{x})}{1.0075^{360} - 1}$$

dólares después de realizar x pagos de $1,287.40 mensuales.
a. Elabore la gráfica de $B(x)$, utilizando la ventana de visualización $[0, 360] \times [0, 160{,}000]$.
b. Calcule $B(0)$ y $B'(0)$ e interprete sus resultados; calcule $B(180)$ y $B'(180)$ e interprete sus resultados.

11. **Incremento de la delincuencia juvenil** El número de jóvenes de 15 a 19 años creció 21% entre 1994 y 2005, aumentando la tasa de criminalidad. Según el National Council on Crime and Delinquency, el número de arrestos por crímenes violentos de jóvenes menores de 18 años en el año t está dado por

$$f(t) = -0.438t^2 + 9.002t + 107 \qquad (0 \le t \le 13)$$

donde $f(t)$ se mide en miles y t en años, con $t = 0$ correspondiente a 1989. Según la misma fuente, si las tendencias como el consumo de drogas dentro de la ciudad y la mayor disponibilidad de armas de fuego continúa, entonces el número de arrestos por delitos violentos en los jóvenes menores de 18 años en el año t está dado por

$$g(t) = \begin{cases} -0.438t^2 + 9.002t + 107 & \text{si } 0 \le t < 4 \\ 99.456e^{0.07824t} & \text{si } 4 \le t \le 13 \end{cases}$$

donde $g(t)$ se mide en miles y $t = 0$ corresponde a 1989.
a. Calcule $f(11)$ y los resultados de $g(11)$ e interprete sus resultados.
b. Calcule $f'(11)$ y $g'(11)$ e interprete sus resultados.

Fuente: National Council on Crime and Delinquency

12. **Aumento en el rendimiento de los cultivos** Si no se tratan los tallos de frijol, los áfidos (insectos que chupan la savia de la planta) se multiplican a una tasa creciente durante los meses de verano y reducen la productividad y la cosecha de los cultivos. Pero si los áfidos son tratados a mediados de junio, los números disminuyen drásticamente a menos de 100/tallo de frijol, lo que permite se traduzca en un rendimiento del cultivo. La función

$$F(t) = \begin{cases} 62e^{1.152t} & \text{si } 0 \le t < 1.5 \\ 349e^{-1.324(t-1.5)} & \text{si } 1.5 \le t \le 3 \end{cases}$$

da el número de áfidos en un tallo de fríjol típico en el momento t, donde t se mide en meses, con $t = 0$ correspondiente a principios de mayo.
a. ¿Cuántos áfidos hay en un tallo de fríjol típico a principios de junio ($t = 1$)? ¿A principios de julio ($t = 2$)?
b. ¿Qué tan rápido la población de áfidos cambia a principios de junio? ¿A principios de julio?

Fuente: *The Random House Encyclopedia*

13. **Mujeres en la fuerza de trabajo** Con base en los datos de la U.S. Census Bureau, el economista en jefe de Manpower, Inc. construyó la siguiente fórmula que da el porcentaje de la población femenina total en la fuerza de trabajo civil, $P(t)$, a principios de la década t ($t = 0$ corresponde al año 1900):

$$P(t) = \frac{74}{1 + 2.6e^{-0.166t+0.04536t^2-0.0066t^3}} \qquad (0 \le t \le 11)$$

Suponga que esta tendencia continuó durante el resto del siglo XX.
a. ¿Cuál fue el porcentaje de la población femenina total en la fuerza de trabajo civil a principios de 2000?
b. ¿Cuál fue la tasa de crecimiento del porcentaje de la población femenina total en la fuerza de trabajo civil a principios de 2000?

Fuente: U.S. Census Bureau

9.8 Funciones marginales en economía

El análisis marginal es el estudio de la tasa de cambio de las cantidades económicas. Por ejemplo, un economista no está preocupado simplemente con el valor del producto interno bruto de una economía (PIB) en un momento dado, sino que está igualmente preocupado por la tasa a la que aumenta o disminuye. En el mismo sentido, un fabricante no está sólo interesado en el costo total que corresponde a un cierto nivel de producción de un commodity, sino también en la tasa de variación del costo total con respecto al nivel de producción, y así sucesivamente. Comience con un ejemplo para explicar el significado del adjetivo *marginal*, como el utilizado por los economistas.

Las funciones de costo

EJEMPLO DE APLICACIÓN 1 Tasa de cambio de las funciones de costo Suponga que el costo total en dólares obtenidos cada semana por Polaraire para la fabricación de x refrigeradores está dada por la función de costo total

$$C(x) = 8{,}000 + 200x - 0.2x^2 \qquad (0 \le x \le 400)$$

a. ¿Cuál es el costo actual en que incurre para la fabricación del 251º refrigerador?
b. Determine la tasa de cambio de la función del costo total con respecto a x cuando $x = 250$.
c. Compare los resultados obtenidos en los incisos (a) y (b).

Solución

a. El costo total en que incurre al fabricar el 251º refrigerador es la diferencia entre el costo total en que incurre la fabricación de los primeros 251 refrigeradores y el costo total de fabricación de los primeros 250 refrigeradores:

$$\begin{aligned} C(251) - C(250) &= [8{,}000 + 200(251) - 0.2(251)^2] \\ &\quad - [8{,}000 + 200(250) - 0.2(250)^2] \\ &= 45{,}599.8 - 45{,}500 \\ &= 99.80 \end{aligned}$$

o \$99.80.

b. La tasa de cambio de la función del costo total C con respecto a x está dada por la derivada de C, es decir, $C'(x) = 200 - 0.4x$. Por consiguiente, cuando el nivel de fabricación es de 250 refrigeradores, la tasa de cambio del costo total con respecto a x está dada por

$$\begin{aligned} C'(250) &= 200 - 0.4(250) \\ &= 100 \end{aligned}$$

o \$100.

c. Del resultado del inciso (a), se sabe que el costo actual al fabricar el 251º refrigerador es \$99.80. Esta respuesta está muy aproximada por la respuesta del inciso (b), \$100. Para ver por qué esto es así, observe que la diferencia $C(251) - C(250)$ puede estar escrita en la forma

$$\frac{C(251) - C(250)}{1} = \frac{C(250 + 1) - C(250)}{1} = \frac{C(250 + h) - C(250)}{h}$$

donde $h = 1$. En otras palabras, la diferencia $C(251) - C(250)$ es precisamente la tasa de cambio promedio de la función del costo total C sobre el intervalo [250, 251], o, el equivalente, la pendiente de la recta secante a través de los puntos

(250, 45,000) y (251, 45, 599.8). Sin embargo, el número $C'(250) = 100$ es la tasa de cambio instantánea de la función del costo total C en $x = 250$, o el equivalente, la pendiente de la recta tangente a la gráfica de C en $x = 250$.

Ahora cuando h es menor, la tasa de cambio promedio de la función C es una buena aproximación a la tasa de cambio instantánea de la función C, o, de manera equivalente, la pendiente de la recta secante a través de los puntos en cuestión es una buena aproximación a la pendiente de la recta tangente a través del punto en cuestión. Por tanto, se puede esperar que

$$C(251) - C(250) = \frac{C(251) - C(250)}{1} \approx \frac{C(250 + h) - C(250)}{h} \qquad (h \text{ menor})$$

$$\approx \lim_{h \to 0} \frac{C(250 + h) - C(250)}{h} = C'(250)$$

que es precisamente el caso en este ejemplo. ■

El costo actual derivado de producir una unidad adicional de una determinada materia prima, dado que una planta se encuentra ya en un cierto nivel de operación, se le denomina el **costo marginal**. Conocer este costo es muy importante para la gerencia. Como se vio en el ejemplo 1, el costo marginal es aproximado por la tasa de cambio de la función de costo total evaluado en el punto adecuado. Por esta razón, los economistas han definido la **función del costo marginal** para ser la derivada de la función del costo total correspondiente. En otras palabras, si C es una función de costo total, entonces la función de costo marginal se define como la derivada C'. Por tanto, el adjetivo *marginal* es sinónimo de la *derivada de*.

EJEMPLO DE APLICACIÓN 2 Funciones del costo marginal

Una subsidiaria de Elektra Electronics fabrica un reproductor de DVD portátil. La gerencia determinó que el costo total diario de fabricación de estos reproductores de DVD (en dólares) está dado por

$$C(x) = 0.0001x^3 - 0.08x^2 + 40x + 5{,}000$$

donde x es el número de reproductores de DVD fabricados.

a. Determine la función del costo marginal.
b. ¿Cuál es el costo marginal cuando $x = 200, 300, 400$ y 600?
c. Interprete sus resultados.

Solución

a. La función del costo marginal C' está dada por la derivada de la función del costo total C. Por tanto,

$$C'(x) = 0.0003x^2 - 0.16x + 40$$

b. El costo marginal cuando $x = 200, 300, 400$ y 600 está dado por

$$\begin{aligned}
C'(200) &= 0.0003(200)^2 - 0.16(200) + 40 = 20\\
C'(300) &= 0.0003(300)^2 - 0.16(300) + 40 = 19\\
C'(400) &= 0.0003(400)^2 - 0.16(400) + 40 = 24\\
C'(600) &= 0.0003(600)^2 - 0.16(600) + 40 = 52
\end{aligned}$$

o \$20 por unidad, \$19 por unidad, \$24 por unidad y \$52 por unidad, respectivamente.

c. De los resultados del inciso (b), se observa que el costo real de Elektra al fabricar el DVD número 201 es aproximadamente de \$20. El costo real derivado de la fabricación de un reproductor de DVD adicional cuando el nivel de fabricación está en 300 reproductores es de aproximadamente \$19, y así sucesivamente.

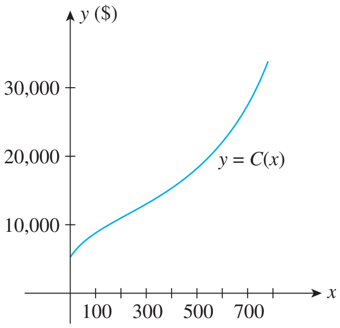


FIGURA **49**
El costo de fabricación de x reproductores de DVD está dado por $C(x)$.

Observe que cuando el nivel de fabricación es 600 unidades, el costo real de fabricar una unidad adicional es de aproximadamente \$52. El costo más alto por fabricar esta unidad adicional cuando el nivel de fabricación es 600 unidades, puede ser el resultado de varios factores, entre ellos los costos excesivos en que incurre debido a las horas extra, o un mantenimiento mayor, la producción se interrumpió a causa de un mayor estrés y la tensión en el equipo, y así sucesivamente. La gráfica de la función del costo total aparece en la figura 49. ■

Funciones del costo promedio

Ahora se presenta otro concepto marginal íntimamente relacionado al costo marginal. $C(x)$ denota el costo total en que incurre al fabricar x unidades de un cierto commodity. Entonces el **costo promedio** al fabricar x unidades del commodity se obtiene al dividir el costo total de fabricación entre el número de unidades fabricadas. Esto lleva a la siguiente definición:

Función del costo promedio

Suponga que $C(x)$ es la función del costo total. Entonces la **función del costo promedio**, denotada por $\overline{C}(x)$ (léase "C barra de x"), es

$$\frac{C(x)}{x} \tag{13}$$

La derivada de $\overline{C}'(x)$ de la función del costo promedio, llamada la **función del costo marginal promedio**, mide la tasa de cambio de la función del costo promedio con respecto al número de unidades fabricadas.

EJEMPLO DE APLICACIÓN 3 Funciones del costo marginal promedio El total del costo de producción de x unidades de cierto commodity está dado por

$$C(x) = 400 + 20x$$

dólares.

a. Determine la función del costo promedio $\overline{C}$.
b. Determine la función del costo marginal promedio $\overline{C}'$.
c. ¿Cuáles son las implicaciones económicas de sus resultados?

Solución

a. La función del costo marginal promedio está dada por

$$\overline{C}(x) = \frac{C(x)}{x} = \frac{400 + 20x}{x}$$
$$= 20 + \frac{400}{x}$$

b. La función del costo marginal promedio es

$$\overline{C}'(x) = -\frac{400}{x^2}$$

c. Ya que la función del costo marginal promedio es negativa por todos los valores permitidos de x, la tasa de cambio de la función del costo promedio es negativa

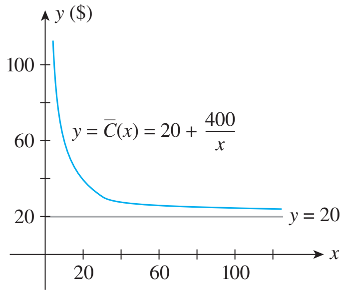


FIGURA **50**
Conforme el nivel de producción aumenta, el costo promedio se aproxima a $20.

Para todas las $x > 0$; es decir, $\overline{C}(x)$ es decreciente conforme x es creciente. Sin embargo, la gráfica de $\overline{C}$ permanece siempre arriba de la recta horizontal $y = 20$, pero ésta se aproxima a la recta, ya que

$$\lim_{x\to\infty} \overline{C}(x) = \lim_{x\to\infty} \left(20 + \frac{400}{x}\right) = 20$$

El trazo de la gráfica de la función $\overline{C}(x)$ aparece en la figura 50. Este resultado es completamente esperado si se consideran las implicaciones económicas. Observe que conforme el nivel de producción aumenta, el costo fijo por unidad de fabricación, representado por el término $(400/x)$, disminuye constantemente. El costo promedio se aproxima a la unidad de fabricación constante, que es $20 en este caso. ■

EJEMPLO DE APLICACIÓN 4 Funciones del costo marginal promedio Considere de nuevo la subsidiaria de Elektra Electronics. El costo total diario por fabricar sus reproductores DVD portátiles está dado por

$$C(x) = 0.0001x^3 - 0.08x^2 + 40x + 5{,}000$$

dólares, donde x representa el número de reproductores de DVD fabricados (vea el ejemplo 2).

a. Determine la función del costo promedio $\overline{C}$.
b. Determine la función del costo marginal promedio $\overline{C}'$. Calcule $\overline{C}'(500)$.
c. Elabore la gráfica de la función $\overline{C}'$ e interprete sus resultados obtenidos de los incisos (a) y (b).

Solución

a. La función del costo promedio está dada por

$$\overline{C}'(x) = \frac{C(x)}{x} = 0.0001x^2 - 0.08x + 40 + \frac{5{,}000}{x}$$

b. La función del costo marginal promedio está dada por

$$\overline{C}'(x) = 0.0002x - 0.08 - \frac{5{,}000}{x^2}$$

También,

$$\overline{C}'(500) = 0.0002(500) - 0.08 - \frac{5{,}000}{(500)^2} = 0$$

c. Al elaborar la gráfica de la función $\overline{C}$, observe que si x es un número pequeño positivo, entonces $\overline{C}(x) > 0$. Más aún, $\overline{C}(x)$ se vuelve arbitrariamente mayor conforme x se aproxima a cero desde la derecha, ya que el término $(5{,}000/x)$ se vuelve arbitrariamente mayor conforme x se aproxima a cero. Después, el resultado $\overline{C}'(500) = 0$ obtenido en el inciso (b) indica que la recta tangente a la gráfica de la función $\overline{C}$ es horizontal en el punto (500, 35) sobre la gráfica. Finalmente, al trazar los puntos sobre la gráfica correspondientes a, es decir, $x = 100, 200, 300, \ldots, 900$, se obtiene el trazo de la figura 51. Como se esperaba, el costo promedio disminuye conforme el nivel de producción aumenta. Pero en este caso, en comparación con el ejemplo 3, el costo promedio alcanza el valor mínimo de $35, correspondiente a un nivel de fabricación de 500, y *aumenta* a partir de entonces.

Este fenómeno es típico en situaciones donde el costo marginal aumenta desde algún punto a medida que se incrementa la producción, como en el ejemplo 2. Esta situación contrasta con la del ejemplo 3, en la que el costo marginal se mantiene constante a cualquier nivel de producción. ■

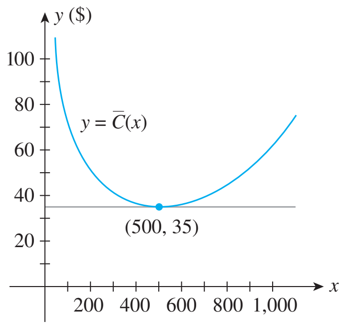


FIGURA **51**
El costo promedio alcanza un mínimo de $35 cuando 500 reproductores de DVD se fabrican.

Exploración con TECNOLOGÍA

En referencia al ejemplo 4.

1. Utilice una calculadora graficadora para elaborar la gráfica de la función del costo promedio

$$\overline{C}(x) = 0.0001x^2 - 0.08x + 40 + \frac{5{,}000}{x}$$

utilice la ventana de visualización $[0, 100] \times [0, 100]$. Después, utilice **ZOOM** y **TRACE**, demuestre que el punto menor sobre la gráfica de $\overline{C}$ es (500, 35).

2. Dibuje la recta tangente hacia la gráfica de $\overline{C}$ (500, 35). ¿Cuál es su pendiente? ¿Es esto lo que esperaba?
3. Elabore la gráfica de la función del costo marginal promedio

$$\overline{C}'(x) = 0.0002x - 0.08 - \frac{5{,}000}{x^2}$$

utilizando la ventana de visualización $[0, 2{,}000] \times [-1, 1]$. Después utilice **ZOOM** y **TRACE** para demostrar que el cero de la función $\overline{C}'$ se presenta en $x = 500$. Verifique este resultado utilizando la capacidad para determinar raíces de su calculadora graficadora. ¿Es este resultado compatible con el obtenido en el punto 2? Explique su respuesta.

Funciones de ingresos

Recuerde que una función de ingresos $R(x)$ da los ingresos obtenidos por una empresa resultantes de la venta de x unidades de un determinado producto. Si la empresa establece p dólares por unidad, entonces

$$R(x) = px \tag{14}$$

Sin embargo, el precio que una empresa puede fijar al producto depende del mercado en que opera. Si la empresa es una de muchas, que no puede dictar el precio de la materia prima, entonces en este entorno de mercado competitivo el precio es determinado por el equilibrio del mercado (vea la sección 2.6). Por otro lado, si la empresa es el único proveedor del producto, entonces en esta situación de monopolio se puede manipular el precio de la materia prima por el control de la oferta. El precio unitario de venta p de la materia prima tiene que ver con la cantidad demandada x de la misma. Esta relación entre p y x se llama *ecuación de la demanda* (vea la sección 2.6). Al resolver la ecuación de la demanda para p en términos de x, se obtiene la función de precio unitario f. Por tanto,

$$p = f(x)$$

y la función de ingresos R está dada por

$$R(x) = px = xf(x)$$

El **ingreso marginal** da el ingreso real obtenido por la venta de una unidad adicional de la materia prima, dado que las ventas ya se encuentran en cierto nivel. Siguiendo el mismo argumento que se aplica a la función del costo en el ejemplo 1, puede convencerse de que el ingreso marginal es aproximado por $R(x)$. Por tanto, se define la **función de ingreso marginal** para ser $R'(x)$, donde R es la función de ingreso. La derivada R' de la función R mide la tasa de cambio de la función de ingreso.

PORTAFOLIO Richard Mizak

PUESTO Director
INSTITUCIÓN Kroll Zolfo Cooper

Kroll Zolfo Cooper es una de las firmas líderes en el mundo de la reestructuración y trabaja con empresas que experimentan problemas financieros u operativos cruciales. Somos la gerencia interina de consejeros que ayudamos en la estabilización, rehabilitación y reorganización de la empresa, ya sea por medio de cambios de mejora del rendimiento o Chapter 11 de reorganización (bancarrota). Después, hacemos recomendaciones basadas en el análisis financiero para el equipo de la alta gerencia de la empresa y utilizamos dicho análisis para desarrollar planes de acción concretos para ayudar a la empresa a volver a la pista. Como director de Kroll Zolfo Cooper, uso las matemáticas cuando realizo el análisis financiero de empresas en dificultades financieras y/o de quiebra.

En una empresa comercial poderosa se construyó un modelo matemático muy complejo para analizar las capacidades financieras de la organización y proyectar su desempeño financiero en el futuro. El modelo fue utilizado por la empresa para pronosticar el rendimiento así como por los prestamistas, inversionistas y otros grupos de interés clave para determinar si se debe o no prestar dinero, invertir y/o asociarse con la empresa.

En una fabrica de joyas de las más importantes, se determinó que la empresa estaba perdiendo dinero en la mayoría de los pedidos más pequeños. Utilizamos nuestro análisis matemático para trabajar con la empresa para eliminar una serie de costosas actividades que no eran importantes para los clientes más pequeños, y determinar el costo real en el manejo de pedidos más pequeños, se revisaron los precios de los modelos de sus computadoras, se mejoraron los precios de la empresa, se crearon incentivos para colocar grandes pedidos. Casi de inmediato nuestro análisis financiero dio lugar a una mayor rentabilidad para el departamento y, sobre todo, mayores resultados de ventas.

Si bien estos son sólo algunos de los ejemplos, la mayor parte de los trabajos realizados en el mundo financiero tiene su fundamento en los mismos principios matemáticos que se enseñan en los cursos universitarios.

© Franz Pflueg/Dreamstime.com

EJEMPLO DE APLICACIÓN 5 **Funciones de ingreso marginal**

VIDEO

Suponga que la relación entre el precio unitario p en dólares y la cantidad demandada x de un sistema de altavoz Acrosonic modelo F está dada por la ecuación

$$p = -0.02x + 400 \qquad (0 \leq x \leq 20{,}000)$$

a. Determine la función de ingresos R.
b. Determine la función del ingreso marginal R'.
c. Calcule $R'(2{,}000)$ e interprete su resultado.

Solución

a. La función de ingresos R está dada por

$$\begin{aligned} R(x) &= px \\ &= x(-0.02x + 400) \\ &= -0.02x^2 + 400x \qquad (0 \leq x \leq 20{,}000) \end{aligned}$$

b. La función del ingreso marginal R' está dada por

$$R'(x) = -0.04x + 400$$

c.

$$R'(2{,}000) = -0.04(2{,}000) + 400 = 320$$

Por tanto, el ingreso real que se obtendrá de la venta del sistema de altavoces número 2,001 es de aproximadamente \$320.

Funciones de utilidad

Nuestro ejemplo final de una función marginal involucra la función de utilidad. La función de utilidad P está dada por

$$P(x) = R(x) - C(x) \tag{15}$$

donde R y C son las funciones de ingresos y de costo y x es el número de unidades de un commodity fabricado y vendido. La **función de utilidad marginal** $P'(x)$ mide la tasa de cambio de la función de utilidad P y resulta con una buena aproximación de la utilidad o pérdida real obtenida de la venta de la unidad número $(x + 1)$ de la materia prima (suponiendo que ésta se haya vendido).

EJEMPLO DE APLICACIÓN 6 Funciones de utilidad marginal

En referencia al ejemplo 5, suponga que el costo de fabricar x unidades del sistema de altavoces Acrosonic modelo F es

$$C(x) = 100x + 200{,}000$$

dólares.

a. Determine la función de utilidad P.
b. Determine la función de utilidad marginal P'.
c. Calcule $P'(2{,}000)$ e interprete su resultado.
d. Elabore la gráfica de la función de utilidad P.

Solución

a. De la solución del ejemplo 5a, tenemos

$$R(x) = -0.02x^2 + 400x$$

Por tanto, la función de utilidad P requerida está dada por

$$\begin{aligned} P(x) &= R(x) - C(x) \\ &= (-0.02x^2 + 400x) - (100x + 200{,}000) \\ &= -0.02x^2 + 300x - 200{,}000 \end{aligned}$$

b. La función de utilidad marginal P' está dada por

$$P'(x) = -0.04x + 300$$

c. $$P'(2{,}000) = -0.04(2{,}000) + 300 = 220$$

Así, la utilidad real obtenida de la venta del sistema de altavoces número 2,001 es aproximadamente \$220.

d. La gráfica de la función de utilidad P aparece en la figura 52. ■

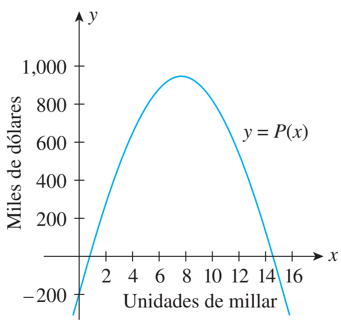


FIGURA 52
La utilidad total obtenida cuando x altavoces son fabricados está dada por $P(x)$.

9.8 Ejercicios de autoevaluación

La demanda semanal de las grabadoras DVD Pulsar está dada por la ecuación de la demanda

$$p = -0.02x + 300 \qquad (0 \le x \le 15{,}000)$$

donde p denota el precio unitario de la venta al mayoreo en dólares y x denota la cantidad demandada. La función del costo total semanal asociado con la fabricación de estas grabadoras es

$$C(x) = 0.000003x^3 - 0.04x^2 + 200x + 70{,}000$$

dólares.

1. Determine la función de ingreso R y la función de utilidad P.
2. Determine la función del costo marginal C', la función de ingreso marginal R' y la función de utilidad marginal P'.
3. Determine la función del costo marginal promedio $\overline{C}'$.
4. Calcule $C'(3{,}000)$, $R'(3{,}000)$ y $P'(3{,}000)$ e interprete sus resultados.

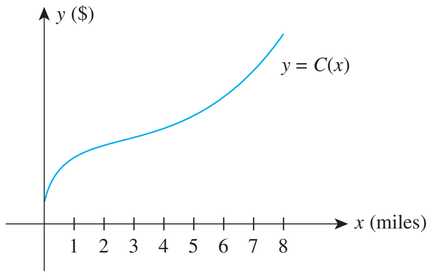
Las soluciones de los ejercicios de autoevaluación 9.8 se encuentran en la página 651.

9.8 Preguntas de concepto

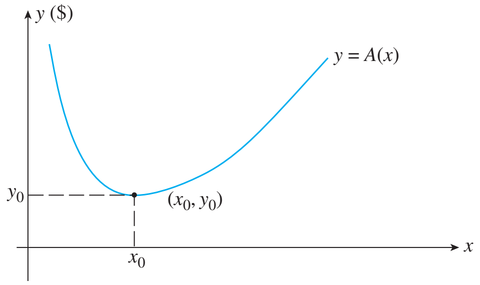
1. Explique con sus palabras cada término:
   a. Función del costo marginal
   b. Función del costo promedio
   c. Función del costo marginal promedio
   d. Función del ingreso marginal
   e. Función de utilidad marginal

9.8 Ejercicios

1. **COSTOS DE PRODUCCIÓN** La gráfica de una función de costo total típica $C(x)$ asociada con la fabricación de x unidades de una determinada materia prima se muestra en la siguiente figura.
   a. Explique por qué la función C es siempre creciente.
   b. A medida que el nivel de producción x aumenta el costo por unidad cae, así que $C(x)$ es creciente, pero a un ritmo más lento. Sin embargo, el nivel de producción es pronto alcanzado en el que el costo por unidad comienza a aumentar de manera espectacular (debido a la escasez de materia prima, las horas extraordinarias, avería de maquinaria debido al exceso de estrés y la tensión), de modo que $C(x)$ sigue aumentando a un ritmo más rápido. Utilice la gráfica de C para determinar el nivel aproximado de x_0 donde eso ocurre.



2. **COSTOS DE PRODUCCIÓN** La gráfica de una función de costo promedio típica de $A(x) = C(x)/x$, donde $C(x)$ es una función de costo total asociado con la fabricación de x unidades de una determinada materia prima se muestra en la siguiente figura.
   a. Explique en términos económicos por qué $A(x)$ es mayor si x es menor y por qué $A(x)$ es mayor si x es mayor.
   b. ¿Cuál es el significado del número x_0 y y_0, las coordenadas x y y del punto menor de la gráfica de la función A?



3. **COSTO MARGINAL** El costo total semanal (en dólares) en que incurre Discos Lincoln en el prensado de discos compactos es

$$C(x) = 2{,}000 + 2x - 0.0001x^2 \qquad (0 \leq x \leq 6{,}000)$$

   a. ¿Cuál es el costo real en que incurre en el prensado del disco número 1,001 y 2,001?
   b. ¿Cuál es el costo marginal cuando $x = 1{,}000$ y 2,000?

4. **COSTO MARGINAL** Una división de Ditton Industries fabrica el modelo Futura de hornos de microondas. El costo diario (en dólares) de fabricación de estos hornos es

$$C(x) = 0.0002x^3 - 0.06x^2 + 120x + 5{,}000$$

donde x representa el número de unidades fabricado.
   a. ¿Cuál es el costo en que incurre en la fabricación del horno número 101? ¿Del 201? ¿Del 301?
   b. ¿Cuál es el costo marginal cuando $x = 100$, 200 y 300?

5. **EL COSTO MARGINAL PROMEDIO** Custom Office fabrica una línea de escritorios ejecutiva. Se estima que el costo total de fabricación de x unidades de su modelo Ejecutivo es

$$C(x) = 100x + 200{,}000$$

dólares por año.
   a. Determine la función del costo promedio $\overline{C}$.
   b. Determine la función del costo marginal promedio $\overline{C}'$.
   c. ¿Qué le sucede a $\overline{C}(x)$ cuando x es muy grande? Interprete sus resultados.

6. **COSTO MARGINAL PROMEDIO** La gerencia de ThermoMaster Company, cuya filial mexicana fabrica un termómetro de interiores y exteriores, estima que el costo total semanal (en dólares) de fabricación de x termómetros es

$$C(x) = 5{,}000 + 2x$$

   a. Determine la función del costo promedio $\overline{C}$.
   b. Determine el costo marginal promedio $\overline{C}'$.
   c. Interprete sus resultados.

7. Determine la función de costo promedio $\overline{C}$ y la función del costo marginal promedio $\overline{C}'$ asociado con la función del costo total C del ejercicio 3.

8. Determine la función del costo promedio $\overline{C}$ y la función del costo marginal promedio $\overline{C}'$ asociado con la función del costo total C del ejercicio 4.

9. Ingreso marginal Williams Commuter Air Service se da cuenta que sus ingresos mensuales de

$$R(x) = 8{,}000x - 100x^2$$

dólares cuando el precio por pasajero es x dólares.

a. Determine el ingreso marginal R'.
b. Calcule $R'(39)$, $R'(40)$ y $R'(41)$.
c. Con base en los resultados del inciso (b), ¿qué precio debería cargar la aerolínea para maximizar sus ingresos?

10. Ingreso marginal La gerencia de Acrosonic planea para comercializar el ElectroStat, un sistema electrostático de altavoces. El departamento de publicidad ha determinado que la demanda de estos altavoces es

$$p = -0.04x + 800 \qquad (0 \le x \le 20{,}000)$$

donde p denota el precio unitario de los altavoces (en dólares) y x denota la cantidad demandada.

a. Determine la función de ingresos R.
b. Determine la función de ingreso marginal R'.
c. Calcule $R'(5{,}000)$ e interprete sus resultados.

11. Utilidad marginal Consulte el ejercicio 10. El departamento de producción de Acrosonic estimó que el costo total (en dólares) en que incurre en la fabricación de x sistemas de altavoces ElectroStat en el primer año de producción será de

$$C(x) = 200x + 300{,}000$$

a. Determine la función de utilidad P.
b. Determine la función de utilidad marginal P'.
c. Calcule $P'(5{,}000)$ y $P'(8{,}000)$.
d. Elabore la gráfica de la función de utilidad e interprete sus resultados.

12. Utilidad marginal Lynbrook West, un complejo de departamentos, cuenta con 100 unidades de dos dormitorios. La utilidad mensual (en dólares) obtenida del alquiler de x departamentos es

$$P(x) = -10x^2 + 1{,}760x - 50{,}000$$

a. ¿Cuál es la utilidad obtenida por el alquiler de la unidad 51, asumiendo que 50 unidades ya han sido alquiladas?
b. Calcule la utilidad marginal cuando $x = 50$ y compare sus resultados con los obtenidos en el inciso (a).

13. Costo, ingreso y utilidad marginales La demanda semanal de un televisor de color pulsar 25 LED es

$$p = 600 - 0.05x \qquad (0 \le x \le 12{,}000)$$

donde p denota el precio unitario de venta al mayoreo en dólares y x denota la cantidad demandada. La función del costo total semanal asociada con la manufactura del Pulsar 25 está dada por

$$C(x) = 0.000002x^3 - 0.03x^2 + 400x + 80{,}000$$

donde $C(x)$ denota el costo total obtenido en la fabricación de x aparatos.

a. Determine la función de ingreso R y la función de utilidad P.
b. Determine la función del costo marginal C', la función de ingreso marginal R' y la función de utilidad marginal P'.
c. Calcule $C'(2{,}000)$, $R'(2{,}000)$ y $P'(2{,}000)$ e interprete sus resultados.
d. Elabore las gráficas de las funciones C, R y P e interprete los incisos (b) y (c), utilizando las gráficas obtenidas.

14. Costo, ingreso y utilidad marginales Pulsar también fabrica una serie de televisores digitales de pantalla plana de 20 pulgadas. La cantidad demandada x de estos aparatos por semana está relacionada con el precio unitario de venta al mayoreo p por la ecuación

$$p = -0.006x + 180$$

El costo total semanal en que incurre Pulsar al fabricar x aparatos es de

$$C(x) = 0.000002x^3 - 0.02x^2 + 120x + 60{,}000$$

dólares. Responda las preguntas del ejercicio 13 para estos datos.

15. Costo marginal promedio Determine la función del costo promedio $\overline{C}$ asociado con la función del costo total C del ejercicio 13.

a. ¿Cuál es la función de costo marginal promedio $\overline{C}'$?
b. Calcule $\overline{C}'(5{,}000)$ y $\overline{C}'(10{,}000)$ interprete los resultados.
c. Elabore la gráfica de $\overline{C}$.

16. Costo marginal promedio Determine la función de costo promedio de $\overline{C}$ asociado con la función del costo total C del ejercicio 14.

a. ¿Cuál es la función del costo marginal promedio $\overline{C}'$?
b. Calcule $\overline{C}'(5{,}000)$ y $\overline{C}'(10{,}000)$ e interprete los resultados.

17. Ingreso marginal La cantidad demandada de relojes de pulsera Sicard cada mes está relacionada con el precio unitario por la ecuación

$$p = \frac{50}{0.01x^2 + 1} \qquad (0 \le x \le 20)$$

donde p se mide en dólares y x en unidades de millar.

a. Determine la función de ingreso R.
b. Determine la función de ingreso marginal R'.
c. Calcule $R'(2)$ e interprete su resultado.

18. Propensión marginal al consumo La función de consumo de la economía de Estados Unidos desde 1929 hasta 1941 es

$$C(x) = 0.712x + 95.05$$

donde $C(x)$ es el gasto de consumo personal y x es el ingreso personal, ambos medidos en miles de millones de dólares. Determine la tasa de cambio del consumo con respecto al ingreso, dC/dx. Esta cantidad se llama *propensión marginal al consumo*.

19. Propensión marginal al consumo Consulte el ejercicio 18. Suponga que la función del consumo de cierta economía es

$$C(x) = 0.873x^{1.1} + 20.34$$

donde $C(x)$ y x se miden en miles de millones de dólares. Determine la propensión marginal al consumo cuando $x = 10$.

20. **Propensión marginal al ahorro** Suponga que $C(x)$ mide el gasto de una economía de consumo personal y x el ingreso personal, ambos en miles de millones de dólares. Después,

$$S(x) = x - C(x) \qquad \text{ingreso menos consumo}$$

mide los ahorros de una economía correspondiente a un ingreso de x mil millones de dólares. Demuestre que

$$\frac{dS}{dx} = 1 - \frac{dC}{dx}$$

La cantidad dS/dx se llama *propensión marginal al ahorro*.

21. Consulte el ejercicio 20. Para la función de consumo del ejercicio 18, determine la propensión marginal al ahorro.

22. Consulte el ejercicio 20. Para la función de consumo del ejercicio 19, determine la propensión al ahorro cuando $x = 10$.

En los ejercicios 23 y 24 determine si el pronunciamiento es verdadero o falso. Si es verdadero, explique por qué lo es. Si es falso, proporcione un ejemplo que demuestre por qué lo es.

23. Si C es una función del costo total diferenciable, entonces la función del costo marginal promedio es

$$\overline{C}'(x) = \frac{xC'(x) - C(x)}{x^2}$$

24. Si la función de utilidad marginal es positiva en $x = a$, entonces tiene sentido el nivel de producción decreciente.

9.8 Soluciones de los ejercicios de autoevaluación

1.
$$\begin{aligned} R(x) &= px \\ &= x(-0.02x + 300) \\ &= -0.02x^2 + 300x \qquad (0 \le x \le 15{,}000) \\ P(x) &= R(x) - C(x) \\ &= -0.02x^2 + 300x \\ &\quad - (0.000003x^3 - 0.04x^2 + 200x + 70{,}000) \\ &= -0.000003x^3 + 0.02x^2 + 100x - 70{,}000 \end{aligned}$$

2.
$$\begin{aligned} C'(x) &= 0.000009x^2 - 0.08x + 200 \\ R'(x) &= -0.04x + 300 \\ P'(x) &= -0.000009x^2 - 0.04x + 100 \end{aligned}$$

3. La función del costo promedio es

$$\begin{aligned} \overline{C}(x) &= \frac{C(x)}{x} \\ &= \frac{0.000003x^3 - 0.04x^2 + 200x + 70{,}000}{x} \\ &= 0.000003x^2 - 0.04x + 200 + \frac{70{,}000}{x} \end{aligned}$$

Por tanto, la función del costo marginal promedio es

$$\overline{C}'(x) = 0.000006x - 0.04 - \frac{70{,}000}{x^2}$$

4. Al utilizar los resultados de los Ejercicios de autoevaluación 2, determinamos

$$\begin{aligned} C'(3{,}000) &= 0.000009(3{,}000)^2 - 0.08(3{,}000) + 200 \\ &= 41 \end{aligned}$$

Es decir, cuando el nivel de producción es de 3 000 grabadoras, el costo real de fabricación de una grabadora adicional es de aproximadamente \$41. Después,

$$R'(3{,}000) = -0.04(3{,}000) + 300 = 180$$

Es decir, el ingreso real a obtener a partir de las ventas de la grabadora 3001a es de aproximadamente \$180. Finalmente,

$$\begin{aligned} P'(3{,}000) &= -0.000009(3{,}000)^2 + 0.04(3{,}000) + 100 \\ &= 139 \end{aligned}$$

Es decir, la utilidad real obtenida de la venta de la 3,001a grabadora de DVD es de aproximadamente \$139.

CAPÍTULO 9 Resumen de las fórmulas y términos principales

FÓRMULAS

1. Tasa de cambio promedio de f sobre $[x, x + h]$ o Pendiente de la recta secante a la gráfica de f a través de $(x, f(x))$ y $(x + h, f(x + h))$ o Diferencia del cociente	$\dfrac{f(x + h) - f(x)}{h}$

2. Tasa de cambio instantánea de f en $(x, f(x))$ o Pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en $(x, f(x))$ en x o Derivada de f	$\lim_{h\to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$
3. Derivada de una constante	$\dfrac{d}{dx}(c) = 0 \qquad (c$, una constante)
4. Regla de potencia	$\dfrac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$
5. Regla de una constante por una función	$\dfrac{d}{dx}[cf(x)] = cf'(x)$
6. Regla de la suma	$\dfrac{d}{dx}[f(x) \pm g(x)] = f'(x) \pm g'(x)$
7. Regla del producto	$\dfrac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f(x)g'(x) + g(x)f'(x)$
8. Regla del cociente	$\dfrac{d}{dx}\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right] \dfrac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$
9. Regla de la cadena	$\dfrac{d}{dx}g(f(x)) = g'(f(x))f'(x)$
10. Regla de la potencia general	$\dfrac{d}{dx}[f(x)]^n = n[f(x)]^{n-1}f'(x)$
11. Derivada de la función exponencial	$\dfrac{d}{dx}(e^x) = e^x$
12. Regla de la cadena para funciones exponenciales	$\dfrac{d}{dx}(e^u) = e^u \dfrac{du}{dx}$
13. Derivada de la función logarítmica	$\dfrac{d}{dx}\ln\|x\| = \dfrac{1}{x}$
14. Regla de la cadena para funciones logarítmicas	$\dfrac{d}{dx}(\ln u) = \dfrac{1}{u}\dfrac{du}{dx}$
15. Función del costo promedio	$\overline{C}(x) = \dfrac{C(x)}{x}$
16. Función de ingresos	$R(x) = px$
17. Función de utilidad	$P(x) = R(x) - C(x)$

TÉRMINOS

cero de una función (560)
continuidad de una función en un número (556)
costo marginal (643)
costo promedio (644)
forma indeterminada (540)
función de ingreso marginal (646)
función de utilidad marginal (648)
función del costo marginal (643)
función del costo marginal promedio (644)
función diferenciable (580)
ingreso marginal (646)
límite de una función (537)
límite de una función infinita (543)
límite lateral derecho de una función (555)
límite lateral izquierdo de una función (555)
recta tangente a la gráfica de f (572)
recta secante (572)
segunda derivada de f (607)

CAPÍTULO 9 Preguntas de revisión de conceptos

Llene los espacios en blanco.

1. La expresión $\lim_{x\to a} f(x) = L$ significa que existe un número _______ tal que el valor de _______ puede estar tan cerca de _______ como le plazca al tomar a x lo suficientemente cerca de _____.

2. Si el $\lim_{x\to a} f(x) = L$ y $\lim_{x\to a} g(x) = M$, entonces
   a. $\lim_{x\to a} [f(x)]^r =$ _____, donde r es un número real.
   b. $\lim_{x\to a} [f(x) \pm g(x)] =$ _____.
   c. $\lim_{x\to a} [f(x)g(x)] =$ _____.
   d. $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} =$ _____ siempre que _____.

3. **a.** La expresión $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ significa que $f(x)$ puede estar arbitrariamente cerca de _______ al tomar ______ lo suficientemente mayor.
   b. La expresión $\lim_{x\to-\infty} f(x) = M$ significa que $f(x)$ puede estar arbitrariamente cerca de ________ al tomar a x para ser _______ y lo suficientemente mayor en ______ valor.

4. **a.** La expresión $\lim_{x\to a^+} f(x) = L$ es similar a la expresión $\lim_{x\to a} f(x) = L$, pero aquí se requiere que x permanezca al _________ de a.
   b. La expresión $\lim_{x\to a^-} f(x) = L$ es similar a la expresión $\lim_{x\to a} f(x) = L$, pero aquí se requiere que x permanezca al _______ de a.
   c. $\lim_{x\to a} f(x) = L$ sólo sí ambos $\lim_{x\to a^-} f(x) =$ _____ y $\lim_{x\to a^+} f(x) =$ _____.

5. **a.** Si $f(a)$ está definida, $\lim_{x\to a} f(x)$ existe y $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$, entonces f es _____ en a.
   b. Si f no es continua en a, entonces es ____ en a.
   c. Si f es continua sobre un intervalo I si f es continua en ________ el número dentro del intervalo.

6. **a.** Si f y g son continuas en a, entonces $f \pm g$ y fg son continuas en _______. Además, $\frac{f}{g}$ es continua en ________ siempre que _____ $\neq$ a 0.
   b. Una función polinómica es continua ________.
   c. Una función racional $R = \frac{P}{Q}$ es continua en todas partes, excepto en los valores de x donde ________ $= 0$.

7. **a.** Suponga que f es continua sobre $[a, b]$ y $f(a) < M < f(b)$. Entonces, el teorema de valor intermedio garantiza la existencia de por lo menos un número c en _______ tal que ________.
   b. Si f es continua sobre $[a, b]$ y $f(a)f(b) < 0$, entonces debe haber por lo menos una solución de la ecuación de ________ en el intervalo _______.

8. **a.** La recta tangente en $P(a, f(a))$ a la gráfica de f es la recta que pasa a través de P y tiene una pendiente ________.
   b. Si la pendiente de la recta tangente en $P(a, f(a))$ es m, entonces una ecuación de la recta tangente en P es _______.

9. **a.** La pendiente de la recta secante pasa a través de $P(a, f(a))$ y $Q(a + h, f(a + h))$ y la tasa de cambio promedio de f sobre el intervalo $[a, a + h]$ ambos están dados por _______.
   b. La pendiente de la recta tangente en $P(a, f(a))$ y la tasa de cambio instantánea de f en a ambas están dadas por ________.

10. **a.** Si c es una constante, entonces $\frac{d}{dx}(c)$ ________.
    b. La regla de potencia establece que si n es cualquier número real, entonces $\frac{d}{dx}(x^n) =$ _____.
    c. La regla de una constante por una función establece que si c es una constante, entonces $\frac{d}{dx}[cf(x)] =$ _____.
    d. La regla de la suma establece que $\frac{d}{dx}[f(x) \pm g(x)] =$ _____.

11. **a.** La regla del producto establece que $\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] =$ _____.
    b. La regla del cociente establece que $\frac{d}{dx}[f(x)/g(x)] =$ _____.

12. **a.** La regla de la cadena establece que si $h(x) = g[f(x)]$, entonces $h'(x) =$ _____.
    b. La regla de la potencia general establece que si $h(x) = [f(x)]^n$, entonces $h'(x) =$ _____.

13. Si C, R, P y $\overline{C}$ denota la función del costo total, la función de ingreso total, la función de utilidad, y la función del costo promedio respectivamente, entonces C' denota la función ________ ________, R' denota la función _______ _______. P' denota la función ________ ________, y $\overline{C}'$ denota la función ________ _______.

14. **a.** Si $g(x) = e^{f(x)}$, donde f es una función diferenciable, entonces $g'(x) =$ _____.
    b. Si $g(x) = \ln f(x)$, donde $f(x) > 0$ es diferenciable, entonces $g'(x) =$ _____.

CAPÍTULO 9 Ejercicios de revisión

En los ejercicios 1-14, determine los límites indicados, si existen.

1. $\lim_{x\to 0} (5x - 3)$
2. $\lim_{x\to 1} (x^2 + 1)$
3. $\lim_{x\to -1} (3x^2 + 4)(2x - 1)$
4. $\lim_{x\to 3} \dfrac{x - 3}{x + 4}$
5. $\lim_{x\to 2} \dfrac{x + 3}{x^2 - 9}$
6. $\lim_{x\to -2} \dfrac{x^2 - 2x - 3}{x^2 + 5x + 6}$
7. $\lim_{x\to 3} \sqrt{2x^3 - 5}$
8. $\lim_{x\to 3} \dfrac{4x - 3}{\sqrt{x + 1}}$
9. $\lim_{x\to 1^+} \dfrac{x - 1}{x(x - 1)}$
10. $\lim_{x\to 1^-} \dfrac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}$
11. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x^2}{x^2 - 1}$

12. $\lim_{x\to -\infty} \dfrac{x+1}{x}$

13. $\lim_{x\to \infty} \dfrac{3x^2+2x+4}{2x^2-3x+1}$

14. $\lim_{x\to -\infty} \dfrac{x^2}{x+1}$

15. Trace la gráfica de la función

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 3 & \text{si } x \leq 2 \\ -x + 3 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

y evalúe $\lim_{x\to a^+} f(x)$, $\lim_{x\to a^-} f(x)$ y $\lim_{x\to a} f(x)$ en $a = 2$, si los límites existen.

16. Elabore la gráfica de la función

$$f(x) = \begin{cases} 4 - x & \text{si } x \leq 2 \\ x + 2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

y evalúe $\lim_{x\to a^+} f(x)$, $\lim_{x\to a^-} f(x)$ y $\lim_{x\to a} f(x)$ en $a = 2$, si el límite existe.

En los ejercicios 17-20, determine todos los valores en *x* por los cuales cada función es discontinua.

17. $g(x) = \begin{cases} x + 3 & \text{si } x \neq 2 \\ 0 & \text{si } x = 2 \end{cases}$

18. $f(x) = \dfrac{3x+4}{4x^2-2x-2}$

19. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{(x+1)^2} & \text{si } x \neq -1 \\ 2 & \text{si } x = -1 \end{cases}$

20. $f(x) = \dfrac{|2x|}{x}$

21. Sea $y = x^2 + 2$.

a. Determine la tasa promedio de cambio de y con respecto a x en los intervalos $[1, 2]$, $[1, 1.5]$ y $[1, 1.1]$.

b. Determine la tasa de cambio (instantánea) de y en $x = 1$.

22. Utilice la definición de la derivada para determinar la pendiente de la recta tangente hacia la gráfica de la función $f(x) = 3x + 5$ en cualquier punto $P(x, f(x))$ sobre la gráfica.

23. Utilice la definición de la derivada para determinar la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = -\frac{1}{x}$ en cualquier punto $P(x, f(x))$ sobre la gráfica.

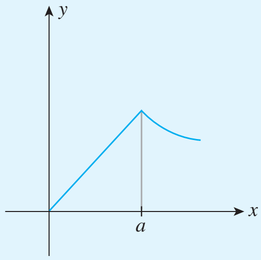
24. Utilice la definición de la derivada para determinar la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = \frac{3}{2}x + 5$ en el punto $(-2, 2)$ y determine una ecuación de la recta tangente.

25. Utilice la definición de la derivada para determinar la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = -x^2$ en el punto $(2, -4)$ y determine una ecuación de la recta tangente.

26. La gráfica de la función f se muestra en la figura adjunta.

a. ¿Es f continua en $x = a$? ¿Por qué?

b. ¿Es f diferenciable en $x = a$? Explique.



En los ejercicios 27-74, determine la derivada de la función dada.

27. $f(x) = 3x^5 - 2x^4 + 3x^2 - 2x + 1$

28. $f(x) = 4x^6 + 2x^4 + 3x^2 - 2$

29. $g(x) = -2x^{-3} + 3x^{-1} + 2$

30. $f(t) = 2t^2 - 3t^3 - t^{-1/2}$

31. $g(t) = 2t^{-1/2} + 4t^{-3/2} + 2$

32. $h(x) = x^2 + \dfrac{2}{x}$

33. $f(t) = t + \dfrac{2}{t} + \dfrac{3}{t^2}$

34. $g(s) = 2s^2 - \dfrac{4}{s} + \dfrac{2}{\sqrt{s}}$

35. $h(x) = x^2 - \dfrac{2}{x^{3/2}}$

36. $f(x) = \dfrac{x+1}{2x-1}$

37. $g(t) = \dfrac{t^2}{2t^2+1}$

38. $h(t) = \dfrac{\sqrt{t}}{\sqrt{t}+1}$

39. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}$

40. $f(t) = \dfrac{t}{2t^2+1}$

41. $f(x) = \dfrac{x^2(x^2+1)}{x^2-1}$

42. $f(x) = (2x^2 + x)^3$

43. $f(x) = (3x^3 - 2)^8$

44. $h(x) = (\sqrt{x} + 2)^5$

45. $f(t) = \sqrt{2t^2 + 1}$

46. $g(t) = \sqrt[3]{1 - 2t^3}$

47. $s(t) = (3t^2 - 2t + 5)^{-2}$

48. $f(x) = (2x^3 - 3x^2 + 1)^{-3/2}$

49. $f(x) = xe^{2x}$

50. $f(t) = \sqrt{t}e^t + t$

51. $g(t) = \sqrt{t}e^{-2t}$

52. $g(x) = e^x\sqrt{1 + x^2}$

53. $y = \dfrac{e^{2x}}{1 + e^{-2x}}$

54. $f(x) = e^{2x^2-1}$

55. $f(x) = xe^{-x^2}$

56. $g(x) = (1 + e^{2x})^{3/2}$

57. $f(x) = x^2e^x + e^x$

58. $g(t) = t \ln t$

59. $f(x) = \ln(e^{x^2} + 1)$

60. $f(x) = \dfrac{x}{\ln x}$

61. $f(x) = \dfrac{\ln x}{x+1}$

62. $y = (x + 1)e^x$

63. $y = \ln(e^{4x} + 3)$

64. $f(r) = \dfrac{re^r}{1 + r^2}$

65. $f(x) = \dfrac{\ln x}{1 + e^x}$

66. $g(x) = \dfrac{e^{x2}}{1 + \ln x}$

67. $h(x) = \left(x + \dfrac{1}{x}\right)^2$

68. $h(x) = \dfrac{1 + x}{(2x^2 + 1)^2}$

69. $h(t) = (t^2 + t)^4(2t^2)$

70. $f(x) = (2x + 1)^3(x^2 + x)^2$

71. $g(x) = \sqrt{x}(x^2 - 1)^3$

72. $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^3 + 2}}$

73. $h(x) = \dfrac{\sqrt{3x + 2}}{4x - 3}$

74. $f(t) = \dfrac{\sqrt{2t + 1}}{(t + 1)^3}$

En los ejercicios 75-84 determine la segunda derivada de la función dada.

75. $f(x) = 2x^4 - 3x^3 + 2x^2 + x + 4$

76. $g(x) = \sqrt{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

77. $h(t) = \dfrac{t}{t^2 + 4}$

78. $f(x) = xe^{-2x}$

79. $h(x) = \dfrac{e^x}{1 + e^x}$

80. $f(x) = x \ln x$

81. $y = \ln(3x + 1)$

82. $f(x) = (x^3 + x + 1)^2$

83. $f(x) = \sqrt{2x^2 + 1}$

84. $f(t) = t(t^2 + 1)^3$

85. Determine $h'(0)$ si $h(x) = g(f(x))$, $g(x) = x + \dfrac{1}{x}$ y $f(x) = e^x$.

86. Determine $h'(1)$ si $h(x) = g(f(x))$, $g(x) = \dfrac{x + 1}{x - 1}$ y $f(x) =$ En x.

87. Sea $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 16x + 3$.
- **a.** Determine los puntos sobre la gráfica de f en los que la pendiente de la recta tangente es igual a -4.
- **b.** Determine la(s) ecuación(es) de la(s) recta(s) tangente(s).

88. Sea $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 4x + 1$.
- **a.** Determine los puntos sobre la gráfica de f en los que la pendiente de la recta tangente es igual a -2.
- **b.** Determine la(s) ecuación(es) de la(s) recta(s) tangente(s) del inciso (a).

89. Determine una ecuación de la recta tangente a la gráfica de $y = \sqrt{4 - x^2}$ en el punto $(1, \sqrt{3})$.

90. Determine una ecuación de la recta tangente a la gráfica de $y = x(x + 1)^5$ en el punto $(1, 32)$.

91. Determine una ecuación de la recta tangente a la gráfica de $y = e^{-2x}$ en el punto $(1, e^{-2})$.

92. Determine una ecuación de la recta tangente a la gráfica de $y = xe^{-x}$ en el punto $(1, e^{-1})$.

93. Determine la tercera derivada de la función

$$f(x) = \frac{1}{2x - 1}$$

¿Cuál es su dominio?

94. **Precio de una materia prima** El costo promedio (en dólares) de fabricación de x unidades de cierta materia prima está dado por

$$\overline{C}(x) = 20 + \frac{400}{x}$$

Evalúe $\lim_{x\to\infty} \overline{C}(x)$ e interprete sus resultados.

95. **PC conectadas en red en todo el mundo** El número de PC en red en todo el mundo (en millones) está dado por

$$N(t) = 3.136t^2 + 3.954t + 116.468 \qquad (0 \leq t \leq 9)$$

donde t se mide en años, con $t = 0$ correspondiente a principios de 1991.
- **a.** ¿Cuántas PC en red hubo en todo el mundo a principios de 1997?
- **b.** ¿Qué tan rápido cambió el número de PC conectadas en red en todo el mundo a principios de 1997?

96. **Obesidad en adultos** En Estados Unidos, el porcentaje de adultos (20-74 años) clasificados como obesos se mantuvo estable durante las décadas de 1960 y 1970 alrededor de 14%, pero comenzó a aumentar rápidamente durante las décadas de 1980 y 1990. Este aumento en la obesidad adulta coincidió con el periodo en que un número cada vez mayor de estadounidenses empezó a comer más azúcar y grasas. La función

$$P(t) = 0.01484t^2 + 0.446t + 15 \qquad (0 \leq t \leq 22)$$

da el porcentaje de adultos obesos a partir de 1978 ($t = 0$) hasta el año 2000 ($t = 22$).
- **a.** ¿Qué porcentaje de adultos eran obesos en 1978? ¿En el año 2000?
- **b.** ¿Qué tan rápido fue en aumento el porcentaje de adultos obesos en 1980 ($t = 2$)? ¿En 1998 ($t = 20$)?

Fuente: Journal of the American Medical Association

97. **Suscriptores de televisión por cable** El número de suscriptores en televisión por cable CNC en la ciudad de Randolph es aproximado por la función

$$N(x) = 1{,}000(1 + 2x)^{1/2} \qquad (1 \leq x \leq 30)$$

donde $N(x)$ denota el número de suscriptores al servicio en la semana x. Determine la tasa de incremento en el número de suscriptores a finales de la semana 12.

98. **Costo de las llamadas de teléfonos celulares** Como el uso de teléfonos celulares continúa en aumento, los costos del tiempo aire se han reducido. El precio promedio por minuto de uso (en centavos) se prevé que sea

$$f(t) = 31.88(1 + t)^{-0.45} \qquad (0 \leq t \leq 6)$$

donde t se mide en años y $t = 0$ corresponde a principios de 1998. Calcule $f'(t)$. ¿Qué tan rápido cambió el precio promedio por minuto de uso a principios de 2000? ¿Cuál fue el cambio en el precio promedio por minuto de uso a principios de 2000?

Fuente: Cellular Telecommunications Industry Association

99. Esperanza de vida en los hombres Suponga que la esperanza de vida de un varón al nacer en un determinado país es descrita por la función

$$f(t) = 46.9(1 + 1.09t)^{0.1} \qquad (0 \leq t \leq 150)$$

donde t se mide en años, con $t = 0$ correspondiente al inicio de 1900. ¿Cuánto tiempo puede esperar vivir un hombre nacido a principios de 2000 en ese país? ¿Cuál es la tasa de cambio de la esperanza de vida de un hombre nacido en ese país a principios de 2000?

100. Demanda de teléfonos inalámbricos El departamento de publicidad de Telecon ha determinado que la demanda de sus teléfonos inalámbricos obedece a la relación

$$p = -0.02x + 600 \qquad (0 \leq x \leq 30{,}000)$$

donde p denota el precio unitario de los teléfonos (en dólares) y x denota la cantidad demandada.

a. Determine la función de ingreso R.
b. Determine la función de ingreso marginal R'.
c. Calcule $R'(10{,}000)$ e interprete su resultado.

101. Costo de producción de DVD El costo total semanal en dólares en que incurre Herald Media Corp. en la producción de películas x está dada por la función de costo total

$$C(x) = 2{,}500 + 2.2x \qquad (0 \leq x \leq 8{,}000)$$

a. ¿Cuál es el costo marginal cuando $x = 1{,}000$ y $2{,}000$?
b. Determine la función del costo promedio $\overline{C}$ y la función del costo marginal promedio de $\overline{C}'$.

102. Demanda de máquinas de fotocopiado La demanda semanal de máquinas de fotocopiado LectroCopy está dada por la ecuación de la demanda

$$p = 2{,}000 - 0.04x \qquad (0 \leq x \leq 50{,}000)$$

donde p denota el precio unitario de la venta al mayoreo en dólares y x denota la cantidad demandada. La función del costo total semanal para la fabricación de estas copiadoras está dada por

$$C(x) = 0.000002x^3 - 0.02x^2 + 1{,}000x + 120{,}000$$

donde $C(x)$ denota el costo total incurrido en la producción de x unidades.

a. Determine la función de ingreso R, la función de utilidad P y la función del costo promedio $\overline{C}$.
b. Determine la función del costo marginal C', la función de ingreso marginal R', la función de utilidad marginal P' y la función de costo marginal promedio $\overline{C}'$.
c. Calcule $C'(3{,}000)$, $R'(3{,}000)$ y $P'(3{,}000)$.
d. Calcule $\overline{C}'(5{,}000)$ y $\overline{C}'(8{,}000)$ e interprete sus resultados.

CAPÍTULO 9 Antes de continuar. . .

1. Determine $\displaystyle\lim_{x\to -1} \frac{x^2 + 4x + 3}{x^2 + 3x + 2}$.

2. Sea

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } -2 \leq x < 1 \\ x^3 & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

Determine (a) $\lim_{x\to 1^-} f(x)$ y (b) $\lim_{x\to 1^+} f(x)$. ¿Es f continua en $x = 1$? Explique su respuesta.

3. Utilice la definición de la derivada para determinar la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $x^2 - 3x + 1$ en el punto $(1, -1)$. ¿Cuál es la ecuación de la recta tangente?

4. Determine la derivada de $f(x) = 2x^3 - 3x^{1/3} + 5x^{-2/3}$.

5. Diferencie $g(x) = x\sqrt{2x^2 - 1}$.

6. Determine $\dfrac{dy}{dx}$ si $y = \dfrac{2x + 1}{x^2 + x + 1}$.

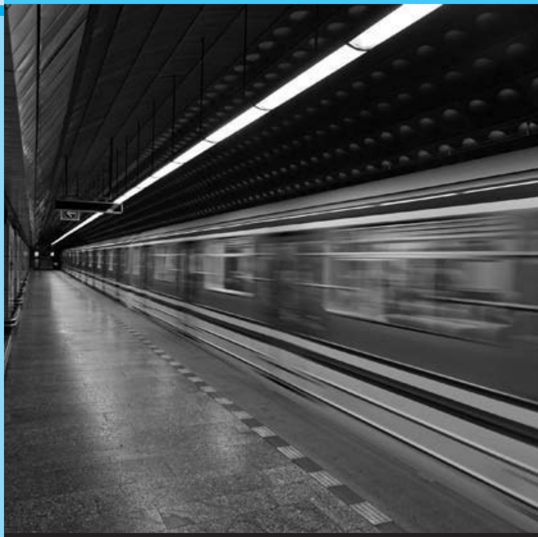
7. Determine las tres primeras derivadas de $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x + 1}}$.

8. Determine la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $f(x) = e^{\sqrt{x}}$.

9. Determine la tasa en la que $y = x \ln(x^2 + 1)$ es cambiante en $x = 1$.

APLICACIONES DE LA DERIVADA 10

En este capítulo se explora más adelante el poder de la derivada como herramienta de ayuda para analizar las propiedades de las funciones. La información obtenida puede utilizarse entonces para elaborar gráficas precisas de las funciones. También podemos ver cómo se usa la derivada para resolver una gran variedad de problemas de optimización, como determinar qué nivel de producción generará utilidades máximas para una empresa, qué nivel de producción resultará un costo mínimo a una empresa, la velocidad máxima a la cual el aire es expelido cuando una persona tose y muchos problemas más.



¿La tarifa del metro de un cierto suburbio del área metropolitana debería incrementarse para generar más ingresos a la autoridad de tránsito de la ciudad? En el ejemplo 3 de la página 729 observará cómo puede determinarse la tarifa óptima.

10.1 Aplicaciones de la primera derivada

Determinación de los intervalos donde una función es creciente o decreciente

Según un estudio realizado por U.S. Department of Energy y Shell Development Co., el ahorro de combustible de un automóvil típico es, en función de su velocidad, descrito por la gráfica mostrada en la figura 1. Observe que el ahorro de combustible $f(x)$ en millas por galón (mpg) aumenta tanto como x, la velocidad del vehículo en millas por hora (mph) crece de 0 a 42, y después decrece, en tanto que la velocidad crece más allá de las 42 mph. Utilice los términos *crece* o *decrece* al describir el comportamiento de una función mientras se mueve de izquierda a derecha a lo largo de la gráfica.

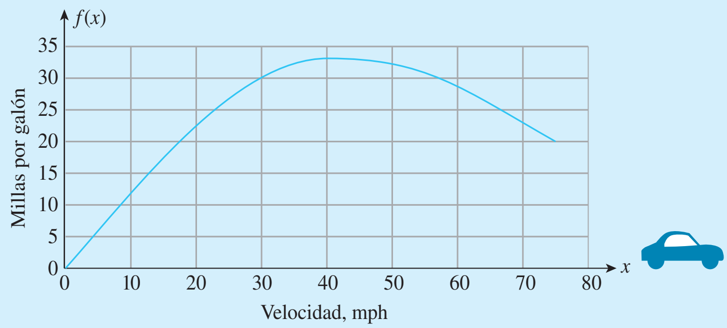


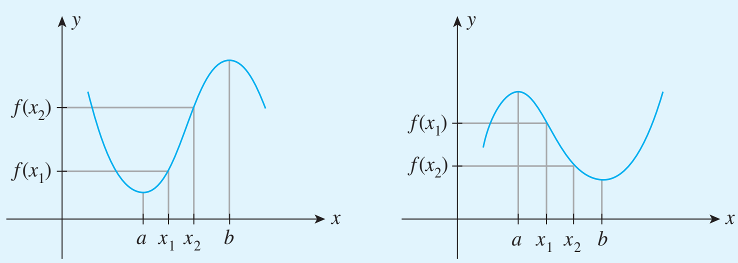
FIGURA 1
El ahorro de combustible de un automóvil típico mejora conforme a la velocidad a la que se maneje, crece de 0 a 42 mph y decrece a una velocidad mayor a 42 mph.

Fuente: U.S. Department of Energy and Shell Development Co.

Se tienen las siguientes definiciones para más exactitud.

Funciones crecientes y decrecientes

Una función f es **creciente** sobre un intervalo (a, b) si para cualquiera de dos números x_1 y x_2 en (a, b), $f(x_1) < f(x_2)$, toda vez que $x_1 < x_2$ (figura 2a).
Una función f es **decreciente** sobre un intervalo (a, b) si para cualquiera de dos números x_1 y x_2 en (a, b), $f(x_1) > f(x_2)$, toda vez que $x_1 < x_2$ (figura 2b).



(a) f es creciente sobre (a, b). **(b)** f es decreciente en (a, b).

FIGURA 2

Se dice que f es *creciente en un número c* si existe un intervalo (a, b) que contenga c, tal que f es creciente en (a, b). De forma similar, se dice que f es *decreciente en un número c* si existe un intervalo (a, b) que contiene a c tal que f es decreciente en (a, b).

Ya que la tasa de cambio de una función en $x = c$ está dada por la derivada de la función en ese número, la derivada se presta naturalmente para ser una herramienta que determina los intervalos donde una función diferenciable es creciente o decreciente. De hecho, como se observa en el capítulo 9, la derivada de una función en un número mide tanto la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto sobre la gráfica de f correspondiente a ese número como la tasa de cambio de la función en ese número. De hecho, en un número donde la derivada es positiva, la pendiente de la recta tangente a la gráfica también lo es, y la función es creciente. En un número donde la derivada es negativa, la pendiente de la recta tangente a la gráfica también lo es, por tanto, la función es decreciente (figura 3).

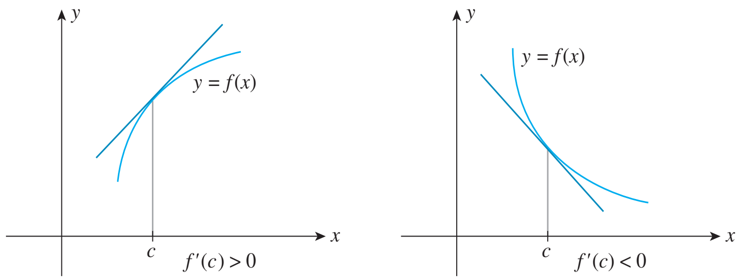


FIGURA **3**

(a) f es creciente en $x = c$. **(b)** f es decreciente en $x = c$.

Estas observaciones conducen al siguiente teorema importante, que formulamos sin pruebas.

TEOREMA 1

a. Si $f'(x) > 0$ para cada valor de x en un intervalo (a, b), entonces, f es creciente en (a, b).

b. Si $f'(x) < 0$ para cada valor de x en un intervalo (a, b), entonces, f es decreciente en (a, b).

c. Si $f'(x) = 0$ para cada valor de x en un intervalo (a, b), entonces, f es constante en (a, b).

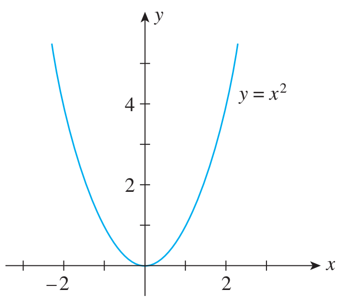


FIGURA **4**
La gráfica de f decrece sobre $(-\infty, 0)$ donde $f'(x) < 0$ y es creciente sobre $(0, \infty)$ donde $f'(x) > 0$.

EJEMPLO 1 Encuentre el intervalo donde la función $f(x) = x^2$ es creciente y el intervalo donde es decreciente.

Solución La derivada de $f(x) = x^2$ es $f'(x) = 2x$. Puesto que,

$$f'(x) = 2x > 0 \quad \text{si } x > 0 \qquad \text{y} \qquad f'(x) = 2x < 0 \quad \text{si } x < 0$$

f es creciente en el intervalo $(0, \infty)$ y decreciente en el intervalo $(-\infty, 0)$ (figura 4). ■

Recuerde que la gráfica de una función continua no puede tener ruptura alguna. Como consecuencia, una función continua no puede cambiar de signo, a menos que ésta sea igual a cero para algún valor en x (vea el teorema 5, página 561). Esta observación sugiere el siguiente procedimiento para determinar el signo de la derivada f' de una función f, por tanto, los intervalos donde la función f es creciente o donde ésta es decreciente.

Determinación de los intervalos donde una función es creciente o decreciente

1. Determine todos los valores de x para los que $f'(x) = 0$ o f' es discontinua e identifique los intervalos abiertos determinados por estos números.
2. Seleccione un número de prueba c en cada uno de los intervalos encontrados en el paso 1 y determine el signo de $f'(c)$ en ese intervalo.
   a. Si $f'(c) > 0$, f es creciente en ese intervalo.
   b. Si $f'(c) < 0$, f es decreciente en ese intervalo.

Explore y analice

¿Cierto o falso? Si f es continua en c y f es creciente en c, entonces $f'(c) \neq 0$. Explique su respuesta. **Sugerencia:** Considere $f(x) = x^3$ y $c = 0$.

EJEMPLO 2 Determine los intervalos donde la función $f(x) = x^3 - 3x^2 - 24x + 32$ es creciente y dónde es decreciente.

Solución

1. La derivada de f es

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 24 = 3(x + 2)(x - 4)$$

Ver la página 17.

y es continua en todas partes. Los ceros de $f'(x)$ son $x = -2$ y $x = 4$, y estos números dividen la recta real en los intervalos $(-\infty, -2)$, $(-2, 4)$ y $(4, \infty)$.

2. Para determinar el signo de $f'(x)$ en los intervalos $(-\infty, -2)$, $(-2, 4)$ y $(4, \infty)$, calcular $f'(x)$ en un punto de prueba conveniente en cada intervalo. Los resultados se muestran en la tabla siguiente:

Intervalo	Punto de prueba c	$f'(c)$	Signo de $f'(x)$
$(-\infty, -2)$	-3	21	+
$(-2, 4)$	0	-24	−
$(4, \infty)$	5	21	+

Vea la página 55.

Al utilizar estos resultados, se obtiene el signo del diagrama mostrado en la figura 5. Se concluye que f es creciente sobre los intervalos $(-\infty, -2)$ y $(4, \infty)$ y es decreciente sobre el intervalo $(-2, 4)$. La figura 6 muestra la gráfica de f.

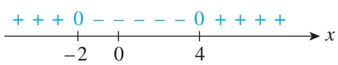


FIGURA 5
Diagrama de signos para f'.

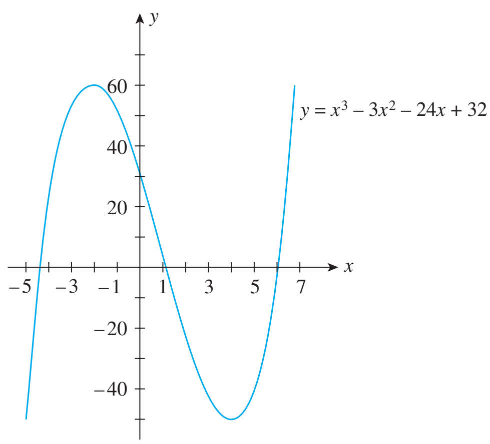


FIGURA 6
La gráfica de f crece en $(-\infty, -2)$, decrece en $(-2, 4)$ y crece de nuevo en $(4, \infty)$. ■

Nota Aprenderá más adelante cómo elaborar estas gráficas. Sin embargo, si está familiarizado con el uso de la utilería de gráficas, podrá continuar y verificar cada gráfica. ■

Exploración con TECNOLOGÍA

Refiérase al ejemplo 2.

1. Use la utilería para elaborar la gráfica de $f(x) = x^3 - 3x^2 - 24x + 32$ y su función derivada $f'(x) = 3x^2 - 6x - 24$ utilizando la ventana de visualización $[-10, 10] \times [-50, 70]$.

2. Al observar la gráfica de f', determine los intervalos donde $f'(x) > 0$ y los intervalos donde $f'(x) < 0$. Después, observe la gráfica de f y determine los intervalos donde ésta es creciente y los intervalos en donde es decreciente. Describa la relación. ¿Es lo que esperaba?

EJEMPLO 3 Encuentre el intervalo donde la función $f(x) = x^{2/3}$ es creciente y el intervalo donde es decreciente.

Solución

1. La derivada de f es

$$f'(x) = \frac{2}{3}x^{-1/3} = \frac{2}{3x^{1/3}}$$

La función f' no está definida en $x = 0$, de manera que f' es discontinua allí. Ésta es continua en todas las otras partes. Más aún, f' no es igual a cero en ningún lugar. El número 0 divide la recta real (el dominio de f) en los intervalos $(-\infty, 0)$ y $(0, \infty)$.

2. Elija un punto de prueba (por ejemplo, $x = -1$) en el intervalo $(-\infty, 0)$ y calcule.

$$f'(-1) = -\frac{2}{3}$$

Ya que $f'(-1) < 0$, se observa que $f'(x) < 0$ sobre $(-\infty, 0)$. Después, elija un punto de prueba (por ejemplo, $x = 1$) en el intervalo $(0, \infty)$ y calcule.

$$f'(1) = \frac{2}{3}$$

Ya que, $f'(1) > 0$, se observa que $f'(x) > 0$ sobre $(0, \infty)$. La figura 7 muestra estos resultados mediante un diagrama de signos.

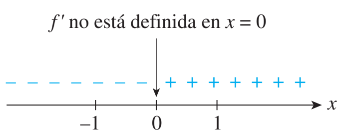


FIGURA **7**
Diagrama de signos de f'.

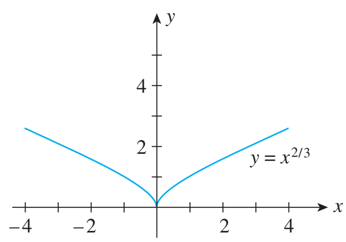


FIGURA **8**
f decrece sobre $(-\infty, 0)$ y crece sobre $(0, \infty)$.

Se concluye que f es decreciente sobre el intervalo $(-\infty, 0)$ y creciente en el intervalo de $(0, \infty)$. La gráfica de f, mostrada en la figura 8, confirma estos resultados. ■

EJEMPLO 4 Encuentre los intervalos donde la función $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$ es creciente y donde es decreciente.

Solución

1. La derivada de f es

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2}$$

(x^2) Vea la página 22.

Ya que f' no está definida en $x = 0$, ésta es discontinua allí. Es más, $f'(x)$ es igual a cero cuando $x^2 - 1 = 0$ o $x = \pm 1$. Estos valores de x dividen el dominio de f' en los intervalos abiertos $(-\infty, -1)$, $(-1, 0)$, $(0, 1)$ y $(1, \infty)$, donde el signo de f' es diferente de cero.

2. Para determinar el signo de f' en cada uno de estos intervalos, calcule $f'(x)$ en los puntos de prueba $x = -2, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$ y 2, respectivamente, se obtiene $f'(-2) = \frac{3}{4}$,

$f'(-\frac{1}{2}) = -3$, $f'(\frac{1}{2}) = -3$ y $f'(2) = \frac{3}{4}$. Del diagrama de signos para f' (figura 9), se concluye que f es creciente sobre $(-\infty, -1)$ y $(1, \infty)$ y es decreciente sobre $(-1, 0)$ y $(0,1)$.

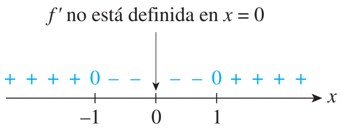


FIGURA 9
f' no cambia de signo conforme nos movemos a través de $x = 0$.

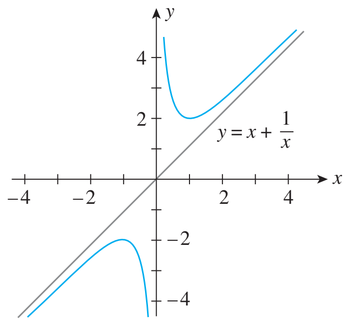


FIGURA 10
La gráfica de f crece sobre $(-\infty, -1)$, cae sobre $(-1, 0)$ y $(0, 1)$, y vuelve a crecer de nuevo sobre $(1, \infty)$.

La gráfica de f aparece en la figura 10. Tenga en cuenta que f' no cambia de signo mientras nos movemos a través de $x = 0$ (compare ésta con el ejemplo 3).

El ejemplo 4 nos recuerda que *no* se puede concluir de manera inmediata que la derivada de f' debe cambiar de signo cuando nos movemos a través de un número donde f' es discontinua o un cero de f'.

Explore y analice

Considere la función de utilidad P asociada con una cierta materia prima definida por

$$P(x) = R(x) - C(x) \qquad (x \geq 0)$$

donde R es la función de ingresos, C es el costo total de la función y x es el número de unidades del producto fabricado y vendido.

1. Determine una expresión para $P'(x)$.
2. Determine las relaciones en los términos de las derivadas de R y C así que
   a. P es creciente en $x = a$.
   b. P es decreciente en $x = a$.
   c. P no es creciente ni es decreciente en $x = a$.
   Sugerencia: Recuerde que la derivada de una función en $x = a$ mide la tasa de cambio de la función en ese número.
3. Explique los resultados del punto 2 en términos económicos.

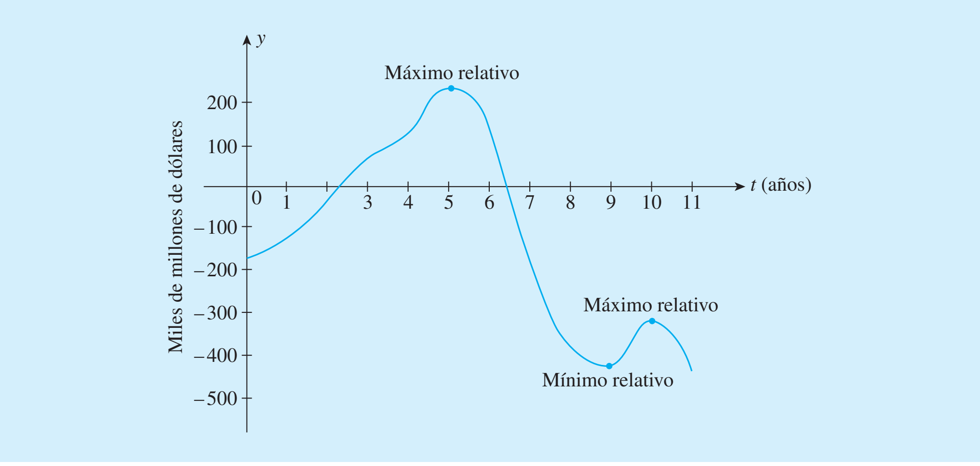
Exploración con TECNOLOGÍA

1. Use la utilería respectiva para trazar las gráficas de $f(x) = x^3 - ax$ para $a = -2, -1, 0, 1$ y 2, utilice la ventana de visualización $[-2, 2] \times [-2, 2]$.
2. Utilice los resultados del punto 1 para deducir en los valores de a en que f es creciente en $(-\infty, \infty)$.
3. Pruebe analíticamente sus conjeturas.

Los extremos relativos

Además de ayudarnos a determinar dónde la gráfica de una función es creciente y decreciente, la primera derivada puede utilizarse para ayudarnos a localizar ciertos "puntos altos" y "puntos bajos" sobre la gráfica de f. Para la elaboración de las gráficas de las funciones y resolver problemas de optimización, el conocer estos puntos es invaluable. Estos "puntos altos" y "puntos bajos" corresponden al *máximo* (*local*) *relativo* y a un *mínimo relativo* de una función. Se llaman así debido a que son los puntos más altos y más bajos cuando se comparan con puntos cercanos.

La gráfica mostrada en la figura 11 proporciona el excedente (déficit) en el presupuesto estadounidense de 1996 ($t = 0$) a 2007. El máximo y el mínimo relativos de la función f se indican en la gráfica.



Fuente: Office of Management and Budget

FIGURA 11
El excedente (déficit) en el presupuesto de Estados Unidos de 1996 a 2007.

De forma más general, tenemos la siguiente definición:

Máximo relativo

Una función f tiene un **máximo relativo** en $x = c$ si existe un intervalo abierto (a, b) que contenga a c tal que $f(x) \leq f(c)$ para toda x en (a, b).

Esto significa, geométricamente, que existe *algún* intervalo que contenga a $x = c$, tal que ningún punto en la gráfica de f con sus coordenadas x en ese intervalo puede estar situado por arriba del punto $(c, f(c))$; esto es, $f(c)$ es el valor mayor de $f(x)$ en algún intervalo alrededor de $x = c$. La figura 12 describe la gráfica de una función f que tiene un máximo relativo en $x = x_1$, y otro en $x = x_3$.

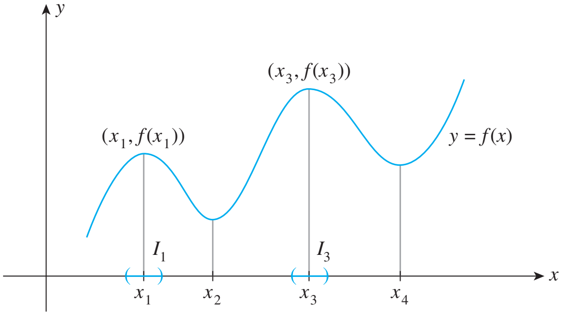


FIGURA 12
f tiene un máximo relativo en $x = x_1$ y en $x = x_3$.

Observe que todos los puntos de la gráfica de f con coordenadas x en el intervalo I_1 que contiene a x_1 (mostrados en color azul) se encuentran sobre o debajo del punto

$(x_1, f(x_1))$. Esto también es verdadero para el punto $(x_3, f(x_3))$ y el intervalo I_3. Aún así, existen puntos sobre la gráfica de f que son "más altos" que los puntos $(x_1, f(x_1))$ y $(x_3, f(x_3))$, los últimos puntos son "los más altos" con respecto a sus puntos vecinos (intervalos). Los puntos sobre la gráfica de la función f que son "mayores" y "menores" con respecto a *todos* los puntos en el dominio de f se estudiarán en la sección 10.4.

La definición de un mínimo relativo de una función es paralela al del máximo relativo de una función.

Mínimo relativo

Una función f tiene un **mínimo relativo** en $x = c$ si existe un intervalo abierto en (a, b) que contiene a c, tal que $f(x) \geq f(c)$ para toda x en (a, b).

La gráfica de la función f, descrita en la figura 12, tiene un mínimo relativo en $x = x_2$ y otro en $x = x_4$.

Determinación de los extremos relativos

Nos referimos a un máximo y a un mínimo relativos de una función como los **extremos relativos** de esa función. Como primer paso de nuestra búsqueda para determinar los extremos relativos de una función, considere las funciones que tengan derivadas en dichos puntos. Suponga que f es una función que es diferenciable en algún intervalo (a, b) que contiene un número c y que f tiene un máximo relativo en $x = c$ (figura 13a).

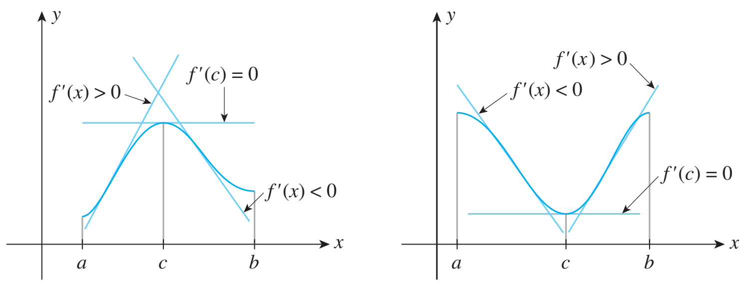


FIGURA **13**

(a) *f* tiene un máximo relativo en $x = c$.

(b) *f* tiene un mínimo relativo en $x = c$.

Observe que la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f debe cambiar de positivo a negativo conforme nos movemos a través de $x = c$ de izquierda a derecha. Sin embargo, la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(c, f(c))$ debe ser horizontal; esto es, $f'(c) = 0$ (figura 13a).

Al utilizar un argumento similar, podrá demostrarse que la derivada de f' de una función diferenciable f debe también ser igual a cero en $x = c$, donde f tiene un mínimo relativo (figura 13b).

Este análisis revela una característica importante de los extremos relativos de una función diferenciable f: *en cualquier número c donde f tiene un extremo relativo*, $f'(c) = 0$.

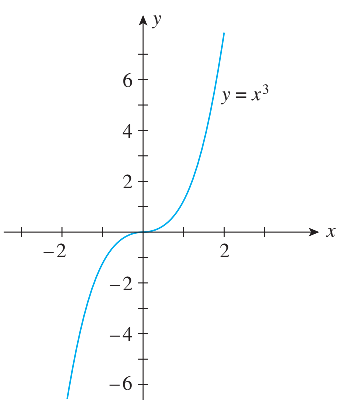


FIGURA **14**
$f'(0) = 0$, pero f no tiene un extremo relativo en $(0, 0)$.

Antes de desarrollar un procedimiento para determinar dichos números, unas palabras de precaución. Primero, este resultado indica si una función diferenciable f tiene un extremo relativo en un número $x = c$, entonces $f'(c) = 0$. Lo contrario de esta declaración, si $f'(c) = 0$ en $x = c$, entonces f debe tener un extremo relativo en ese número, *no* es verdad. Considere, por ejemplo, la función $f(x) = x^3$. Aquí, $f'(x) = 3x^2$, así que $f'(0) = 0$. Aquí, f no tiene un máximo relativo ni tampoco un mínimo relativo en $x = 0$ (figura 14).

Segundo, nuestros resultados admiten que la función es diferenciable, así que tiene una derivada en un número que lleva a un extremo relativo. Las funciones $f(x) = |x|$ y $g(x) = x^{2/3}$ demuestran que un extremo relativo de una función puede existir en un número en el cual la derivada no existe; ambas funciones no son diferenciables en $x = 0$, pero cada una tiene un mínimo relativo allí. La figura 15 muestra las gráficas de estas funciones. Observe que las pendientes de las rectas tangentes cambian de negativo a positivo conforme nos movemos a través de $x = 0$, como en el caso de una función que es diferenciable en un valor de x que lleva a un mínimo relativo.

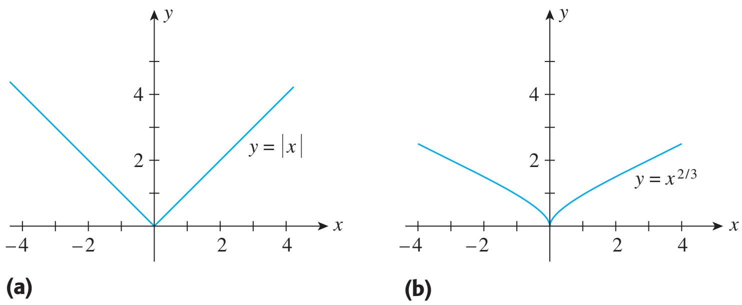


FIGURA 15
Cada una de estas funciones tiene un extremo relativo en (0, 0), pero la derivada no existe allí.

Nos referimos a un número en el dominio de f que *puede* llevar a un extremo relativo como un número crítico.

Valor crítico en f

Un **valor crítico** de una función f es cualquier número x en el dominio de f tal que $f'(x) = 0$ o $f'(x)$ no existe.

La figura 16 describe la gráfica de una función que tiene valores críticos en $x = a$, b, c, d y e. Observe que $f'(x) = 0$ en $x = a$, b y c. Después, ya que existe una esquina en $x = d$, $f'(x)$ no existe allí. Finalmente, $f'(x)$ no existe en $x = e$ debido a que la recta tangente es vertical. También, observe que los valores críticos $x = a$, b y d, llevan a extremos relativos de f, mientras que los valores críticos $x = c$ y $x = e$ no.

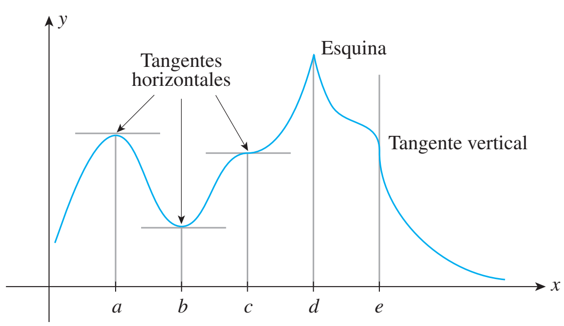


FIGURA 16
Números críticos de f.

Una vez definido qué es un valor crítico, se puede establecer ahora un procedimiento formal para determinar los extremos relativos de una función continua que es diferenciable en todas partes, excepto en los valores aislados de x. Incorporada dentro del procedimiento está la tan nombrada **prueba de la primera derivada**, que ayuda a determinar si un valor lleva a un máximo relativo o a un mínimo relativo de la función f.

La prueba de la primera derivada

Procedimiento para determinar extremos relativos de una función continua f

1. Determine los valores críticos de f.

2. Determine el signo de $f'(x)$ a la izquierda y derecha de cada valor crítico.

  a. Si $f'(x)$ cambia de signo *positivo* a *negativo* conforme se mueve a través de un valor crítico c, entonces $f(c)$ es un máximo relativo.

  b. Si $f'(x)$ cambia de signo *negativo* a *positivo* conforme se mueve a través de un valor crítico c, entonces $f(c)$ es un mínimo relativo.

  c. Si $f'(x)$ no cambia de signo mientras se mueve a través de un valor crítico c, entonces $f(c)$ no es un extremo relativo.

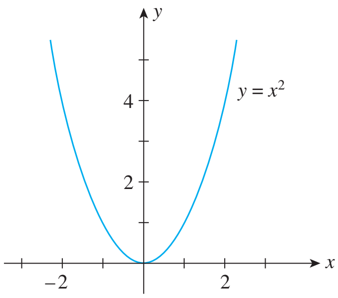


FIGURA **17**
f tiene un mínimo relativo en $x = 0$.

EJEMPLO 5 Encuentre el máximo y el mínimo relativos de la función $f(x) = x^2$.

Solución La derivada de $f(x) = x^2$ está dada por $f'(x) = 2x$. Al determinar $f'(x) = 0$ permanece en $x = 0$ como el único valor crítico de f. Puesto que,

$$f'(x) < 0 \quad \text{si } x < 0 \qquad \text{y} \qquad f'(x) > 0 \quad \text{si } x > 0$$

observe que $f'(x)$ cambia de signo negativo a positivo conforme se mueve a través del valor crítico 0. Así que, concluya que $f(0) = 0$ es un mínimo relativo de f (figura 17). ■

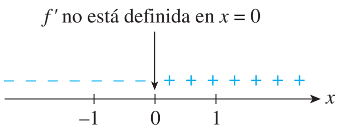


FIGURA **18**
Diagrama de signos para f'.

EJEMPLO 6 Determine los máximos y mínimos relativos de la función $f(x) = x^{2/3}$ (vea el ejemplo 3).

Solución La derivada de f es $f'(x) = \frac{2}{3}x^{-1/3}$. Como se observa en el ejemplo 3, f' no está definida en $x = 0$, es continua en todas partes, y no es igual a cero en su dominio. Así que, $x = 0$ es el único valor crítico de la función f.

El diagrama de signos obtenido en el ejemplo 3 se reproduce en la figura 18. Podemos ver que el signo de $f'(x)$ cambia de negativo a positivo conforme se mueve a través de $x = 0$ de izquierda a derecha. Así, la aplicación de la prueba de la primera derivada indica que $f(0) = 0$ es un mínimo relativo de f (figura 19). ■

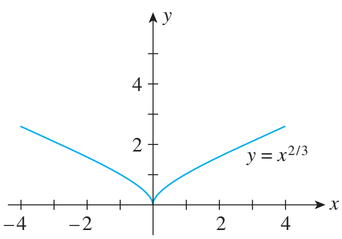


FIGURA **19**
f tiene un mínimo relativo en $x = 0$.

Explore y analice

Recuerde que la función del costo promedio $\overline{C}$ está definida por

$$\overline{C} = \frac{C(x)}{x}$$

donde $C(x)$ es la función del costo total y x es el número de unidades de un bien fabricado (vea la sección 9.8).

1. Demuestre que

$$\overline{C}'(x) = \frac{C'(x) - \overline{C}(x)}{x} \qquad (x > 0)$$

2. Utilice el resultado del punto 1 para concluir que $\overline{C}$ es decreciente para los valores de x en los cuales $C'(x) < \overline{C}(x)$. Determine las condiciones similares para que $\overline{C}$ sea creciente y para que $\overline{C}$ sea constante.

3. Explique los resultados del punto 2 en términos económicos.

EJEMPLO 7 Determine los máximos y mínimos relativos de la función

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 24x + 32$$

Solución La derivada de f es

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 24 = 3(x + 2)(x - 4)$$ ver la página 17.

y ésta es continua en todas partes. Los ceros de $f'(x)$, $x = -2$ y $x = 4$, son los únicos valores críticos de la función f. El signo del diagrama para f' se muestra en la figura 20. Examine los dos valores críticos $x = -2$ y $x = 4$ para un extremo relativo utilizando la prueba de la primera derivada y el diagrama de signos para f':

1. *El valor crítico* -2: ya que la función $f'(x)$ cambia de signo positivo a negativo conforme se mueve a través de $x = -2$ de izquierda a derecha, concluimos que el máximo relativo de f se presenta en $x = -2$. El valor de $f(x)$ cuando $x = -2$ es

$$f(-2) = (-2)^3 - 3(-2)^2 - 24(-2) + 32 = 60$$

2. *El valor crítico* 4: $f'(x)$ cambia de signo negativo a positivo conforme se mueve a través de $x = 4$ de izquierda a derecha, así que $f(4) = -48$ es un mínimo relativo de f. La gráfica de f aparece en la figura 21.

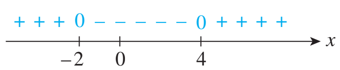


FIGURA **20**
El diagrama de signos para f'.

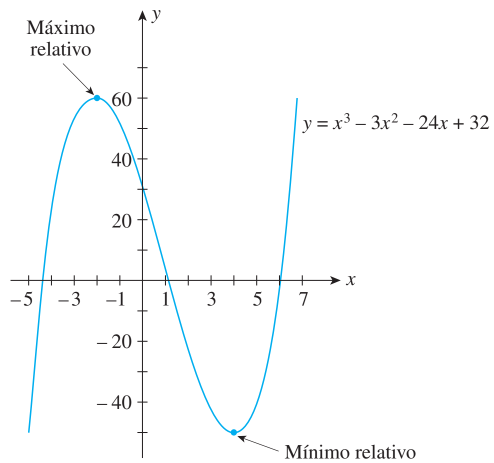


FIGURA **21**
f tiene un máximo relativo en $x = -2$ y un mínimo relativo en $x = 4$.

EJEMPLO 8 Determine los máximos y mínimos relativos de la función

$$f(x) = x + \frac{1}{x}$$

Solución La derivada de f es

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2} = \frac{(x + 1)(x - 1)}{x^2}$$

Ya que f' es igual a cero en $x = -1$ y $x = 1$, estos son valores críticos para la función f. Después, observe que f' es discontinua en $x = 0$. Sin embargo, debido a que *f no está definida en ese número,* $x = 0$ no califica como un valor crítico de f. La figura 22 muestra el diagrama de signos para f'.

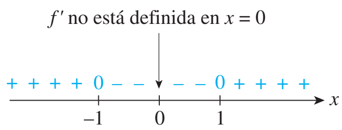


FIGURA 22
$x = 0$ no es un número crítico debido a que f no está definida en $x = 0$.

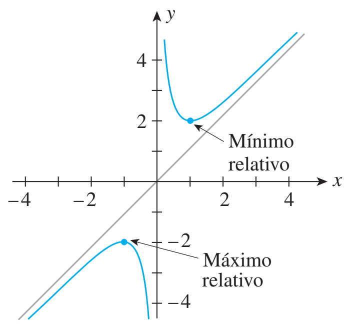


FIGURA 23
$f(x) = x + \frac{1}{x}$

Ya que $f'(x)$ cambia de signo positivo a negativo conforme se mueve a través de $x = -1$ de izquierda a derecha, la prueba de la primera derivada implica que $f(-1) = -2$ es un máximo relativo de la función f. Lo siguiente, $f'(x)$ cambia de signo negativo a positivo conforme se mueve a través de $x = 1$ de izquierda a derecha, así que $f(1) = 2$ es un mínimo relativo de la función f. La gráfica de f aparece en la figura 23. Observe que esta función tiene un máximo relativo que se encuentra debajo de su mínimo relativo. ■

Exploración con TECNOLOGÍA

Refiérase al ejemplo 8.

1. Use una calculadora graficadora para elaborar las gráficas de $f(x) = x + 1/x$ y su función derivada $f'(x) = 1 - 1/x^2$, utilizando la ventana de visualización $[-4, 4] \times [-8, 8]$.
2. Al estudiar la gráfica de f', determine los números críticos de f. Inmediatamente después, observe el signo de $f'(x)$ a la izquierda y a la derecha de cada número crítico. ¿A qué conclusión llegó sobre cada número crítico? ¿Sus conclusiones confirman la gráfica de f?

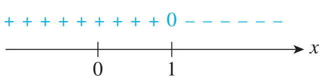


FIGURA 24
El diagrama de signos para f'.

EJEMPLO 9 Sea $f(x) = xe^{-x}$ y determine (a) el intervalo donde f es creciente o decreciente y (b) los extremos relativos de f.

Solución La derivada de f es

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(xe^{-x}) = x\frac{d}{dx}(e^{-x}) + e^{-x}\frac{d}{dx}(x) \quad \text{Utilice la regla del producto.}$$

$$= xe^{-x}(-1) + e^{-x} = (1 - x)e^{-x}$$

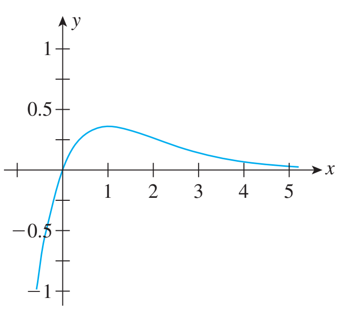


FIGURA 25
La gráfica de $f(x) = xe^{-x}$ es creciente sobre $(-\infty, 1)$ y decreciente sobre $(1, \infty)$.

Observe que f' es continua en todas partes. A continuación, estableciendo $f'(x) = 0$ da $x = 1$ (recuerde que $e^{-x} \neq 0$ para todos los valores de x). Sin embargo, $x = 1$ es el único valor crítico de f. El diagrama de signos de f' se muestra en la figura 24.

Del diagrama de signos, observe que f es creciente sobre $(-\infty, 1)$ y decreciente sobre $(1, \infty)$. También, al utilizar este diagrama, así como la prueba de la primera derivada, observe que el valor crítico de $x = 1$ lleva a un máximo relativo de f con valor $f(1) = e^{-1} = 1/e$. La gráfica de f mostrada en la figura 25 confirma nuestros resultados. ■

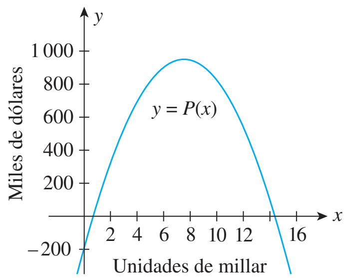


FIGURA **26**
La función de utilidad es creciente sobre (0, 7,500) y decreciente sobre (7,500, ∞).

EJEMPLO DE APLICACIÓN 10 Funciones de utilidad La función de utilidad de Acrosonic Company está dada por

$$P(x) = -0.02x^2 + 300x - 200{,}000$$

dólares, donde x es el número de altavoces Acrosonic modelo F fabricados. Determine dónde es creciente la función P y en dónde es decreciente.

Solución La derivada P' de la función P es

$$P'(x) = -0.04x + 300 = -0.04(x - 7{,}500)$$

Así que, $P'(x) = 0$ cuando $x = 7{,}500$. Además, $P'(x) > 0$ para x en el intervalo $(0, 7{,}500)$, y $P'(x) < 0$ para x en el intervalo $(7{,}500, \infty)$. Esto significa que la función de utilidad P es creciente sobre $(0, 7{,}500)$ y decreciente sobre $(7{,}500, \infty)$ (figura 26). ■

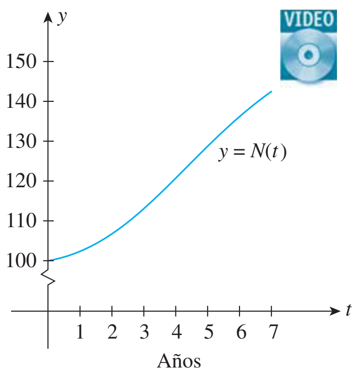


FIGURA **27**
El número de delitos, $N(t)$, es creciente sobre el intervalo de 7 años.

EJEMPLO DE APLICACIÓN 11 Índices de criminalidad El número de delitos graves cometidos en la ciudad de Bronxville de 2001 a 2008 es aproximado por la función

$$N(t) = -0.1t^3 + 1.5t^2 + 100 \qquad (0 \le t \le 7)$$

donde $N(t)$ denota el número de delitos cometidos al año t, *con* $t = 0$ correspondiente a principios de 2001. Determine dónde la función N es creciente y dónde es decreciente.

Solución La derivada N' de la función N es

$$N'(t) = -0.3t^2 + 3t = -0.3t(t - 10)$$

Ya que $N'(t) > 0$ para t en el intervalo $(0, 7)$, la función N es creciente a través de ese intervalo (figura 27). ■

10.1 Ejercicios de autoevaluación

1. Determine los intervalos donde la función $f(x) = \frac{2}{3}x^3 - x^2 - 12x + 3$ es creciente y los intervalos donde ésta es decreciente.

2. Determine los extremos relativos de $f(x) = \dfrac{x^2}{1 - x^2}$.

Las soluciones de los ejercicios de autoevaluación 10.1 se encuentran en la página 675.

10.1 Preguntas de concepto

1. Explique lo siguiente:
   a. f es creciente sobre un intervalo I.
   b. f es decreciente sobre un intervalo I.

2. Describa un procedimiento para determinar dónde una función es creciente y dónde es decreciente.

3. Explique cada término: **(a)** máximo relativo y **(b)** mínimo relativo.

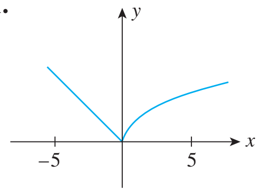
4. **a.** ¿Qué es un valor crítico de una función?
   b. Explique el papel de un valor crítico al determinar los extremos relativos de una función.

5. Describa la prueba de la primera derivada y el procedimiento para determinar los extremos relativos de una función.

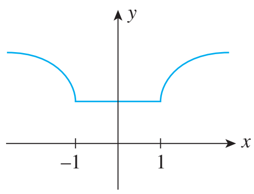
10.1 Ejercicios

En los ejercicios 1 a 8 se le da la gráfica de una función *f*. Determine los intervalos en donde *f* es creciente, constante o decreciente.

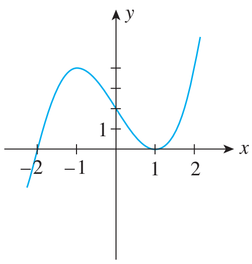
1.



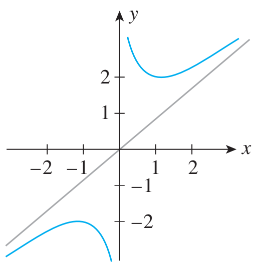
2.



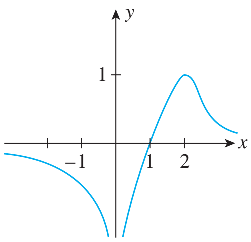
3.



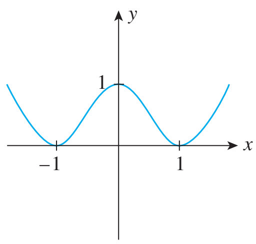
4.



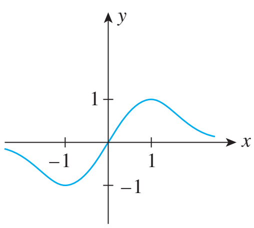
5.



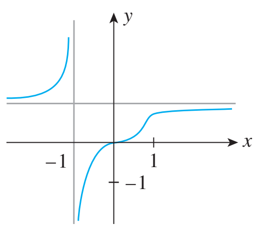
6.



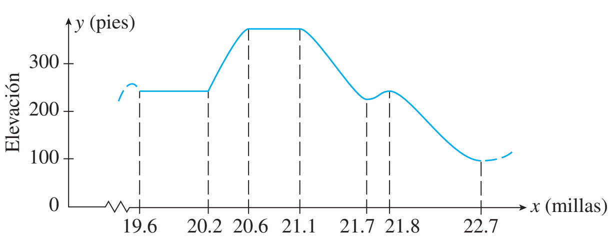
7.



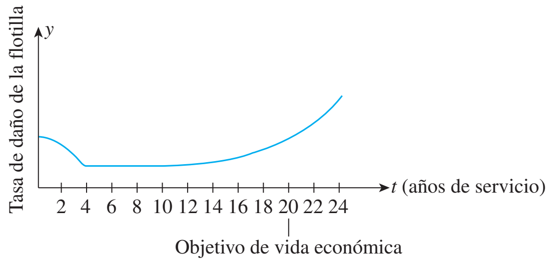
8.



9. **EL MARATÓN DE BOSTON** La gráfica de la función *f*, mostrada en la figura anexa, proporciona la elevación de esa parte del trayecto del maratón de Boston que incluye el notorio Heartbreak Hill. Determine los intervalos (extensión del trayecto) donde la función *f* es creciente (el corredor está jadeante), donde ésta es una constante (el corredor toma un respiro) y donde ésta es decreciente (el corredor se desplaza cuesta abajo).

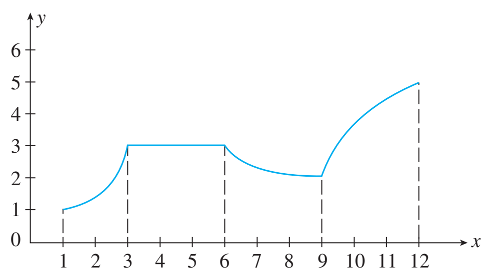


10. **INTEGRIDAD ESTRUCTURAL DE UN AVIÓN** Entre los factores importantes para determinar la integridad estructural de un avión es su edad. Una edad avanzada hace que los aviones tengan más posibilidad de falla. La gráfica de la función *f*, mostrada en la figura anexa, hace referencia al término "la curva de una bañera", usado en la industria aérea. Ésta proporciona la tasa de daño de la flotilla (debido a la corrosión, accidente y fatiga del metal) de una flotilla comercial típica de aviones como una función del número de años en servicio.



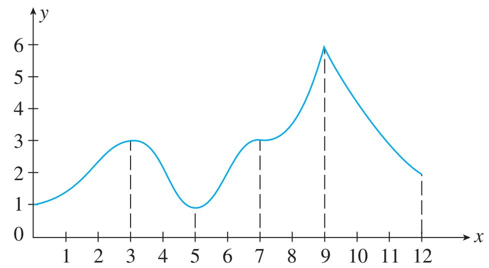
a. Determine el intervalo donde *f* es decreciente, éste corresponde al periodo cuando la tasa de daño de la flotilla disminuye conforme los problemas son encontrados y corregidos durante el periodo inicial.
b. Determine el intervalo donde *f* es constante. Después del periodo inicial, los aviones tienen pocos problemas estructurales, y esto se refleja por el hecho de que la función es una constante sobre este intervalo.
c. Determine el intervalo donde *f* es creciente. Más allá del periodo mencionado en el inciso (b), la función es creciente, reflejando un incremento en los defectos estructurales debido principalmente a la fatiga del metal.

11. Refiérase a la siguiente figura:



¿Cuál es el signo de lo siguiente?
a. $f'(2)$
b. $f'(x)$ en el intervalo $(1, 3)$
c. $f'(4)$
d. $f'(x)$ en el intervalo $(3, 6)$
e. $f'(7)$
f. $f'(x)$ en el intervalo $(6, 9)$
g. $f'(x)$ en el intervalo $(9, 12)$

12. Refiérase a la siguiente figura:



a. ¿Cuáles son los valores críticos de f? Proporcione razones de sus respuestas.
b. Dibuje el diagrama de signos para f'.
c. Determine los extremos relativos de f.

En los ejercicios 13-40 determine el (los) intervalo(s) donde la función es creciente y el (los) intervalo(s) donde ésta es decreciente.

13. $f(x) = 3x + 5$

14. $f(x) = 4 - 5x$

15. $f(x) = x^2 - 3x$

16. $f(x) = 2x^2 + x + 1$

17. $g(x) = x - x^3$

18. $f(x) = x^3 - 3x^2$

19. $g(x) = x^3 + 3x^2 + 1$

20. $f(x) = x^3 - 3x + 4$

21. $f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 9x + 20$

22. $f(x) = \dfrac{2}{3}x^3 - 2x^2 - 6x - 2$

23. $h(x) = x^4 - 4x^3 + 10$

24. $g(x) = x^4 - 2x^2 + 4$

25. $f(x) = \dfrac{1}{x - 2}$

26. $h(x) = \dfrac{1}{2x + 3}$

27. $h(t) = \dfrac{t}{t - 1}$

28. $g(t) = \dfrac{2t}{t^2 + 1}$

29. $f(x) = x^{3/5}$

30. $f(x) = x^{2/3} + 5$

31. $f(x) = \sqrt{x + 1}$

32. $f(x) = (x - 5)^{2/3}$

33. $f(x) = \sqrt{16x - x^2}$

34. $g(x) = x\sqrt{x + 1}$

35. $f(x) = x^2e^{-x}$

36. $f(x) = e^{-x^2/2}$

37. $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$

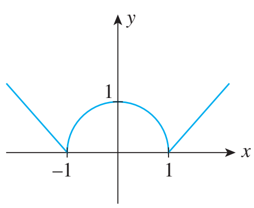
38. $f(x) = \ln x^2$

39. $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x}$

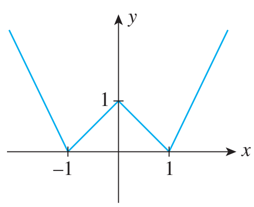
40. $h(x) = \dfrac{x^2}{x - 1}$

En los ejercicios 41-48, usted cuenta con la gráfica de la función *f*. Determine los máximos y mínimos relativos, si hay alguno.

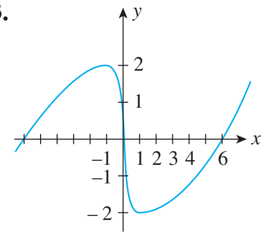
41.



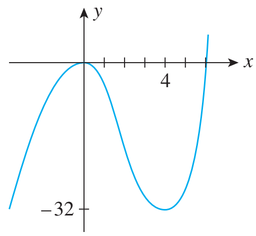
42.



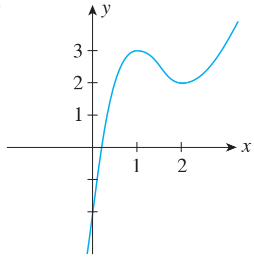
43.



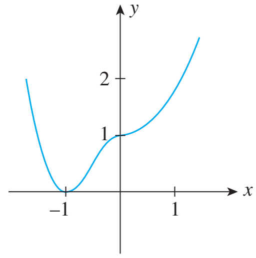
44.



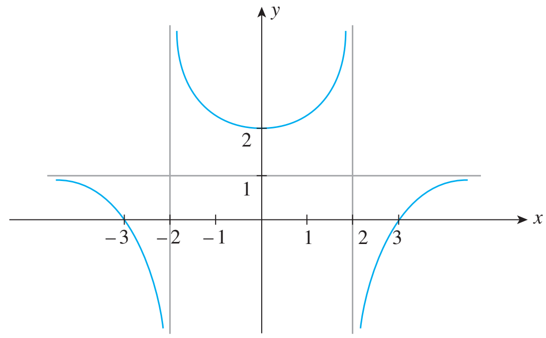
45.



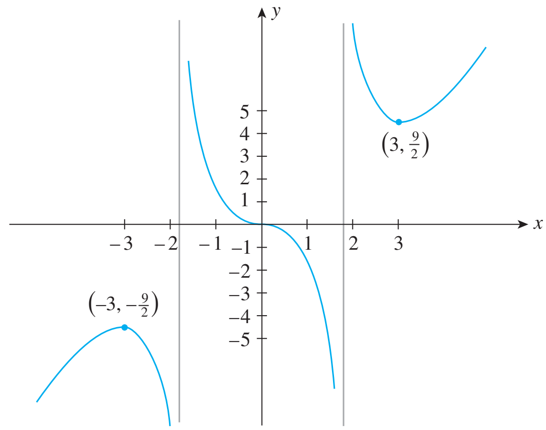
46.



47.

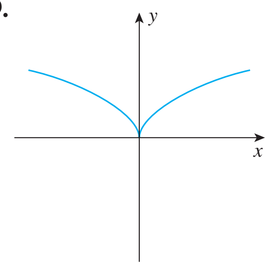


48.

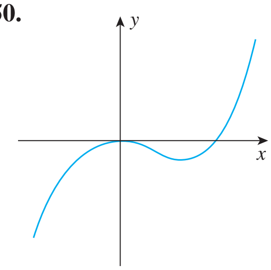


En los ejercicios 49-52, una la gráfica de la función con la gráfica de su derivada en (a)-(d).

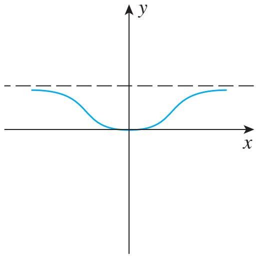
49.



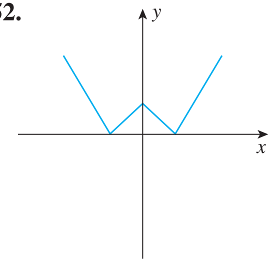
50.



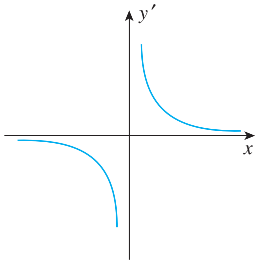
51.



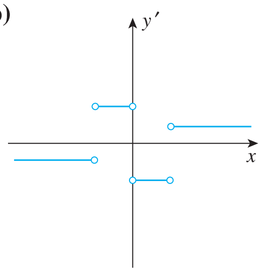
52.



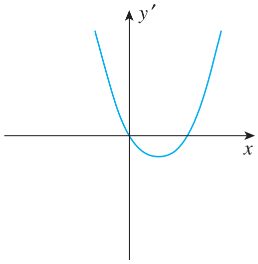
(a)



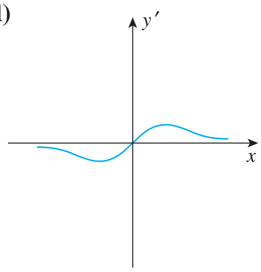
(b)



(c)



(d)



En los ejercicios 53-76, determine los máximos y mínimos relativos de cada función, si hay alguno.

53. $f(x) = x^2 - 4x$

54. $g(x) = x^2 + 3x + 8$

55. $h(t) = -t^2 + 6t + 6$

56. $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 4$

57. $f(x) = x^{5/3}$

58. $f(x) = x^{2/3} + 2$

59. $g(x) = x^3 - 3x^2 + 4$

60. $f(x) = x^3 - 3x + 6$

61. $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - x^2$

62. $h(x) = \frac{1}{2}x^4 - 3x^2 + 4x - 8$

63. $F(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 4$

64. $F(t) = 3t^5 - 20t^3 + 20$

65. $g(x) = x^4 - 4x^3 + 8$

66. $f(x) = 3x^4 - 2x^3 + 4$

67. $g(x) = \dfrac{x + 1}{x}$

68. $h(x) = \dfrac{x}{x + 1}$

69. $f(x) = x + \dfrac{9}{x} + 2$

70. $g(x) = 2x^2 + \dfrac{4{,}000}{x} + 10$

71. $f(x) = \dfrac{x}{1 + x^2}$

72. $g(x) = \dfrac{x}{x^2 - 1}$

73. $f(x) = xe^{-x}$

74. $f(x) = x^2e^{-x}$

75. $f(x) = x - \text{En } x$

76. $f(x) = x^2 \text{ En } x$

77. Una piedra es arrojada hacia arriba desde el techo de un edificio de 80 pies. La distancia (en pies) de la piedra desde el suelo en cualquier tiempo t (en segundos) está dada por

$$h(t) = -16t^2 + 64t + 80$$

¿Cuándo se eleva la piedra y cuándo cae? Si la piedra no cae en el edificio, ¿cuándo golpearía el suelo? Elabore la gráfica de h.
Sugerencia: la piedra está sobre el suelo cuando $h(t) = 0$.

78. Funciones de utilidad La filial mexicana de ThermoMaster fabrica termómetros para interiores y exteriores. La gerencia estima que la utilidad potencial (en dólares) a obtener por la empresa para la fabricación y venta de x unidades de termómetros cada semana es

$$P(x) = -0.001x^2 + 8x - 5{,}000$$

Determine los intervalos donde la función de utilidad P es creciente y los intervalos en los que P es decreciente.

79. Pacientes con Alzheimer Con base en un estudio llevado a cabo en 1997, el porcentaje de la población estadounidense que padece de Alzheimer está dado por la función

$$P(x) = 0.0726x^2 + 0.7902x + 4.9623 \qquad (0 \le x \le 25)$$

donde x se mide en años, con $x = 0$ correspondiente a los 65 años de edad. Demuestre que P es una función creciente de x sobre el intervalo (0, 25). ¿Qué le indica su resultado acerca de la relación entre el Alzheimer y la edad de la población que fluctúa entre 65 años de edad y mayores?
Fuente: Alzheimer's Association

80. Crecimiento de la administración de servicios Casi la mitad de las empresas deja que otras empresas manejen algunas de sus operaciones en la Web, una práctica llamada Web hosting. La administración de servicios que incluye el monitoreo de los servicios tecnológicos, es la parte con mayor crecimiento del Web hosting. Se espera que el cre-cimiento de las ventas de la administración de servicios sea conforme la función

$$f(t) = 0.469t^2 + 0.758t + 0.44 \qquad (0 \le t \le 6)$$

donde $f(t)$ se mide en miles de millones de dólares y t en años, con $t = 0$ correspondiente a 1999.

a. Determine el intervalo donde f es creciente y el intervalo donde f es decreciente.

b. ¿Qué le indica su resultado sobre las ventas de servicios dirigidos desde 1999 a 2005?

Fuente: International Data Corp.

81. El vuelo de un cohete La altura (en pies) alcanzada por un cohete t seg dentro del vuelo está dada por la función

$$h(t) = -\frac{1}{3}t^3 + 16t^2 + 33t + 10 \qquad (t \ge 0)$$

¿Cuándo el cohete se eleva y cuando éste desciende?

82. El ambiente en los bosques Siguiendo el ejemplo de la National Wildlife Federation, el Departamento del Interior de un país de Sudamérica comenzó a registrar el índice de calidad del ambiente que mide el progreso y el deterioro de la calidad ambiental de sus bosques. El índice para los años 1998 a 2008 se aproxima por la función

$$I(t) = \frac{1}{3}t^3 - \frac{5}{2}t^2 + 80 \qquad (0 \leq t \leq 10)$$

donde $t = 0$ corresponde a 1998. Determine los intervalos donde la función I es creciente y los intervalos donde es decreciente. Interprete sus resultados.

83. Velocidad promedio en una autopista La velocidad promedio de un vehículo en un tramo de la Ruta 134 entre las 6 y las 10 a.m. en un día de la semana típico es aproximada por la función

$$f(t) = 20t - 40\sqrt{t} + 50 \qquad (0 \leq t \leq 4)$$

donde $f(t)$ es medida en millas por hora y t en horas, con $t = 0$ correspondiente a las 6 a.m. Determine el intervalo donde f es creciente y el intervalo donde f es decreciente e interprete sus resultados.

84. Costo promedio El costo promedio (en dólares) incurrido por Lincoln Records cada semana por la impresión de x discos compactos está dado por

$$\overline{C}(x) = -0.0001x + 2 + \frac{2{,}000}{x} \qquad (0 < x \leq 6{,}000)$$

Demuestre que $\overline{C}(x)$ es siempre decreciente sobre el intervalo (0, 6,000).

85. Web hosting Refiérase al ejercicio 80. Se proyecta que las ventas en la industria del Web hosting crezcan con base en la función

$$f(t) = -0.05t^3 + 0.56t^2 + 5.47t + 7.5 \qquad (0 \leq t \leq 6)$$

donde $f(t)$ se mide en miles de millones de dólares y t se mide en años, con $t = 0$ correspondiente a 1999.

a. Determine el intervalo donde f es creciente y el intervalo donde f es decreciente.
Sugerencia: utilice la fórmula cuadrática.

b. ¿Qué le indica su resultado acerca de las ventas en la industria del Web hosting desde 1999 a 2005?

Fuente: International Data Corp.

86. Aspirantes para la escuela de medicina Según un estudio de la American Medical Association, el número de aspirantes para la escuela de medicina del año académico 1997-1998 ($t = 0$) hasta el año académico 2002-2003 es aproximado por la función

$$N(t) = -0.0333t^3 + 0.47t^2 - 3.8t + 47 \qquad (0 \leq t \leq 5)$$

donde $N(t)$ se mide en miles.

a. Demuestre que el número de aspirantes para la escuela de medicina ha disminuido en el periodo en cuestión.
Sugerencia: utilice la fórmula cuadrática.

b. ¿Cuál fue el mayor número de aspirantes a la escuela de medicina en cualquier año académico para el periodo en cuestión? ¿En qué año académico ocurrió eso?

Fuente: Journal of the American Medical Association

87. Ventas de productos alimenticios funcionales Las ventas de los productos alimenticios funcionales, aquéllos que prometen beneficios más allá de la nutrición básica, han aumentado estrepitosamente en años recientes. Las ventas (en miles de millones de dólares) en alimentos y bebidas a base de hierbas y otros aditivos se aproximan por la función

$$S(t) = 0.46t^3 - 2.22t^2 + 6.21t + 17.25 \qquad (0 \leq t \leq 4)$$

donde t se mide en años, con $t = 0$ correspondiente a principios de 1997. Justifique que S es creciente sobre el intervalo [0, 4].
Sugerencia: utilice la fórmula cuadrática.

Fuente: Frost & Sullivan

88. Fondos proyectados para el retiro Con base en datos provenientes del Fondo Central Para el Retiro de cierta ciudad (una agencia gubernamental similar al Seguro Social), el fondo en efectivo estimado en 2003 está dado por

$$A(t) = -96.6t^4 + 403.6t^3 + 660.9t^2 + 250 \qquad (0 \leq t \leq 5)$$

donde A(t) se mide en miles de millones de dólares y t en décadas, con $t = 0$ correspondiente a 2003. Determine el intervalo donde A es creciente y donde es decreciente e interprete sus resultados.
Sugerencia: utilice la fórmula cuadrática.

89. Gasto para conexiones de fibra óptica El gasto de una compañía telefónica de Estados Unidos en conexiones de fibra óptica para hogares y empresas de 2001 a 2006 se proyecta así

$$S(t) = -2.315t^3 + 34.325t^2 + 1.32t + 23 \qquad (0 \leq t \leq 5)$$

miles de millones de dólares al año t, donde t se mide en años con $t = 0$, correspondiente a 2001. Determine que $S'(t) > 0$ para toda t en el intervalo [0, 5] ¿Qué conclusiones puede formular a partir de este resultado?
Sugerencia: utilice la fórmula cuadrática.

Fuente: RHK Inc.

90. Contaminación del aire Según la junta distrital de la calidad del aire en la Costa Sur, el nivel de dióxido de nitrógeno que daña la respiración, presente en la atmósfera en cierto día de mayo en el centro de Los Ángeles, es aproximado por

$$A(t) = 0.03t^3(t - 7)^4 + 60.2 \qquad (0 \leq t \leq 7)$$

donde $A(t)$ se mide usando el índice estándar de contaminantes (PSI) y t se mide en horas, con $t = 0$ correspondiente a las 7 a.m. ¿A qué hora del día se incrementa la contaminación del aire y a qué hora disminuye?

91. Concentración de un fármaco en la sangre La concentración (en miligramos/centímetros cúbicos) de un cierto fármaco en el cuerpo de un paciente t horas después de la inyección está dada por

$$C(t) = \frac{t^2}{2t^3 + 1} \qquad (0 \leq t \leq 4)$$

¿Cuándo aumenta la concentración del medicamento y cuándo disminuye?

92. Edad de los conductores en accidentes fatales El número de accidentes fatales por 100,000 millas de travesía en automóvil (con base en datos de 1994) se aproxima por el modelo

$$f(x) = \frac{15}{0.08333x^2 + 1.91667x + 1} \qquad (0 \leq x \leq 11)$$

donde x es la edad en años del conductor, con $x = 0$ correspondiente a la edad de 16 años. Demuestre que f es decreciente en $(0, 11)$ e interprete sus resultados.

Fuente: National Highway Traffic Safety Administration

93. Contaminación del aire La cantidad de dióxido de nitrógeno, un gas café que daña la respiración, presente en la atmósfera en cierto día de mayo en la ciudad de Long Beach, se aproxima por

$$A(t) = \frac{136}{1 + 0.25(t - 4.5)^2} + 28 \qquad (0 \leq t \leq 11)$$

donde $A(t)$ se mide usando el índice estándar de contaminantes (PSI) y t se mide en horas, con $t = 0$ correspondiente a las 7 a.m. Determine los intervalos donde A es creciente y donde es decreciente e interprete sus resultados.

Fuente: Los Angeles Times

94. Sobrepoblación en las prisiones En la década de 1980 se observó la tendencia hacia penas de estilo obsoleto, opuestas a políticas penales más liberales y a centros correccionales con base en la comunidad, populares en la década de 1960 y principios de 1970. Como resultado, las cárceles se sobrepoblaron, y la brecha entre el número de personas en prisión y su capacidad se ensancharon. El número de reclusos (en miles) en prisiones federales y estatales se aproxima por la función

$$N(t) = 3.5t^2 + 26.7t + 436.2 \qquad (0 \leq t \leq 10)$$

en donde t se mide en años, con $t = 0$ correspondiente a 1984. El número de internos para los cuales las cárceles fueron diseñadas está dado por

$$C(t) = 24.3t + 365 \qquad (0 \leq t \leq 10)$$

donde $C(t)$ se mide en miles y t tiene el mismo significado que arriba. Demuestre que la brecha entre el número de prisioneros y el número para el que las prisiones fueron diseñadas se ha ensanchado en cualquier tiempo t.

Sugerencia: escriba primero una función G que dé la brecha entre el número de prisioneros y el número para el cual las prisiones fueron diseñadas en cualquier tiempo t. Entonces demuestre que $G'(t) > 0$ para todos los valores de t en el intervalo $(0, 10)$.

Fuente: U.S. Department of Justice

95. Falta de enfermeras en Estados Unidos La demanda de enfermeras entre los años 2000 y 2015 se estima en

$$D(t) = 0.0007t^2 + 0.0265t + 2 \qquad (0 \leq t \leq 15)$$

donde $D(t)$ se mide en millones y $t = 0$, corresponde al año 2000. La demanda de enfermeras para el mismo periodo se estima será

$$S(t) = -0.0014t^2 + 0.0326t + 1.9 \qquad (0 \leq t \leq 15)$$

donde $S(t)$ se mide también en millones.

a. Determine una expresión $G(t)$ que proporcione la brecha entre la demanda y la oferta de enfermeras sobre el periodo en cuestión.

b. Encuentre el intervalo donde G es decreciente y donde es creciente. Interprete sus resultados.

c. Determine el extremo relativo de G. Interprete sus resultados.

Fuente: U.S. Department of Health and Human Services

En los ejercicios 96-101, determine si la afirmación es verdadera o falsa. Si es verdadera, explique por qué lo es. Si es falsa, proporcione un ejemplo para demostrar por qué lo es.

96. Si f es decreciente sobre (a, b) entonces $f'(x) < 0$ para cada x en (a, b).

97. Si f y g ambos son decrecientes sobre (a, b), entonces $f + g$ es creciente en (a, b).

98. Si f y g son ambos decrecientes sobre (a, b) entonces $f - g$ es decreciente en (a, b).

99. Si $f(x)$ y $g(x)$ son positivos sobre (a, b) y ambos, f y g, son crecientes sobre (a, b), entonces fg es creciente en (a, b).

100. Si $f'(c) = 0$, entonces f tiene un máximo relativo o un mínimo relativo en $x = c$.

101. Si f tiene un mínimo relativo en $x = c$, entonces $f'(c) = 0$.

102. Al utilizar el teorema 1, verifique que la función lineal $f(x) = mx + b$ es (a) es creciente en todas partes si $m > 0$, (b) es decreciente en todas partes si $m < 0$ y (c) constante si $m = 0$.

103. Demuestre que la función $f(x) = x^3 + x + 1$ no tiene extremo relativo en $(-\infty, \infty)$.

104. Sea $f(x) = x^2 + ax + b$. Determine las constantes a y b de manera que f tenga un mínimo relativo en $x = 2$ y que el valor mínimo relativo sea 7.

105. Sea $f(x) = ax^3 + 6x^2 + bx + 4$. Determine las constantes a y b de manera que f tenga un mínimo relativo en $x = -1$ y un máximo relativo en $x = 2$.

106. Sea

$$f(x) = \begin{cases} -3x & \text{si } x < 0 \\ 2x + 4 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

a. Calcule $f'(x)$ y muestre que ésta cambió de signo negativo a positivo conforme se mueve a través de $x = 0$.

b. Muestre que f no tiene un mínimo relativo en $x = 0$. ¿Esto contradice la prueba de la primera derivada? Explique su respuesta.

107. Sea

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 3 & \text{si } x \neq 0 \\ 2 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

a. Calcule $f'(x)$ y muestre que ésta cambió de signo positivo a negativo conforme se mueve a través de $x = 0$.

b. Muestre que f no tiene un máximo relativo en $x = 0$. ¿esto contradice a la prueba de la primera derivada? Explique su respuesta.

108. Sea

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2} & \text{si } x > 0 \\ x^2 & \text{si } x \le 0 \end{cases}$$

a. Calcule $f'(x)$ y muestre que ésta no ha cambiado de signo conforme se mueve a través de $x = 0$.
b. Muestre que f tiene un mínimo relativo en $x = 0$. ¿Esto contradice la prueba de la primera derivada? Explique su respuesta.

109. Muestre que la función cuadrática

$$f(x) = ax^2 + bx + c \qquad (a \neq 0)$$

tiene un extremo relativo cuando $x = -b/2a$. También demuestre que el extremo relativo es un máximo relativo si $a < 0$ y un mínimo relativo si $a > 0$.

110. Muestre que la función cúbica

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \qquad (a \neq 0)$$

no tiene extremo relativo si y sólo si $b^2 - 3ac \le 0$.

111. Refiérase al ejemplo 6 de la página 561.
a. Muestre que f es creciente sobre el intervalo (0, 1).
b. Muestre que $f(0) = -1$ y $f(1) = 1$ y utilice el resultado del inciso (a) junto con el teorema del valor intermedio para concluir que existe una raíz exacta de $f(x) = 0$ en (0, 1).

112. Muestre que la función

$$f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$$

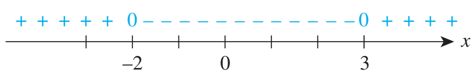
No tiene un extremo relativo si $ad - bc \neq 0$. ¿Qué podría decir acerca de f si $ad - bc = 0$?

10.1 Soluciones a los ejercicios de autoevaluación

1. La derivada de f es

$$f'(x) = 2x^2 - 2x - 12 = 2(x + 2)(x - 3)$$

y ésta es continua en todas partes. Los ceros de $f'(x)$ son $x = -2$ y $x = 3$. El diagrama de signos de f' se muestra en la siguiente figura. Concluya que f es creciente sobre el intervalo $(-\infty, -2)$ y $(3, \infty)$ y decreciente sobre el intervalo $(-2, 3)$.

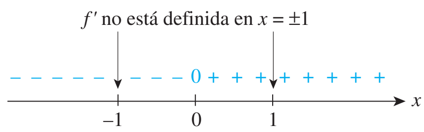


2. La derivada de f es

$$f'(x) = \frac{(1 - x^2)\dfrac{d}{dx}(x^2) - x^2\dfrac{d}{dx}(1 - x^2)}{(1 - x^2)^2}$$

$$= \frac{(1 - x^2)(2x) - x^2(-2x)}{(1 - x^2)^2} = \frac{2x}{(1 - x^2)^2}$$

y ésta es continua en todas partes, excepto en $x = \pm 1$. Ya que $f'(x)$ es igual a cero en $x = 0$, $x = 0$ es un número crítico de f. Después, observe que $f'(x)$ es discontinua en $x = \pm 1$, pero ya que estos números no están en el dominio de f, no califican como valores críticos de f. Finalmente, el diagrama de signos de f' mostrado en la siguiente figura, se concluye que $f(0) = 0$ es un mínimo relativo de f,



USO DE LA TECNOLOGÍA

El uso de la primera derivada para analizar una función

La calculadora graficadora es una herramienta eficaz para analizar las propiedades de las funciones. Es especialmente cierto cuando también se utiliza para analizar el poder del cálculo, como se muestra en los siguientes ejemplos.

EJEMPLO 1 Sea $f(x) = 2.4x^4 - 8.2x^3 + 2.7x^2 + 4x + 1$.

a. Use la calculadora graficadora para elaborar la gráfica de f.
a. Determine los intervalos donde f es creciente y donde es decreciente.
a. Determine los extremos relativos de f.

(continúa)

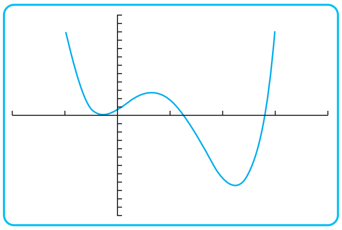


FIGURA **T1**
La gráfica de f en la ventana de visualización $[-2, 4] \times [-10, 10]$.

Solución

a. La grafica de f en la ventana de visualización $[-2, 4] \times [-10, 10]$ se muestra en la figura T1.

b. Calcule

$$f'(x) = 9.6x^3 - 24.6x^2 + 5.4x + 4$$

y observe que f' es continua en todas partes, así que los valores críticos de f se presentan en los valores de x donde $f'(x) = 0$. Para resolver esta última ecuación, observe que $f'(x)$ es una *función polinomial* de tercer grado. La forma más sencilla para resolver una función polinomial

$$9.6x^3 - 24.6x^2 + 5.4x + 4 = 0$$

es usar la función en la calculadora graficadora para resolver ecuaciones polinomiales (no todas las calculadoras de este tipo tienen esta función). Puede utilizar también **TRACE** y **ZOOM**, pero éste no brindará la misma exactitud sin mucho esfuerzo.

Determinar

$$x_1 \approx 2.22564943249 \qquad x_2 \approx 0.63272944121 \qquad x_3 \approx -0.295878873696$$

Con referencia a la figura T1, concluya que f es decreciente sobre $(-\infty, -0.2959)$ y $(0.6327, 2.2256)$ (redondear a cuatro posiciones decimales) y f es creciente en $(-0.2959, 0.6327)$ y $(2.2256, \infty)$.

c. Al utilizar la función de evaluación de una calculadora graficadora, determine el valor de f en cada uno de los valores críticos determinados en el inciso (b). Sobre la referencia de la figura T1 una vez más, observe que $f(x_3) \approx 0.2836$ y $f(x_1) \approx -8.2366$ son valores mínimos relativos de f y $f(x_2) \approx 2.9194$ es un valor máximo relativo de f. ■

Nota La ecuación $f'(x) = 0$ en el ejemplo 1 es una ecuación polinomial, y así de sencillo es resolverla al utilizar la función para solucionar ecuaciones polinomiales. La ecuación también se puede resolver utilizando la función para determinar las raíces de las ecuaciones, pero esto requeriría mucho más trabajo. Sin embargo, para las ecuaciones que *no* son polinomiales, nuestra única alternativa es utilizar la función para determinar las raíces de las ecuaciones. ■

Si la derivada de una función es difícil de calcular o de simplificar, y no se requiere gran precisión en la solución, podemos determinar el extremo relativo de la función utilizando una combinación de **ZOOM** y **TRACE**. Esta técnica, que no requiere el uso de la derivada de f, se ilustra en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 2 Sea $f(x) = x^{1/3}(x^2 + 1)^{-3/2}3^{-x}$.

a. Use la calculadora graficadora para elaborar la gráfica de f.

b. Determine los extremos relativos de f.

Solución

a. En la figura T2 se muestra la gráfica de f dentro de la ventana de visualización $[-4, 2] \times [-2, 1]$.

b. De la gráfica de f en la figura T2, observe que f tiene un máximo relativo cuando $x \approx -2$ y $x \approx 0.25$ y un mínimo relativo cuando $x \approx -0.75$. Para obtener una mejor aproximación del primer máximo relativo, realice un acercamiento con el

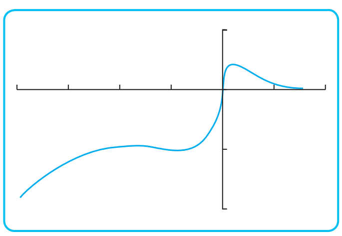


FIGURA **T2**
La gráfica de f en la ventana de visualización $[-4, 2] \times [-2, 1]$.

cursor aproximando el punto correspondiente sobre la gráfica de $x \approx -2$. Luego utilice **TRACE**, observe que se presenta un máximo relativo cuando $x \approx -1.76$ con valor $y \approx -1.01$. De forma similar, determine el otro máximo relativo cuando $x \approx 0.20$ con valor $y \approx 0.44$. Al repetir el procedimiento, encontramos el mínimo relativo en $x \approx -0.86$ y $y \approx -1.07$. ■

Puede utilizar también las funciones "mínimas" y máximas" de una calculadora graficadora para determinar el extremo relativo de la función. Vea el sitio Web para el procedimiento.

Finalmente, le comentamos que si tiene acceso a una computadora y a un software como Derive, Maple o Mathematica, entonces una diferenciación simbólica lo llevará a la derivada $f'(x)$ de cualquier función diferenciable. Este software resolverá también con facilidad la ecuación $f'(x) = 0$. Así, el uso de una computadora simplificará aún más el análisis de la función.

EJERCICIOS CON TECNOLOGÍA

En los ejercicios 1-4, determine (a) los intervalos en donde *f* es creciente y los intervalos donde es decreciente y (b) los extremos relativos de *f*. Exprese sus respuestas redondeando a cuatro posiciones decimales.

1. $f(x) = 3.4x^4 - 6.2x^3 + 1.8x^2 + 3x - 2$
2. $f(x) = 1.8x^4 - 9.1x^3 + 5x - 4$
3. $f(x) = 2x^5 - 5x^3 + 8x^2 - 3x + 2$
4. $f(x) = 3x^5 - 4x^2 + 3x - 1$

En los ejercicios 5-8, utilice las características ZOOM y TRACE para determinar (a) los intervalos donde *f* es creciente y donde es decreciente y (b) los extremos relativos de *f*. Exprese sus respuestas redondeando a dos posiciones decimales.

5. $f(x) = (2x + 1)^{1/3}(x^2 + 1)^{-2/3}$
6. $f(x) = [x^2 (x^3 - 1)]^{1/3} + \dfrac{1}{x}$
7. $f(x) = e^{-x}\sqrt{x^2 + 1} + x^3$
8. $f(x) = \dfrac{xe^{-x^2} + x^{3/2}}{x^2 + 1}$

9. **CAPACIDAD DE FABRICACIÓN** Los datos muestran que el incremento anual en la capacidad de fabricación entre 1994 y 2000 está dado por

$$f(t) = 0.009417t^3 - 0.426571t^2 + 2.74894t + 5.54 \qquad (0 \le t \le 6)$$

por ciento donde t se mide en años, con $t = 0$ correspondiente al inicio de 1994.

a. Elabore la gráfica de f en la ventana de visualización $[0, 6] \times [0, 11]$.

b. Determine el intervalo donde f es creciente y donde es decreciente e interprete sus resultados.

Fuente: Federal Reserve

10. **CIRUGÍAS EN CENTROS MÉDICOS** Impulsado por los avances técnicos y las presiones financieras, el número de cirugías realizado por los centros médicos en toda la nación se han incrementado durante años. La función

$$f(t) = -0.00447t^3 + 0.09864t^2 + 0.05192t + 0.8 \qquad (0 \le t \le 15)$$

proporciona el número de cirugías (en millones) llevado a cabo en centros médicos por año t, con $t = 0$ correspondiente a los inicios de 1986.

a. Elabore la gráfica de f en la ventana de visualización $[0, 15] \times [0, 10]$.

b. Pruebe que f es creciente en el intervalo $[0, 15]$.
Sugerencia: demuestre que f' es positivo sobre el intervalo.

Fuente: SMG Marketing Group

11. **CONTAMINACIÓN DEL AIRE** La cantidad de dióxido de nitrógeno, un gas café que daña la respiración, presente en la atmósfera un cierto día de mayo en Long Beach, es aproximadamente de

$$A(t) = \frac{136}{1 + 0.25(t - 4.5)^2} + 28 \qquad (0 \le t \le 11)$$

donde $A(t)$ se mide usando el índice estándar de contaminación (PSI) y t se mide en horas, con $t = 0$ correspondiente a las 7 a.m. ¿Cuándo PSI es creciente y cuándo es decreciente? ¿A qué hora el PSI es el más alto y cuál es su valor a esa hora?

12. **MODELADO CON DATOS** Los siguientes datos dan el volumen del cargamento (en millones de toneladas) trasladado en el aeropuerto de Nueva York/Nueva Jersey de 1991 a 2002.

Año	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002
Volumen	13.5	14.1	14.6	15.6	15.1	14.9	15.7	16.9	18.8	20.8	21.9	24

a. Utilice **CubicReg** para determinar un polinomio de tercer grado aplicando un modelo de regresión a los datos. Sea $t = 0$ correspondiente a 1991.

b. Elabore la grafica de V en la ventana de visualización $[0, 11] \times [0, 25]$.

c. ¿En dónde V es creciente? ¿Qué le indica esto?

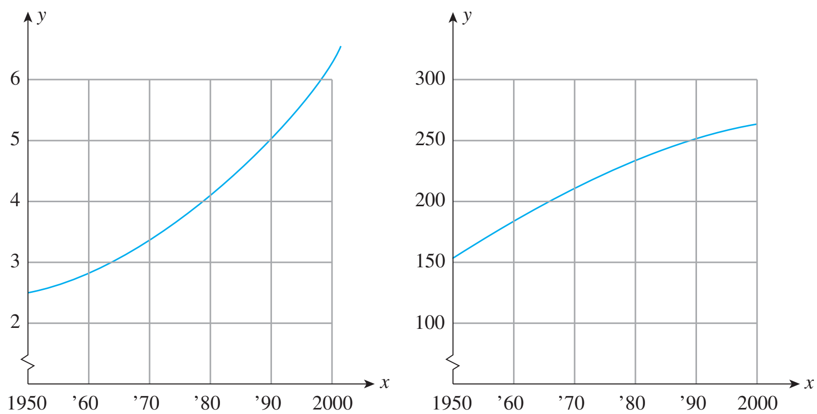
d. Verifique analíticamente los resultados del inciso (c)

Fuente: Port Authority of New York/New Jersey

10.2 Aplicaciones de la segunda derivada

Determinación de los intervalos de concavidad

Considere las gráficas mostradas en la figura 28, que proporcionan la población mundial estimada y de Estados Unidos durante el año 2000. Ambas gráficas son crecientes y denotan que tanto la población de dicho país como la población mundial continuaron aumentando durante el año 2000. Pero observe que la gráfica en la figura 28a se abre hacia arriba, mientras que la gráfica en la figura 28b abre hacia abajo. ¿Qué significa esto? Para responder esta pregunta, observe las pendientes de la recta tangente para varios puntos en cada gráfica (figura 29).



(a) Población mundial en miles de millones **(b)** Población de Estados Unidos en millones

FIGURA 28

Fuente: U.S. Department of Commerce and Worldwatch Institute

En la figura 29a, observe que las pendientes de la recta tangente a la gráfica son crecientes conforme se mueve de izquierda a derecha. Ya que la pendiente de la recta tangente a la gráfica en un punto mide la tasa de cambio de la función en un punto, se concluye que la población mundial no sólo se incrementaba a lo largo del año 2000 sino que también aumentaba a un ritmo *creciente*. Un análisis similar de la figura 29b revela que la población de Estados Unidos era creciente, pero a un ritmo decreciente.

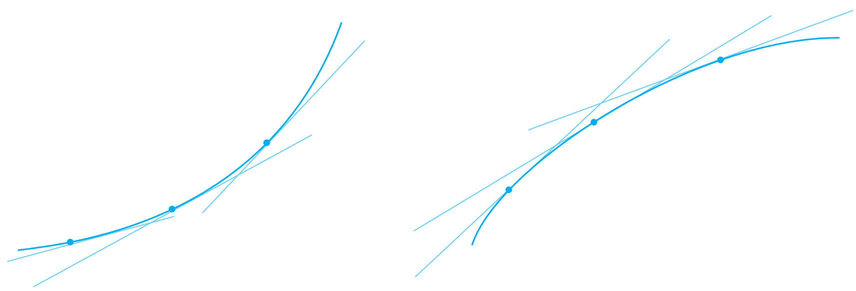


FIGURA 29

(a) Las pendientes de la recta tangente son crecientes.

(b) Las pendientes de la recta tangente son decrecientes.

La forma de una curva puede describirse utilizando la noción de concavidad.

Concavidad de una función f

Asuma que la función f sea diferenciable en un intervalo (a, b). Entonces

1. f es **cóncava hacia arriba** en (a, b) si f' es creciente en (a, b).

2. f es **cóncava hacia abajo** en (a, b) si f' es decreciente en (a, b).

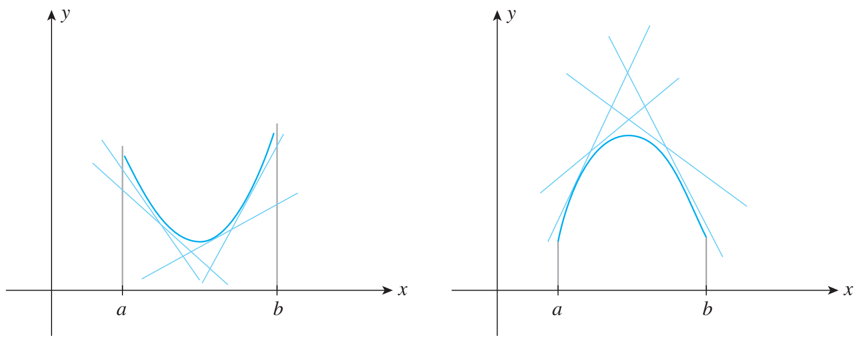


FIGURA 30 **(a)** f es cóncava hacia arriba en (a, b). **(b)** f es cóncava hacia abajo en (a, b).

Geométricamente, una curva es cóncava hacia arriba si permanece por arriba de sus rectas tangentes (figura 30a). De forma similar, una curva es cóncava hacia abajo si permanece debajo de sus rectas tangentes (figura 30b).

También se dice que f es *cóncava hacia arriba en un número c* si existe un intervalo (a, b) conteniendo a c, en el cual f es cóncava hacia arriba. De igual manera, se dice que f es *cóncava hacia abajo en un número c* si existe en un intervalo (a, b) conteniendo a c, en el cual f es cóncava hacia abajo.

Si una función f tiene una segunda derivada f'', podemos utilizar f'' para determinar los intervalos de concavidad de la función. Recuerde que $f''(x)$ mide la tasa de cambio de la pendiente $f'(x)$ de la recta tangente a la gráfica f en el punto $(x, f(x))$. Así que, si $f''(x) > 0$ en un intervalo (a, b), entonces las pendientes de las rectas tangentes a la gráfica de f son crecientes en (a, b), y así f es cóncava hacia arriba en (a, b). De igual forma, si $f''(x) < 0$ sobre (a, b), entonces f es cóncava hacia abajo en (a, b). Estas observaciones sugieren el siguiente teorema.

TEOREMA 2

a. Si $f''(x) > 0$ para cada valor de x en (a, b), entonces f es cóncava hacia arriba en (a, b).

b. Si $f''(x) < 0$ para cada valor de x en (a, b) entonces f es cóncava hacia abajo en (a, b).

El siguiente procedimiento se basa en conclusiones del teorema 2, que puede utilizarse para determinar los intervalos de concavidad de una función.

Determinación de los intervalos de concavidad de f

1. Determine los valores de x para los cuales f'' es cero o donde f'' no está definida, e identifique los intervalos abiertos determinados por estos números.
2. Determine el signo de f'' en cada intervalo encontrado en el paso 1. Para hacerlo, calcule $f''(c)$ donde c es cualquier número de prueba elegido convenientemente en el intervalo.
   a. Si $f''(c) > 0$, f es cóncava hacia arriba sobre ese intervalo.
   b. Si $f''(c) < 0$, f es cóncava hacia abajo sobre ese intervalo.

EJEMPLO 1 Determine dónde la función $f(x) = x^3 - 3x^2 - 24x + 32$ es cóncava hacia arriba y dónde es cóncava hacia abajo.

Solución Aquí

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 24$$
$$f''(x) = 6x - 6 = 6(x - 1)$$

y f'' está definida en todas partes. Estableciendo $f''(x) = 0$ da $x = 1$. El diagrama de signos de f'' aparece en la figura 31. Concluya que f es cóncava hacia abajo en el intervalo $(-\infty, 1)$ y cóncava hacia arriba en el intervalo $(1, \infty)$. La figura 32 muestra la gráfica de f.

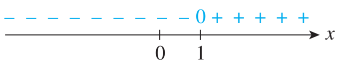


FIGURA 31
El diagrama de signos para f''.

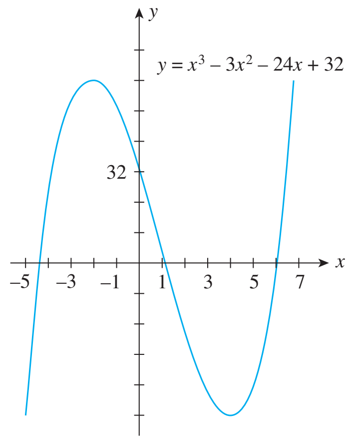


FIGURA 32
f es cóncava hacia abajo sobre $(-\infty, 1)$ y cóncava hacia arriba sobre $(1, \infty)$.

Exploración con TECNOLOGÍA

Refiérase al ejemplo 1.

1. Use la calculadora graficadora para elaborar las gráficas de $f(x) = x^3 - 3x^2 - 24x + 32$ y su segunda derivada $f''(x) = 6x - 6$ utilizando la ventana de visualización $[-10, 10] \times [-80, 90]$.
2. Al estudiar la gráfica de f'', determine los intervalos donde $f''(x) > 0$ y los intervalos donde $f''(x) < 0$. Después, observe en la gráfica de f y determine los intervalos donde la gráfica de f es cóncava hacia arriba y donde la gráfica de f es cóncava hacia abajo. ¿Estas observaciones son lo que esperaba?

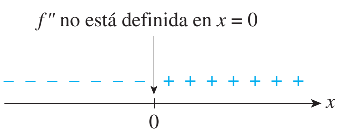


FIGURA 33
El diagrama de signos para f''.

EJEMPLO 2 Determine los intervalos donde la función $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$ es cóncava hacia arriba y donde es cóncava hacia abajo.

Solución Se tiene

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$$

$$f''(x) = \frac{2}{x^3}$$

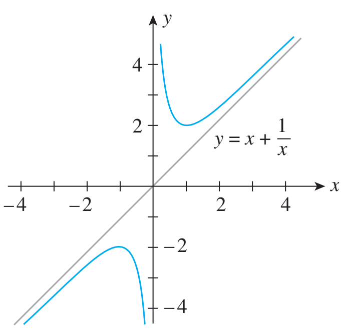


FIGURE 34
f es cóncava hacia abajo sobre $(-\infty, 0)$ y cóncava hacia arriba sobre $(0, \infty)$.

Se deduce del diagrama de signos de f'' (figura 33) que la función f es cóncava hacia abajo sobre el intervalo $(-\infty, 0)$ y cóncava hacia arriba sobre el intervalo $(0, \infty)$. La gráfica de f está trazada en la figura 34.

Puntos de inflexión

La figura 35 muestra las ventas totales S de un fabricante de aire acondicionado para automóviles frente a la cantidad de dinero x que la empresa gasta en la publicidad de su producto.

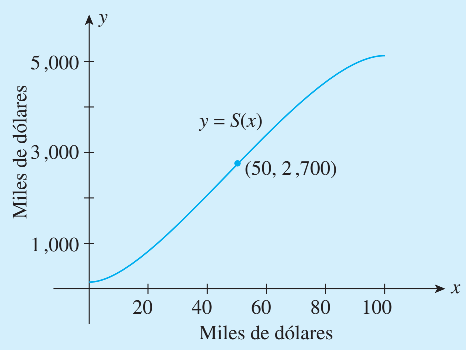


FIGURA 35
La gráfica de S tiene un punto de inflexión en (50, 2,700).

Observe que la gráfica de la función continua $y = S(x)$ cambia de concavidad, de arriba hacia abajo, en el punto (50, 2,700). A este punto se le llama un punto de inflexión de S. Para entender el significado de este punto de inflexión, observe que el total de las ventas incrementa más lentamente al principio, pero mientras más dinero se gasta en publicidad, el total de las ventas aumenta con rapidez. El rápido incremento refleja la efectividad de los anuncios de la empresa. Sin embargo, se alcanza un punto después de que cualquier gasto adicional en publicidad es resultado del incremento en las ventas, pero con una tasa de crecimiento menor. Este punto, comúnmente conocido como el *punto de rendimientos decrecientes*, es el punto de inflexión de la función S. Regresaremos a este ejemplo más tarde.

Ahora se establece formalmente la definición de punto de inflexión.

Punto de inflexión

Un punto en la gráfica de una función continua f donde la recta tangente existe y la concavidad cambia se le llama **punto de inflexión**.

Observe que la gráfica de una función cruza su recta tangente en un punto de inflexión (figura 36).

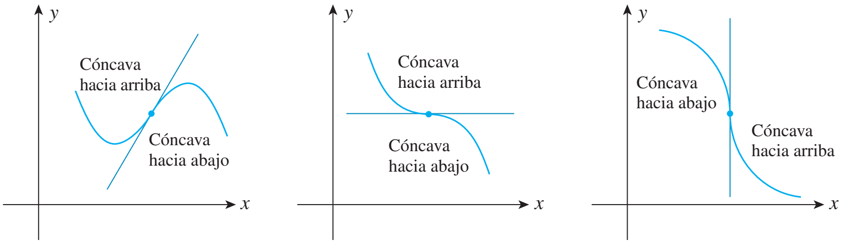


FIGURA 36
La gráfica de una función cruza su recta tangente en cada punto de inflexión.

El siguiente procedimiento puede utilizarse para determinar los puntos de inflexión.

Determinación de los puntos de inflexión

1. Calcule $f''(x)$.
2. Determine los números en el dominio de f para los cuales $f''(x) = 0$ o $f''(x)$ no existe.
3. Determine el signo de $f''(x)$ a la izquierda y a la derecha de cada número c determinado en el paso 2. Si existe un cambio en el signo de $f''(x)$ conforme se mueve a través de $x = c$, entonces $(c, f(c))$ es un punto de inflexión de f.

Los números determinados en el paso 2 son sólo *candidatos* para los puntos de inflexión de f. Por ejemplo, puede verificar con facilidad que $f''(0) = 0$ si $f(x) = x^4$, pero un trazo de la gráfica de f demostrará que $(0, 0)$ *no* es un punto de inflexión de f.

EJEMPLO 3 Encuentre el punto de inflexión de la función $f(x) = x^3$.

Solución

$$f'(x) = 3x^2$$
$$f''(x) = 6x$$

Observe que f'' es continua en todas partes y es cero si $x = 0$. El diagrama de signos de f'' se muestra en la figura 37. De este diagrama, observamos que $f''(x)$ cambia de signo conforme se mueve a través de $x = 0$. Así que, el punto $(0, 0)$ es un punto de inflexión de la función f (figura 38).

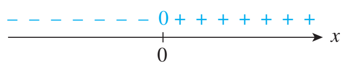


FIGURA 37
Diagrama de signos para f''.

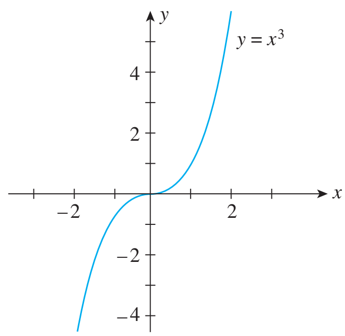


FIGURA 38
f tiene un punto de inflexión en $(0, 0)$.

EJEMPLO 4 Determine los intervalos donde la función $f(x) = (x - 1)^{5/3}$ es cóncava hacia arriba y donde es cóncava hacia abajo y determine los puntos de inflexión de f.

Solución La primera derivada de f es

$$f'(x) = \frac{5}{3}(x - 1)^{2/3}$$

y la segunda derivada de f es

$$f''(x) = \frac{10}{9}(x - 1)^{-1/3} = \frac{10}{9(x - 1)^{1/3}}$$

Observamos que f'' no está definida en $x = 1$. Además, $f''(x)$ no es igual a cero en ninguna parte. El diagrama de signos de f'' se muestra en la figura 39. Del diagrama de signos, observe que f es cóncava hacia abajo sobre $(-\infty, 1)$ y cóncava hacia arriba sobre $(1, \infty)$. Después, ya que $x = 1$ permanece en el dominio de f, los cálculos también revelan que el punto $(1, 0)$ es un punto de inflexión de f (figura 40).

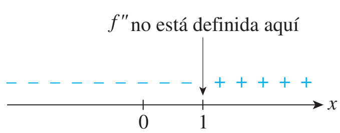


FIGURA 39
El diagrama de signos para f''.

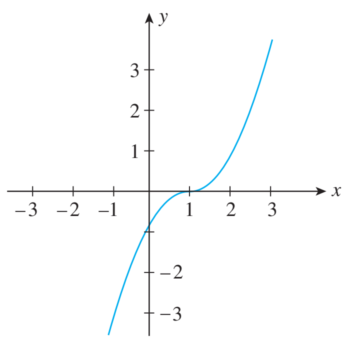


FIGURA 40
f tiene un punto de inflexión en $(1, 0)$.

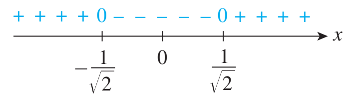


FIGURA **41**
El diagrama de signos para f''.

EJEMPLO 5 Determine los puntos de inflexión de la función $f(x) = e^{-x^2}$.

Solución La primera derivada de f es

$$f'(x) = -2xe^{-x^2}$$

Derivar $f'(x)$ con respecto a x es

$$\begin{aligned} f''(x) &= (-2x)(-2xe^{-x^2}) - 2e^{-x^2} \\ &= 2e^{-x^2}(2x^2 - 1) \end{aligned}$$

Al establecer $f''(x) = 0$ da

$$2e^{-x^2}(2x^2 - 1) = 0$$

Ya que e^{-x^2} nunca es igual a cero para cualquier valor real de x, observamos que $x = \pm 1/\sqrt{2}$ son los únicos candidatos para los puntos de inflexión de f. El diagrama de signos de f'', mostrado en la figura 41, indica que ambas $x = -1/\sqrt{2}$ y $x = 1/\sqrt{2}$ dan lugar a los puntos de inflexión de f.

Después,

$$f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = e^{-1/2}$$

y los puntos de inflexión de f son $(-1/\sqrt{2}, e^{-1/2})$ y $(1/\sqrt{2}, e^{-1/2})$. La gráfica de f aparece en la figura 42.

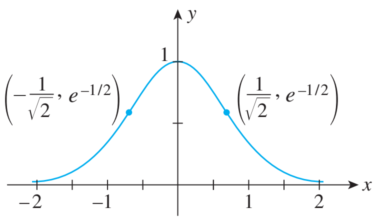


FIGURA **42**
La gráfica de $y = e^{-x^2}$ tiene dos puntos de inflexión.

Explore y analice

1. Suponga que $(c, f(c))$ es un punto de inflexión de f. ¿Se puede concluir que f no tiene un extremo relativo en $x = c$? Explique su respuesta.
2. Verdadero o falso: una función polinomial de tercer grado tiene exactamente un punto de inflexión.
   Sugerencia: estudie la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $(a \neq 0)$.

El siguiente ejemplo utiliza una interpretación de la primera y segunda derivadas para ayudar a elaborar la gráfica de una función.

EJEMPLO 6 Elabore la gráfica de una función que tenga las siguientes propiedades:

$$\begin{aligned} f(-1) &= 4 \\ f(0) &= 2 \\ f(1) &= 0 \\ f'(-1) &= 0 \\ f'(1) &= 0 \\ f'(x) > 0 &\quad \text{en } (-\infty, -1) \cup (1, \infty) \\ f'(x) < 0 &\quad \text{en } (-1, 1) \\ f''(x) < 0 &\quad \text{en } (-\infty, 0) \\ f''(x) > 0 &\quad \text{en } (0, \infty) \end{aligned}$$

Solución Primero, grafique los puntos $(-1, 4)$, $(0, 2)$ y $(1, 0)$ que permanecen sobre la gráfica de f. Ya que, $f'(-1) = 0$ y $f'(1) = 0$, la recta tangente en los puntos $(-1, 4)$ y $(1, 0)$ son horizontales, Ya que $f'(x) > 0$ en $(-\infty, -1)$ y $f'(x) < 0$ en $(-1, 1)$, observe que f tiene un máximo relativo en el punto $(-1, 4)$. También $f'(x) < 0$ en $(-1, 1)$ y $f'(x) > 0$ en $(1, \infty)$ implica que f tiene un mínimo relativo en el punto $(1, 0)$ (figura 43a).

Puesto que $f''(x) < 0$ en $(-\infty, 0)$ y $f''(x) > 0$ en $(0, \infty)$, observe que el punto $(0, 2)$ es un punto de inflexión. Finalmente, complete la gráfica haciendo el uso del hecho de que f es creciente en $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$, donde es dada $f'(x) > 0$, y f es decreciente en $(-1, 1)$, donde $f'(x) < 0$. También, asegúrese de que f es una cóncava hacia abajo en $(-\infty, 0)$ y cóncava hacia arriba en $(0, \infty)$ (figura 43b).

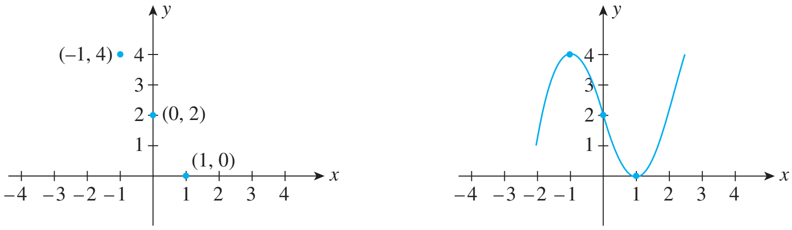


FIGURA **43**

Los ejemplos 7 y 8 ilustran interpretaciones del significado del punto de inflexión de una función.

EJEMPLO DE APLICACIÓN 7 Efecto de la publicidad en las ventas El total de las ventas S (en miles de dólares) de Arctic Air Corporation, un fabricante de aire acondicionado para automóviles, está relacionado con la cantidad de dinero x (en miles de dólares) que la empresa gasta en la publicidad de sus productos por medio de la fórmula

$$S(x) = -0.01x^3 + 1.5x^2 + 200 \qquad (0 \leq x \leq 100)$$

Determine el punto de inflexión de la función S.

Solución Las primeras dos derivadas de S están dadas por

$$S'(x) = -0.03x^2 + 3x$$
$$S''(x) = -0.06x + 3$$

Estableciendo $S''(x) = 0$ da $x = 50$. Así que $(50, S(50))$ es el único candidato para un punto de inflexión de S. Más aún, ya que

$$S''(x) > 0 \quad \text{para} \quad x < 50$$

y

$$S''(x) < 0 \quad \text{para} \quad x > 50$$

el punto (50, 2,700) es un punto de inflexión de la función S. La gráfica de S aparece en la figura 44. Observe que ésta es la gráfica de la función de la que hablamos antes.

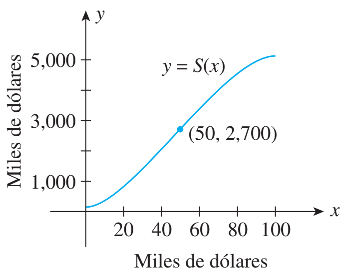


FIGURA **44**
La gráfica de $S(x)$ tiene un punto de inflexión en (50, 2,700).

VIDEO

EJEMPLO DE APLICACIÓN 8 Índice de precios al consumidor El índice de precios al consumidor (IPC) en una economía es descrito por la función

$$I(t) = -0.2t^3 + 3t^2 + 100 \qquad (0 \leq t \leq 10)$$

donde $t = 0$ corresponde al año 1998. Determine el punto de inflexión de la función I y comente su significado.

Solución Las primeras dos derivadas de I están dadas por

$$I'(t) = -0.6t^2 + 6t$$
$$I''(t) = -1.2t + 6 = -1.2(t - 5)$$

Estableciendo $I''(t) = 0$ da $t = 5$. Así que $(5, I(5))$ es el único candidato para el punto del inflexión de I. Después observamos que

$$I''(x) > 0 \quad \text{para} \quad t < 5$$
$$I''(x) < 0 \quad \text{para} \quad t > 5$$

así que el punto (5, 150) es un punto de inflexión de I. La gráfica de I está trazada en la figura 45.

Puesto que la segunda derivada de I mide la tasa de cambio de la tasa de inflación, los cálculos revelan que la tasa de inflación ha llegado de hecho a alcanzar el máximo en $t = 5$. Así que, comenzó a ser menor a principios de 2003.

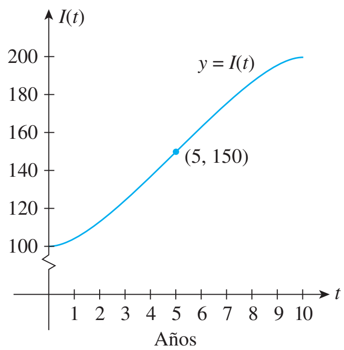


FIGURA **45**
La gráfica de $I(t)$ tiene un punto de inflexión en (5, 150).

La prueba de la segunda derivada

Ahora mostraremos cómo la segunda derivada f'' de una función f puede utilizarse para ayudar a determinar si un número crítico de f lleva a un extremo relativo de f. La figura 46a muestra la gráfica de una función que tiene un máximo relativo en $x = c$. Observe que f es cóncava hacia abajo en ese número. De forma similar, la figura 46b muestra que en un mínimo relativo de f la gráfica es cóncava hacia arriba. Pero del anterior trabajo, se sabe que f es cóncava hacia abajo en $x = c$ si $f''(c) < 0$ y f es cóncava hacia arriba en $x = c$ si $f''(c) > 0$. Estas observaciones sugieren el siguiente procedimiento alterno para determinar si un número crítico de f lleva a un extremo relativo de f. A este resultado se le conoce como **prueba de la segunda derivada** y es aplicable cuando f'' existe.

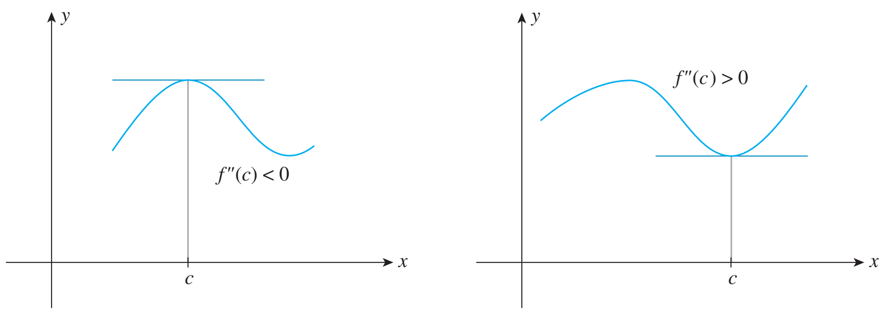


FIGURA **46**

(a) f tiene un máximo relativo en $x = c$. **(b)** f tiene un mínimo relativo en $x = c$.

La prueba de la segunda derivada

1. Calcule $f'(x)$ y $f''(x)$.
2. Determine todos los valores críticos de f en los cuales $f'(x) = 0$.
3. Calcule $f''(c)$ para cada valor crítico c.
  a. Si $f''(c) < 0$, entonces f tiene un máximo relativo en c.
  b. Si $f''(c) > 0$, entonces f tiene un mínimo relativo en c.
  c. Si $f''(c) = 0$, entonces la prueba fracasa; es decir, ésta no es concluyente.

Nota La prueba de la segunda derivada no proporciona una conclusión si $f''(c) = 0$ o si $f''(c)$ no existe. En otras palabras, $x = c$ puede aumentar a un extremo relativo o un punto de inflexión (vea el ejercicio 118 de la página 694). En dichos casos debería volver a la prueba de la primera derivada. ■

EJEMPLO 9 Determine el extremo relativo de la función

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 24x + 32$$

utilizando la prueba de la segunda derivada (vea el ejemplo 7, sección 10.1).

Solución Tenemos

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 24 = 3(x + 2)(x - 4)$$

así que, $f'(x) = 0$ da $x = -2$ y $x = 4$, los números críticos de f, como en el ejemplo 7. Después, calculamos

$$f''(x) = 6x - 6 = 6(x - 1)$$

Puesto que

$$f''(-2) = 6(-2 - 1) = -18 < 0$$

la prueba de la segunda derivada implica que $f(-2) = 60$ es un máximo relativo de f. También,

$$f''(4) = 6(4 - 1) = 18 > 0$$

y la prueba de la segunda derivada implica que $f(4) = -48$ es un mínimo relativo de f, lo que confirma los resultados obtenidos con antelación. ■

Explore y analice

Suponga que una función f tiene las siguientes propiedades:

1. $f''(x) > 0$ para toda x en un intervalo (a, b).
2. Existe un número c entre a y b tal que $f'(c) = 0$.

¿Qué propiedad especial podrá atribuir al punto $(c, f(c))$? Responda la pregunta si la propiedad 1 es reemplazada por la propiedad que $f''(x) < 0$ para toda x en (a, b).

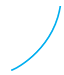
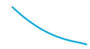
Comparación de las pruebas de la primera y segunda derivadas

Observe que tanto la prueba de la primera como la de la segunda derivada son utilizadas para clasificar valores críticos de f. ¿Cuáles son las ventajas y desventajas de las dos pruebas? Puesto que la prueba de la segunda derivada es aplicable sólo cuando f'' existe, ésta es menos versátil que la prueba de la primera derivada. Por ejemplo, ésta no puede utilizarse para localizar el mínimo relativo $f(0) = 0$ de la función $f(x) = x^{2/3}$.

Más aún, la prueba de la segunda derivada no es concluyente cuando f'' es igual a cero en un valor crítico de f, mientras que la prueba de la primera derivada produce siempre conclusiones positivas. No conviene tampoco usar la prueba de la segunda derivada cuando f'' es difícil de calcular. Además, si f'' se calcula fácilmente, entonces utilice la prueba de la segunda derivada, ya que interviene sólo la evaluación de f'' en el (los) valor(es) crítico(s) de f. También, las conclusiones de la prueba de la segunda derivada son importantes en el trabajo teórico.

Esta sección concluye al resumir los roles distintos que juegan las primeras derivadas f' y las segundas derivadas f'' de una función f al determinar las propiedades de la gráfica de f. La primera derivada f' indica dónde f es creciente y dónde es decreciente, mientras que la segunda derivada f'' indica dónde f es cóncava hacia arriba y dónde f es cóncava hacia abajo. Estas distintas propiedades de f son reflejadas por los signos de f'

y f'' en el intervalo de interés. La siguiente tabla muestra las características generales de la función f para varias posibles combinaciones de los signos de f' y f'' en el intervalo (a, b).

Signos de f' y f''	**Propiedades de la gráfica de f**	**Forma general de la gráfica de f**
$f'(x) > 0$ $f''(x) > 0$	f creciente f cóncava hacia arriba	
$f'(x) > 0$ $f''(x) < 0$	f creciente f cóncava hacia abajo	
$f'(x) < 0$ $f''(x) > 0$	f decreciente f cóncava hacia arriba	
$f'(x) < 0$ $f''(x) < 0$	f decreciente f cóncava hacia abajo	

10.2 Ejercicios de autoevaluación

1. Determine dónde la función $f(x) = 4x^3 - 3x^2 + 6$ es cóncava hacia arriba y dónde es cóncava hacia abajo.
2. Utilice la prueba de la segunda derivada, si es aplicable, y determine los extremos relativos de la función $f(x) = 2x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 12x - 10$.
3. El producto interno bruto de cierta ciudad (PIB) (en millones de dólares) en el año t es descrito por la función

$$G(t) = -2t^3 + 45t^2 + 20t + 6{,}000 \qquad (0 \leq t \leq 11)$$

donde $t = 0$ corresponde a los inicios de 1995. Encuentre el punto de inflexión de la función G y comente su significado.

Las soluciones de los ejercicios de autoevaluación 10.2 se encuentran en la página 695.

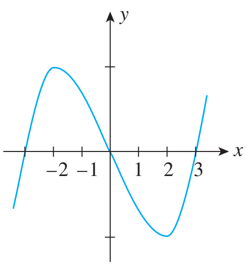
10.2 Preguntas de concepto

1. Explique lo que significa para una función f ser (a) cóncava hacia arriba y (b) cóncava hacia abajo en un intervalo abierto I. Dado que f tiene una segunda derivada en I (excepto en números aislados), ¿cómo determina dónde la gráfica de f es cóncava hacia arriba y dónde es cóncava hacia abajo?
2. ¿Qué es un punto de inflexión en la gráfica de una función f? ¿Cómo encuentra el (los) punto(s) de inflexión de la gráfica de una función f cuya regla fue dada?
3. Establezca la prueba de la segunda derivada. ¿Cuáles son las ventajas y desventajas de usar la prueba de la primera y de la segunda derivada?

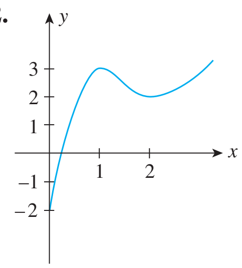
10.2 Ejercicios

En los ejercicios 1-8 se le proporciona la gráfica de una función *f*. Determine los intervalos donde *f* es cóncava hacia arriba y donde es cóncava hacia abajo. También, determine todos los puntos de inflexión de *f*, si los hay.

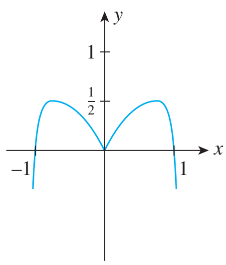
1.



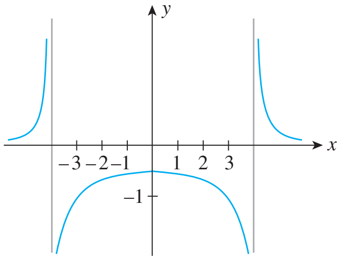
2.



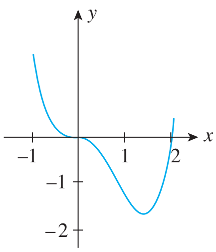
3.



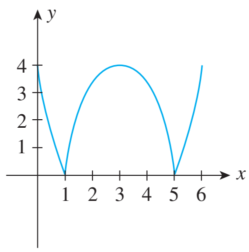
4.



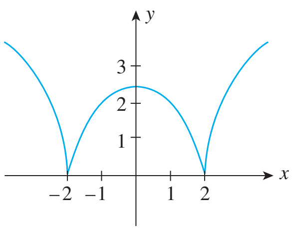
5.



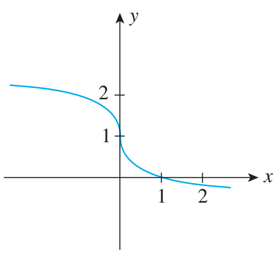
6.



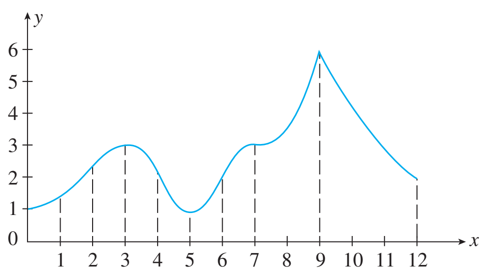
7.



8.



9. Refiérase a la gráfica de f mostrada en la siguiente figura:



a. Determine los intervalos donde f es cóncava hacia arriba y donde es cóncava hacia abajo.

b. Determine los puntos de inflexión de f.

10. Refiérase a la figura del ejercicio 9.

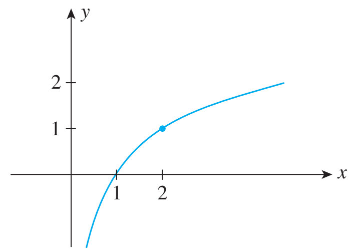
a. Explique cómo puede utilizarse la prueba de la segunda derivada para demostrar que el valor crítico 3 lleva a un máximo relativo de f y el valor crítico 5 lleva a un mínimo relativo de f.

b. Explique por qué la prueba de la segunda derivada no puede utilizarse para demostrar que el valor crítico 7 no lleva a un extremo relativo de f ni puede utilizarse para demostrar que el valor crítico 9 lleva a un máximo relativo de f.

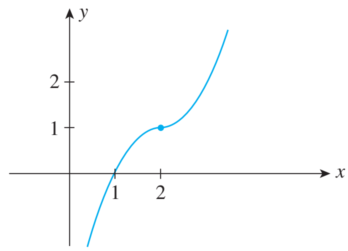
En los ejercicios 11-14, determine qué gráfica, (a), (b) o (c), es la gráfica de la función *f* con las propiedades específicas.

11. $f(2) = 1, f'(2) > 0$ y $f''(2) < 0$

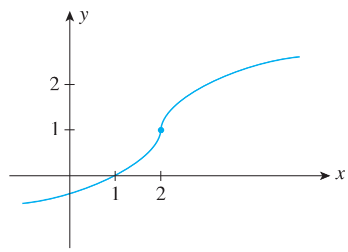
(a)



(b)

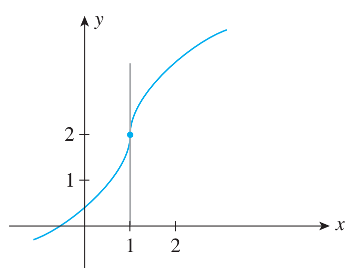


(c)

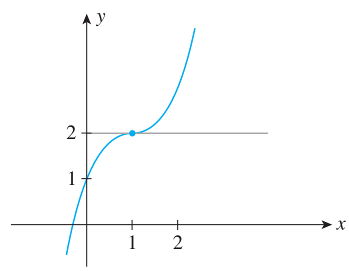


12. $f(1) = 2, f'(x) > 0$ sobre $(-\infty, 1) \cup (1, \infty)$ y $f''(1) = 0$

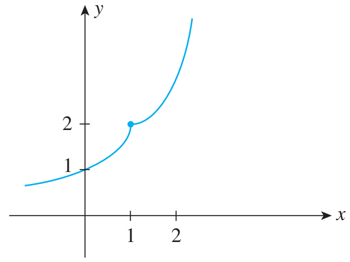
(a)



(b)

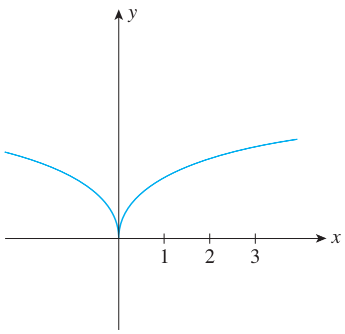


(c)

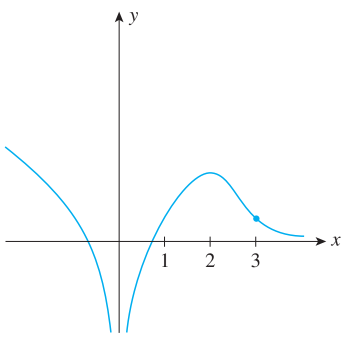


13. $f'(0)$ es indefinida, f es decreciente en $(-\infty, 0)$, f es cóncava hacia abajo en $(0, 3)$ y f tiene un punto de inflexión en $x = 3$.

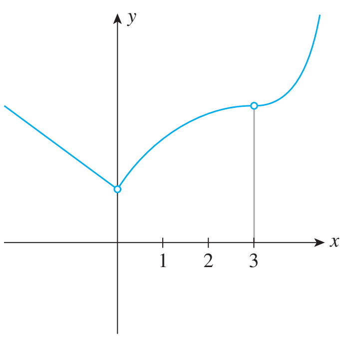
(a)



(b)

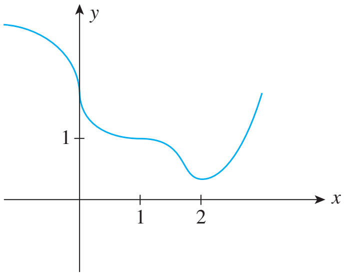


(c)

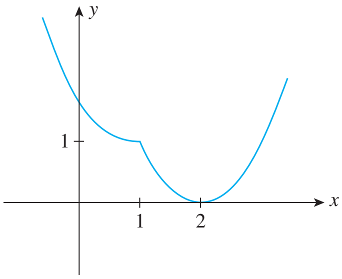


14. f es decreciente en $(-\infty, 2)$ y es creciente en $(2, \infty)$, f es cóncava hacia arriba en $(1, \infty)$ y f tiene puntos de inflexión en $x = 0$ y $x = 1$.

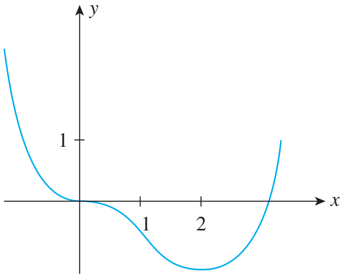
(a)



(b)



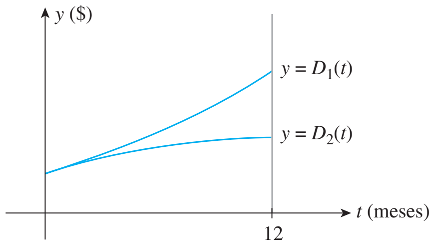
(c)



15. Efectos de la publicidad en los depósitos bancarios Las siguientes gráficas fueron utilizadas por el presidente ejecutivo (CEO) del Madison Savings Bank para ilustrar el efecto que tendría una campaña promocional proyectada en sus depósitos el año siguiente. Las funciones D_1 y D_2 dan, respectivamente, la cantidad de dinero en depósitos bancarios por los siguientes 12 meses con y sin la campaña promocional propuesta.

a. Determine los signos de $D_1'(t)$, $D_2'(t)$, $D_1''(t)$ y $D_2''(t)$ sobre el intervalo $(0, 12)$.

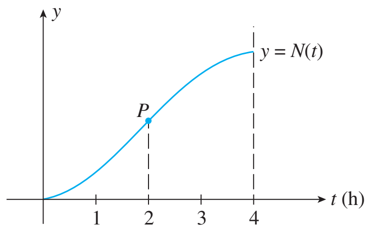
b. ¿A qué conclusión llegó acerca de la tasa de cambio del crecimiento del dinero en depósitos bancarios con o sin campaña promocional propuesta?



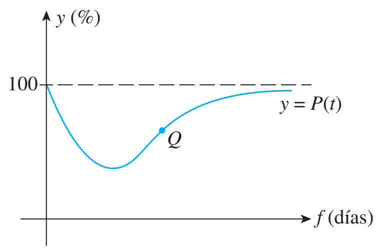
16. Tiempo para ensamblaje de un trabajador En la gráfica siguiente, $N(t)$ da el número de radios ensamblados por persona por un trabajador promedio hasta la hora t, donde $t = 0$ corresponde a las 8 a.m. y $0 \leq t \leq 4$. El punto P es un punto de inflexión de N.

a. ¿Qué puede decir acerca de la tasa de cambio del número promedio de radios ensamblados por trabajador entre 8 y 10 a.m.? Entre 10 y 12 a.m.?

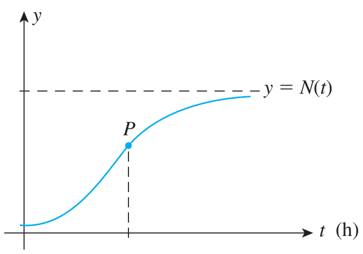
b. ¿A qué hora es mayor la tasa en la que ensamblan los radios por trabajador?



17. Contaminación del agua Cuando la basura orgánica es arrojada en los estanques, el proceso de oxidación que toma lugar reduce el contenido de oxígeno en el estanque. Sin embargo, después de un tiempo, la naturaleza restaurará el contenido de oxígeno a su nivel natural. En la siguiente gráfica, $P(t)$ da el contenido de oxígeno (como porcentaje de su nivel normal) t días después de que la basura orgánica fue arrojada al estanque. Explique el significado del punto de inflexión Q.



18. Propagación de un rumor Al inicio, unos estudiantes escucharon de primera mano un rumor en el campus. El rumor se propagó y, después de t horas, el número había crecido a $N(t)$. La gráfica de la función N se muestra en la siguiente figura:



Describa el rumor esparcido en términos de la velocidad con que se propagó. En particular, explique el significado del punto de inflexión P de la gráfica de N.

En los ejercicios 19-24, demuestre que la función es cóncava hacia arriba dondequiera que esté definida.

19. $f(x) = 4x^2 - 12x + 7$

20. $g(x) = x^4 + \frac{1}{2}x^2 + 6x + 10$

21. $f(x) = \frac{1}{x^4}$

22. $h(x) = \frac{1}{x^2}$

23. $g(x) = -\sqrt{4 - x^2}$

24. $h(x) = \sqrt{x^2 + 4}$

En los ejercicios 25-46, determine dónde la función es cóncava hacia arriba y dónde cóncava hacia abajo.

25. $f(x) = 2x^2 - 3x + 4$

26. $g(x) = -x^2 + 3x + 4$

27. $f(x) = x^3 - 1$

28. $g(x) = x^3 - x$

29. $f(x) = x^4 - 6x^3 + 2x + 8$

30. $f(x) = 3x^4 - 6x^3 + x - 8$

31. $f(x) = x^{4/7}$

32. $f(x) = \sqrt[3]{x}$

33. $f(x) = \sqrt{4 - x}$

34. $g(x) = \sqrt{x - 2}$

35. $f(x) = \frac{1}{x - 2}$

36. $g(x) = \frac{x}{x + 1}$

37. $f(x) = \frac{1}{2 + x^2}$

38. $g(x) = \frac{x}{1 + x^2}$

39. $h(t) = \frac{t^2}{t - 1}$

40. $f(x) = \frac{x + 1}{x - 1}$

41. $g(x) = x + \frac{1}{x^2}$

42. $h(r) = -\frac{1}{(r - 2)^2}$

43. $g(t) = (2t - 4)^{1/3}$

44. $f(x) = (x - 2)^{2/3}$

45. $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

46. $f(x) = xe^x$

47. $f(x) = x^2 + \ln x^2$

48. $f(x) = \frac{\ln x}{x}$

En los ejercicios 49-62, determine, si existiera(n), el (los) punto(s) de inflexión de cada ejercicio.

49. $f(x) = x^3 - 2$

50. $g(x) = x^3 - 6x$

51. $f(x) = 6x^3 - 18x^2 + 12x - 15$

52. $g(x) = 2x^3 - 3x^2 + 18x - 8$

53. $f(x) = 3x^4 - 4x^3 + 1$

54. $f(x) = x^4 - 2x^3 + 6$

55. $g(t) = \sqrt[3]{t}$

56. $f(x) = \sqrt[5]{x}$

57. $f(x) = (x - 1)^3 + 2$

58. $f(x) = (x - 2)^{4/3}$

59. $f(x) = 2e^{-x^2}$

60. $f(x) = xe^{-2x}$

61. $f(x) = x^2 \ln x$

62. $f(x) = \ln(x^2 + 1)$

En los ejercicios 63-80 determine, si existiera, el extremo relativo de cada función. Utilice la prueba de la segunda derivada si es posible.

63. $f(x) = -x^2 + 2x + 4$

64. $g(x) = 2x^2 + 3x + 7$

65. $f(x) = 2x^3 + 1$

66. $g(x) = x^3 - 6x$

67. $f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 - 2x^2 - 5x - 10$

68. $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x - 4$

69. $g(t) = t + \dfrac{9}{t}$

70. $f(t) = 2t + \dfrac{3}{t}$

71. $f(x) = \dfrac{x}{1 - x}$

72. $f(x) = \dfrac{2x}{x^2 + 1}$

73. $f(t) = t^2 - \dfrac{16}{t}$

74. $g(x) = x^2 + \dfrac{2}{x}$

75. $g(s) = \dfrac{s}{1 + s^2}$

76. $g(x) = \dfrac{1}{1 + x^2}$

77. $g(t) = e^{t^2-2t}$

78. $f(x) = x^2e^x$

79. $f(x) = \ln(x^2 + 1)$

80. $g(x) = x - \ln x$

En los ejercicios 81-86, trace la gráfica de una función con las propiedades proporcionadas.

81. $f(2) = 4, f'(2) = 0, f''(x) < 0$ en $(-\infty, \infty)$

82. $f(2) = 2, f'(2) = 0, f'(x) > 0$ en $(-\infty, 2), f'(x) > 0$ en $(2, \infty), f''(x) < 0$ en $(-\infty, 2), f''(x) > 0$ en $(2, \infty)$

83. $f(-2) = 4, f(3) = -2, f'(-2) = 0, f'(3) = 0, f'(x) > 0$ en $(-\infty, -2) \cup (3, \infty), f'(x) < 0$ en $(-2, 3)$, punto de inflexión en $(1, 1)$

84. $f(0) = 0, f'(0)$ no existe, $f''(x) < 0$ si $x \neq 0$

85. $f(0) = 1, f'(0) = 0, f(x) > 0$ en $(-\infty, \infty), f''(x) < 0$ en $(-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2), f''(x) > 0$ en $(-\infty, -\sqrt{2}/2) \cup (\sqrt{2}/2, \infty)$

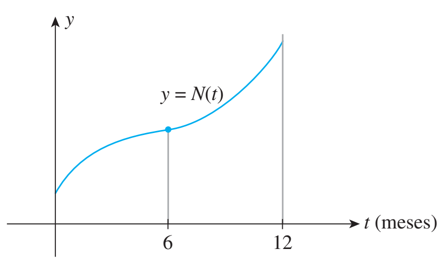
86. f tiene dominio $[-1, 1], f(-1) = -1, f(-\frac{1}{2}) = -2, f'(-\frac{1}{2}) = 0, f''(x) > 0$ en $(-1, 1)$

87. Demanda de ER (enfermeras registradas) La siguiente gráfica muestra el número total de anuncios de trabajo para ER en 22 ciudades en los últimos 12 meses, como una función del tiempo t (t medido en meses).

a. Explique por qué $N'(t)$ es positivo en el intervalo (0, 12).

b. Determine los signos de $N''(t)$ en el intervalo (0, 6) y el intervalo (6, 12).

c. Interprete sus resultados del inciso (b).

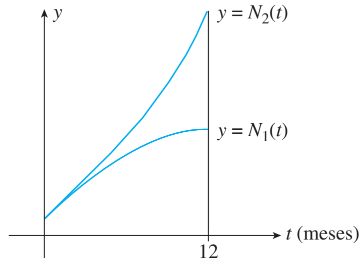


88. Efecto de las reducciones presupuestarias en los delitos relacionados con las drogas Las gráficas siguientes fueron utilizadas por el comisionado de la policía para ilustrar el efecto que una reducción presupuestal tendrá sobre la delincuencia de la ciudad. El número $N_1(t)$ da el número proyectado de delitos relacionados con drogas en los siguientes 12 meses. El número $N_2(t)$ da el número proyectado en delitos relacionados con drogas en el mismo lapso de tiempo, si en el siguiente año se reduce el presupuesto.

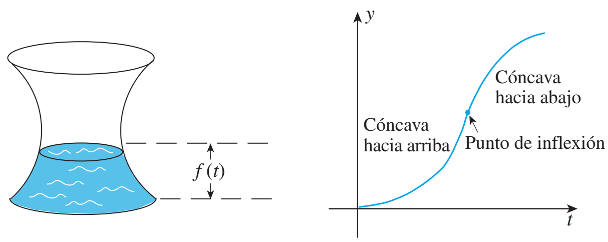
a. Explique por qué $N_1'(t)$ y $N_2'(t)$ son ambas positivas en el intervalo (0, 12).

b. ¿Cuáles son los signos de $N_1''(t)$ y $N_2''(t)$ en el intervalo (0, 12)?

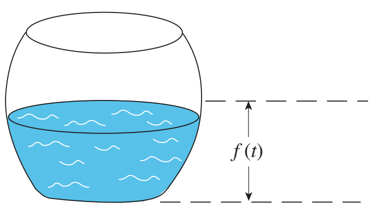
c. Interprete los resultados del inciso (b).



89. En la siguiente figura, el agua es vertida dentro de un vaso a un ritmo constante (en unidades apropiadas), y el nivel del agua sube hasta una altura de $f(t)$ unidades en el tiempo t medida desde la base del vaso. La gráfica de f es la siguiente. Explique la forma de la curva en términos de su concavidad. ¿Cuál es el significado del punto de inflexión?



90. En la figura siguiente, el agua es vertida dentro de una urna a un ritmo constante (en unidades apropiadas) y el nivel del agua sube hasta una altura de $f(t)$ unidades en el tiempo t, medida desde la base de la urna. Elabore la gráfica de f y explique su forma, denotando dónde es cóncava hacia arriba y dónde es cóncava hacia abajo. Indique el punto de inflexión en la gráfica y explique su significado.
Sugerencia: estudie el ejercicio 89.



91. Impuesto estatal a las cajetillas de cigarros El impuesto estatal promedio por paquete de cigarrillos (en dólares) desde 2001 hasta 2007 es aproximado por la función

$$T(t) = 0.43t^{0.43} \qquad (1 \leq t \leq 7)$$

donde t se mide en años, con $t = 1$ correspondiente al inicio de 2001.

a. Muestre que el impuesto promedio por paquete de cigarrillos se incrementó durante el periodo en cuestión.

b. ¿Qué puede decir acerca de la tasa a la que el impuesto promedio estatal por paquete de cigarrillos se incrementó más allá del periodo en cuestión?

Fuente: Campaign for Tobacco-Free Kids

92. Calentamiento global El incremento de dióxido de carbono (CO_2) en la atmósfera es la causa principal del calentamiento global. Con los datos obtenidos por Charles David Keeling, profesor del Instituto Scripps of Oceanography, la cantidad promedio de CO_2 en la atmósfera entre 1958 y 2007 es aproximadamente de

$$A(t) = 0.010716t^2 + 0.8212t + 313.4 \qquad (1 \le t \le 50)$$

donde $A(t)$ se mide en volumen de partes por millón (ppmv) y t en años, con $t = 0$ correspondiente a los inicios de 1958.

a. ¿Qué puede decir acerca de la tasa de cambio de la cantidad promedio de CO_2 en la atmósfera de principios de 1958 hasta 2007?

b. ¿Qué puede decir acerca de la tasa de cambio de la cantidad de CO_2 en la atmósfera desde principios de 1958 a 2007?

Fuente: Scripps Institution of Oceanography

93. Efectos de la prohibición de fumar Las ventas (en miles de millones de dólares) en restaurantes y bares de California desde principios de 1993 ($t = 0$) hasta 2000 ($t = 7$) son aproximadas por la función

$$S(t) = 0.195t^2 + 0.32t + 23.7 \qquad (0 \le t \le 7)$$

a. Demuestre que las ventas en restaurantes y bares continúan creciendo después de la prohibición de fumar en 1998.
Sugerencia: demuestre que S es creciente en el intervalo (2, 7).

b. ¿Qué puede decir acerca de la tasa a la que las ventas aumentaron después de implementar la prohibición de fumar?

Fuente: California Board of Equalization

94. Ventas de televisión digital Desde su introducción en el mercado a finales de 1990, las ventas de televisores digitales, incluidos los aparatos de alta definición, poco a poco han adquirido impulso. El modelo

$$S(t) = 0.164t^2 + 0.85t + 0.3 \qquad (0 \le t \le 4)$$

describe las ventas en aparatos de televisión digital (en miles de millones de dólares) entre los inicios de 1999 ($t = 0$) y a inicios de 2003 ($t = 4$).

a. Determine $S'(t)$ y $S''(t)$.

b. Utilice los resultados del inciso (a) para concluir que las ventas de televisores digitales se incrementaron entre 1999 y 2003 y que aumentaron a un ritmo creciente en ese intervalo de tiempo.

Fuente: Consumer Electronics Association

95. Eficiencia de los trabajadores Un estudio sobre eficiencia realizado por Elektra Electronics mostró que el número de *walkie-talkies* Space Comander que fueron ensamblados por el trabajador promedio en t horas después de iniciar sus labores a las 8 a.m., está dado por

$$N(t) = -t^3 + 6t^2 + 15t \qquad (0 \le t \le 4)$$

¿En qué momento durante el turno de la mañana se desempeñan los trabajadores con máxima eficiencia?

96. Vuelo de un cohete La altitud (en pies) de un cohete t seg dentro del vuelo está dada por

$$s = f(t) = -t^3 + 54t^2 + 480t + 6 \qquad (t \ge 0)$$

Determine el punto de inflexión de la función f e interprete sus resultados. ¿Cuál es la velocidad máxima alcanzada por el cohete?

97. Gasto de las empresas en tecnología En un estudio llevado a cabo en 2003, se proyectaba que las empresas gastaban en tecnología (miles de millones de dólares) desde principios de 2000 hasta 2005 lo siguiente

$$S(t) = -1.88t^3 + 30.33t^2 - 76.14t + 474 \qquad (0 \le t \le 5)$$

donde t se mide en años, con $t = 0$ correspondiente a 2000. Demuestre que la gráfica de S es cóncava hacia arriba en el intervalo (0, 5). ¿Qué le indica este resultado acerca de la tasa de gasto de las empresas en tecnología durante el periodo en cuestión?

Fuente: Quantit Economic Group

98. Impuesto mínimo alterno El Congreso creó un impuesto mínimo alterno (AMT) a finales de la década de 1970 para asegurar que los ricos paguen su cuota justa de impuestos. Pero debido a peculiaridades en la ley, incluso los contribuyentes de ingresos medios han empezado a recibir un golpe con dicho impuesto. El AMT prevé que se recolecte por el Sistema de Administración Fiscal (ISR) (en miles de millones de dólares) de principios de 2001 a 2010 es

$$f(t) = 0.0117t^3 + 0.0037t^2 + 0.7563t + 4.1 \qquad (0 \le t \le 9)$$

donde t se mide en años, con $t = 0$ correspondiente a 2001.

a. Demuestre que f es creciente sobre el intervalo (0, 9). ¿Qué le indica este resultado acerca de la cantidad prevista de AMT que se pague durante los años en cuestión?

b. Demuestre que f es creciente sobre el intervalo (0, 9). ¿Qué conclusión puede formular de este resultado sobre la tasa de crecimiento a la que se paga el impuesto mínimo alterno a lo largo de los años en cuestión?

Fuente: U.S. Congress Joint Economic Committee

99. Efecto de la publicidad en los ingresos de un hotel Los ingresos totales anuales R del Miramar Resorts Hotel se relacionan con la cantidad de dinero x que gasta el hotel en publicitar sus servicios por medio de la función

$$R(x) = -0.003x^3 + 1.35x^2 + 2x + 8{,}000 \qquad (0 \le x \le 400)$$

donde R y x se miden en miles de dólares.

a. Determine el intervalo donde la gráfica de R es cóncava hacia arriba y donde es cóncava hacia abajo. ¿Cuál es el punto de inflexión de R?

b. Sería más provechoso para el hotel aumentar un poco su presupuesto de publicidad cuando éste es de \$140,000 o cuando es de \$160,000?

100. Elaboración de pronósticos de utilidades Como resultado del aumento en los costos de la energía, la tasa de crecimiento en las utilidades de Venice Glassblowing Company de hace cuatro años comenzó a disminuir. La gerencia de la empresa, después de consultar con expertos, decide poner en práctica determinadas medidas para el ahorro de energía destinadas a reducir las facturas de consumo de la misma. El gerente general informó que, según sus cálculos, la tasa de crecimiento de las utilidades deberá incrementarse nuevamente dentro de cuatro años. Si la utilidad de Venice (en miles de dólares) en t años desde ahora está dada por la función

$$P(t) = t^3 - 9t^2 + 40t + 50 \qquad (0 \leq t \leq 8)$$

determine si el pronóstico del gerente general será el correcto.

Sugerencia: determine el punto de inflexión de la función P y estudie la concavidad de P.

101. Outsourcing El importe (en miles de millones de dólares) gastado por las 15 principales instituciones financieras de Estados Unidos en tecnología de información (TI) subcontratada en el extranjero, se prevé que sea

$$A(t) = 0.92(t + 1)^{0.61} \qquad (0 \leq t \leq 4)$$

donde t se mide en años, con $t = 0$ corresponde a los inicios de 2004.

a. Demuestre que A es creciente en (0, 4) e interprete sus resultados.

b. Demuestre que A es cóncava hacia abajo en (0, 4) e interprete sus resultados.

Fuente: Tower Group

102. Ventas de procesadores móviles La creciente popularidad de las computadoras notebook está impulsando las ventas de procesadores de PC móviles. En un estudio realizado en 2003, las ventas de estos chips (en miles de millones de dólares) fueron proyectadas para ser

$$S(t) = 6.8(t + 1.03)^{0.49} \qquad (0 \leq t \leq 4)$$

donde t se mide en años, con $t = 0$ correspondiente a los inicios de 2003.

a. Demuestre que S es creciente en el intervalo (0, 4) e interprete sus resultados.

b. Demuestre que la gráfica de S es cóncava hacia abajo en el intervalo (0, 4). Interprete sus resultados.

Fuente: International Data Corp.

103. Gastos en medicamentos Los gastos de Medicaid en materia de medicamentos en Massachusetts comenzó a decaer en parte debido a que el Estado exigió que los pacientes utilicen más fármacos genéricos y limitaba la gama de medicamentos disponibles para el programa. El gasto farmacéutico anual (en millones de dólares) desde 1999 hasta 2004 está dado por

$$S(t) = -1.806t^3 + 10.238t^2 + 93.35t + 583 \qquad (0 \leq t \leq 5)$$

donde t se mide en años, con $t = 0$ correspondiente a los inicios de 1999. Determine el punto de inflexión de S e interprete sus resultados.

Fuente: MassHealth

104. Cámaras de vigilancia Los informes de investigación indican que las cámaras de vigilancia en las intersecciones principales reducen drásticamente el número de conductores que manejan a toda velocidad al cruzar la luz roja. Las cámaras fotografían automáticamente a los vehículos que viajan dentro de la intersección después de que la luz cambia a rojo. A los propietarios de los vehículos se les cita por correo, instándolos a pagar una multa o firmar una declaración bajo juramento de que no estaban conduciendo en ese momento. La función

$$N(t) = 6.08t^3 - 26.79t^2 + 53.06t + 69.5 \qquad (0 \leq t \leq 4)$$

da el número, $N(t)$ de las comunidades de Estados Unidos que utiliza cámaras de vigilancia en las intersecciones en el año t, con $t = 0$ correspondiente a principios de 2003.

a. Demuestre que N es creciente en [0, 4].

b. ¿Cuándo el número de comunidades que utilizó cámaras de vigilancia en las intersecciones se incrementó de foma más lenta? ¿Cuál es la tasa de incremento?

Fuente: Insurance Institute for Highway Safety

105. Ingresos de Google Los ingresos de Google desde principios de 1999 ($t = 0$) hasta 2003 ($t = 4$) se aproximan por la función

$$R(t) = 24.975t^3 - 49.81t^2 + 41.25t + 0.2 \qquad (0 \leq t \leq 4)$$

donde $R(t)$ se mide en millones de dólares.

a. Determine $R'(t)$ y $R''(t)$.

b. Demuestre que $R'(t) > 0$ para toda t en el intervalo (0, 4) e interprete sus resultados.

Sugerencia: utilice la fórmula cuadrática.

c. Determine el punto de inflexión de R e interprete su resultado.

Fuente: Company Report

106. Crecimiento de la población en el condado Clark El condado Clark en Nevada, dominado por Las Vegas, es una de las áreas metropolitanas de más rápido crecimiento de Estados Unidos. La población del condado desde 1970 hasta 2000 se aproxima por la función

$$P(t) = 44560t^3 - 89394t^2 + 234633t + 273288 \qquad (0 \leq t \leq 4)$$

donde t se mide en décadas, con $t = 0$ correspondiente a los inicios de 1970.

a. Muestre que la población del Condado Clark estuvo siempre en aumento durante el periodo en cuestión.

Sugerencia: muestre que $P'(t) > 0$ para toda t en el intervalo (0, 4).

b. Muestre que la población del condado Clark se incrementó a un ritmo lento por algún tiempo hacia mediados de agosto de 1976.

Sugerencia: determine el punto de inflexión de P en el intervalo (0, 4).

Fuente: U.S. Census Bureau

107. Muertes por sarampión El sarampión sigue siendo la causa principal de mortandad en niños, la cual es prevenida por vacunación, y gracias al mejoramiento de las vacunas, las muertes por sarampión han disminuido. La función

$$N(t) = -2.42t^3 + 24.5t^2 - 123.3t + 506 \qquad (0 \leq t \leq 6)$$

da el número de muertes causadas por sarampión (en miles) al Sur del Sahara, África, en el año t, con $t = 0$ correspondiente a 1999.

a. ¿Cuántas muertes por sarampión hubo en 1999? ¿Cuántas en 2005?

b. Muestre que $N'(t) < 0$ sobre (0, 6). ¿Qué resultado se tiene acerca del número de muertes causadas por sarampión desde 1999 hasta 2005?

c. ¿Cuándo se redujo más rápidamente el número de muertes por sarampión? ¿Cuál fue la tasa de mortandad causada por sarampión en ese instante?

Fuente: Centers for Disease Control and World Health Organization

108. CONTRATACIÓN DE GRUPOS DE PRESIÓN Numerosas entidades públicas como ciudades, condados, estados, empresas de servicios públicos, así como de tribus indias están contratando empresas para cabildeo en el Congreso. Uno de los objetivos del cabildeo es destinar el dinero a un proyecto específico de ley. La cantidad (en millones de dólares) gastada por las entidades públicas en cabildeos entre 1998 y 2000 está dada por

$$f(t) = -0.425t^3 + 3.6571t^2 + 4.018t + 43.7 \quad (0 \leq t \leq 6)$$

donde t se mide en años, con $t = 0$ correspondiente a principios de 1998.

a. Muestre que f es creciente en (0, 6). ¿Qué hay acerca del gasto de las entidades públicas en el cabildeo en los años en cuestión?

b. Determine el punto de inflexión de f. ¿Qué le indica el resultado acerca del crecimiento en el gasto de las entidades públicas en cabildeo?

Fuente: Center for Public Integrity

109. CONTAMINACIÓN DEL AIRE El nivel de ozono, un gas invisible que irrita y perjudica la respiración, presente en la atmósfera de la ciudad de Riverside en ciertos días de mayo, fue de aproximadamente

$$A(t) = 1.0974t^3 - 0.0915t^4 \qquad (0 \leq t \leq 11)$$

donde $A(t)$ es medida por el índice estándar de contaminación (PSI) y t se mide en horas, con $t = 0$ que corresponde a las 7 a.m. Utilice la prueba de la segunda derivada para demostrar que la función A tiene un máximo relativo en aproximadamente $t = 9$. Interprete sus resultados.

110. LAS RESERVAS EN EFECTIVO DE BLUE CROSS Y BLUE SHIELD Con base en reportes financieros de la empresa, las reservas de efectivo de Blue Cross y Blue Shield a principios del año son aproximadas por la función

$$R(t) = -1.5t^4 + 14t^3 - 25.4t^2 + 64t + 290 \quad (0 \leq t \leq 6)$$

donde $R(t)$ se mide en millones de dólares y t en años, con $t = 0$ que corresponde a los inicios de 1998.

a. Determine el punto de inflexión de R.
Sugerencia: utilice la fórmula cuadrática.

b. Utilice el resultado del inciso (a) para mostrar que las reservas en efectivo de la empresa crecieron a la tasa más alta a principios de 2002.

Fuente: Blue Cross and Blue Shield

111. FÚTBOL FEMENIL A partir del movimiento de jóvenes que se consolidó en la década de 1970, alentados por el éxito de su equipo nacional femenil en la competencia internacional en los últimos años, el número de niñas y mujeres que juegan fútbol soccer es cada vez mayor. La función

$$N(t) = -0.9307t^3 + 74.04t^2 + 46.8667t + 3{,}967 \quad (0 \leq t \leq 16)$$

da el número de mujeres participantes en el fútbol soccer al año t, con $t = 0$ que corresponde a los inicios de 1985.

a. Verifique que el número de mujeres que participa en el fútbol soccer se ha incrementado de 1985 a 2000.
Sugerencia: utilice la fórmula cuadrática.

b. Demuestre que el número de mujeres participantes en el fútbol soccer se ha incrementado a un ritmo creciente a partir de 1985 a 2000.
Sugerencia: muestre que el signo de N'' es positivo en el intervalo en cuestión.

Fuente: NCCA News

112. RAZÓN DE DEPENDENCIA La proporción de la población mundial que tiene más de 60 años de edad en comparación con el resto de la población activa en el mundo es motivo de preocupación para los economistas. La razón de dependencia cada vez mayor significa que habrá menos trabajadores para apoyar a una población envejecida. La razón de dependencia durante el próximo siglo se prevé que será

$$R(t) = 0.00731t^4 - 0.174t^3 + 1.528t^2 + 0.48t + 19.3 \quad (0 \leq t \leq 10)$$

en el año t, donde t se mide en décadas con $t = 0$ correspondiente a 2000.

a. Demuestre que la razón de dependencia se incrementará a un ritmo más rápido en torno a 2052.
Sugerencia: utilice la fórmula cuadrática.

b. ¿Cuál será la razón de dependencia en ese tiempo?

Fuente: International Institute for Applied Systems Analysis

En los ejercicios 113-116, determine si la afirmación es verdadera o falsa. Si es verdadera, explique por qué lo es. Si es falsa, porporcione un ejemplo que muestre por qué lo es.

113. Si la gráfica de f es cóncava hacia arriba en (a, b), entonces la gráfica de $-f$ es cóncava hacia abajo en (a, b).

114. Si la gráfica de f es cóncava hacia arriba en (a, c) y cóncava hacia abajo en (c, b), donde $a < c < b$, entonces f tiene un punto de inflexión en $(c, f(c))$.

115. Si c es un valor crítico de f donde $a < c < b$ y $f''(x) < 0$ sobre (a, b), entonces f tiene un máximo relativo en $x = c$.

116. Una función polinomial de grado n $(n \geq 3)$ puede tener a lo más $(n - 2)$ puntos de inflexión.

117. Demuestre que la función cuadrática

$$f(x) = ax^2 + bx + c \qquad (a \neq 0)$$

es cóncava hacia arriba si $a > 0$ y cóncava hacia abajo si $a < 0$. Así que al examinar el signo del coeficiente de x^2, puede uno decir de inmediato si la parábola abre hacia arriba o hacia abajo.

118. Considere las funciones $f(x) = x^3$, $g(x) = x^4$ y $h(x) = -x^4$.

a. Muestre que $x = 0$ es un valor crítico de cada una de las funciones f, g y h.

b. Muestre que la segunda derivada de cada una de las funciones f, g y h es igual a cero en $x = 0$.

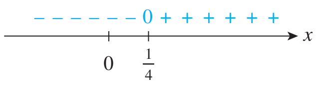
c. Muestre que f no tiene un máximo ni un mínimo relativos en $x = 0$, que g tiene un mínimo relativo en $x = 0$ y que h tiene un máximo relativo en $x = 0$.

10.2 Soluciones de los ejercicios de autoevaluación

1. Primero calculamos

$$f'(x) = 12x^2 - 6x$$
$$f''(x) = 24x - 6 = 6(4x - 1)$$

Observe que f'' es continua en todas partes y tiene un cero en $x = \frac{1}{4}$. El diagrama de signos de f'' se muestra en la figura adjunta.



Del signo del diagrama para f'', observe que f es cóncava hacia arriba en $\left(\frac{1}{4}, \infty\right)$ y cóncava hacia abajo en $\left(-\infty, \frac{1}{4}\right)$.

2. Primero, determinamos los valores críticos de f al resolver la ecuación

$$f'(x) = 6x^2 - x - 12 = 0$$

Esto es,

$$(3x + 4)(2x - 3) = 0$$

dando $x = -\frac{4}{3}$ y $x = \frac{3}{2}$. Después, calculamos

$$f''(x) = 12x - 1$$

Puesto que

$$f''\left(-\frac{4}{3}\right) = 12\left(-\frac{4}{3}\right) - 1 = -17 < 0$$

la prueba de la segunda derivada implica que $f\left(-\frac{4}{3}\right) = \frac{10}{27}$ es un máximo relativo de f. También,

$$f''\left(\frac{3}{2}\right) = 12\left(\frac{3}{2}\right) - 1 = 17 > 0$$

y observamos que $f\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{179}{8}$ es un mínimo relativo.

3. Calculamos la segunda derivada de G. Así que,

$$G'(t) = -6t^2 + 90t + 20$$
$$G''(t) = -12t + 90$$

Ahora G'' es continua en todas partes, y $G''(t) = 0$, cuando $t = \frac{15}{2}$, dando $t = \frac{15}{2}$ como el único candidato para un punto de inflexión de G. Ya que, $G''(t) > 0$ para $t < \frac{15}{2}$ y $G''(t) < 0$ para $t > \frac{15}{2}$, vea que $\left(\frac{15}{2}, \frac{15{,}675}{2}\right)$ es un punto de inflexión de G. Los resultados de los cálculos indican que el producto interno bruto (PIB) de la ciudad se incrementó mucho más rápido a principios de julio de 2002.

USO DE LA TECNOLOGÍA

Determinación de los puntos de inflexión de una función

Para determinar los puntos de inflexión de una función y, por tanto, los intervalos donde la gráfica de la función es cóncava hacia arriba y los intervalos donde ésta es cóncava hacia abajo puede usarse una calculadora graficadora. Algunas tienen la función de determinar directamente los puntos de inflexión. Por ejemplo, la TI-85 y la TI-86 son calculadoras graficadoras que tienen esa capacidad. Si su calculadora la tiene, úsela para trabajar los ejemplos y ejercicios de esta sección.

EJEMPLO 1 Sea $f(x) = 2.5x^5 - 12.4x^3 + 4.2x^2 - 5.2x + 4$.

a. Use la calculadora para elaborar la gráfica de f.
b. Determine los puntos de inflexión de f.
c. Determine los intervalos donde f es cóncava hacia arriba y donde es cóncava hacia abajo.

Solución

a. La grafica de f utiliza la ventana de visualización $[-3, 3] \times [-25, 60]$, mostrada en la figura T1.

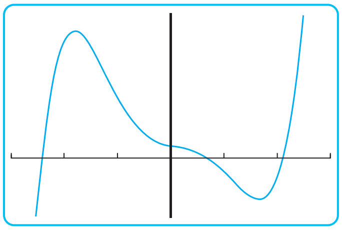
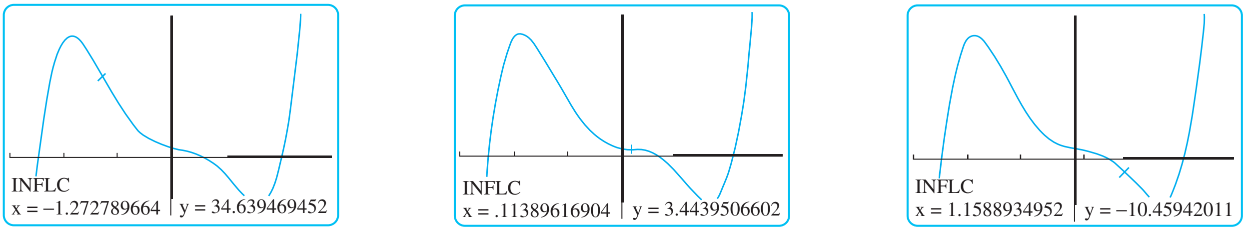


FIGURA **T1**
La grafica de f en la ventana de visualización $[-3, 3] \times [-25, 60]$.

b. Aquí se describe el procedimiento para utilizar la TI-85. Vea el sitio Web para las instrucciones de uso de la TI-86. De la figura T1 observe que f tiene tres puntos de inflexión, uno se presenta en el punto donde la coordenada x es aproximadamente -1, otro en el punto donde $x \approx 0$ y el tercero en el punto donde $x \approx 1$. Para determinar el primer punto de inflexión, utilice la operación de inflexión, moviendo el cursor al punto de la gráfica de f donde $x \approx -1$. Obtenga el punto $(-1.2728, 34.6395)$ (precisar a cuatro posiciones decimales). Después, coloque el cursor cerca de $x = 0$, que está en el punto de inflexión $(0.1139, 3.4440)$. Finalmente, con el cursor coloque en $x = 1$, obtenga el tercer punto de inflexión $(1.1589, -10.4594)$ (vea la figura T2a-c).

(continúa)

c. De los resultados del inciso (b), vea que f es cóncava hacia arriba sobre los intervalos $(-1.2728, 0.1139)$ y $(1.1589, \infty)$ y cóncava hacia abajo sobre $(-\infty, -1.2728)$ y $(0.1139, 1.1589)$.



(a) **(b)** **(c)**

FIGURA T2
Las pantallas TI-85 de los puntos de inflexión muestran los puntos (a) $(-1.2728, 34.6395)$, (b) $(0.1139, 3.4440)$ y (c) $(1.1589, -10.4594)$.

EJERCICIOS CON TECNOLOGÍA

En los ejercicios 1-8, encuentre (a) los intervalos donde *f* es cóncava hacia arriba y donde es cóncava hacia abajo y (b) los puntos de inflexión de *f*. Exprese sus respuestas con cuatro posiciones decimales.

1. $f(x) = 1.8x^4 - 4.2x^3 + 2.1x + 2$
2. $f(x) = -2.1x^4 + 3.1x^3 + 2x^2 - x + 1.2$
3. $f(x) = 1.2x^5 - 2x^4 + 3.2x^3 - 4x + 2$
4. $f(x) = -2.1x^5 + 3.2x^3 - 2.2x^2 + 4.2x - 4$
5. $f(x) = x^3(x^2 + 1)^{-1/3}$
6. $f(x) = x^2(x^3 - 1)^3$
7. $f(x) = \dfrac{e^x}{x} + x^3$
8. $f(x) = xe^{-x} + \dfrac{1}{x}$

9. **Tiempo en el mercado** El número promedio de días que una vivienda unifamiliar (en el área metropolitana de Boston) permanece en venta desde el anuncio hasta la oferta aceptada, se aproxima por la función

$$f(t) = 0.0171911t^4 - 0.662121t^3 + 6.18083t^2 - 8.97086t + 53.3357 \qquad (0 \le t \le 10)$$

donde t se mide en años, con $t = 0$ que corresponde al inicio de 1984.

a. Elabore la grafica de f en la ventana de visualización $[0, 12] \times [0, 120]$.

b. Determine los puntos de inflexión e interprete sus resultados.

Fuente: Greater Boston Real Estate Board—Multiple Listing Service

10. **Ventas multimedia** Las ventas en el mercado multimedia de (hardware y de software) son aproximadas por la función

$$S(t) = -0.0094t^4 + 0.1204t^3 - 0.0868t^2 + 0.0195t + 3.3325 \qquad (0 \le t \le 10)$$

donde $S(t)$ se mide en miles de millones de dólares y t en años, con $t = 0$ correspondiente a 1990.

a. Trace la grafica de S en la ventana de visualización $[0, 12] \times [0, 25]$.

b. Determine el punto de inflexión de S e interprete sus resultados.

Fuente: Electronic Industries Association

11. **Cirugías en consultorios médicos** Derivado de los avances tecnológicos y de las presiones financieras, el número de cirugias realizadas en consultorios médicos en toda la nación se ha incrementado con los años. La función

$$f(t) = -0.00447t^3 + 0.09864t^2 + 0.05192t + 0.8 \qquad (0 \le t \le 15)$$

da el número de cirugías (en millones) realizadas en consultorios médicos al año t, con $t = 0$ que corresponde a los inicios de 1986.

a. Elabore la gráfica de f en la ventana de visualización $[0, 15] \times [0, 10]$.

b. ¿En qué tiempo durante este periodo el número de cirugías realizadas en el consultorio médico aumenta a un ritmo más rápido?

Fuente: SMG Marketing Group

12. **Modelado con datos** Los siguientes datos dan el número de incidentes de seguridad informática, incluyendo virus e intrusiones por computadora, en la que la misma herramienta es utilizada por el intruso desde 1999 hasta 2003.

Año	1999	2000	2001	2002	2003
Número de incidentes	10	21	53	83	137

a. Use **QuartReg** para determinar el modelo de función polinomial de cuarto grado para los datos. Donde $t = 0$ corresponde a 1999.

b. Demuestre que el número $N(t)$ de incidentes de seguridad informática fue siempre en aumento entre 2000 y 2003.
Sugerencia: determine la gráfica de N' y demuestre que se encuentra siempre por encima del eje t para $1 \le t \le 4$.

c. Demuestre que entre 2000 y 2001, el número de incidentes de seguridad informática fue en aumento a un ritmo veloz a mediados de 2000, y que entre 2001 y 2003 el número de incidentes creció a una tasa menor a mediados de 2001.
Sugerencia: estudie la naturaleza de los puntos de inflexión de N.

Fuente: CERT Coordination Center

10.3 Trazo de la curva

Un ejemplo de la vida real

Como hemos visto en numerosas ocasiones, la gráfica de una función es un apoyo útil para visualizar las propiedades de la función. Desde un punto de vista práctico, la gráfica de una función proporciona también, en una mirada rápida, un resumen completo de toda la información capturada por la función.

Considere, por ejemplo, la gráfica de la función proporcionada por el Dow-Jones Industrial Average (DJIA) en el Lunes Negro, octubre 19 de 1987 (figura 47). Aquí, $t = 0$ corresponde a las 9:30 a.m., cuando la bolsa abrió sus operaciones, y $t = 6.5$ corresponde a las 4 p.m., hora del cierre. La siguiente información puede obtenerse a partir del estudio de la gráfica.

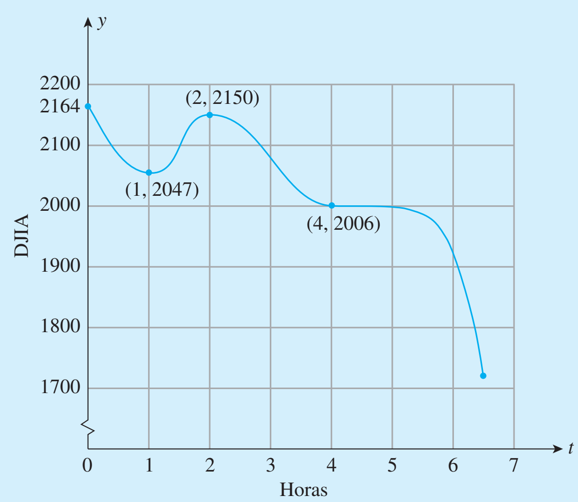


FIGURA 47
El promedio de Dow-Jones Industrial en el Lunes Negro.

Fuente: Wall Street Journal

La gráfica es rápidamente *decreciente* de $t = 0$ a $t = 1$, reflejando una caída vertiginosa en el índice en la primera hora de operaciones. El punto (1, 2,047) es un punto *mínimo relativo* de la función, y este punto de inflexión coincide con el inicio de una recuperación abortada. El rally de corta duración, representado por la parte de la gráfica que es creciente en el intervalo (1, 2), rápidamente se disipó en $t = 2$ (11:30 a.m.). El punto *máximo relativo* (2, 2,150) marca el punto más alto de la recuperación. La función es decreciente en el resto del intervalo. El punto (4, 2,006) es un *punto de inflexión* de la función, demuestra que hubo una tregua temporal en $t = 4$ (1:30 p.m.). Sin embargo, la presión de ventas continúa sin cesar, mientras que el DJIA continuó cayendo hasta el cierre del mercado. Finalmente, la gráfica muestra también que el índice de apertura más alto del día [$f(0) = 2{,}164$ es el *máximo absoluto* de la función] y el de cierre más bajo del día [$f\left(\frac{13}{2}\right) = 1{,}739$ es el *mínimo absoluto* de la función], ¡una caída de 508 puntos al cierre previo!*

Antes de que centre su atención en la tarea actual de trazado de la gráfica de una función, observe algunas propiedades de la gráfica que serán útiles a este respecto.

Asíntotas verticales

Antes de continuar, es posible que desee revisar el material de límites laterales y de límites al infinito de una función (secciones 9.1 y 9.2).

*Máximo y mínimo absolutos de funciones que se tratan en la sección 10.4.

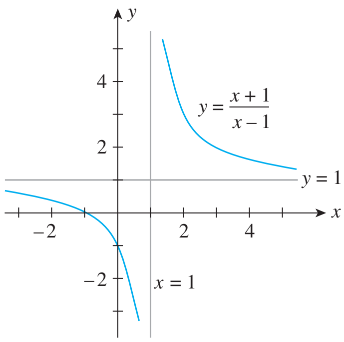


FIGURA 48
La gráfica de f tienen una asíntota vertical en $x = 1$.

Considere la gráfica de la función

$$f(x) = \frac{x + 1}{x - 1}$$

mostrada en la figura 48. Observe que $f(x)$ aumenta sin límite (tiende a ser infinita) cuando x tiende a $x = 1$ por la derecha, esto es

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{x + 1}{x - 1} = \infty$$

Puede verificar esto al tomar una secuencia de valores de x aproximándose a $x = 1$ desde la derecha y observe los valores correspondientes de $f(x)$.

Aquí está otra forma de ver la situación: observe que si x es un número un poco mayor a 1, entonces ambos $(x + 1)$ y $(x - 1)$ son positivos, así que $(x + 1)/(x - 1)$ es también positivo. Conforme x se aproxima a $x = 1$, el numerador de $(x + 1)$ se acerca a 2, pero el denominador $(x - 1)$ se aproxima a cero, así que el cociente $(x + 1)/(x - 1)$ se acerca al infinito, como se pudo ver antes. La línea $x = 1$ es llamada una asíntota vertical de la grafica de f.

Para la función $f(x) = (x + 1)/(x - 1)$, podemos ver que

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{x + 1}{x - 1} = -\infty$$

y ésta indica cómo $f(x)$ se aproxima desde la izquierda a la asíntota $x = 1$.

De manera más general, tenemos la siguiente definición:

La asíntota vertical

La línea $x = a$ es una **asíntota vertical** de la gráfica de una función f si

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \infty \quad \text{o} \quad -\infty$$

o

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \infty \quad \text{o} \quad -\infty$$

Nota Aunque la asíntota vertical de una gráfica no es parte de ella, sirve como una ayuda útil para trazar la gráfica. ■

Para funciones racionales

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

existe un criterio simple para determinar si la gráfica de f tiene asíntotas verticales.

Determinación de asíntotas verticales en funciones racionales

Suponga que f es una función racional

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

donde P y Q son funciones polinomiales. Entonces, la línea $x = a$ es una asíntota vertical de la gráfica de f si $Q(a) = 0$ pero $P(a) \neq 0$.

Para la función

$$f(x) = \frac{x + 1}{x - 1}$$

considerada con anterioridad $P(x) = x + 1$ y $Q(x) = x - 1$. Observe que $Q(1) = 0$ pero $P(1) = 2 \neq 0$, así que $x = 1$, es una asíntota vertical de la gráfica de f.

EJEMPLO 1 Determine las asíntotas verticales de la gráfica de la función

$$f(x) = \frac{x^2}{4 - x^2}$$

Solución La función f es una función racional con $P(x) = x^2$ y $Q(x) = 4 - x^2$. Los ceros de Q se determinan al resolver

$$4 - x^2 = 0$$

esto es,

$$(2 - x)(2 + x) = 0$$

dando $x = -2$ y $x = 2$. Estos son candidatos para las asíntotas verticales de la gráfica de f. Al examinar $x = -2$, calcule $P(-2) = (-2)^2 = 4 \neq 0$, y observe que $x = -2$ es de hecho una asíntota vertical de la gráfica de f. De forma similar, determinamos $P(2) = 2^2 = 4 \neq 0$, y que $x = 2$ también es una asíntota vertical de la gráfica de f. La gráfica de f trazada en la figura 49 confirma estos resultados. ■

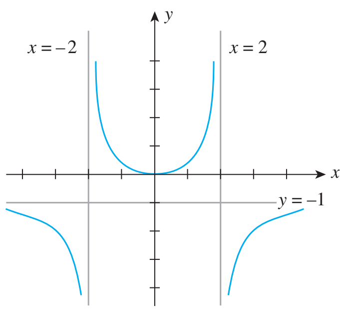


FIGURA **49**
$x = -2$ y $x = 2$ son asíntotas verticales de la grafica de f.

Recuerde que para que la recta $x = a$ sea una asíntota vertical de la gráfica de la función racional de f, *sólo* el denominador de $f(x)$ deberá ser igual a cero en $x = a$. Si *ambas*, $P(a)$ y $Q(a)$, son iguales a cero, entonces $x = a$ *no* necesita ser una asíntota vertical. Por ejemplo, observe la función

$$f(x) = \frac{4(x^2 - 4)}{x - 2}$$

cuya gráfica aparece en la figura 7a de la página 541.

Asíntotas horizontales

Regrese a la función f definida por

$$f(x) = \frac{x + 1}{x - 1}$$

(figura 50).

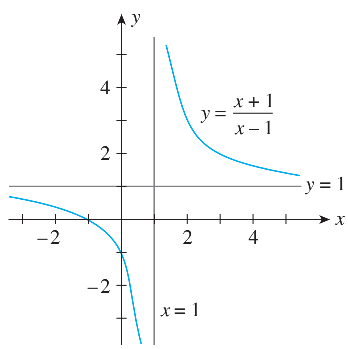


FIGURA **50**
La gráfica de f tiene una asíntota horizontal en $y = 1$.

Observe que $f(x)$ se aproxima a la recta horizontal $y = 1$, cuando x tiende al infinito, y en este caso, $f(x)$ también se acerca a $y = 1$ cuando x tiende a menos infinito. La recta $y = 1$ es llamada asíntota horizontal de la gráfica de f. De forma más general, tenemos la siguiente definición:

Asíntota horizontal

La recta $y = b$ es una **asíntota horizontal** de la gráfica de una función f si

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = b \quad \text{o} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = b$$

Para la función

$$f(x) = \frac{x+1}{x-1}$$

vemos que

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} \frac{x+1}{x-1} &= \lim_{x\to\infty} \frac{1+\dfrac{1}{x}}{1-\dfrac{1}{x}} \qquad \text{Dividа el numerador y el denominador entre } x.\\ &= 1\end{aligned}$$

También,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty} \frac{x+1}{x-1} &= \lim_{x\to-\infty} \frac{1+\dfrac{1}{x}}{1-\dfrac{1}{x}}\\ &= -1\end{aligned}$$

En cualquier caso, concluimos que $y = 1$ es una asíntota horizontal de la gráfica de f, como se observó antes.

EJEMPLO 2 Determine las asíntotas horizontales de la gráfica de la función

$$f(x) = \frac{x^2}{4-x^2}$$

Solución Calculamos

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{4-x^2} &= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\dfrac{4}{x^2}-1} \qquad \text{Divida el numerador y el denominador entre } x^2.\\ &= -1\end{aligned}$$

y así que $y = -1$ es una asíntota horizontal, como antes (de manera similar, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -1$ también). La gráfica de f está trazada en la figura 51 que confirma este resultado.

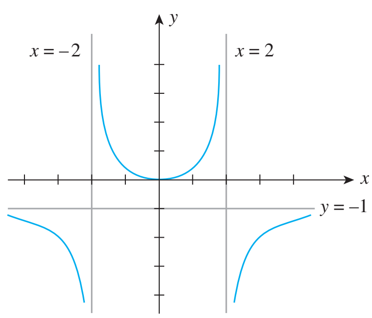


FIGURA 51
La gráfica de f tiene una asíntota horizontal en $y = -1$.

■

Después establezca una propiedad importante de las funciones polinomiales.

Una función polinomial no tiene asíntotas verticales ni horizontales.

Para ver esto, observe que una función polinomial $P(x)$ puede estar escrita como una función racional con el denominador igual a 1. Por tanto,

$$P(x) = \frac{P(x)}{1}$$

Ya que el denominador nunca es igual a cero, P no tiene asíntotas verticales. Después, si P es un polinomio de grado mayor que o igual a 1, entonces

$$\lim_{x \to \infty} P(x) \text{ y } \lim_{x \to -\infty} P(x)$$

ambos son infinitos o menos infinitos, esto es, no existen. Por consiguiente, P no tiene asíntotas horizontales

En las últimas dos secciones observó cómo la primera y segunda derivadas de una función se utilizan para revelar varias propiedades de la gráfica de una función. Ahora demuestre cómo esta información puede utilizarse para ayudar a elaborar la gráfica de f. Comience por dar un procedimiento general para el trazo de una curva.

Guía para el trazo de una curva

1. Determine el dominio de f.
2. Determine las intersecciones de f en x y y.*
3. Determine el comportamiento de f para valores absolutos grandes de x.
4. Determine las asíntotas horizontales y verticales de f.
5. Determine los intervalos donde f es creciente y donde es decreciente.
6. Determine los extremos relativos de f
7. Determine la concavidad de f.
8. Determine los puntos de inflexión de f.
9. Trace unos puntos adicionales para ayudar a identificar más adelante la forma de la gráfica de f y trace la gráfica.

*La ecuación $f(x) = 0$ puede ser difícil de resolver, en ese caso se puede decidir determinar las intersecciones o usar la tecnología disponible para ayuda.

Ahora se ilustran las técnicas para trazar la curva en los siguientes dos ejemplos.

Dos ejemplos paso a paso

VIDEO

EJEMPLO 3 Trace la gráfica de la función

$$y = f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 2$$

Solución Obtenga la siguiente información en la gráfica de f.

1. El dominio de f está en el intervalo $(-\infty, \infty)$.
2. Al establecer $x = 0$, se encuentra que la intersección de y es 2. La intersección de x se encuentra al hacer $y = 0$, lo que en este caso conduce a una ecuación cúbica. Ya que la solución no se determina todavía, no utilizará esta información.

3. Puesto que

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (x^3 - 6x^2 + 9x + 2) = -\infty$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} (x^3 - 6x^2 + 9x + 2) = \infty$$

Observe que f decrece sin límite, cuando x decrece sin límite, y que f crece sin límite cuando x crece sin límite.

4. Dado que f es una función polinomial, no hay ninguna asíntota.

5.
$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x^2 - 4x + 3)$$
$$= 3(x - 3)(x - 1)$$

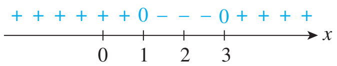


FIGURA 52
El diagrama de signos para f'.

Al hacer $f'(x) = 0$ da $x = 1$ o $x = 3$. El diagrama de signos para f demuestra que f es creciente en los intervalos $(-\infty, 1)$ y $(3, \infty)$ y es decreciente en el intervalo $(1, 3)$ (figura 52).

6. De los resultados del paso 5 se ve que $x = 1$ y $x = 3$ son valores críticos de f. Más aún, f' cambia de signo positivo a negativo conforme cruza $x = 1$, así que ocurre un máximo relativo de f en $x = 1$. De forma similar, observamos que un mínimo relativo de f se presenta en $x = 3$. Ahora,

$$f(1) = 1 - 6 + 9 + 2 = 6$$
$$f(3) = 3^3 - 6(3)^2 + 9(3) + 2 = 2$$

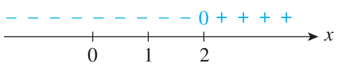


FIGURA 53
El diagrama de signos para f''.

Así que $f(1) = 6$ es un máximo relativo de f y $f(3) = 2$ es un mínimo relativo de f.

7.
$$f''(x) = 6x - 12 = 6(x - 2)$$

el cual es igual a cero cuando $x = 2$. El diagrama de signos de f'' demuestra que f es cóncava hacia abajo sobre el intervalo $(-\infty, 2)$ y cóncava hacia arriba sobre el intervalo $(2, \infty)$ (figura 53).

8. De los resultados del paso 7, observamos que f'' cambia de signo conforme se mueve a través de $x = 2$. Siguiente,

$$f(2) = 2^3 - 6(2)^2 + 9(2) + 2 = 4$$

y así que el punto de inflexión requerido de f es (2, 4).

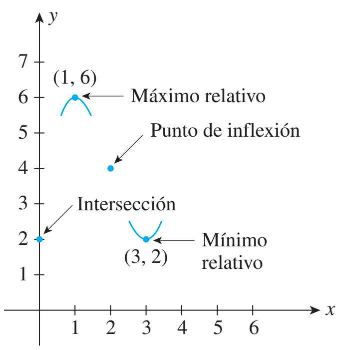


FIGURA 54
Primero dibujamos la intersección, los extremos relativos y el punto de inflexión.

En resumen tenemos lo siguiente:

Dominio: $(-\infty, \infty)$
Intersección: (0, 2)
$\lim_{x\to-\infty} f(x)$; $\lim_{x\to\infty} f(x)$: $-\infty$; ∞
Asíntotas: ninguna
Intervalos donde f es $\nearrow$ o $\searrow$: $\nearrow$ en $(-\infty, 1) \cup (3, \infty)$; $\searrow$ en $(1, 3)$
Extremos relativos: máximo relativo en (1, 6); mínimo relativo en (3, 2)
Concavidad: hacia abajo en $(-\infty, 2)$; hacia arriba $(2, \infty)$
Punto de inflexión: (2, 4)

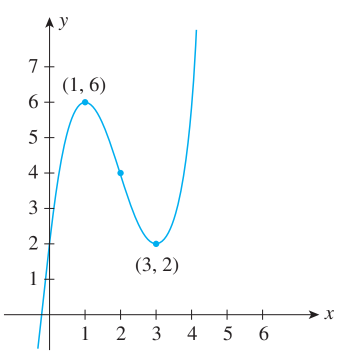


FIGURA 55
La gráfica de $y = x^3 - 6x^2 + 9x + 2$.

En general, es una buena idea comenzar a graficar trazando las intersecciones, los extremos relativos, y el (los) punto(s) de inflexión (figura 54). Después, utilizar el resto de la información para completar la gráfica de f, como se trazó en la figura 55. ■

Explore y analice

El precio promedio de la gasolina almacenada en la bomba por un periodo de 3 meses, durante el cual hubo una escasez temporal de petróleo, es descrito por la función f definida en el intervalo $[0, 3]$. Durante el primer mes, el precio se incrementó a un ritmo creciente. A partir del segundo mes, la buena noticia fue que la tasa de crecimiento se hizo lenta, aunque el precio de la gasolina seguía aumentando. Este patrón continuó así hasta el final del segundo mes. El precio de la gasolina alcanzó un máximo al final de $t = 2$ y comenzó a caer a un ritmo cada vez mayor hasta $t = 3$.

1. Describa los signos de $f'(t)$ y $f''(t)$ sobre cada uno de los intervalos $(0, 1)$, $(1, 2)$ y $(2, 3)$.
2. Realice un dibujo mostrando una gráfica satisfactoria de f sobre $[0, 3]$.

EJEMPLO 4 Trace la gráfica de la función

$$y = f(x) = \frac{x+1}{x-1}$$

Solución Obtenga la siguiente información:

1. f es indefinida cuando $x = 1$, así que el dominio de f es el conjunto de números reales excepto $x = 1$.
2. Al hacer $y = 0$ da -1, la intersección x de f. Luego, hacemos $x = 0$ da -1 como la intersección y de f.
3. Más tarde encontramos que

$$\lim_{x\to\infty} = \frac{x+1}{x-1} = 1 \quad \text{y} \quad \lim_{x\to-\infty} = \frac{x+1}{x-1} = 1$$

(vea las páginas 698-700). Por consiguiente, observe que $f(x)$ se aproxima a la recta $y = 1$ cuando $|x|$ se vuelve arbitrariamente grande. Para $x > 1$, $f(x) > 1$ y $f(x)$ se aproxima a la recta $y = 1$ desde arriba. Para $x < 1$, $f(x) < 1$, así que $f(x)$ se acerca a la línea $y = 1$ desde abajo.

4. La recta $x = 1$ es una asíntota vertical de la gráfica de f. También, de los resultados del paso 3, concluya que $y = 1$ es una asíntota horizontal de la gráfica de f.
5. $$f'(x) = \frac{(x-1)(1) - (x+1)(1)}{(x-1)^2} = -\frac{2}{(x-1)^2}$$

y es discontinua en $x = 1$. El diagrama de signos de f' muestra que $f'(x) < 0$ en donde está definida. Por tanto, f es decreciente en los intervalos $(-\infty, 1)$ y $(1, \infty)$ (figura 56).

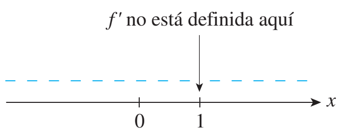


FIGURA **56**
El diagrama de signos para f''.

6. De los resultados del paso 5, observe que no hay valores críticos en f ya que $f'(x)$ nunca es igual a cero para cualquier valor de x en el dominio de f.
7. $$f''(x) = \frac{d}{dx}\left[-2(x-1)^{-2}\right] = 4(x-1)^{-3} = \frac{4}{(x-1)^3}$$

El diagrama de signos de f'' muestra inmediatamente que f es cóncava hacia abajo en el intervalo $(-\infty, 1)$ y cóncava hacia arriba en el intervalo $(1, \infty)$ (figura 57).

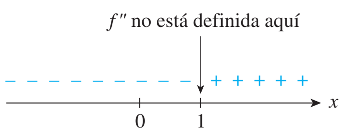


FIGURA **57**
El diagrama de signos para f''.

8. De los resultados del paso 7, observe que no existen candidatos para los puntos de inflexión de f, ya que $f''(x)$ nunca es igual a cero para cualquier valor de x en el dominio de f. Por tanto, f no tiene puntos de inflexión.

Al resumir, tenemos lo siguiente

Dominio: $(-\infty, 1) \cup (1, \infty)$
Intersección: $(0, -1)$; $(-1, 0)$
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$: 1; 1
Asíntotas: $x = 1$ es una asíntota vertical
$y = 1$ es una asíntota horizontal
Intervalos donde f es $\nearrow$ o $\searrow$: $\searrow$ en $(-\infty, 1) \cup (1, \infty)$
Extremos relativos: ninguno
Concavidad: hacia abajo en $(-\infty, 1)$; hacia arriba en $(1, \infty)$
Puntos de inflexión: ninguno

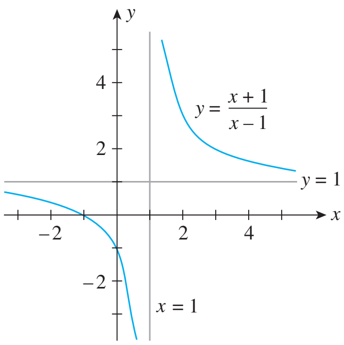


FIGURA **58**
La gráfica de f tiene una asíntota horizontal en $y = 1$ y una asíntota vertical en $x = 1$.

La gráfica de f está trazada en la figura 58. ■

10.3 Ejercicios de autoevaluación

1. Determine las asíntotas horizontal y vertical de la gráfica de la función.

$$f(x) = \frac{2x^2}{x^2 - 1}$$

2. Trace la gráfica de la función

$$f(x) = \frac{2}{3}x^3 - 2x^2 - 6x + 4$$

Las soluciones de los ejercicios de autoevaluación 10.3 se encuentran en la página 708.

10.3 Preguntas de concepto

1. Explique los siguientes términos:
a. Asíntota vertical. **b.** Asíntota horizontal.

2. a. ¿Cuántas asíntotas verticales puede tener la gráfica de una función f? Explique con ayuda de gráficas.
b. ¿Cuántas asíntotas horizontales puede tener una gráfica de una función f? Explique con ayuda de gráficas.

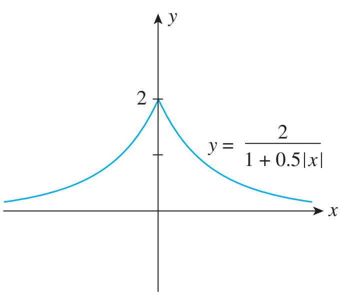
3. ¿Cómo determina una asíntota vertical de una función racional?

4. Proporcione un procedimiento para trazar la gráfica de una función.

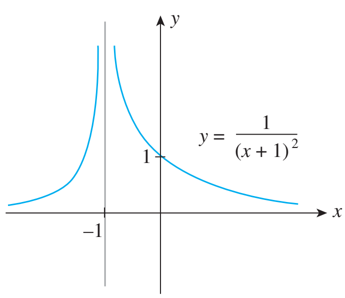
10.3 Ejercicios

En los ejercicios 1-10, determine las asíntotas horizontales y verticales de la gráfica.

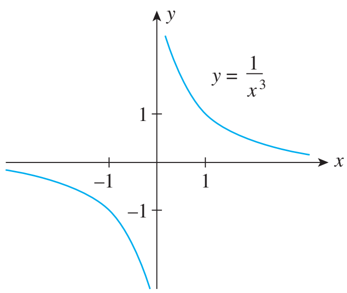
1.



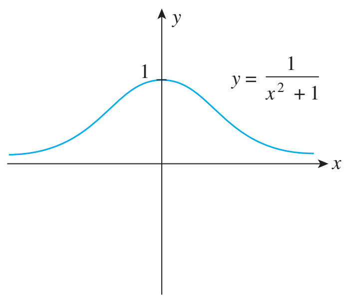
2.



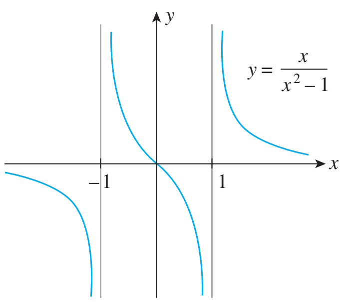
3.



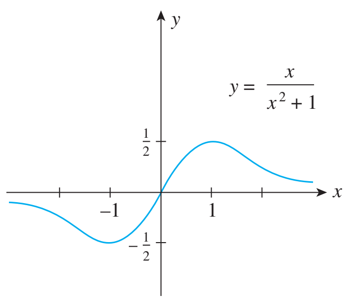
4.



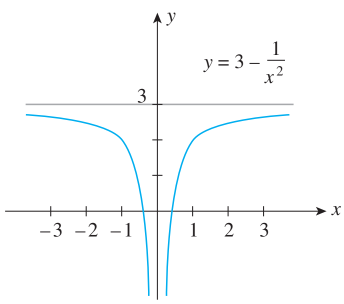
5.



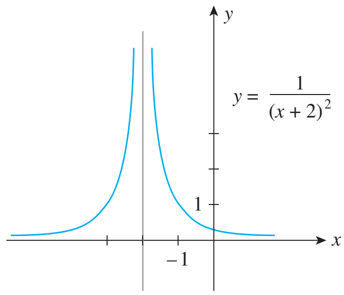
6.



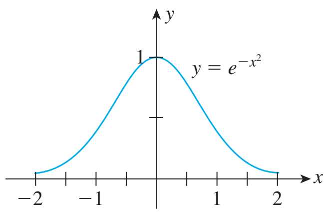
7.



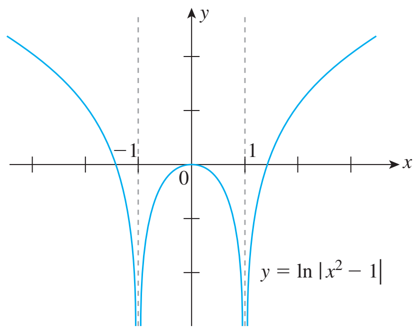
8.



9.



10.



En los ejercicios 11-28, encuentre las asíntotas horizontales y verticales de la gráfica de la función (no es necesario que trace la gráfica).

11. $f(x) = \dfrac{1}{x}$

12. $f(x) = \dfrac{1}{x + 2}$

13. $f(x) = -\dfrac{2}{x^2}$

14. $g(x) = \dfrac{1}{1 + 2x^2}$

15. $f(x) = \dfrac{x - 1}{x + 1}$

16. $g(t) = \dfrac{t + 1}{2t - 1}$

17. $h(x) = x^3 - 3x^2 + x + 1$

18. $g(x) = 2x^3 + x^2 + 1$

19. $f(t) = \dfrac{t^2}{t^2 - 9}$

20. $g(x) = \dfrac{x^3}{x^2 - 4}$

21. $f(x) = \dfrac{3x}{x^2 - x - 6}$

22. $g(x) = \dfrac{2x}{x^2 + x - 2}$

23. $g(t) = 2 + \dfrac{5}{(t - 2)^2}$

24. $f(x) = 1 + \dfrac{2}{x - 3}$

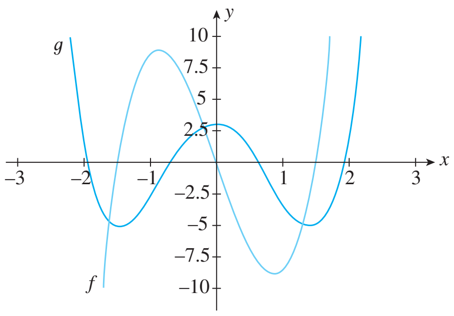
25. $f(x) = \dfrac{x^2 - 2}{x^2 - 4}$

26. $h(x) = \dfrac{2 - x^2}{x^2 + x}$

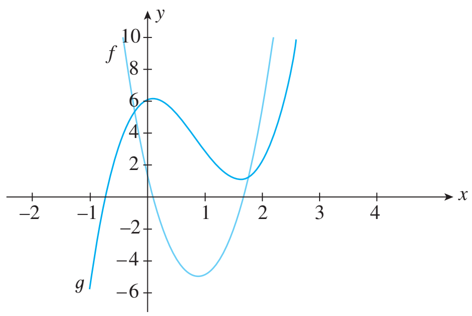
27. $g(x) = \dfrac{x^3 - x}{x(x+1)}$ **28.** $f(x) = \dfrac{x^4 - x^2}{x(x-1)(x+2)}$

En los ejercicios 29 y 30 se le dan las gráficas de dos funciones, *f* y *g*. Una función es la derivada de la otra. Identifique cada una de ellas.

29.



30.



31. VELOCIDAD TERMINAL Una paracaidista salta desde la canastilla de un globo aerostático. A medida que su caída es libre, la resistencia del aire, que es proporcional a su velocidad, se acumula a un punto en el que equilibra la fuerza de la gravedad. El movimiento resultante puede describirse en términos de velocidad de la siguiente manera: a partir del punto de reposo (velocidad cero), su velocidad aumenta y se acerca a una velocidad constante, llamada *velocidad terminal*. Trace una gráfica de su velocidad v en función del tiempo t.

32. PROPAGACIÓN DE UNA GRIPE EPIDÉMICA Al principio, 10 estudiantes de una secundaria contrajeron influenza. La gripe se propagó y el número total de estudiantes que eventualmente contrajo la gripe se acercó, pero nunca excedió 200. Sea $P(t)$ que denota el número de estudiantes que habían contraído la gripe después de t días, donde P es una función apropiada.

a. Elabore la grafica de P (su respuesta *no* será única).
b. ¿En dónde es creciente la función?
c. ¿P tiene una asíntota horizontal? De ser así, ¿cuál es?
d. Analice la concavidad de P. Explique su significado.
e. ¿Existe un punto de inflexión en la gráfica de P? Si es así, explique su significado.

En los ejercicios 33-36, utilice la información resumida en la tabla para trazar la grafica de *f*.

33. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$

Dominio: $(-\infty, \infty)$
Intersección: intersección en y: 1
Asíntotas: ninguna
Intervalos donde f es ↗ y ↘: ↗ en $(-\infty, 0) \cup (2, \infty)$;
↘ en $(0, 2)$
Extremos relativos: Máx. rel. en $(0, 1)$; Mín. rel. en $(2, -3)$
Concavidad: hacia abajo en $(-\infty, 1)$; hacia arriba en $(1, \infty)$
Punto de inflexión: $(1, -1)$

34. $f(x) = \dfrac{1}{9}(x^4 - 4x^3)$

Dominio: $(-\infty, \infty)$
Intersección: intersección en x: 0, 4: intersección en y: 0
Asíntotas: ninguna
Intervalos donde f es ↗ y ↘: ↗ en $(3, \infty)$;
↘ en $(-\infty, 0) \cup (0, 3)$
Extremos relativos: Mín. rel. en $(3, -3)$
Concavidad: hacia abajo en $(0, 2)$:
hacia arriba en $(-\infty, 0) \cup (2, \infty)$
Punto de inflexión: $(0, 0)$ y $\left(2, -\frac{16}{9}\right)$

35. $f(x) = \dfrac{4x - 4}{x^2}$

Dominio: $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$
Intersección: intersección en x: 1
Asíntotas: ejes x y eje y
Intervalos donde f es ↗ y ↘: ↗ en $(0, 2)$;
↘ en $(-\infty, 0) \cup (2, \infty)$
Extremos relativos: Máx. rel. en $(2, 1)$
Concavidad: hacia abajo en $(-\infty, 0) \cup (0, 3)$;
hacia arriba en $(3, \infty)$
Punto de inflexión: $\left(3, \frac{8}{9}\right)$

36. $f(x) = x - 3x^{1/3}$

Dominio: $(-\infty, \infty)$
Intersección: intersección en x: $\pm 3\sqrt{3}$, 0
Asíntotas: ninguna
Intervalos donde f es↗ y ↘: ↗ en $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$;
↘ en $(-1, 1)$
Extremos relativos: Máx. rel. en $(-1, 2)$; Mín. rel. en $(1, -2)$
Concavidad: hacia abajo en $(-\infty, 0)$; hacia arriba en $(0, \infty)$
Punto de inflexión: $(0, 0)$

En los ejercicios 37-60, trace la gráfica de la función, utilizando la guía para trazar la curva de esta sección.

37. $g(x) = 4 - 3x - 2x^3$ **38.** $f(x) = x^2 - 2x + 3$

39. $h(x) = x^3 - 3x + 1$ **40.** $f(x) = 2x^3 + 1$

41. $f(x) = -2x^3 + 3x^2 + 12x + 2$

42. $f(t) = 2t^3 - 15t^2 + 36t - 20$

43. $h(x) = \frac{3}{2}x^4 - 2x^3 - 6x^2 + 8$

44. $f(t) = 3t^4 + 4t^3$

45. $f(t) = \sqrt{t^2 - 4}$

46. $f(x) = \sqrt{x^2 + 5}$

47. $g(x) = \frac{1}{2}x - \sqrt{x}$

48. $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$

49. $g(x) = \frac{2}{x - 1}$

50. $f(x) = \frac{1}{x + 1}$

51. $h(x) = \frac{x + 2}{x - 2}$

52. $g(x) = \frac{x}{x - 1}$

53. $f(t) = \frac{t^2}{1 + t^2}$

54. $g(x) = \frac{x}{x^2 - 4}$

55. $f(t) = e^t - t$

56. $h(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

57. $f(x) = 2 - e^{-x}$

58. $f(x) = \frac{3}{1 + e^{-x}}$

59. $f(x) = \text{En}(x - 1)$

60. $f(x) = 2x - \text{En}\, x$

61. **Costo de eliminar contaminantes tóxicos** El depósito de agua de una ciudad se encontró que pudiera estar contaminado con tricloroetileno (una sustancia química cancerígena) como resultado de un depósito químico abandonado dentro del agua. Se presentó una propuesta al consejo de la ciudad, indicando que el costo, medido en millones de dólares, al eliminar x% de los contaminantes tóxicos está dado por

$$C(x) = \frac{0.5x}{100 - x}$$

a. Determine la asíntota horizontal de $C(x)$.
b. ¿Es posible eliminar 100% de los contaminantes tóxicos del agua?

62. **Costo promedio de producción de DVD** El costo promedio por disco (en dólares) en que incurre Herald Media Corporation en la impresión de x DVD está dado por la función de costo promedio.

$$\overline{C}(x) = 2.2 + \frac{2500}{x}$$

a. Determine las asíntotas horizontales de $\overline{C}(x)$.
b. ¿Cuál es valor límite del costo promedio?

63. **Concentración de un fármaco en la sangre** La concentración (en miligramos/centímetros cúbicos) de cierto fármaco en la sangre de un paciente después de t horas de la inyección está dada por

$$\overline{C}(t) = \frac{0.2t}{t^2 + 1}$$

a. Determine la asíntota horizontal de $C(t)$.
b. Interprete sus resultados.

64. **Efecto de las enzimas en las reacciones químicas** Ciertas proteínas, conocidas como enzimas, sirven como catalizadores de reacciones químicas en seres vivos. En 1913 Leonor Michaelis y L. M. Menten descubrieron la siguiente fórmula para la velocidad inicial V (en mol/litro/segundo) en la que la reacción comienza en términos de la cantidad de sustrato x (la sustancia que se consideró, medida en mol/litro):

$$V = \frac{ax}{x + b}$$

donde a y b son constantes positivas.
a. Determine la asíntota horizontal de V.
b. ¿Qué le indica el resultado del inciso (a) acerca de la velocidad inicial en la que comienza la reacción, si la cantidad de sustrato es demasiado grande?

65. **PIB de un país en vías de desarrollo** El producto interno bruto (PIB) de un país en vías de desarrollo entre 2000 y 2008 es aproximado por la función

$$G(t) = -0.2t^3 + 2.4t^2 + 60 \qquad (0 \le t \le 8)$$

donde $G(t)$ es medido en miles de millones de dólares, con $t = 0$ correspondiente a 2000. Trace la gráfica de la función G e interprete sus resultados.

66. **Índice de criminalidad** El número de delitos graves por cada 100,000 cometidos en la ciudad entre 2000 y 2007 se aproxima a la función

$$N(t) = -0.1t^3 + 1.5t^2 + 80 \qquad (0 \le t \le 7)$$

donde $N(t)$ indica el número de delitos por cada 100,000 cometidos en la ciudad al año t, con $t = 0$ correspondiente a 2000. Los ciudadanos enfurecidos por el sorprendente aumento en el índice de criminalidad y con la ayuda de la policía local, organizaron grupos de vigilancia vecinal contra la delincuencia a principios de 2004 para combatir la amenaza. Trace la gráfica de la función N' e interprete sus resultados. ¿El programa vecino vigilante contra la delincuencia está funcionando?

67. **Eficiencia de los trabajadores** Un estudio de eficiencia reveló que el número total de teléfonos inalámbricos ensamblados por un trabajador de Delphi Electronics en un promedio de t horas después de iniciar sus labores a las 8 a.m., está dado por

$$N(t) = -\frac{1}{2}t^3 + 3t^2 + 10t \qquad (0 \le t \le 4)$$

Trace la gráfica de la función N e interprete sus resultados.

68. **Concentración de un fármaco en el torrente sanguíneo** La concentración (en milímetros/centímetros cúbicos) de un determinado fármaco en el torrente sanguíneo de un paciente después de t horas la inyección está dada por

$$C(t) = \frac{0.2t}{t^2 + 1}$$

Trace la gráfica de la función C e interprete sus resultados.

69. **Ingresos en taquilla** Los ingresos totales en taquilla a nivel mundial para una película de larga duración se aproximan a la función

$$T(x) = \frac{120x^2}{x^2 + 4}$$

donde $T(x)$ se mide en millones de dólares y x es el número de años desde el lanzamiento de la película. Trace la gráfica de la función T e interprete sus resultados.

70. Contenido de oxígeno en un estanque Cuando los residuos orgánicos se vierten dentro de un estanque, el proceso de oxidación que tiene lugar reduce el contenido de oxígeno del estanque. Sin embargo, con el tiempo la naturaleza restaurará dicho contenido a su nivel natural. Suponga que el contenido de oxígeno t días después de que el desecho orgánico fuese arrojado al estanque está dado por

$$f(t) = 100\left(\frac{t^2 - 4t + 4}{t^2 + 4}\right) \qquad (0 \le t < \infty)$$

por ciento de su nivel normal. Trace la gráfica de la función f e interprete sus resultados.

71. Costo de eliminar contaminantes tóxicos Refiérase al ejercicio 61. El costo, medido en millones de dólares, al eliminar x% de contaminantes tóxicos está dado por

$$C(x) = \frac{0.5x}{100 - x}$$

Trace la gráfica de la función C e interprete sus resultados.

72. Análisis del flujo del tráfico La velocidad en el flujo del tráfico en millas por hora en un tramo de la ruta 123 a las 6 y las 10 a.m. en un día típico de trabajo es aproximada por

$$f(t) = 20t - 40\sqrt{t} + 52 \qquad (0 \le t \le 4)$$

donde t se mide en horas, con $t = 0$, correspondiente a las 6 a.m. Trace la gráfica de f e interprete sus resultados.

73. Propagación de una epidemia Durante una epidemia de gripe, el número total de estudiantes en un campus universitario estatal quienes habían contraído influenza para el día $x$vo está dado por

$$N(x) = \frac{3{,}000}{1 + 99e^{-x}} \qquad (x \ge 0)$$

a. Al principio, ¿cuántos estudiantes contrajeron influenza?
b. Obtenga una expresión para la velocidad a la que la enfermedad se diseminó y muestre que la función N crece en el intervalo $(0, \infty)$.
c. Trace la gráfica de N. ¿Cuál fue el número total de estudiantes que contrajo la influenza durante esa epidemia en particular?

74. Absorción de fármacos Un líquido lleva el fármaco a un órgano de volumen V cm^3 a razón de a cm^3/seg y sale a la misma velocidad. La concentración de un fármaco en el líquido que entra es c g/cm^3. Sea $x(t)$ la concentración del fármaco en cualquier momento t, se tiene que $x(t) = c(1 - e^{-at/V})$.
a. Demuestre que x es una función creciente en $(0, \infty)$.
b. Trace la gráfica de x.

10.3 Soluciones de los ejercicios de autoevaluación

1. Sea

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2}{x^2 - 1} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{1 - \dfrac{1}{x^2}} = 2$$

Divida el numerador y el denominador entre x^2.

Vemos que $y = 2$ es una asíntota horizontal. Luego, puesto que

$$x^2 - 1 = (x + 1)(x - 1) = 0$$

implica que $x = -1$ o $x = 1$, ya que éstos son candidatos para las asíntotas verticales de f. Ya que el numerador de f no es igual a cero en $x = -1$ o $x = 1$, concluimos que $x = -1$ y $x = 1$ son asíntotas verticales de la gráfica de f.

2. Se obtiene la siguiente información sobre la gráfica de f.
(1) El dominio de f es el intervalo $(-\infty, \infty)$.
(2) Al hacer $x = 0$, se determina que la intersección y es 4.
(3) Dado que,

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2}{3}x^3 - 2x^2 - 6x + 4\right) = -\infty$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{2}{3}x^3 - 2x^2 - 6x + 4\right) = \infty$$

observamos que $f(x)$ disminuye sin límite conforme x disminuye sin límite y que $f(x)$ crece sin límite mientras que x crece sin límite.

(4) Puesto que f es una función polinomial, no existen asíntotas.

(5) $$f'(x) = 2x^2 - 4x - 6 = 2(x^2 - 2x - 3) = 2(x + 1)(x - 3)$$

Al hacer $f'(x) = 0$ da $x = -1$ o $x = 3$, el diagrama de signos para f' muestra que f es creciente en los intervalos $(-\infty, -1)$ y $(3, \infty)$ y decreciente en $(-1, 3)$.

+ + + + 0 – – – – – – – 0 + + + +

x: –1 0 3

Diagrama de signos para f'

(6) De los resultados del paso 5, observe que $x = -1$ y $x = 3$ son valores críticos de f. Más aún, el diagrama de signos de f' indica que $x = -1$ lleva a un máximo relativo de f y $x = 3$ lleva a un mínimo relativo de f. Ahora,

$$f(-1) = \frac{2}{3}(-1)^3 - 2(-1)^2 - 6(-1) + 4 = \frac{22}{3}$$

$$f(3) = \frac{2}{3}(3)^3 - 2(3)^2 - 6(3) + 4 = -14$$

así que $f(-1) = \frac{22}{3}$ es un máximo relativo de f y $f(3) = -14$ es un mínimo relativo de f.

(7) $$f''(x) = 4x - 4 = 4(x - 1)$$
el cual es igual a cero cuando $x = 1$. El diagrama de signos asociado a f'' muestra que f es cóncava hacia abajo en el intervalo $(-\infty, 1)$ y cóncava hacia arriba en el intervalo $(1, \infty)$.

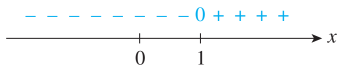


Diagrama de signos para f''

(8) De los resultados del paso 7, observe que $x = 1$ es el único candidato para un punto de inflexión de f. Ya que $f''(x)$ cambia de signo mientras se mueve a través del punto $x = 1$ y

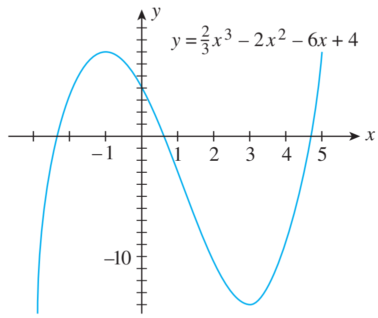
$$f(1) = \frac{2}{3}(1)^3 - 2(1)^2 - 6(1) + 4 = -\frac{10}{3}$$

observamos que el punto de inflexión requerido es $(1, -\frac{10}{3})$.

(9) Al resumir esta información, tenemos lo siguiente:

Dominio: $(-\infty, \infty)$
Intersección: $(0, 4)$
$\lim_{x \to -\infty} f(x)$; $\lim_{x \to \infty} f(x)$: $-\infty$; ∞
Asíntotas: ninguna
Intervalos donde f es ↗ o ↘: ↗ en $(-\infty, -1) \cup (3, \infty)$; ↘ en $(-1, 3)$
Extremos relativos: Máx. rel. en $(-1, \frac{22}{3})$; mín. rel. en $(3, -14)$
Concavidad: hacia abajo en $(-\infty, 1)$; hacia arriba en $(1, \infty)$
Punto de inflexión: $(1, -\frac{10}{3})$

La gráfica de f está trazada en la siguiente figura:



USO DE LA TECNOLOGÍA

Análisis de las propiedades de una función

Uno de los propósitos principales al estudiar la sección 10.3 es ver cómo muchos de los conceptos de cálculo vienen juntos para dar el panorama de una función. Las técnicas de graficación también desempeñan un rol muy práctico. Por ejemplo, al usar las técnicas desarrolladas en la sección 10.3, puede identificar si la gráfica de una función generada por una calculadora graficadora es razonablemente completa. Más aún, estas técnicas pueden a menudo revelar detalles que se pierden en la gráfica.

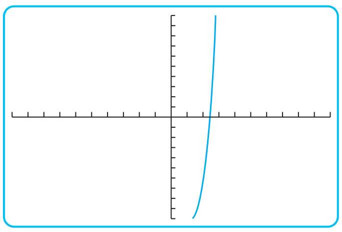


FIGURA T1
La gráfica de f en una ventana de visualización estándar.

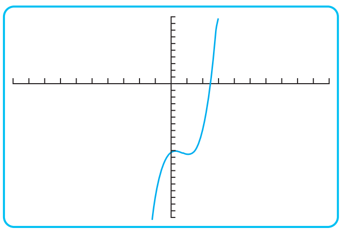


FIGURA T2
La gráfica de f en la ventana de visualización $[-10, 10] \times [-20, 10]$.

EJEMPLO 1 Al considerar la función $f(x) = 2x^3 - 3.5x^2 + x - 10$. Un trazo de la gráfica de f en la ventana de visualización estándar se muestra en la figura T1. Ya que el dominio de f está en el intervalo $(-\infty, \infty)$, observe que la figura T1 no revela la parte de la gráfica hacia la izquierda del eje y. Ésta sugiere que, por consiguiente, se amplíe la ventana de visualización. La figura T2 muestra la grafica de f en la ventana de visualización $[-10, 10] \times [-20, 10]$.

El comportamiento de f para valores más grandes de f

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$$

sugiere que esta ventana de visualización ha capturado una fotografía completa de f. El siguiente paso es realizar un análisis de la primera derivada de x,

$$f'(x) = 6x^2 - 7x + 1 = (6x - 1)(x - 1)$$

revela que f tiene valores críticos en $x = \frac{1}{6}$ y $x = 1$. De hecho, un diagrama de signos de f' muestra que f tiene un máximo relativo en $x = \frac{1}{6}$ y un mínimo relativo en $x = 1$, detalles que no se revelan en la gráfica de f mostrada en la figura T2. Al examinar esta parte de la gráfica de f, utilice la ventana de visualización $[-1, 2] \times [-11, -9]$. La gráfica resultante de f se muestra en la figura T3, ¡que ciertamente revela los detalles hasta ahora perdidos! Aunque por medio de una interacción del cálculo y la calculadora graficadora se puede obtener una buena imagen de las propiedades de f. ■

(continúa)

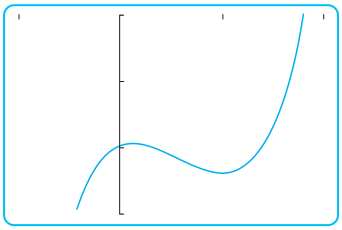


FIGURA **T3**
La gráfica de f en la ventana de visualización $[-1, 2] \times [-11, -9]$.

Determinación de las intersecciones de *x*

Como pudo observar en la sección 10.3, no siempre es fácil encontrar las intersecciones x de la gráfica de una función. Pero esta información es muy importante en las aplicaciones. Al utilizar la función para resolver ecuaciones polinomiales o la función para determinar las raíces de una ecuación, se puede resolver la ecuación $f(x) = 0$ muy fácilmente, para obtener las intersecciones en x de la gráfica de la función.

EJEMPLO 2 Sea $f(x) = x^3 - 3x^2 + x + 1.5$.

a. Utilice la función para resolver ecuaciones polinomiales de una calculadora graficadora para determinar las intersecciones x de la gráfica de f.
b. Utilice la función para encontrar las raíces de una ecuación de una calculadora graficadora para determinar las intersecciones x de la gráfica de f.

Solución

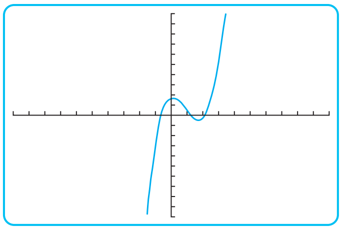


FIGURA **T4**
La gráfica de $f(x) = x^3 - 3x^2 + x + 1.5$.

a. Observe que f es una función polinomial de tercer grado, así que podemos utilizar la función para resolver las ecuaciones polinomiales para resolver la ecuación $x^3 - 3x^2 + x + 1.5 = 0$ [$f(x) = 0$]. Determinamos que las soluciones (intersecciones en x) son

$$x_1 \approx -0.525687120865 \qquad x_2 \approx 1.2586520225 \qquad x_3 \approx 2.26703509836$$

b. Al utilizar la gráfica de f (figura T4), observemos que $x_1 \approx -0.5$, $x_2 \approx 1$ y $x_3 \approx 2$. Al utilizar la función para determinar las raíces de una ecuación en la calculadora graficadora, y estos valores de x como suposiciones iniciales, determinamos

$$x_1 \approx -0.5256871209 \qquad x_2 \approx 1.2586520225 \qquad x_3 \approx 2.2670350984$$ ■

Nota La función para resolver ecuaciones polinomiales en una calculadora graficadora resolverá una ecuación polinomial $f(x) = 0$, donde f es una función polinomial. La función para encontrar las raíces de un polinomio, sin embargo, resolverá las ecuaciones $f(x) = 0$ aún si f no es un polinomio. ■

EJEMPLO DE APLICACIÓN 3 Televisión en teléfonos celulares
El número de personas que ven televisión en celulares (en millones) se espera que sea

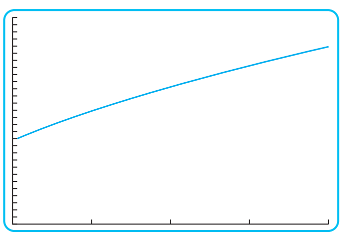
$$N(t) = 11.9\sqrt{1 + 0.91t} \qquad (0 \le t \le 4)$$

donde t se mide en años, con $t = 0$ correspondiente a 2007.

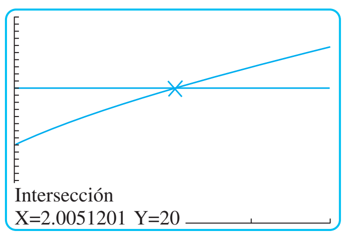
a. Utilice una calculadora graficadora para elaborar la gráfica de N.
b. Con base en este modelo, ¿cuándo excederá a 20 millones el número de personas que ven televisión en teléfonos celulares?

Solución

a. La grafica de N en la ventana $[0, 4]\times[0, 30]$ se muestra en la figura T5a.
b. Al utilizar la función para determinar la intersección de la gráfica de $y_1 = N(t)$ y $y_2 = 20$ determinamos $t \approx 2.005$ (vea la figura T5b). Así que el número de personas que ven televisión en teléfonos celulares primero excederá 20 millones a principios de enero de 2009.



(a) La gráfica de N en la ventana de visualización es de $[0, 4] \times [0, 30]$.



(b) La gráfica muestra la intersección de $y_1 = N(t)$ y $y_2 = 20$ en la T1 83/84. ■

FIGURA **T5**

EJERCICIOS CON TECNOLOGÍA

En los ejercicios 1-4 utilice el método del ejemplo 1 para analizar la función (*Nota:* sus respuestas *no* serán únicas).

1. $f(x) = 4x^3 - 4x^2 + x + 10$
2. $f(x) = x^3 + 2x^2 + x - 12$
3. $f(x) = \frac{1}{2}x^4 + x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 10$
4. $f(x) = 2.25x^4 - 4x^3 + 2x^2 + 2$

En los ejercicios 5-8, determine las intersecciones en *x* de la grafica de *f*. Dé respuestas redondeando a cuatro decimales.

5. $f(x) = 0.2x^3 - 1.2x^2 + 0.8x + 2.1$
6. $f(x) = -0.2x^4 + 0.8x^3 - 2.1x + 1.2$
7. $f(x) = 2x^2 - \sqrt{x + 1} - 3$
8. $f(x) = x - \sqrt{1 - x^2}$
9. $f(x) = e^x - 2x - 2$
10. $f(x) = \text{en}(1 + x^2) + 2x - 3$

11. **CONTAMINACIÓN DEL AIRE** El nivel de ozono, un gas invisible que irrita y perjudica la respiración, presente en la atmósfera en un cierto día de junio en la ciudad de Riverside es aproximado por

$$S(t) = 1.0974t^3 - 0.0915t^4 \qquad (0 \leq t \leq 11)$$

donde $S(t)$ es la medida del índice estándar de contaminación (PSI) y t se mide en horas, con $t = 0$ correspondiente a las 7 a.m. Trace la gráfica de S e interprete sus resultados.

Fuente: Los Angeles Times

12. **ITINERARIO DE VUELO DE UN AVIÓN** La función

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ -0.0411523x^3 + 0.679012x^2 & \\ \qquad -1.23457x + 0.596708 & \text{si } 1 \leq x < 10 \\ 15 & \text{si } 10 \leq x \leq 11 \end{cases}$$

donde ambas x y $f(x)$ son medidas en unidades de 1,000 pies, describa el itinerario del vuelo de un avión despegando desde el punto de origen hasta su ascenso a una altitud de 15,000 pies. Trace la gráfica de f para visualizar la trayectoria del avión.

10.4 Optimización I

Extremos absolutos

La gráfica de la función f en la figura 59 muestra la antigüedad promedio de automóviles en circulación en Estados Unidos desde principios de 1946 ($t = 0$) hasta principios de 2002 ($t = 56$). Observe que el promedio de antigüedad más alto en los automóviles en circulación durante este periodo es $5\frac{1}{2}$ años. El número 9, el valor más grande de $f(t)$ para todos los valores de t en el intervalo [0, 56] (el dominio de f, se conoce como *valor*

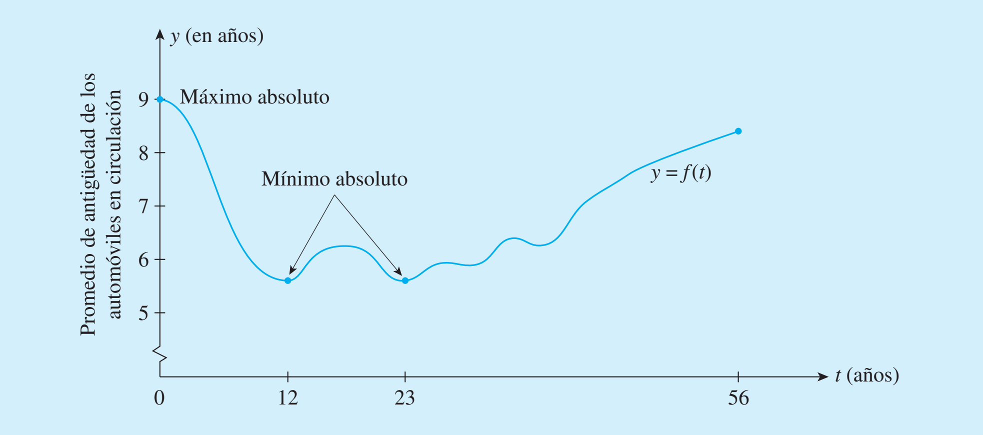


FIGURA 59
$f(t)$ da la antigüedad promedio de los automóviles en circulación en el año t, dentro [0, 56].

Fuente: American Automobile Association *máximo absoluto de f* en ese intervalo. El número $5\frac{1}{2}$, el valor más pequeño de $f(t)$ para todos los valores de t en [0, 56], se conoce como *valor mínimo absoluto de f* en ese intervalo. Observe también que el valor mínimo absoluto de f es alcanzado en el punto extremo $t = 0$ del intervalo, mientras que el valor mínimo absoluto de f es alcanzado en los puntos $t = 12$ (que corresponde a 1958) y $t = 23$ (corresponden a 1969), que está situado entre el intervalo (0, 56).

(¡A propósito, es interesante observar que 1946 marcó el primer año de paz seguido de la Segunda Guerra Mundial, y los dos años, 1958 y 1969, marcaron el final de dos periodos de prosperidad en la historia reciente de Estados Unidos!)

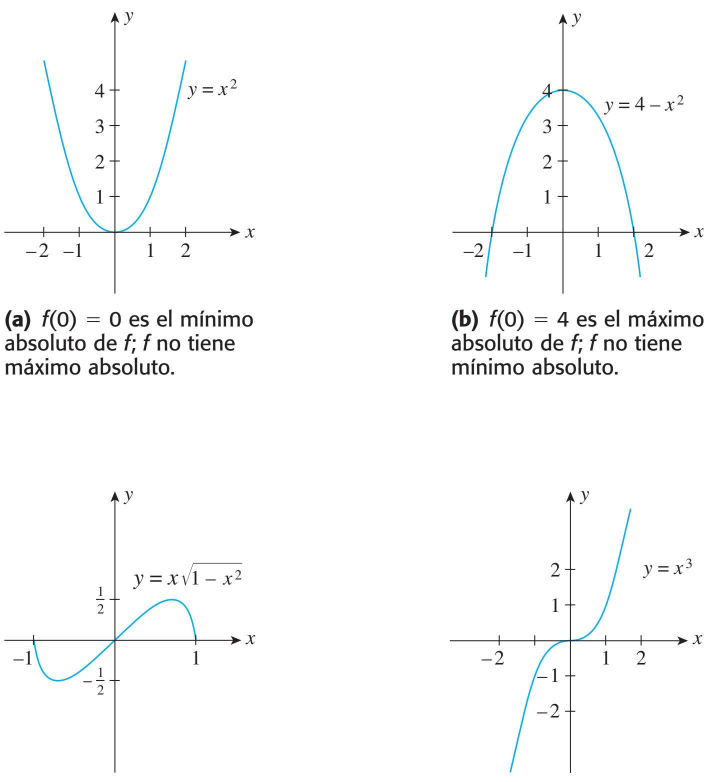
Una definición precisa de los **extremos absolutos** (máximo o mínimo absoluto) de una función es la siguiente.

Los extremos absolutos de una función *f*

Si $f(x) \leq f(c)$ para toda x en el domino de f, entonces $f(c)$ se llama **valor máximo absoluto** de f.

Si $f(x) \geq f(c)$ para toda x en el dominio de $f(c)$ se llama **valor mínimo absoluto** de f.

La figura 60 muestra las gráficas de varias funciones y proporciona, si existen, los valores máximo y mínimo absolutos de cada función.



(a) $f(0) = 0$ es el mínimo absoluto de f; f no tiene máximo absoluto.

(b) $f(0) = 4$ es el máximo absoluto de f; f no tiene mínimo absoluto.

(c) $f(\sqrt{2}/2) = 1/2$ es el máximo absoluto de f; $f(-\sqrt{2}/2) = -1/2$ es el mínimo absoluto de f.

(d) f no tiene extremos absolutos.

FIGURA **60**

Extremos absolutos en un intervalo cerrado

Como los ejemplos mostrados antes, una función continua definida en intervalos arbitrarios no siempre tiene un máximo o un mínimo absoluto. Pero un caso importante muy a menudo surge de las aplicaciones prácticas ambos, tanto el máximo como el mínimo absolutos de una función está garantizado que existan. Esto sucede cuando una función continua está definida en un intervalo *cerrado*. Se expone este resultado importante en forma de teorema, cuya prueba se omitirá.

TEOREMA 3

Si una función f es continua en un intervalo cerrado $[a, b]$, entonces f tiene ambos, el valor máximo y el valor mínimo absolutos en $[a, b]$.

Observe que si un extremo absoluto de una función continua f se presenta en un punto dentro de un intervalo abierto (a, b), entonces éste deberá ser un extremo relativo de f y, por tanto, su coordenada x deberá ser un valor crítico de f. De lo contrario, el extremo absoluto de f deberá ocurrir en uno o ambos puntos extremos del intervalo $[a, b]$. Una situación típica se muestra en la figura 61.

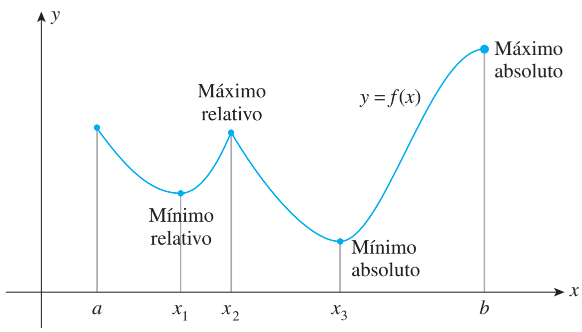


FIGURA **61**
El mínimo relativo de f en x_3 es el mínimo absoluto de f. El punto extremo derecho de b en el intervalo $[a, b]$ determina a un valor máximo absoluto $f(b)$ en f.

Aquí, x_1, x_2 y x_3 son valores críticos de f. El mínimo absoluto de f se presenta en x_3 se encuentra bajo el intervalo abierto (a, b) y es un valor crítico de f. El máximo absoluto de f se presenta en b, en el punto extremo. Esta observación sugiere el siguiente procedimiento para determinar los extremos absolutos de una función continua en un intervalo cerrado.

Determinación de los extremos absolutos de f en un intervalo cerrado

1. Determine los valores críticos de f que se encuentran en (a, b).
2. Calcule el valor de f en cada valor crítico del paso 1 y calcular $f(a)$ y $f(b)$.
3. Los valores máximo absoluto y mínimo absoluto de f corresponderán a los números mayores y menores, respectivamente, del paso 2.

EJEMPLO 1 Determine los extremos absolutos de la función $F(x) = x^2$ definida en el intervalo $[-1, 2]$.

Solución La función F es continua en el intervalo cerrado $[-1, 2]$ y diferenciable en el intervalo abierto $(-1, 2)$. La derivada de F es

$$F'(x) = 2x$$

así que 0 es el único valor crítico de F. Después, evalúe $F(x)$ en $x = -1$, $x = 0$ y $x = 2$. Por tanto,

$$F(-1) = 1 \qquad F(0) = 0 \qquad F(2) = 4$$

Se entiende que 0 es el valor mínimo absoluto de F y 4 es el valor máximo absoluto de F. La gráfica de F, en la figura 62, confirma nuestros resultados. ■

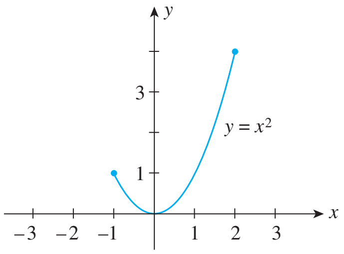


FIGURA **62**
F tiene un valor mínimo absoluto de 0 y un valor máximo absoluto de 4.

EJEMPLO 2 Determine el valor extremo absoluto de la función

$$f(x) = x^3 - 2x^2 - 4x + 4$$

definido en el intervalo [0, 3].

Solución La función f es continua en el intervalo cerrado [0, 3] y diferenciable en el intervalo abierto (0, 3). La derivada de f es

$$f'(x) = 3x^2 - 4x - 4 = (3x + 2)(x - 2)$$

y es igual a cero cuando $x = -\frac{2}{3}$ y $x = 2$. Ya que $x = -\frac{2}{3}$ se encuentra fuera del intervalo [0, 3], éste se deja para deliberar más adelante, y $x = 2$ se ve como el único valor crítico de f. Después evalúe $f(x)$ en el valor crítico de f, así como el punto extremo de f, tenemos

$$f(0) = 4 \qquad f(2) = -4 \qquad f(3) = 1$$

De estos resultados, concluimos que, -4 es el valor mínimo absoluto de f y 4 es el valor máximo absoluto de f. La gráfica de f, que aparece en la figura 63, confirma nuestros resultados. Observe que el máximo absoluto de f se presenta en el punto extremo $x = 0$ del intervalo [0, 3], mientras que el mínimo absoluto de f se presenta en $x = 2$, el cual pertenece al intervalo (0, 3). ■

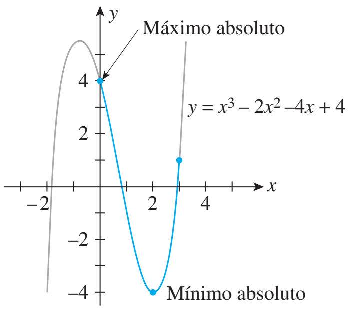


FIGURA **63**
f tiene un valor máximo absoluto de 4 y un valor mínimo absoluto de -4.

Exploración con TECNOLOGÍA

Sea $f(x) = x^3 - 2x^2 - 4x + 4$. (Ésta es la función del ejemplo 2.)

1. Use la calculadora graficadora para elaborar la gráfica de f, utilizando la ventana de visualización $[0, 3] \times [-5, 5]$. Utilice **TRACE** para determinar los extremos absolutos de f en el intervalo [0, 3] y así verificar los resultados obtenidos de forma analítica en el ejemplo 2.
2. Trace la grafica de f, utilizando la ventana de visualización $[-2, 1] \times [-5, 6]$. Use **ZOOM** y **TRACE** para determinar los extremos absolutos de f sobre el intervalo $[-2, 1]$. Verifique analíticamente sus resultados.

VIDEO

EJEMPLO 3 Determine los valores máximo absoluto y mínimo absoluto de la función $f(x) = x^{2/3}$ sobre el intervalo $[-1, 8]$.

Solución La derivada de f es

$$f'(x) = \frac{2}{3}x^{-1/3} = \frac{2}{3x^{1/3}}$$

Observe que f' no está definida en $x = 0$, es continua en todas las demás partes, y no es igual a cero para toda x. Sin embargo, es el único valor crítico de f. Evalúe $f(x)$ en $x = -1$, 0 y 8, obtenemos

$$f(-1) = 1 \qquad f(0) = 0 \qquad f(8) = 4$$

Concluimos que el valor mínimo absoluto de f es 0, alcanzado en $x = 0$, y el valor máximo absoluto de f es 4, alcanzado en $x = 8$ (figura 64). ■

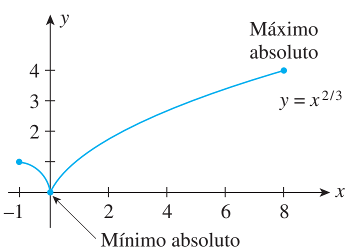


FIGURA **64**
f tiene un valor mínimo absoluto de $f(0) = 0$ y un valor máximo absoluto de $f(8) = 4$.

Numerosas aplicaciones del mundo real exigen determinar el valor máximo absoluto o el valor mínimo absoluto de una función dada. Por ejemplo, a la gerencia le interesa determinar qué nivel de fabricación rendirá la máxima utilidad para una empresa; un granjero está interesado en determinar la cantidad correcta de fertilizante para maximizar la cosecha; un médico quiere determinar la máxima concentración de un fármaco en el cuerpo de un paciente y el tiempo en que ocurre; y a un ingeniero le interesa encontrar la dimensión de un contenedor con una forma y volumen específicos que puede construirse a un costo mínimo.

VIDEO

EJEMPLO DE APLICACIÓN 4 **Maximización de la utilidad** La utilidad total de Acrosonic (en dólares) de la fabricación y venta de x unidades de su modelo F de altavoces está dada por

$$P(x) = -0.02x^2 + 300x - 200{,}000 \qquad (0 \le x \le 20{,}000)$$

¿Cuántos altavoces deberá fabricar Acrosonic para maximizar sus utilidades?

Solución Para determinar el máximo absoluto de P en [0, 20,000], primero se determinan los puntos críticos de P en el intervalo (0, 20,000). Al hacerlo, calcule

$$P'(x) = -0.04x + 300$$

Al resolver la ecuación $P'(x) = 0$ da $x = 7{,}500$. Después, $P(x)$ en $= 7{,}500$ así como los puntos extremos $x = 0$ y $x = 20{,}000$ en el intervalo [0, 20,000], tenemos

$$P(0) = -200{,}000$$
$$P(7{,}500) = 925{,}000$$
$$P(20{,}000) = -2{,}200{,}000$$

De estos cálculos, observe que el valor máximo absoluto de la función P es 925,000. Así que por fabricar 7,500 unidades, Acrosonic tendrá una utilidad máxima de $925,000. La gráfica de P está trazada en la figura 65.

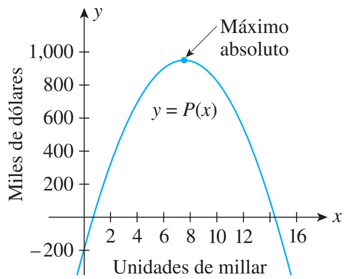


FIGURA **65**
P tiene un máximo absoluto en (7,500, 925,000).

Explore y analice

Recuerde que la función de utilidad total de P está definida como $P(x) = R(x) - C(x)$, donde R es la función de ingresos, C es la función del costo total y x es el número de unidades de un producto fabricado y vendido (asuma que todas las derivadas existen).

1. Muestre que en el nivel de fabricación x_0 el rendimiento de la utilidad máxima para la empresa, las siguientes dos condiciones son satisfactorias:

$$R'(x_0) = C'(x_0) \quad \text{y} \quad R''(x_0) < C''(x_0)$$

2. Interprete las dos condiciones del punto 1 en términos económicos y por qué tienen sentido.

EJEMPLO DE APLICACIÓN 5 **Contracción de la tráquea al toser** Cuando una persona tose, la tráquea se contrae, permitiendo al aire salir a una velocidad máxima. Esto puede demostrar que al toser la velocidad v del aire está dada por la función

$$v = f(r) = kr^2(R - r)$$

donde r es el radio de la tráquea (en centímetros) cuando se tose, R es el radio normal de la tráquea (en centímetros) y k es una constante positiva que depende de la longitud de la tráquea. Determine el radio r por el que la velocidad del aire es mayor.

Solución Para determinar el máximo absoluto de f en $[0, R]$, encuentre primero los valores críticos de f en el intervalo $(0, R)$. Calculemos

$$f'(r) = 2kr(R - r) - kr^2 \qquad \text{Utilice la regla del producto.}$$

$$= -3kr^2 + 2kRr = kr(-3r + 2R)$$

Al establecer $f'(r) = 0$ da $r = 0$ o $r = \frac{2}{3}R$, y así $\frac{2}{3}R$ es el único valor crítico de f ($r = 0$ está en un punto extremo). Al evaluar $f(r)$ en $r = \frac{2}{3}R$, así como los puntos extremos $r = 0$ y $r = R$, obtenemos

$$f(0) = 0$$

$$f\left(\frac{2}{3}R\right) = \frac{4k}{27}R^3$$

$$f(R) = 0$$

de los cuales deduzca que la velocidad del aire es mayor cuando el radio de la tráquea contraída es $\frac{2}{3}R$, esto es, cuando el radio se contrae aproximadamente 33%. La gráfica de la función f se muestra en la figura 66. ■

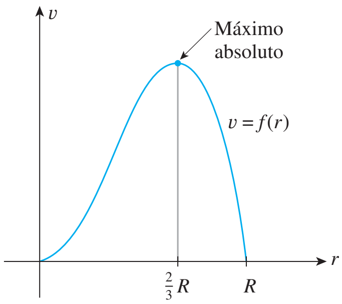


FIGURA 66
La velocidad del aire es mayor cuando el radio de la tráquea se contrae $\frac{2}{3}R$.

Explore y analice

Demuestre que si una función de costo $C(x)$ es cóncava hacia arriba $[C''(x) > 0]$, entonces el nivel de fabricación que resultará en el menor costo de fabricación promedio se presenta cuando

$$\overline{C}(x) = C'(x)$$

esto es, cuando el costo promedio $\overline{C}(x)$ es igual al costo marginal $C'(x)$.

Sugerencia:

1. Muestre que

$$\overline{C}'(x) = \frac{xC'(x) - C(x)}{x^2}$$

así que el valor crítico de una función $\overline{C}$ se presenta cuando

$$xC'(x) - C(x) = 0$$

2. Demuestre que a un valor crítico de $\overline{C}$

$$\overline{C}''(x) = \frac{C''(x)}{x}$$

Utilice la prueba de la segunda derivada para llegar a la conclusión deseada.

EJEMPLO DE APLICACIÓN 6 Minimización del costo promedio La función del costo promedio diario (en dólares por unidad) de Elektra Electronics está dada por

$$\overline{C}(x) = 0.0001x^2 - 0.08x + 40 + \frac{5,000}{x} \qquad (x > 0)$$

donde x representa los números de las calculadoras graficadoras que Elektra fabrica. Demuestre que un nivel de fabricación de 500 unidades diarias es el costo mínimo promedio para la empresa.

Solución El dominio de la función $\overline{C}$ es el intervalo $(0, \infty)$, que no es cerrado. Para resolver el problema, recurrimos al método gráfico. Al utilizar las técnicas para las gráficas de la sección pasada, trazamos la gráfica de $\overline{C}$ (figura 67).

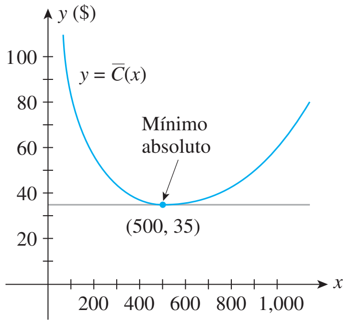


FIGURA **67**
El costo mínimo promedio es $35 por unidad.

Ahora,

$$\overline{C}'(x) = 0.0002x - 0.08 - \frac{5{,}000}{x^2}$$

Al sustituir los valores dados de x, 500, en $\overline{C}'(x)$ da $\overline{C}'(500) = 0$, así que 500 es un valor crítico de $\overline{C}$. Después,

$$\overline{C}''(x) = 0.0002 + \frac{10{,}000}{x^3}$$

Así,

$$\overline{C}''(500) = 0.0002 + \frac{10{,}000}{(500)^3} > 0$$

y por la prueba de la segunda derivada, un mínimo relativo de la función $\overline{C}$ se presenta en 500. Además, $\overline{C}''(x) > 0$ para $x > 0$, lo que denota que la gráfica de $\overline{C}$ es cóncava hacia arriba en todas partes, así que el mínimo relativo de $\overline{C}$ debe ser el mínimo absoluto de $\overline{C}$. El costo promedio mínimo está dado por

$$\begin{aligned}\overline{C}\,(500) &= 0.0001(500)^2 - 0.08(500) + 40 + \frac{5{,}000}{500}\\ &= 35\end{aligned}$$

o $35 por unidad. ■

Exploración con TECNOLOGÍA

Refiérase a la sección *Explore y analice* anterior y al ejemplo 6.

1. Al usar la calculadora graficadora

$$\overline{C}(x) = 0.0001x^2 - 0.08x + 40 + \frac{5{,}000}{x}$$

$$C'(x) = 0.0003x^2 - 0.16x + 40$$

al utilizar la ventana de visualización $[0, 1{,}000] \times [0, 150]$.

Nota: $C(x) = 0.0001x^3 - 0.08x^2 + 40x + 5{,}000$. (¿Por qué?)

2. Determine el punto de intersección de la gráfica de $\overline{C}$ y C' y así verifique la afirmación en la sección *Explore y analice* para el caso especial estudiado en el ejemplo 6.

El ejemplo final incluye determinar el máximo absoluto de una función exponencial.

EJEMPLO DE APLICACIÓN 7 Precio óptimo de mercado El valor actual del precio de mercado del corporativo de oficinas Blakely está dado por

$$P(t) = 300{,}000e^{-0.09t+\sqrt{t}/2} \qquad (0 \le t \le 10)$$

Determine el valor óptimo actual del precio de mercado del edificio.

Solución Para determinar el valor máximo de P sobre [0, 10], calculamos

$$P'(t) = 300{,}000e^{-0.09t+\sqrt{t}/2}\frac{d}{dt}\left(-0.09t + \frac{1}{2}t^{1/2}\right)$$
$$= 300{,}000e^{-0.09t+\sqrt{t}/2}\left(-0.09t + \frac{1}{4}t^{-1/2}\right)$$

Al hacer $P'(t) = 0$ da

$$-0.09 + \frac{1}{4t^{1/2}} = 0$$

puesto que, $e^{-0.09t+\sqrt{t}/2}$ nunca es cero por cualquier valor de t. Al resolver esta ecuación, determinamos

$$\frac{1}{4t^{1/2}} = 0.09$$
$$t^{1/2} = \frac{1}{4(0.09)}$$
$$= \frac{1}{0.36}$$
$$t = \left(\frac{1}{0.36}\right)^2 \approx 7.72$$

el único valor crítico de la función P. Finalmente, al evaluar $P(t)$ en un valor crítico, así como los puntos extremos de [0, 10], tenemos

t	0	7.72	10
***P*(*t*)**	300,000	600,779	592,838

Concluimos, por consiguiente, que el valor actual óptimo del precio de la propiedad en el mercado es de \$600,779 y que éste ocurrirá en 7.72 años desde ahora. ■

10.4 Ejercicios de autoevaluación

1. Deje $f(x) = x - 2\sqrt{x}$
   a. Determine los extremos absolutos de f en el intervalo [0, 9].
   b. Determine los extremos absolutos de f.
2. Determine los extremos absolutos de $f(x) = 3x^4 + 4x^3 + 1$ en $[-2, 1]$.
3. La tasa de operación (expresada como porcentaje) de fábricas, minas y servicios en cierta región del país en el día t de 2008 está dada por la función

$$f(t) = 80 + \frac{1{,}200t}{t^2 + 40{,}000} \qquad (0 \le t \le 250)$$

¿En cuáles de los primeros 250 días de 2008 tuvo el más alto promedio en capacidad de operación de manufactura?

Las soluciones de los ejercicios de autoevaluación 10.4 se encuentran en la página 724.

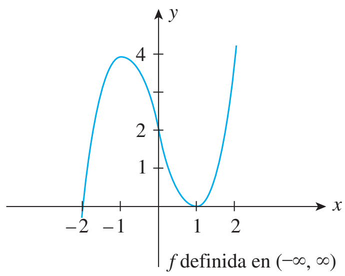
10.4 Preguntas de concepto

1. Explique los siguientes términos: (a) máximo absoluto y (b) mínimo absoluto.
2. Describa el procedimiento para determinar los extremos absolutos de una función continua en un intervalo cerrado.

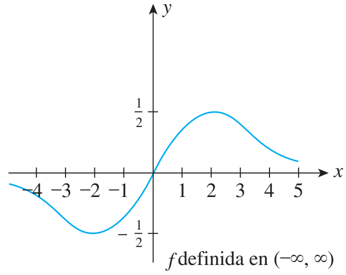
10.4 Ejercicios

En los ejercicios 1-8, usted cuenta con la gráfica de la función *f* definida en el intervalo indicado. Determine, si existen, el máximo y el mínimo absolutos de *f*.

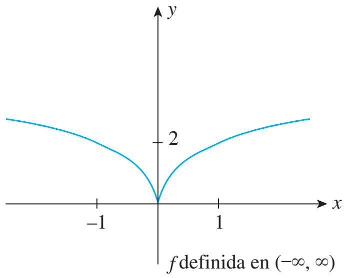
1.



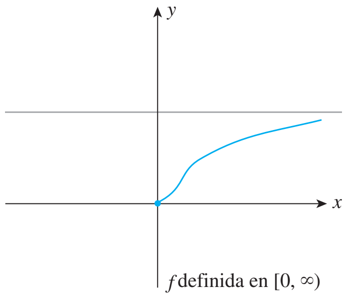
2.



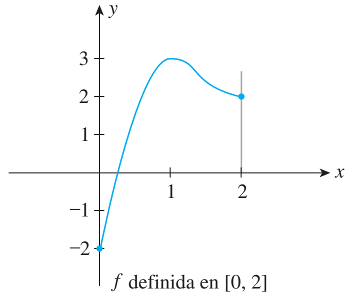
3.



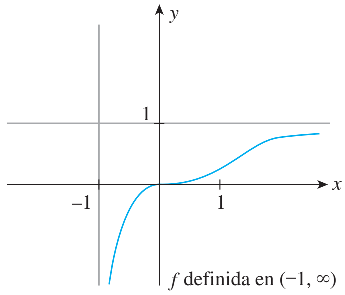
4.



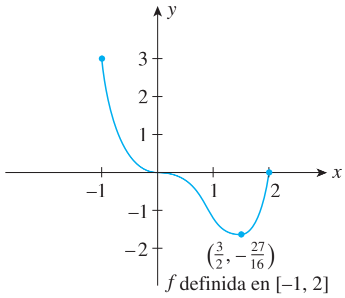
5.



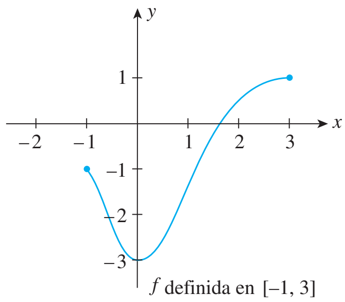
6.



7.



8.



En los ejercicios 9-40, determine los valores máximo y mínimo absolutos, si hay alguno, de cada función.

9. $f(x) = 2x^2 + 3x - 4$

10. $g(x) = -x^2 + 4x + 3$

11. $h(x) = x^{1/3}$

12. $f(x) = x^{2/3}$

13. $f(x) = \dfrac{1}{1 + x^2}$

14. $f(x) = \dfrac{x}{1 + x^2}$

15. $f(x) = x^2 - 2x - 3$ en $[-2, 3]$

16. $g(x) = x^2 - 2x - 3$ en $[0, 4]$

17. $f(x) = -x^2 + 4x + 6$ en $[0, 5]$

18. $f(x) = -x^2 + 4x + 6$ en $[3, 6]$

19. $f(x) = x^3 + 3x^2 - 1$ en $[-3, 2]$

20. $g(x) = x^3 + 3x^2 - 1$ en $[-3, 1]$

21. $g(x) = 3x^4 + 4x^3$ en $[-2, 1]$

22. $f(x) = \dfrac{1}{2}x^4 - \dfrac{2}{3}x^3 - 2x^2 + 3$ en $[-2, 3]$

23. $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$ en $[2, 4]$ **24.** $g(t) = \dfrac{t}{t-1}$ en $[2, 4]$

25. $f(x) = 4x + \dfrac{1}{x}$ en $[1, 3]$ **26.** $f(x) = 9x - \dfrac{1}{x}$ en $[1, 3]$

27. $f(x) = \dfrac{1}{2}x^2 - 2\sqrt{x}$ en $[0, 3]$

28. $g(x) = \dfrac{1}{8}x^2 - 4\sqrt{x}$ en $[0, 9]$

29. $f(x) = \dfrac{1}{x}$ en $(0, \infty)$ **30.** $g(x) = \dfrac{1}{x+1}$ en $(0, \infty)$

31. $f(x) = 3x^{2/3} - 2x$ en $[0, 3]$

32. $g(x) = x^2 + 2x^{2/3}$ en $[-2, 2]$

33. $f(x) = x^{2/3}(x^2 - 4)$ en $[-1, 2]$

34. $f(x) = x^{2/3}(x^2 - 4)$ en $[-1, 3]$

35. $f(x) = e^{-x^2}$ en $[-1, 1]$

36. $h(x) = e^{x^2-4}$ en $[-2, 2]$

37. $g(x) = (2x - 1)e^{-x}$ en $[0, 4]$

38. $f(x) = xe^{-x^2}$ en $[0, 2]$ **39.** $f(x) = x - \ln x$ en $[\frac{1}{2}, 3]$

40. $g(x) = \dfrac{x}{\ln x}$ en $[2, 5]$

41. Una piedra es arrojada desde el techo de un edificio de 80 pies. La altura (en pies) de la piedra en cualquier tiempo t (en segundos), medida desde el suelo, está dada por

$$h(t) = -16t^2 + 64t + 80$$

¿Cuál es la altura máxima que alcanza la piedra?

42. **Utilidad máxima** Un complejo de apartamentos, en el oeste de Lynbrook, cuenta con 100 unidades de dos recámaras. La utilidad mensual obtenida (en dólares) del alquiler de x apartamentos está dada por

$$P(x) = -10x^2 + 1{,}760x - 50{,}000$$

Para maximizar la utilidad mensual del alquiler, ¿cuántas unidades deberían alquilarse? ¿Cuál es la utilidad máxima mensual obtenida?

43. **Personas de la tercera edad en la fuerza de trabajo** El porcentaje de hombres, de 65 años de edad y mayores, en la fuerza de trabajo a partir de 1950 ($t = 0$) hasta 2000 ($t = 50$) es aproximado por

$$P(t) = 0.0135t^2 - 1.126t + 41.2 \qquad (0 \le t \le 50)$$

Demuestre que el porcentaje de hombres, de 65 años de edad y mayores, en la fuerza de trabajo en el periodo considerado fue el más bajo a mediados de septiembre de 1991. ¿Cuál es el porcentaje?

Fuente: U.S. Census Bureau

44. **El vuelo de un cohete** La altitud (en pies) que alcanza un cohete modelo a los t seg de vuelo está dada por la función

$$h(t) = -\frac{1}{3}t^3 + 4t^2 + 20t + 2 \qquad (t \ge 0)$$

Determine la altitud máxima alcanzada por el cohete.

45. **Mujeres autoempleadas dentro de la fuerza de trabajo** Los datos muestran que el número de mujeres autoempleadas y de tiempo completo que no trabajan en el ramo agrícola puede aproximarse a

$$N(t) = 0.81t - 1.14\sqrt{t} + 1.53 \qquad (0 \le t \le 6)$$

donde $N(t)$ se mide en millones y t en intervalos de 5 años, con $t = 0$ correspondiente a principios de 1963. Determine los extremos absolutos de la función N en el intervalo $[0, 6]$. Interprete sus resultados.

Fuente: U.S. Department of Labor

46. **Velocidad promedio de un vehículo** La velocidad promedio de un vehículo en un tramo de la ruta 134 entre las 6 y 10 a.m. en un día normal de la semana se aproxima por la función

$$f(t) = 20t - 40\sqrt{t} + 50 \qquad (0 \le t \le 4)$$

donde $f(t)$ se mide en millas por hora y t en horas, con $t = 0$ correspondiente a las 6 a.m. ¿En qué momento del traslado matutino el tráfico se mueve a la tasa más baja? ¿Cuál es la velocidad promedio de un vehículo en ese momento?

47. **Maximización de utilidades** La gerencia de Trappee and Sons, fabricante de la famosa salsa picante TexaPep, estima que sus utilidades (en dólares) de la fabricación y venta diaria de x cajas (cada caja consta de 24 botellas) de la salsa picante está dada por

$$P(x) = -0.000002x^3 + 6x - 400$$

¿Cuál es la mayor utilidad posible que puede obetener Trappee en 1 día?

48. **Maximización de utilidades** La cantidad requerida por mes de la grabación por Walter Serkin de la *Sonata Claro de Luna* de Beethoven, fabricada por Phonola Record Industries, está relacionada con el precio por disco compacto. La ecuación

$$p = -0.00042x + 6 \qquad (0 \le x \le 12{,}000)$$

donde p indica el precio unitario en dólares y x el número demandado de discos, relaciona la demanda con el precio. El costo total mensual (en dólares) para la impresión y empaque de x copias de este disco clásico está dado por

$$C(x) = 600 + 2x - 0.00002x^2 \qquad (0 \le x \le 20{,}000)$$

¿Cuántas copias debería fabricar Phonola mensualmente para maximizar sus utilidades?

Sugerencia: el ingreso es $R(x) = px$, y la utilidad $P(x) = R(x) - C(x)$.

49. **Maximización de utilidades** Un fabricante de raquetas de tenis determina que el costo total $C(x)$ (en dólares) de fabricación de x raquetas por día está dado por $C(x) = 400 + 4x + 0.0001x^2$. Cada raqueta puede venderse a un precio de p dólares, donde p está relacionada con x por la ecuación de demanda $p = 10 - 0.0004x$. Si todas las raquetas fabricadas pueden venderse, determine el nivel de fabricación diario que producirá utilidades máximas para el fabricante.

50. Maximización de utilidades La demanda semanal para la consola de televisión a color marca Pulsar de 25 pulgadas está dada por la ecuación de la demanda

$$p = -0.05x + 600 \qquad (0 \le x \le 12{,}000)$$

donde p indica el precio unitario al mayoreo en dólares y x indica la cantidad demandada. La función del costo total semanal asociada con la fabricación de estos aparatos está dada por

$$C(x) = 0.000002x^3 - 0.03x^2 + 400x + 80{,}000$$

donde $C(x)$ indica el costo total en que se incurre al fabricar x aparatos. Determine el nivel de fabricación que producirá utilidades máximas para el fabricante.
Sugerencia: utilice la fórmula cuadrática.

51. Maximización de utilidades Una división de Chapman Corporation fabrica un localizador. El costo semanal establecido por la división es \$20,000, y el costo variable por fabricar x localizadores por semana es

$$V(x) = 0.000001x^3 - 0.01x^2 + 50x$$

dólares. La empresa obtiene ingresos de

$$R(x) = -0.02x^2 + 150x \qquad (0 \le x \le 7{,}500)$$

dólares de la venta de x localizadores por semana. Determine el nivel de fabricación que producirá utilidades máximas para el fabricante.
Sugerencia: utilice la fórmula cuadrática.

52. Minimización del costo promedio Suponga que la función de costo total para la fabricación de un determinado producto es $C(x) = 0.2(0.01x^2 + 120)$ dólares, donde x representa el número de unidades fabricadas. Determine el nivel de fabricación que minimizará el costo promedio.

53. Minimización de los costos de fabricación El costo total mensual (en dólares) determinado por Cannon Precision Instruments para la fabricación de x unidades de la cámara modelo M1 está dado por la función

$$C(x) = 0.0025x^2 + 80x + 10{,}000$$

a. Determine la función del costo promedio $\overline{C}$.
b. Determine el nivel de fabricación que dé como resultado el costo promedio de producción mínimo.
c. Determine el nivel de producción al cual el costo promedio es igual al costo marginal.
d. Compare los resultados del inciso (c) con los del inciso (b).

54. Minimización de los costos de producción El costo total diario (en dólares) determinado por Trappee and Sons para fabricar x cajas de salsa picante TexaPep está dado por la función

$$C(x) = 0.000002x^3 + 5x + 400$$

Responda las preguntas representadas del ejercicio 53 utilizando esta función.

55. Maximización de los ingresos Suponga que la cantidad demandada por semana de cierto vestido está relacionada con el precio unitario p por la ecuación de demanda $p = \sqrt{800 - x}$ donde p está en dólares y x es el número de vestidos fabricados. Para maximizar los ingresos, ¿cuántos vestidos deberían fabricarse y venderse cada semana?
Sugerencia: $R(x) = px$.

56. Maximización de los ingresos La cantidad demandada por mes de relojes de pulsera está relacionada con el precio unitario por la ecuación

$$p = \frac{50}{0.01x^2 + 1} \qquad (0 \le x \le 20)$$

donde p se mide en dólares y x en unidades de millar. Para obtener un máximo de ingresos, ¿cuántos relojes deberán venderse?

57. Tiempo de venta óptimo El valor presente de una propiedad frente al mar adquirida por un inversionista está dado por la función

$$P(t) = 80{,}000e^{\sqrt{t/2} - 0.09t} \qquad (0 \le t \le 8)$$

en donde $P(t)$ se mide en dólares y t es el tiempo en años desde el presente. Determine el tiempo óptimo (basado en el valor presente) para el inversionista de vender la propiedad. ¿Cuál es el valor presente óptimo de la propiedad?

58. Producción máxima de petróleo Se ha estimado que la producción total de petróleo de un cierto pozo está dada por

$$T(t) = -1{,}000(t + 10)e^{-0.1t} + 10{,}000$$

miles de barriles t año después de que la producción ha comenzado. Determine el año cuando el pozo petrolero producirá a su máxima capacidad.

59. Contenido de oxígeno en un estanque Cuando los residuos orgánicos se vierten en un estanque, el proceso de oxidación que se produce reduce el contenido de oxígeno en el estanque. Sin embargo, la naturaleza restaurará con el tiempo el contenido de oxígeno a su nivel natural. Suponga que el contenido de oxígeno t días después de que los residuos orgánicos han sido arrojados al estanque está dado por

$$f(t) = 100\left[\frac{t^2 - 4t + 4}{t^2 + 4}\right] \qquad (0 \le t < \infty)$$

por ciento de su nivel normal.
a. ¿Cuándo el nivel de oxígeno es más bajo?
b. ¿Cuándo la tasa de regeneración de oxígeno es mayor?

60. Contaminación del aire La cantidad de dióxido de nitrógeno, un gas café que daña la respiración, presente en la atmósfera en un cierto día de mayo en la ciudad de Long Beach es aproximado por

$$A(t) = \frac{136}{1 + 0.25(t - 4.5)^2} + 28 \qquad (0 \le t \le 11)$$

donde $a(t)$ se mide por el índice estándar de contaminación (PSI) y t se mide en horas, con $t = 0$ correspondiente a las 7 a.m. Determine la hora del día cuando la contaminación está a su mayor nivel.

61. Maximización de los ingresos El ingreso promedio está definido como la función

$$\overline{R}(x) = \frac{R(x)}{x} \qquad (x > 0)$$

Demuestre que si una función de ingresos $R(x)$ es cóncava hacia abajo $[R''(x) < 0]$, entonces el nivel de ventas resultará en el promedio de ingresos mayor cuando $\overline{R}(x) = R'(x)$.

62. **Velocidad de la sangre** Según una ley formulada por el médico del siglo XIX Jean Louis Marie Poiseuille, la velocidad (en centímetros/segundo) de la sangre r cm del eje central de la arteria está dada por

$$v(r) = k(R^2 - r^2)$$

donde k es una constante y R es el radio de la arteria. Muestre que la velocidad de la sangre es mayor a lo largo del eje central.

63. **El PIB de un país en vías de desarrollo** El producto interno bruto (PIB) de un país en vías de desarrollo desde 2000 a 2008 es aproximado por la función

$$G(t) = -0.2t^3 + 2.4t^2 + 60 \qquad (0 \leq t \leq 8)$$

donde $G(t)$ se mide en miles de millones de dólares y $t = 0$ correspondiente a 2000. Demuestre que la tasa de crecimiento del PIB de un país fue máxima en 2004.

64. **Índices de criminalidad** El mayor índice de delitos cometidos en la ciudad de Bronxville entre 2000 y 2007 es aproximado por la función

$$N(t) = -0.1t^3 + 1.5t^2 + 100 \qquad (0 \leq t \leq 7)$$

donde $N(t)$ indica el número de crímenes cometidos al año t ($t = 0$ correspondiente a 2000). Los ciudadanos de Bronxville enfurecidos por el aumento drástico del índice de criminalidad, con la ayuda de la policía local, organizaron grupos de "Vigilancia vecinal del crimen" a principios de 2004 para luchar en contra de esta amenaza. Demuestre que el crecimiento del índice de criminalidad fue máximo en 2005, dando credibilidad a la afirmación de que el programa de Vigilancia vecinal del crimen está funcionando.

65. **Residentes médicos nacidos en el extranjero** El porcentaje de residentes en Estados Unidos nacidos en el extranjero, de 1910 a 2000, se aproxima por la función

$$P(t) = 0.04363t^3 - 0.267t^2 - 1.59t + 14.7 \qquad (0 \leq t \leq 9)$$

donde t se mide en décadas, con $t = 0$ correspondiente a 1910. Muestre que el porcentaje de residentes nacidos en el extranjero fue el más bajo a principios de 1970.
Sugerencia: utilice la fórmula cuadrática

Fuente: Journal of American Medical Association

66. **Crecimiento del cerebro e IQ** En un estudio dirigido por el Instituto Nacional de Salud Mental, los investigadores siguieron el desarrollo de la corteza cerebral, la parte pensante del cerebro, en 307 niños. Utilizando varias exploraciones en imágenes de resonancia magnética desde la niñez hasta la adolescencia, midieron el espesor (en milímetros) de la corteza de los niños de t años de edad con el más alto coeficiente intelectual de 121 a 149. Estos datos llevan al modelo

$$S(t) = 0.000989t^3 - 0.0486t^2 + 0.7116t + 1.46 \qquad (5 \leq t \leq 19)$$

Demuestre que la corteza cerebral de los niños con inteligencia superior alcanza un espesor máximo a la edad de 11 años.
Sugerencia: utilice la fórmula cuadrática.

Fuente: Nature

67. **Crecimiento del cerebro e IQ** Refiérase al ejercicio 66. Los investigadores en el Instituto también miden el espesor (también en milímetros) de la corteza cerebral de los niños de t años de edad, quienes fueron de inteligencia promedio. Estos datos llevaron al modelo

$$A(t) = -0.00005t^3 - 0.000826t^2 + 0.0153t + 4.55 \qquad (5 \leq t \leq 19)$$

Demuestre que la corteza cerebral de los niños con inteligencia promedio podría alcanzar un espesor máximo a la edad de 6 años.

Fuente: Nature

68. **Precios promedio de hogares** El precio promedio anual de viviendas unifamiliares en Massachusetts, entre 1990 y 2002, se aproxima por la función

$$P(t) = -0.183t^3 + 4.65t^2 - 17.3t + 200 \qquad (0 \leq t \leq 12)$$

donde $P(t)$ se mide en miles de dólares y t en años, con $t = 0$ correspondiente a 1990. ¿En qué año fue el precio promedio anual de vivienda unifamiliar más bajo en Massachussetts?
Sugerencia: utilice la fórmula cuadrática.

Fuente: Massachusetts Association of Realtors

69. **Alquiler de oficinas** Después de que la economía se suavizó, los precios del alquiler de oficinas, que estaban por las nubes en la década de 1990, comenzaron a disminuir. La función R da el precio aproximado por pie cuadrado en dólares, $R(t)$, del espacio de primera en Back Bay de Boston y el distrito financiero desde 1997 ($t = 0$) hasta 2002, donde

$$R(t) = -0.711t^3 + 3.76t^2 + 0.2t + 36.5 \qquad (0 \leq t \leq 5)$$

Demuestre que los precios del alquiler de oficinas llegaron a su máximo a mediados de 2000. ¿Cuál fue el precio más alto del alquiler de oficinas durante el periodo en cuestión?
Sugerencia: utilice la fórmula cuadrática.

Fuente: Meredith & Grew Inc./Oncor

70. **La población mundial** La población mundial se prevé que será

$$P(t) = 0.00074t^3 - 0.0704t^2 + 0.89t + 6.04 \qquad (0 \leq t \leq 10)$$

en el año t, donde t se mide en décadas, con $t = 0$ correspondiente a 2000 y $P(t)$ se mide en miles de millones.

a. Muestre que la población mundial prevista alcanzará su máximo alrededor del año 2071.
Sugerencia: utilice la fórmula cuadrática.

b. ¿Cuál será la población máxima?

Fuente: International Institute for Applied Systems Analysis

71. **Inversión en capital de riesgo** La inversión en capital de riesgo aumentó drásticamente a finales de la década de 1990, pero se detuvo antes del colapso. La inversión en capital de riesgo (miles de millones de dólares) desde 1995 ($t = 0$) hasta 2003 ($t = 8$) es aproximada por la función

$$C(t) = \begin{cases} 0.6t^2 + 2.4t + 7.6 & \text{si } 0 \leq t < 3 \\ 3t^2 + 18.8t - 63.2 & \text{si } 3 \leq t < 5 \\ -3.3167t^3 + 80.1t^2 \\ \quad - 642.583t + 1730.8025 & \text{si } 5 \leq t < 8 \end{cases}$$

a. ¿En qué año la inversión en capital de riesgo alcanzó el máximo durante el periodo en consideración?

b. ¿En qué año la inversión en capital de riesgo fue la más baja durante este periodo? ¿Cuál fue el monto de dicha inversión?

Sugerencia: encuentre los extremos absolutos de C en cada uno de los intervalos cerrados [0, 3], [3, 5] y [5, 8].

Fuentes: Venture One; Ernst & Young

72. Energía gastada por un pez Se presupone que un pez nada una distancia de L pies a una velocidad de v pies/seg respecto al agua y en contra de la corriente, gasta a una tasa de u pies/seg($u < v$) una energía total dada por

$$E(v) = \frac{aLv^3}{v - u}$$

donde E se mide en libras/pie y a es una constante. Determine la velocidad v en la que el pez nada para minimizar el gasto de energía total. (*Nota*: este resultado ha sido verificado por los biólogos.)

73. La reacción a un medicamento La fuerza de la reacción R del cuerpo humano a una dosis D a cierto medicamento está dada por

$$R = D^2\left(\frac{k}{2} - \frac{D}{3}\right)$$

donde k es una constante positiva. Muestre que la reacción máxima se alcanza a la dosis de k unidades.

74. Refiérase al ejercicio 73. Muestre que la tasa de cambio en la reacción R con respecto a la dosis D es máxima si $D=k/2$.

75. Potencia máxima de salida Suponga que la fuente de corriente en un circuito eléctrico es una batería. La potencia de salida P (en watts) obtenida si el circuito tiene una resistencia de R ohms está dada por

$$P = \frac{E^2R}{(R + r)^2}$$

donde E es la fuerza electromotriz en volts y r es la resistencia interna de la batería en ohms. Si E y r son constantes, determine el valor de R que se traducirá en la mayor potencia de salida. ¿Cuál es la potencia máxima de salida?

76. Velocidad de una ola Una ola de longitud L viaja en aguas profundas a una velocidad

$$v = k\sqrt{\frac{L}{C} + \frac{C}{L}}$$

donde k y C son constantes positivas. Determine la longitud de la ola que tiene una velocidad mínima.

77. Reacción química En una reacción química autocatalítica, el producto que se forma actúa como un catalizador de la reacción. Si Q es la cantidad del sustrato original presente inicialmente y x es la cantidad de catalizador formado, entonces la tasa de cambio de la reacción química con respecto a la cantidad de catalizador presente en la reacción es

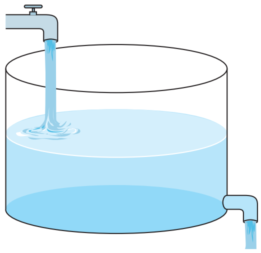
$$R(x) = kx(Q - x) \qquad (0 \leq x \leq Q)$$

donde k es una constante. Demuestre que la tasa de la reacción química es mayor en el punto cuando exactamente la mitad del sustrato original se ha transformado.

78. Un problema de mezcla Un tanque contiene inicialmente 10 galones de salmuera con 2 lb de sal. La salmuera con 1.5 lb de sal por galón entra en el tanque a una tasa de 3 gal/min, y la mezcla bien removida sale del tanque a una tasa de 4 gal/min. Puede demostrarse que la cantidad de sal en el tanque después de t minutos es x lb donde

$$x = f(t) = 1.5(10 - t) - 0.0013(10 - t)^4 \qquad (0 \leq t \leq 10)$$

¿Cuál es la cantidad máxima de sal presente en el tanque en cualquier momento?



En los ejercicios 79-82, determine si la afirmación es verdadera o falsa. Si es verdadera, explique por qué lo es. Si es falsa, proporcione un ejemplo para mostrar por qué lo es.

79. Si f está definida en un intervalo cerrado $[a, b]$, entonces f tiene un valor máximo absoluto.

80. Si f es continua en un intervalo abierto (a, b), entonces f no tiene un valor mínimo absoluto.

81. Si f no es continua en un intervalo cerrado $[a, b]$, entonces f no puede tener un valor máximo absoluto.

82. Si $f''(x) < 0$ sobre (a, b) y $f'(c) = 0$ donde $a < c < b$, entonces $f(c)$ es el valor máximo absoluto de f en $[a, b]$.

83. Sea f una función constante, esto es, $f(x) = c$, donde c es algún número real. Muestre que cada número a aumenta a un máximo absoluto y, al mismo tiempo, a un mínimo absoluto de f.

84. Muestre que la función polinomial definida en el intervalo $(-\infty, \infty)$ no puede tener un máximo y un mínimo absolutos a menos que sea una función constante.

85. Una condición que debe cumplirse antes de que el teorema 3 (página 713) sea aplicable, es que la función f debe ser continua sobre un intervalo cerrado $[a, b]$. Defina la función f sobre el intervalo cerrado $[-1, 1]$ por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{si } x \in [-1, 1] \quad (x \neq 0) \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

a. Muestre que f no es continua en $x = 0$.

b. Muestre que $f(x)$ no alcanza un máximo absoluto o un mínimo absoluto en el intervalo $[-1, 1]$.

c. Confirme sus resultados al graficar la función de f.

86. Una condición que debe cumplirse antes de aplicar el teorema 3 (página 713) es que el intervalo en el que f está definida debe ser cerrado $[a, b]$. Defina una función f en el intervalo *abierto* $(-1, 1)$ por $f(x) = x$. Muestre que f no alcanza un máximo o un mínimo absolutos en el intervalo $(-1, 1)$.
Sugerencia: ¿Qué sucede a $f(x)$ si x está cerrado, pero no es igual a $x = -1$? Si x está cerrado pero no es igual a $x = 1$?

10.4 Soluciones de los ejercicios de autoevaluación

1. a. La función f es continua en su dominio y diferenciable en el intervalo $(0, 9)$. La derivada de f es

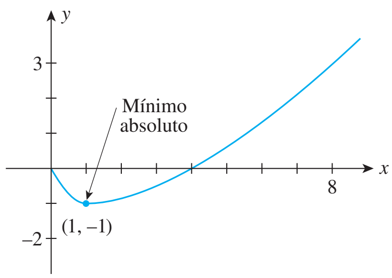
$$f'(x) = 1 - x^{-1/2} = \frac{x^{1/2} - 1}{x^{1/2}}$$

y ésta es igual a cero cuando $x = 1$. Al calcular $f(x)$ en los puntos extremos $x = 0$ y $x = 9$ y en el valor crítico 1 de f, tenemos

$$f(0) = 0 \qquad f(1) = -1 \qquad f(9) = 3$$

De estos resultados, observamos que -1 es el valor mínimo absoluto de f y 3 es el valor máximo absoluto de f.

b. En este caso, el dominio de f es el intervalo $[0, \infty)$, el cual no es cerrado. Sin embargo, recurrimos al método gráfico. Usando las técnicas de graficación, trazamos la gráfica de f en la figura anexa.



La gráfica de f demuestra que -1 es valor mínimo absoluto de f, pero f no tiene un máximo absoluto, ya que $f(x)$ crece sin límite conforme x crece sin límite.

2. La función f es continua en el intervalo $[-2, 1]$. También es diferenciable en el intervalo abierto $(-2, 1)$. La derivada de f es

$$f'(x) = 12x^3 + 12x^2 = 12x^2(x + 1)$$

y es continua en $(-2, 1)$. Al establecer $f'(x) = 0$ da -1 y 0 como valores críticos de f. Al evaluar $f(x)$ en estos valores críticos de f así como en los puntos extremos del intervalo $[-2, 1]$, obtenemos

$$f(-2) = 17 \qquad f(-1) = 0 \qquad f(0) = 1 \qquad f(1) = 8$$

de estos resultados, observamos que 0 es el valor mínimo absoluto de f y 17 es el valor máximo absoluto de f.

3. El problema está resuelto al determinar el máximo absoluto de una función f en $[0, 250]$. Al diferenciar $f(t)$, obtenemos

$$f'(t) = \frac{(t^2 + 40{,}000)(1{,}200) - 1{,}200t(2t)}{(t^2 + 40{,}000)^2} = \frac{-1{,}200(t^2 - 40{,}000)}{(t^2 + 40{,}000)^2}$$

Al hacer $f'(t) = 0$ y resolver la ecuación resultante tenemos que $t = -200$ o 200. Puesto que -200 permanece fuera del intervalo $[0, 250]$, nos interesa sólo el valor crítico 200 de f. Al calcular $f(t)$ en $t = 0$, $t = 200$ y $t = 250$, encontramos que

$$f(0) = 80 \qquad f(200) = 83 \qquad f(250) = 82.93$$

En conclusión, la tasa de operación de la capacidad de fabricación fue la más alta en el 200vo día de 2008, es decir, a mediados de julio de 2008.

USO DE LA TECNOLOGÍA

Determinación de los extremos absolutos de una función

Algunas calculadoras graficadoras tienen una función para determinar los valores máximo y mínimo absolutos de una función continua en un intervalo cerrado. Si su calculadora tiene esta capacidad, utilícela para trabajar en los ejemplos y ejercicios de esta sección

EJEMPLO 1 Sea $f(x) = \dfrac{2x + 4}{(x^2 + 1)^{3/2}}$.

a. Use la calculadora graficadora para trazar la grafica de f en la ventana de visualización $[-3, 3] \times [-1, 5]$.

b. Determine los valores máximo y mínimo absolutos de f en el intervalo $[-3, 3]$. Exprese sus respuestas redondeando a cuatro posiciones decimales.

Solución

a. La grafica de f se muestra en la figura T1.

b. Usando la función de la calculadora graficadora para encontrar el valor mínimo absoluto de una función continua en un intervalo cerrado, determine que el valor mínimo absoluto de f es -0.0632. De igual forma, al utilizar la función para determinar el valor máximo absoluto, determine que dicho valor es 4.1593.

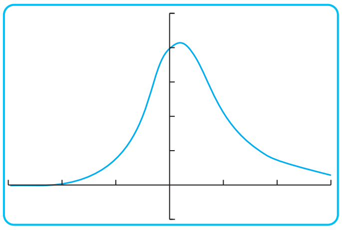


FIGURA **T1**
La grafica de f en la ventana de visualización $[-3, 3] \times [-1, 5]$.

```
fMax((2X+4)/(X^2
+1)^1.5,X,⁻3,3)
        .1583117413
(2*.1583+4)/(.15
83^2+1)^1.5
        4.15928406
```

FIGURA **T2**
La pantalla T1-83/84 para el ejemplo 1.

Nota Algunas calculadoras graficadoras le permitirán determinar los valores mínimo absoluto y máximo absoluto de una función continua en un intervalo cerrado, sin tener que graficar la función. Por ejemplo, utilizar **fMax** en la T1-83/84 le proporcionará la coordenada x del máximo absoluto de f. El valor máximo absoluto puede entonces determinarse al calcular f en el valor de x. La figura T2 muestra el complejo trabajo para determinar el máximo absoluto de la función del ejemplo 1. ■

EJERCICIOS CON TECNOLOGÍA

En los ejercicios 1-6, determine los valores máximo y mínimo absolutos de *f* en los intervalos dados, utilizando el método del ejemplo 1. Exprese sus respuestas redondeando a cuatro posiciones decimales.

1. $f(x) = 3x^4 - 4.2x^3 + 6.1x - 2$; $[-2, 3]$

2. $f(x) = 2.1x^4 - 3.2x^3 + 4.1x^2 + 3x - 4$; $[-1, 2]$

3. $f(x) = \dfrac{2x^3 - 3x^2 + 1}{x^2 + 2x - 8}$; $[-3, 1]$

4. $f(x) = \sqrt{x}(x^3 - 4)^2$; $[0.5, 1]$

5. $f(x) = e^{-x}\ln(x^2 + 1)$; $[-2, 2]$

6. $f(x) = x^2e^{-2x}$; $[-1, 1]$

7. $f(x) = \dfrac{x^3 - 1}{x^2}$; $[1, 3]$

8. $f(x) = \dfrac{x^3 - x^2 + 1}{x - 2}$; $[1, 3]$

9. **Uso de motores diesel** Los motores diesel son populares en los automóviles en Europa. El porcentaje de vehículos nuevos equipados con motores diesel en Europa Occidental se aproxima por la función

$$f(t) = 0.3t^4 - 2.58t^3 + 8.11t^2 - 7.71t + 23.75 \qquad (0 \le t \le 4)$$

donde t se mide en años, con $t = 0$ correspondiente a principios de 1996.

a. Use la calculadora graficadora para trazar la gráfica de f en $[0, 4] \times [0, 40]$.

b. ¿Cuál fue el porcentaje más bajo de vehículos nuevos equipados con motores diesel para el periodo en cuestión?

Fuente: German Automobile Industry Association

10. **Demanda de electricidad** La demanda de electricidad de 1 a.m. a 7 p.m. en agosto 1 de 2006 en Boston es descrita por la función

$$D(t) = -11.3975t^3 + 285.991t^2 - 1467.73t + 23{,}755 \qquad (0 \le t \le 18)$$

donde $D(t)$ se mide en megawatts (MW), con $t = 0$ correspondiente a la 1 a.m. A causa del manejo abrumador de sistemas de aire acondicionado y de refrigeración, la demanda de electricidad alcanzó un nuevo récord ese día. Demuestre que la demanda de electricidad no excedió la capacidad del sistema de 31,000 MW, negando así la necesidad de apagones si la demanda de electricidad hubiera excedido la oferta.

Fuente: ISO New England

(*continúa*)

11. Huelga En una huelga realizada por los pilotos de American Airlines en febrero de 1999, el número de vuelos cancelados a partir de febrero 6 ($t = 0$) hasta febrero 14 ($t = 8$) es aproximado por la función

$$N(t) = 1.2576t^4 - 26.357t^3 + 127.98t^2 + 82.3t + 43 \qquad (0 \leq t \leq 8)$$

donde t se mide en días. La huelga terminó después de que el sindicato estuvo amenazado por millones de dólares de multas.

a. Demuestre que el número de vuelos cancelados aumentaba a una tasa más rápida en febrero 8.

b. Estime el número máximo de vuelos cancelados en un día durante la huelga.

Fuente: Associated Press

12. Modelado con datos Los siguientes datos dan saldo promedio de una cuenta (en miles de dólares) de un plan 401 (k) de inversionistas de 1996 a 2002.

Año	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002
Saldo de la cuenta	37.5	40.8	47.3	55.5	49.4	43	40

a. Use **QuartReg** para determinar un modelo de regresión polinomial de cuarto grado para los datos. Donde $t = 0$ correspondiente a 1996.

b. Trace la gráfica de A, utilizando la ventana de visualización $[0, 6] \times [0, 60]$.

c. ¿Cuándo fue el promedio más bajo del saldo de la cuenta durante el periodo en consideración? ¿Cuándo fue el más alto?

d. ¿Cuál fue el promedio más bajo y el más alto del saldo de la cuenta durante el periodo en consideración?

Fuente: Investment Company Institute

10.5 Optimización II

La sección 10.4 describe cómo encontrar la solución a ciertos problemas de optimización en el que la función objetivo está dada. En esta sección considere los problemas en los que está obligado primero a determinar la función apropiada a optimizar. Los siguientes lineamientos serán útiles para resolver estos problemas.

Lineamientos para resolver los problemas de optimización

1. Asigne una letra a cada variable mencionada en el problema. Si es apropiado, dibuje y etiquete la figura.
2. Determine una expresión para la cantidad a optimizar.
3. Utilice las condiciones dadas en el problema para escribir la cantidad a optimizar como una función f de una *sola* variable. Observe algunas restricciones colocadas en el dominio de f de las consideraciones físicas del problema.
4. Optimice la función f sobre su dominio, utilizando los métodos de la sección 10.4.

Nota Al llevar a cabo el paso 4, recuerde que si la función f a optimizar es continua sobre un intervalo cerrado, el máximo y el mínimo absolutos de f son, respectivamente, los valores mayores y menores de $f(x)$ en el conjunto compuesto por los valores críticos de f y los puntos extremos del intervalo. Si el dominio de f no está en un intervalo cerrado, entonces recurra al método gráfico. ■

Problemas de maximización

EJEMPLO DE APLICACIÓN 1 Cercar un jardín Un hombre desea tener un jardín rectangular en su patio trasero. Tiene 50 pies de valla con los que lo cerca. Determine las dimensiones del jardín más grande que pueda si utiliza toda la valla.

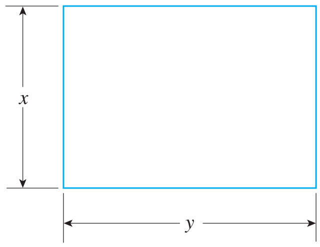


FIGURA 68
¿Cuál es el área máxima rectangular que se puede cerrar con 50 pies de valla?

Solución

Paso 1 Sean x y y que denotan las dimensiones (en pies) de los dos lados adyacentes del jardín (figura 68) y A que denota su área. Vea la página 139.

Paso 2 El área del jardín

$$A = xy \tag{1}$$

es la cantidad a maximizar.

Paso 3 El perímetro del rectángulo, $(2x + 2y)$ pies, debe ser igual a 50 pies. Por tanto, tenemos la ecuación

$$2x + 2y = 50$$

Lo siguiente es resolver esta ecuación para y en términos de x

$$y = 25 - x \tag{2}$$

lo cual, cuando se sustituye la ecuación (1), da

$$\begin{aligned} A &= x(25 - x) \\ &= -x^2 + 25x \end{aligned}$$

(Recuerde que la función a optimizar debe incluir sólo una variable.) Ya que los lados del rectángulo deberán ser no negativos, debemos tener $x \geq 0$ y $y = 25 - x \geq 0$; esto es, tenemos $0 \leq x \leq 25$. Así que el problema se reduce al determinar el máximo absoluto de $A = f(x) = -x^2 + 25x$ en un intervalo cerrado $[0, 25]$.

Paso 4 Observe que f es continua en $[0, 25]$, así que el valor máximo absoluto de f deberá presentarse en el (los) punto(s) extremo(s) del intervalo o en el (los) valor(es) crítico(s) de f. La derivada de la función A está dada por

$$A' = f'(x) = -2x + 25$$

Al establecer $A' = 0$ da

$$-2x + 25 = 0$$

o 12.5, como valor crítico de A. Después evalúe la función $A = f(x)$ en $x = 12.5$ y en los puntos extremos $x = 0$ y $x = 25$ del intervalo $[0, 25]$, para obtener

$$f(0) = 0 \qquad f(12.5) = 156.25 \qquad f(25) = 0$$

Observamos que el valor máximo absoluto de la función f es 156.25. De la ecuación (2) observamos que $y = 12.5$ cuando $x = 12.5$. Así que, el área máxima del jardín (156.25 pies cuadrados) es un cuadrado con lados de 12.5 pies de longitud. ■

EJEMPLO DE APLICACIÓN 2 **Empaque** Al cortar cuadros idénticos de cada una de las esquinas de una pieza rectangular de cartón y doblar las aletas resultantes, el cartón puede convertirse en una caja abierta. Si el cartón es de 16 pulgadas de largo y 10 de ancho, determine las dimensiones de la caja que producirán el volumen máximo.

Solución

Paso 1 Sea x la longitud (en pulgadas) de uno de los lados de cada cuadrado a cortar del cartón (figura 69) y V el volumen de la caja resultante.

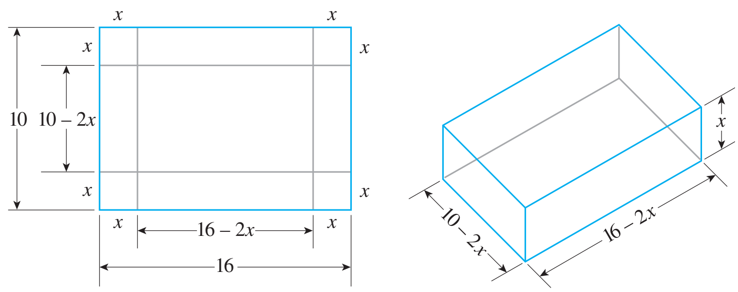


FIGURA 69
Las dimensiones de la caja abierta son $(16 - 2x)$ pulgadas por $(10 - 2x)$ pulgadas por x pulgadas.

Paso 2 Las dimensiones de la caja son $(16 - 2x)$ pulgadas por $(10 - 2x)$ pulgadas por x pulgadas. Sin embargo, su volumen (en pulgadas cúbicas),

$$\begin{aligned} V &= (16 - 2x)(10 - 2x)x \\ &= 4(x^3 - 13x^2 + 40x) \qquad \text{Ampliar la expresión.} \end{aligned}$$

es la cantidad a maximizar.

Paso 3 Puesto que cada uno de los lados de la caja deberá ser no negativo, x debe satisfacer las desigualdades $x \geq 0$, $16 - 2x \geq 0$ y $10 - 2x \geq 0$. Este conjunto de desigualdades se satisface si $0 \leq x \leq 5$. Así que, el problema a la mano es equivalente al de determinar el máximo absoluto de

$$V = f(x) = 4(x^3 - 13x^2 + 40x)$$

un intervalo cerrado $[0, 5]$.

Paso 4 Observe que f es continua en $[0, 5]$, así que el valor máximo absoluto de f debe alcanzar al (los) punto(s) extremo(s) de f.

Al diferenciar $f(x)$, obtenemos

$$\begin{aligned} f'(x) &= 4(3x^2 - 26x + 40) \\ &= 4(3x - 20)(x - 2) \end{aligned}$$

Al establecer $f'(x) = 0$ y resolver el resultado de la ecuación para x, obtenemos $x = \frac{20}{3}$ o $x = 2$. Puesto que $\frac{20}{3}$ se encuentra fuera del intervalo $[0, 5]$, no se debe considerar, y nos interesa sólo el valor crítico de f. Lo siguiente es evaluar $f(x)$ en $x = 0$, $x = 5$ (los puntos extremos del intervalo $[0, 5]$), y $x = 2$, obtenemos

$$f(0) = 0 \qquad f(2) = 144 \qquad f(5) = 0$$

Así que el volumen de la caja se maximiza al tomar $x = 2$. Las dimensiones de la caja son $12'' \times 6'' \times 2''$, y el volumen es 144 pulgadas cúbicas. ■

Exploración con TECNOLOGÍA

Refiérase al ejemplo 2.

1. Use la calculadora graficadora para trazar la gráfica de

$$f(x) = 4(x^3 - 13x^2 + 40x)$$

al utilizar la ventana de visualización $[0, 5] \times [0, 150]$. Explique lo que sucede con $f(x)$, conforme x aumenta de $x = 0$ a $x = 5$ y dé una interpretación física.

2. Utilice **ZOOM** y **TRACE**, determine el máximo absoluto de f en el intervalo $[0, 5]$ y verifique así la solución para el ejemplo 2 obtenida analíticamente.

EJEMPLO DE APLICACIÓN 3 Tarifa óptima para el metro La autoridad de tránsito metropolitano (ATM) de una ciudad opera una línea del metro de un cierto suburbio hasta el área metropolitana. El promedio de 6,000 pasajeros al día que toman el tren pagan una tarifa de \$3.00 por viaje. El consejo de ATM contempla incrementar la tarifa a \$3.50 por viaje y, a fin de generar un ingreso mayor, contrata los servicios de una firma de consultoría. El estudio de la firma revela que, por cada \$0.50 de aumento a la tarifa, el número de viajeros se reducirá un promedio de 1,000 pasajeros por día. Así que la empresa recomienda que la ATM debe ajustarse a la tarifa actual de \$3.00 por viaje, con la cual ya obtiene el ingreso máximo. Demuestre que los consultores están en lo correcto.

Solución

Paso 2 Sea x el número de pasajeros por día, p la tarifa por viaje y R esel ingreso de ATM. Vea la página 140.

Paso 2 Para determinar la relación entre x y p, observe que el dato dado implica que cuando $x = 6{,}000$, $p = 3$, y cuando $x = 5{,}000$, $p = 3.50$. Sin embargo, los puntos (6,000, 3) y (5,000, 3.50) están sobre la recta. (¿Por qué?) Para determinar la relación lineal entre p y x, utilice la forma punto-pendiente de la ecuación de la recta. Ahora la pendiente de la recta es

$$m = \frac{3.50 - 3}{5{,}000 - 6{,}000} = -0.0005$$

Sin embargo, la ecuación requerida es

$$\begin{aligned} p - 3 &= -0.0005(x - 6{,}000) \\ &= -0.0005x + 3 \\ p &= -0.0005x + 6 \end{aligned}$$

Sin embargo, el ingreso

$$R = f(x) = xp = -0.0005x^2 + 6x$$ Número de viajeros x unidad monetaria

es la cantidad a maximizar.

Paso 3 Ya que p y x deben ser no negativas, observe que $0 \leq x \leq 12{,}000$ y el problema es determinar el máximo absoluto de la función f sobre el intervalo cerrado [0, 12,000].

Paso 4 Observe que f es continua sobre [0, 12,000]. Para determinar el valor crítico de R, calculamos

$$f'(x) = -0.001x + 6$$

y al establecerlo igual a cero, da $x = 6{,}000$. Al evaluar la función f en $x = 6{,}000$, así como en los puntos extremos $x = 0$ y $x = 12{,}000$, se produce

$$\begin{aligned} f(0) &= 0 \\ f(6{,}000) &= 18{,}000 \\ f(12{,}000) &= 0 \end{aligned}$$

Concluimos que el ingreso máximo de \$18,000 por día se obtiene cuando el trayecto lo recorren 6,000 por día. El precio óptimo de la tarifa por viaje es, no obstante, \$3.00, como lo recomendó la firma de consultoría. La gráfica de la función de ingresos R se muestra en la figura 70. ■

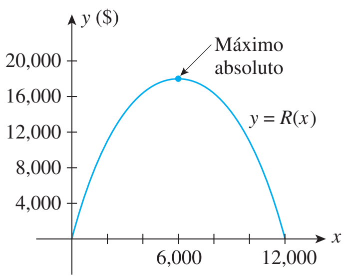


FIGURA **70**
f tiene un máximo absoluto en 18,000 cuando $x = 6{,}000$.

Minimización de problemas

VIDEO

EJEMPLO DE APLICACIÓN 4 Empaque Betty Moore Company requiere que sus contenedores para carne picada en conserva posean una capacidad de 54 pulgadas cúbicas, tengan la forma adecuada de cilindros circulares y sean hechos de aluminio. Determine el radio y la altura del contenedor que requiere una cantidad mínima de metal.

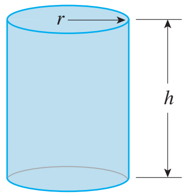


FIGURA **71**
Se desea minimizar la cantidad de material empleada para construir el contenedor.

Solución

Paso 1 Sea el radio y la altura del contenedor r y h pulgadas, respectivamente, y sea S al área de superficie del contenedor (figura 71).

Paso 2 La cantidad de aluminio empleada para construir el contenedor está dada por la superficie total del área del cilindro. Ahora, el área de la base y de la tapa del cilindro son cada una πr^2 pulgadas cuadradas y el área de los lados es $2\pi rh$ pulgadas cuadradas. Sin embargo,

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi rh \tag{3}$$

es la cantidad a minimizar.

Paso 3 El requerimiento de que el volumen de un contenedor sea de 54 pulgadas cúbicas implica que

$$\pi r^2 h = 54 \tag{4}$$

Al resolver la ecuación (4) por h, obtenemos

$$h = \frac{54}{\pi r^2} \tag{5}$$

la cual, cuando es sustituida en (3), produce

$$\begin{aligned} S &= 2\pi r^2 + 2\pi r\left(\frac{54}{\pi r^2}\right) \\ &= 2\pi r^2 + \frac{108}{r} \end{aligned}$$

Claramente, el radio r del contenedor deberá satisfacer la desigualdad $r > 0$. El problema ahora se reduce a determinar el mínimo absoluto de la función $S = f(r)$ sobre el intervalo $(0, \infty)$.

Paso 4 Al utilizar las técnicas de la sección 10.3 para trazar la curva, se obtiene la gráfica de f en la figura 72.

Para determinar el número crítico de f, calculamos

$$S' = 4\pi r - \frac{108}{r^2}$$

y resolver la ecuación $S' = 0$ para r:

$$\begin{aligned} 4\pi r - \frac{108}{r^2} &= 0 \\ 4\pi r^3 - 108 &= 0 \\ r^3 &= \frac{27}{\pi} \\ r &= \frac{3}{\sqrt[3]{\pi}} \approx 2 \end{aligned} \tag{6}$$

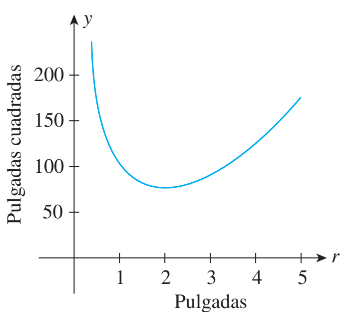


FIGURA **72**
La superficie total del área del contenedor cilíndrico adecuado está graficada como una función de r.

Después, mostramos que este valor de r lleva al mínimo absoluto de f. Para mostrar esto, primero calculamos

$$S'' = 4\pi + \frac{216}{r^3}$$

PORTAFOLIO Gary Li

PUESTO Socio
INSTITUCIÓN JPMorgan Chase

Como una institución financiera líder mundial, JPMorgan Chase & Co. depende de una amplia gama de disciplinas matemáticas que van de la estadística a la programación lineal y el cálculo. Ya sea para la evaluación justa de crédito, la recomendación de las inversiones de portafolio, o la fijación de precios de un derivado exótico, la comprensión cuantitativa es una herramienta fundamental al servicio de las necesidades financieras de los clientes.

Trabajo en el Fixed-Income Derivatives Strategy Group. En finanzas, un derivado es un instrumento cuyo valor depende del precio de algunos otros instrumentos subyacentes. Un tipo sencillo de derivados es el contrato forward (o a plazo) en que dos partes se comprometen a un intercambio futuro a un precio específico. En la agricultura, por ejemplo, los agricultores a menudo comprometen su cosecha para la venta a compradores a un precio pactado, incluso antes de la siembra. En función del clima, la demanda y otros factores, el precio real puede resultar más alto o más bajo. O bien, el comprador o el vendedor se benefician del contrato forward, como corresponde. El valor del contrato cambia uno a uno el precio actual. En el lenguaje de los derivados, prestamos sobre cálculos y decimos que los contratos forward tienen un delta de 1.

Hoy, la mayoría de los derivados trata con tasas de interés más que con riesgos agrícolas. El valor de cualquier activo con pagos fijos varía en el tiempo con las tasas de interés. Con billones de dólares en esta forma, especialmente en bonos gubernamentales e hipotecas, los derivados de renta fija son vitales para la economía. Como un grupo de estrategia, nuestra función es hacer el seguimiento y anticipar los factores clave, así como las novedades en el mercado utilizando, en parte significativa, el análisis cuantitativo. Algunos de los derivados que observará más adelante son de esa clase, como swaps de tasas de interés, donde con el tiempo usted recibe pagos de tasa fija a cambio de pagar una tasa flotante, o viceversa. Una clase totalmente distinta de derivados, donde la estadística y el cálculo son de especial relevancia, son las opciones.

Mientras que los contratos forward obligan a ambas partes a negociar en un futuro, las opciones dan al tenedor el derecho, pero no la obligación, de negociar en un momento y con un precio determinados. El titular de la opción, de modo similar a una póliza de seguros, paga por adelantado la prima a cambio de una ganancia potencial. La solución de este problema de fijación de precios requiere estadística, cálculo estocástico y la perspicacia suficiente para ganar un premio Nobel. Por fortuna para nosotros, esto estuvo a cargo de Fischer Black, Myron Scholes y Robert Merton en la década de 1970 (incluido el premio Nobel de Economía 1997 para Scholes y Merton). La ecuación diferencial de Black y Scholes fue el primer modelo preciso de fijación de precios, haciendo posible el rápido crecimiento del mercado de los derivados. Black-Scholes y los muchos derivados de ella siguen en uso hasta hoy.

Puesto que $S'' > 0$ para $r = 3/\sqrt[3]{\pi}$, la prueba de la segunda derivada implica que el valor de r en la ecuación (6) lleva a un mínimo relativo de f. Finalmente, este mínimo relativo de f es también el mínimo absoluto de f, ya que f es cóncava hacia arriba ($S'' > 0$ por todas partes $r > 0$). Para determinar la altura del contenedor dado, sustituya el valor de r proporcionado en el punto (6) dentro del (5). Así,

$$
\begin{aligned}
h = \frac{54}{\pi r^2} &= \frac{54}{\pi\left(\dfrac{3}{\pi^{1/3}}\right)^2} \\
&= \frac{54\pi^{2/3}}{(\pi)9} \\
&= \frac{6}{\pi^{1/3}} = \frac{6}{\sqrt[3]{\pi}} \\
&= 2r
\end{aligned}
$$

Concluimos que el contenedor requerido tiene aproximadamente un radio de 2 pulgadas y una altura de 4 pulgadas, o dos veces el tamaño del radio. ■

Un problema de inventarios

Un problema que enfrentan muchas empresas es llevar el control del inventario de los bienes transportados. Lo ideal es que el gerente se asegure de que la empresa tenga existencias suficientes para satisfacer la demanda del cliente en todo momento. Al mismo tiempo, debe asegurarse de que esto se logra sin exceso de inventarios (incurriendo en costos de almacenamiento innecesario) y también sin realizar pedidos con demasiada frecuencia (incurriendo en costos de reorden).

EJEMPLO DE APLICACIÓN 5 **Control y planeación de inventarios**

Dixie Import-Export es la única agencia de motocicletas Excalibur 250 cc. La gerencia estima que la demanda de estas motocicletas es de 10,000 al año y que las venderán a un precio uniforme todo el año. El costo en que se incurre al ordenar cada embarque es \$10,000 y el costo anual de almacenaje por cada motocicleta es \$200.

La gerencia de Dixie enfrenta el siguiente problema: ordenar demasiadas motocicletas al mismo tiempo bloquea un espacio valioso en el almacén e incrementa el costo de almacenaje. Por otro lado, hacer pedidos con demasiada frecuencia incrementa los costos de ordenar. ¿Qué tan grande deberá ser cada pedido, y con qué frecuencia deberán colocarse, a fin de minimizar los costos de ordenar y de almacenaje?

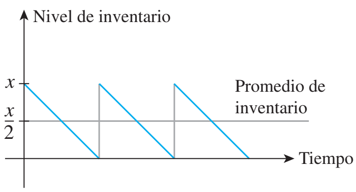


FIGURA 73
Conforme cada lote se agota, el nuevo lote llega. El nivel promedio del inventario es $x/2$ si x es el tamaño del lote.

Solución Sea x el número de motocicletas en cada pedido (tamaño del lote). Después, asuma que cada embarque llega justo cuando el embarque anterior se ha vendido, el número promedio de motocicletas en el almacén durante el año es $x/2$. Puede ver que éste es el caso al examinar la figura 73. Así que, el costo anual de almacenaje para Dixie está dado por $200(x/2)$, o $100x$ dólares.

Después, ya que la empresa requiere 10,000 motocicletas por año, y ya que cada pedido es por x motocicletas, el número requerido para los pedidos es

$$\frac{10{,}000}{x}$$

Esto da un costo por pedido de

$$10{,}000\left(\frac{10{,}000}{x}\right) = \frac{100{,}000{,}000}{x}$$

dólares al año. Así que, el costo total anual en el que incurrió Dixie, el cual incluye los costos de ordenar y de almacenaje que se atribuye a la venta de estas motocicletas, está dado por

$$C(x) = 100x + \frac{100{,}000{,}000}{x}$$

El problema se reduce a determinar el mínimo absoluto de la función C en el intervalo $[0, 10{,}000]$. Para completar esto, calculamos

$$C'(x) = 100 - \frac{100{,}000{,}000}{x^2}$$

Al establecer $C'(x) = 0$ y resolver la ecuación resultante, se obtiene $x = \pm 1{,}000$. Ya que el número $-1{,}000$ está fuera del dominio de la función C, ésta es rechazada, dejando 1,000 como el único valor crítico de C. Después, determinamos

$$C''(x) = \frac{200{,}000{,}000}{x^3}$$

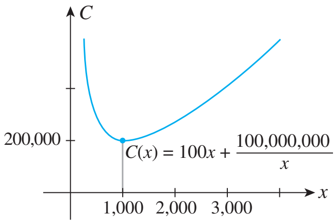


FIGURA 74
C tiene un mínimo absoluto en (1,000, 200,000).

Puesto que $C''(1{,}000) > 0$, la prueba de la segunda derivada implica que el número crítico 1,000 es un mínimo relativo de la función C (figura 74). También, puesto que $C''(x) > 0$ para toda x en $(0, 10{,}000)$, la función C es cóncava hacia arriba en todas partes, así que $x = 1{,}000$ también da el mínimo absoluto de C. Así que, al minimizar los costos de ordenar y de almacenaje, Dixie deberá colocar 10,000/1,000, o 10 pedidos al año, cada embarque de 1,000 motocicletas. ■

10.5 Ejercicios de autoevaluación

1. Un hombre desea tener un huerto de vegetales cercado en su patio trasero. Si el huerto es un área rectangular de 300 pies^2, determine las dimensiones del mismo que minimizarán la cantidad necesaria de valla.

2. La demanda de neumáticos Super Titán es 1,000,000 por año. El costo establecido para cada corrida de producción es \$4,000 y el costo de fabricación de \$20 por neumático. El costo anual de almacenaje de cada neumático es \$2. Suponiendo uniformidad de la demanda durante el año y producción al instante, determine cuántos neumáticos podrían fabricarse con el fin de mantener el costo de producción al mínimo.

Las soluciones de los ejercicios de autoevaluación 10,5 se encuentran en la página 737.

10.5 Preguntas de concepto

1. Si el dominio de una función f no es un intervalo cerrado, ¿cómo podría determinar, si existen, los extremos absolutos de f?

2. Refiérase al ejemplo 4 (página 730). En la solución dada en el ejemplo, resolvemos para h en términos de r, resultando una función de r, con la que optimizamos con respecto a r. Escriba S en términos de h y resuelva el problema. ¿Cuál elección es mejor?

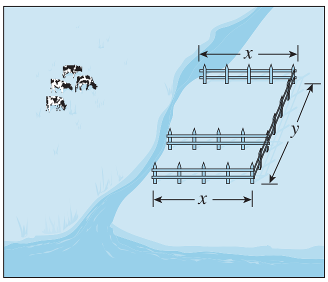
10.5 Ejercicios

1. Determine las dimensiones de un rectángulo con un perímetro de 100 pies que tenga la mayor área posible.

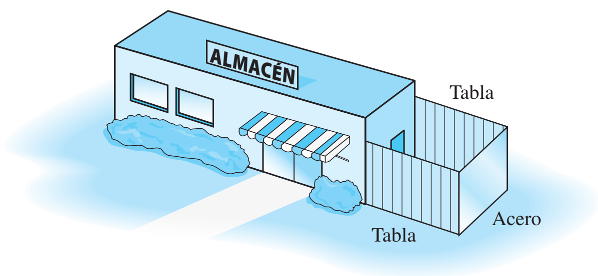
2. Determine las dimensiones de un rectángulo con un área de 144 pies cuadrados que tenga el perímetro más pequeño posible.

3. **Cercar el área más grande** El propietario del Rancho Los Feliz cuenta con 3,000 yardas de valla con las cuales podría cercar una parte rectangular de las tierras de pastoreo a lo largo de la porción recta del río. Si la valla no se requiere a lo largo del río, ¿cuáles son las dimensiones del área más grande que puede rodear? ¿Cuál es el área?

4. **Cercar el área más grande** Refiérase al ejercicio 3. Como un plan alterno, el propietario del Rancho Los Feliz puede utilizar 3,000 yardas de valla con las cuales puede cerrar una parte rectangular de tierras de pastoreo a lo largo de la parte recta del río y luego subdividir por la mitad con una valla paralela a los lados. En esta ocasión tampoco se requiere la valla a lo largo del río. ¿Cuáles son las dimensiones del área más grande que puede cerrar? ¿Cuál es esta área? (vea la siguiente figura.)



5. **Minimización de los costos de construcción** La gerencia de la tienda departamental UNICO ha decidido incluir un área de 800 m^2 en la zona exterior del edificio para exponer las plantas en macetas y flores. Un lado estará formado por la pared exterior de la tienda, dos partes estarán construidas con tablas de pino y el cuarto lado se hará con valla de acero galvanizado. Si la tabla de pino cuesta \$6 por pie y la valla de acero galvanizado \$3 por pie, determine las dimensiones del recinto que puede levantar a un costo mínimo.

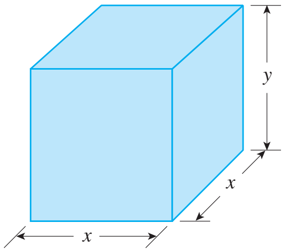


6. **Empaque** Al cortar cuadros idénticos de las esquinas de una pieza rectangular de cartón y doblar las aletas resultantes, puede hacerse una caja abierta. Si el cartón mide 15 pulgadas de largo y 8 de ancho, determine las dimensiones de la caja que producirían un volumen máximo.

7. **Fabricación de metales** Si una caja abierta está hecha de una hoja delgada de estaño de 8 pulgadas cuadradas al cortar los cuadros idénticos de cada esquina y doblar las aletas resultantes, determine las dimensiones de la caja más grande que puede fabricarse.

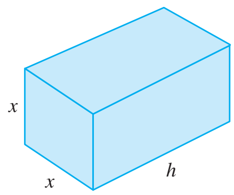
8. **Minimización de los costos de empaque** Si una caja abierta tiene una base cuadrada y un volumen de 108 pulgadas^3 y está fabricada con una hoja delgada de estaño, determine las dimensiones de la caja, suponiendo que se emplea una cantidad mínima de material en su construcción.

9. **Minimización de los costos de empaque** ¿Cuáles son las dimensiones de una caja rectangular cerrada que tiene una sección transversal cuadrada, una capacidad de 128 pulgadas^3 y se construye empleando una cantidad mínima de material?

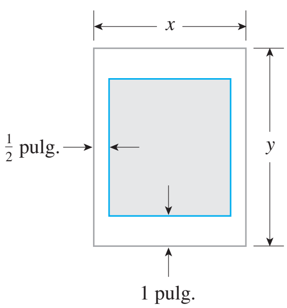


10. **Minimización de los costos de empaque** Una caja rectangular tiene una base cuadrada y un volumen de 20 pies^3. Si el material para la base cuesta 30¢/pie cuadrado, el material para los lados cuesta 10¢/pies cuadrados, el material para la tapa 20¢/pie cuadrado, determine las dimensiones de la caja que puede construirse a un costo mínimo (refiérase a la figura del ejercicio 9).

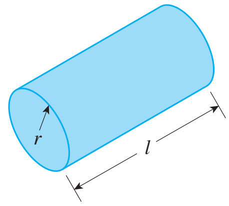
11. **Regulaciones postales para paquetes** Las regulaciones postales específicas para un paquete enviado por correo urgente son que puede tener una longitud y grosor combinado de no más de 108 pulgadas. Determine las dimensiones de un paquete rectangular que tiene una sección transversal cuadrada y con el mayor volumen que puede enviarse por correo urgente. ¿Cuál es el volumen de dicho paquete?
Sugerencia: el largo más el grosor es $4x + h$ (vea la siguiente figura).



12. **Diseño de un libro** El diseñador de un libro ha decidido que las páginas del mismo deben tener 1 pulgada en los márgenes superiores e inferiores y $\frac{1}{2}$ márgenes en los lados. Estipula además que cada página debe tener un área de 50 pulgadas. Determine las dimensiones de la página que producirá el área máxima a imprimir sobre la página.



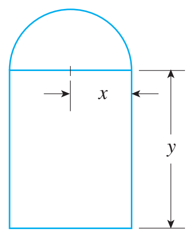
13. **Regulaciones postales para paquetes** Las regulaciones postales específicas que un paquete enviado por correo urgente son que puede tener una longitud y un grosor combinado de no más de 108 pulg. Determine las dimensiones del paquete cilíndrico de mayor volumen que puede ser enviado por correo urgente. ¿Cuál es el volumen de dicho paquete? Compare con el ejercicio 11.
Sugerencia: la longitud más el grosor es $2\pi r + l$.



14. **Minimización de costos** Para su estofado, Betty Moore Company usa envases de aluminio que tienen la forma adecuada de cilindros circulares Determine el radio y la altura de un contenedor si éste tiene una capacidad de 36 pulg^3 y está construido empleando para ello la menor cantidad de metal.

15. **Diseño de productos** La caja que contiene los altavoces Acrosonic Modelo D será rectangular y tendrá un volumen interior de 2.4 pies^3. Por razones estéticas, se ha decidido que la altura de la caja será de 1.5 veces su ancho. Si la parte superior, inferior y laterales de la caja están construidas con chapa de madera que cuesta 40¢/pie cuadrado y el frente (haga caso omiso de los recortes de la pantalla acústica) y trasera están construidos con tablones que cuestan 20¢/pie cuadrado, ¿cuáles son las dimensiones de la caja que se puede construir a un costo mínimo?

16. **Diseño de una ventana Norman** Una ventana Norman tiene la forma de un rectángulo coronado por un semicírculo (vea la figura adjunta). Si dicha ventana tiene un perímetro de 28 pies, ¿cuáles deberían ser sus dimensiones para permitir que pase la máxima cantidad de luz a través de ella?



17. **Tarifa óptima para un vuelo Charter** Si se registran exactamente 200 personas para un vuelo Charter, Leisure World Travel Agency cobra \$300 por persona. Sin embargo, si más de 200 personas se registran para el vuelo (asuma que éste es el caso) entonces la tarifa se reduce a \$1 por cada persona adicional. Determine cuántos pasajeros producirán un ingreso máximo para la agencia de viajes. ¿Cuál es el ingreso máximo? ¿Cuál sería la tarifa por pasajero en este caso?
Sugerencia: sea x el número de más de 200 pasajeros. Demuestre que la función de ingreso R está dada por $R(x) = (200 + x)(300 - x)$.

18. **Maximización del rendimiento** Un huerto de manzanas tiene un rendimiento promedio de 36 bushels de manzanas por árbol si la densidad de árboles es 22 por acre. Por cada unidad que aumenta la densidad de árboles, el rendimiento decrece 2 bushels por árbol. ¿Cuántos árboles se deben plantar a fin de maximizar el rendimiento?

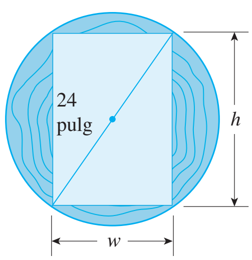
19. **Ingresos de un charter** El propietario de un yate de lujo que navega entre las 4,000 islas griegas cobra $600 por persona al día si exactamente 20 personas se registran para el crucero. Sin embargo, si más de 20 personas se registran (hasta una capacidad máxima de 90) para el crucero, la tarifa se reduce a $4 por cada pasajero adicional. Suponiendo por lo menos 20 personas registradas para el crucero, determine ¿por cuántos pasajeros resultará el ingreso máximo para el propietario del yate? ¿Cuál es el ingreso máximo? ¿Cuál sería la tarifa por pasajero en este caso?

20. **Utilidades de un viñedo** Phillip, el propietario de un viñedo, calcula que por las primeras 10,000 botellas de vino producidas en esta temporada obtendrá una utilidad de $5 por botella. Pero si se producen más de 10,000 botellas, entonces la utilidad por botella para el lote completo se reducirá $0.0002 por cada unidad adicional que venda. Suponiendo que se producen y venden por lo menos 10,000 botellas de vino, ¿cuál será la utilidad máxima?

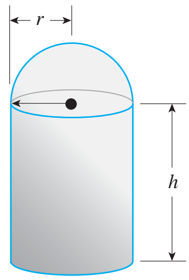
21. **Velocidad óptima de un camión** Un camión alcanza $600/x$ mpg cuando es conducido a una velocidad constante de x mph (entre 50 y 70 mph). Si el precio del combustible es $3 por galón y al conductor le pagan $18/h. ¿A qué velocidad entre 50 y 70 mph resultará más económico conducirlo?

22. **Minimización de costos** Suponga que el costo generado en la operación de un crucero durante una hora es de $a + bv^3$ dólares, donde a y b son constantes positivas y v es la velocidad del barco en millas por hora. ¿A qué velocidad debe operar el barco entre dos puertos para reducir el costo?

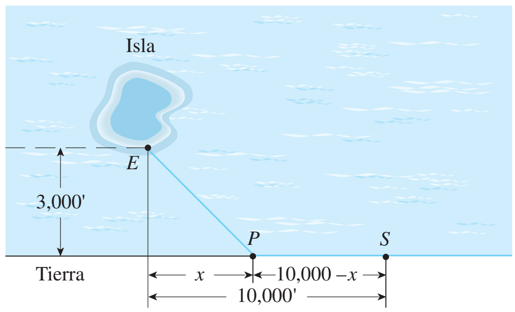
23. **La fuerza de un rayo** Una viga de madera tiene una sección transversal rectangular de una altura h y un ancho w en pulgadas (vea la siguiente figura). La fuerza S de la viga es directamente proporcional a su ancho y al cuadrado de su altura. ¿Cuáles son las dimensiones de la sección transversal de la viga que puede cortarse en troncos de 24 pulg?
Sugerencia: $S = kh^2w$, donde k es una constante de proporcionalidad.



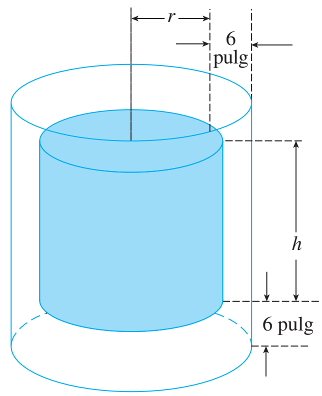
24. **Diseño de un silo de granos** Un silo de granos tiene la forma de un cilindro circular recto, rematado por una semiesfera (vea la siguiente figura). Si el silo debe tener una capacidad de 504π pies^3, determine el radio y la altura del silo que requiere la menor cantidad de material para su construcción.
Sugerencia: el diseño del silo es $\pi r^2h + \frac{2}{3}\pi r^3$, y la superficie del área (incluido el piso) es $\pi(3r^2 + 2rh)$.



25. **Minimización del costo de colocación de un cable** En el siguiente diagrama, S representa la posición de un conmutador eléctrico situado en una costa recta y E demuestra la ubicación de una estación experimental de una marina biológica en una isla. Un cable será colocado para conectar la estación de enlace con la estación experimental. Si el costo de correr el cable en tierra es $1.50/pie y el costo correr el cable bajo el agua es de $2.50/pie, localice el punto P que resultará en un costo mínimo (despeje x).



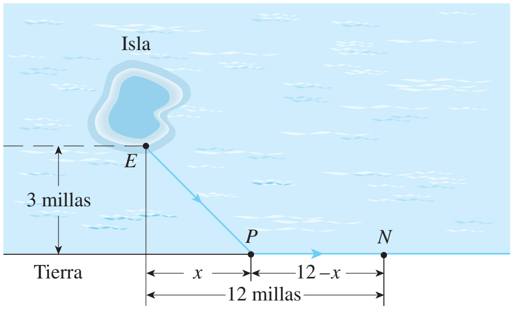
26. **Almacenamiento de residuos radiactivos** Un contenedor cilíndrico para el almacenamiento de residuos radiactivos será construido a base de plomo, con un grosor de 6 pulgadas (vea la siguiente figura). Si el volumen del cilindro externo es de 16π pies^3, determine el radio y la altura del cilindro interno que resultará en un contenedor con capacidad máxima de almacenamiento.



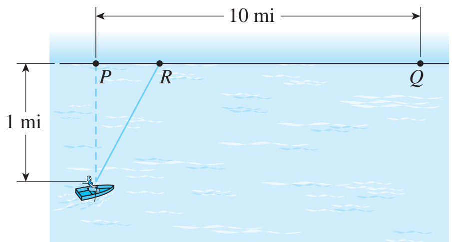
Sugerencia: Muestre que la capacidad de almacenamiento (el volumen interior) está dada por

$$V(r) = \pi r^2\left[\frac{16}{(r + \frac{1}{2})^2} - 1\right] \qquad (0 \leq r \leq \tfrac{7}{2})$$

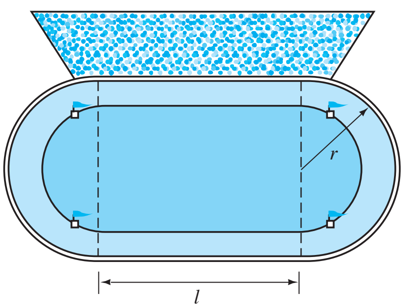
27. **Los vuelos de las aves** Durante las horas del día, algunas aves vuelan más lentamente sobre el agua que sobre la tierra, debido a que parte de su energía se consume en superar las corrientes descendentes sobre cuerpos de agua abiertos. Suponga que un ave vuela a una velocidad constante de 4 mph sobre el agua y 6 mph sobre la tierra. Comienza su recorrido en el punto E sobre una isla y termina en su nido N en la costa de un continente, como se muestra en la figura anexa. Determine el lugar del punto P que permite al ave completar su trayecto en el tiempo mínimo (despeje x).



28. **Minimización de la duración de un viaje** Una mujer está en un lago en un bote de remos situado a 1 mi del punto más cercano P de un litoral recto (vea la siguiente figura). Ella desea llegar al punto Q 10 mi a lo largo de la costa P, remando a un punto R entre P y Q y después caminando el resto de la distancia. Si ella puede remar a una velocidad de 2 mph y caminar a una velocidad de 3 mph, ¿cómo escogerá el punto R con el fin de llegar al punto Q tan pronto como le fuera posible? ¿Cuánto tiempo requerirá?



29. **Diseño de una pista de carreras** La figura adjunta muestra una pista de carreras con extremos en forma semicircular. La longitud de la pista es de 1,760 pies ($\frac{1}{3}$ de milla). Determine l y r para que el área delimitada por la región rectangular de la pista de carreras sea lo más grande posible. ¿Cuál es la zona delimitada por la pista en este caso?



30. **Control y planeación de inventarios** La demanda de llantas para motocicletas importadas por Dixie Import-Export es de 40,000 por año y se supone sea uniforme todo el año. El costo de ordenar un embarque de llantas es \$400, y el costo por almacenaje de cada llanta \$2. Determine cuántas llantas deberían solicitarse en cada embarque si los costos por orden y almacenaje tienen que minimizarse (suponga que el embarque nuevo llega justo cuando el anterior se ha vendido).

31. **Control y planeación de inventarios** McDuff Preserves espera vender 2,000,000 de botellas y frascos de 32 onzas de mermelada a una tasa uniforme durante todo el año. La empresa ordena sus contenedores a Consolidated Bottle Company. El costo de ordenar un embarque de botellas es \$200, y el costo de almacenaje por botella vacía en un año es \$.40. ¿Cuántos pedidos al año en cada embarque debe colocar McDuff y cuántos frascos deberían ser en cada embarque si los costos por orden y almacenaje deberán minimizarse? (suponga que cada embarque de botellas se agota antes de que llegue el próximo embarque).

32. **Control y planeación de inventarios** Nielsen Cookie Company vende sus galletas de mantequilla en una variedad de contenedores con un contenido neto de 1 lb. La demanda estimada para las galletas es 1,000,000 de contenedores de 1 lb. El costo establecido para cada corrida de producción es \$500, y el costo de manufactura \$.50 por cada contenedor de galletas. El costo por almacenaje de cada contenedor durante todo el año es \$.40. Suponga que la demanda es uniforme durante todo el año y una producción al instante. ¿Cuántos envases de galletas debe Nielsen elaborar por corrida de producción con el fin de minimizar el costo de producción?
Sugerencia: siga el método del ejemplo 5, demuestre que el costo total de la producción está dado por la función

$$C(x) = \frac{500{,}000{,}000}{x} + 0.2x + 500{,}000$$

Después minimice la función C en el intervalo $(0, 1{,}000{,}000)$.

33. **Control y planeación de inventarios** Una empresa espera vender D unidades de un determinado producto al año. Las ventas se supone sean a una tasa constante sin permitir ninguna escasez. Cada vez que un pedido del producto se coloca, el costo por pedido en que se incurre es K dólares. Cada artículo cuesta p dólares, y el costo anual de almacenaje es h dólares por artículo.

a. Demuestre que el costo del inventario (el costo combinado del pedido, el de compra y el de almacenaje) es

$$C(x) = \frac{KD}{x} + pD + \frac{hx}{2} \qquad (x > 0)$$

donde x es el monto del pedido (el número de artículos en cada orden).

b. Utilice el resultado del inciso (a) para demostrar que el costo del inventario se minimiza si

$$x = \sqrt{\frac{2KD}{h}}$$

Esta cantidad se llama *cantidad económica del pedido* (EOQ).

34. Control y planeación de inventario Refiérase al ejercicio 33. La tienda vende al año 960 cámaras digitales A35. Cada vez que se coloca un pedido de cámaras con el fabricante, el costo en que se incurre por orden es \$10. La tienda paga \$80 por cámara y el costo de almacenaje de una cámara (principalmente se debe al costo de oportunidad en que se incurre al destinar capital al inventario) es \$12/por año. Suponga que la cámara se vende a un promedio uniforme y que no habrá escasez.

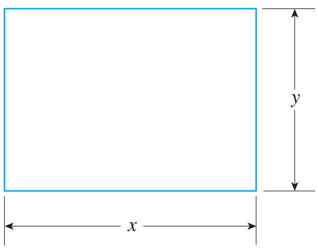
a. ¿Cuál es la EOQ?

b. ¿Cuántas órdenes se colocarán cada año?

c. ¿Cuál es el intervalo entre las órdenes?

10.5 Soluciones a los ejercicios de autoevaluación

1. Sean x y y (medido en pies) la longitud y el ancho de un jardín rectangular.



Puesto que el área debe ser 300 pies^2, tenemos

$$xy = 300$$

Después, la cantidad de valla a usar está dada por el perímetro, y esta cantidad será minimizada. Así que, se querrá minimizar

$$2x + 2y$$

o, puesto que $y = 300/x$ (obtenida al despejar y en la primera ecuación), observe que la expresión a minimizar es

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x + 2\left(\frac{300}{x}\right) \\ &= 2x + \frac{600}{x} \end{aligned}$$

Para valores positivos de x. Ahora

$$f'(x) = 2 - \frac{600}{x^2}$$

Al hacer $f'(x) = 0$ se produce $x = -\sqrt{300}$ o $x = \sqrt{300}$ Consideramos sólo el valor crítico $\sqrt{300}$ puesto que $-\sqrt{300}$ permanece fuera del intervalo $(0, \infty)$. Calculamos entonces

$$f''(x) = \frac{1{,}200}{x^3}$$

Puesto que,

$$f''(300) > 0$$

la prueba de la segunda derivada implica que un mínimo relativo de f se presenta en $x = \sqrt{300}$. De hecho, puesto que $f''(x) > 0$ para toda x en $(0, \infty)$, concluimos que $x = \sqrt{300}$ lleva al mínimo absoluto de f. El valor correspondiente de y, obtenido al sustituir este valor de x en el de la ecuación $xy = 300$, es $y = \sqrt{300}$. Sin embargo, las dimensiones requeridas de un jardín de vegetales son de aproximadamente 17.3 $\times$ 17.3 pies.

2. Sea x el número de neumáticos en cada corrida de producción. Entonces, el número promedio de neumáticos en almacén es $x/2$, así que el costo en que incurre la empresa por concepto de almacenaje es $2(x/2)$, o x dólares. Después, ya que la empresa necesita fabricar 1,000,000 de neumáticos al año para satisfacer la demanda, el número de productos fabricados es $1{,}000{,}000/x$. Esto establece el monto de los costos a

$$4{,}000\left(\frac{1{,}000{,}000}{x}\right) = \frac{4{,}000{,}000{,}000}{x}$$

dólares al año. El costo total de fabricación es de \$20,000.000. Así que el costo total anual en que incurre la empresa está dado por

$$C(x) = x + \frac{4{,}000{,}000{,}000}{x} + 20{,}000{,}000$$

Al diferenciar $C(x)$, encontramos

$$C'(x) = 1 - \frac{4{,}000{,}000{,}000}{x^2}$$

Al hacer $C'(x) = 0$ da 63,246 como el valor crítico en el intervalo $(0, 1{,}000{,}000)$. Después determinamos

$$C''(x) = \frac{8{,}000{,}000{,}000}{x^3}$$

Dado que $C''(x) > 0$, para toda $x > 0$, observe que C es cóncava hacia arriba para toda $x > 0$. Además, $C''(63{,}246) > 0$ implica que $x = 63{,}246$ y lleva a un mínimo relativo en C (por la prueba de la segunda derivada). Dado que C es siempre cóncava hacia arriba por $x > 0$, $x = 63{,}246$, da un mínimo absoluto en C. Sin embargo, la empresa debe fabricar 63,246 neumáticos en cada corrida de producción.

CAPÍTULO 10 Resumen de los términos principales

TÉRMINOS

asíntota horizontal (700)
asíntota vertical (698)
cóncava hacia abajo (678)
cóncava hacia arriba (678)
extremos absolutos (712)
extremo relativo (664)
función creciente (658)
función decreciente (658)
máximo relativo (663)
mínimo relativo (664)
número crítico (665)
punto de inflexión (681)
prueba de la primera derivada (665)
prueba de la segunda derivada (685)
valor crítico (665)
valor máximo absoluto (712)
valor mínimo absoluto (712)

CAPÍTULO 10 Preguntas de revisión de conceptos

Llene los espacios en blanco.

1. a. Una función f es creciente en el intervalo I, para cualquiera de los dos números x_1 y x_2 en I, $x_1 < x_2$ implica que_____.
   b. Una función f es decreciente en un intervalo I, si para cualquiera de los dos números x_1 y x_2 en I, $x_1 < x_2$ implica que _____.
2. a. Si f es diferenciable en un intervalo abierto (a, b) y $f'(x) > 0$ en (a, b), entonces f es _____ en (a, b).
   b. Si f es diferenciable en un intervalo abierto (a, b) y _____ en (a, b), entonces f es decreciente en (a, b).
   c. Si $f'(x) = 0$ para cada valor de x en el intervalo (a, b), entonces f es _____ en (a, b).
3. a. Una función f tiene un máximo relativo en c si existe un intervalo abierto (a, b) que contenga a c como tal _____ para toda x en (a, b).
   b. Una función f tiene un mínimo relativo en c si existe en un intervalo abierto (a, b) que contenga a c como tal _____ para toda x en (a, b).
4. a. El valor crítico de una función f es cualquier número en el _____ de f en el cual $f'(c)$_____ o $f'(c)$ *no* es _____.
   b. Si f tiene un extremo relativo en c, entonces c debe ser un _____ _____ de f.
   c. Si c es un valor crítico de f, entonces f puede o no tener a _____ _____ en c.
5. a. Una función diferenciable f es cóncava hacia arriba en un intervalo I si _____ es creciente en I.
   b. Si f tiene una segunda derivada en un intervalo abierto I y $f''(x)$ _____ en I, entonces la gráfica de f es cóncava hacia arriba en I.
   c. Si la gráfica de una función continua f tiene una recta tangente en $P(c, f(c))$ y la gráfica de f cambia _____ en P, entonces a P se le llama un punto de inflexión en la gráfica de f.
   d. Suponga que f tiene una segunda derivada continua en un intervalo (a, b), conteniendo un valor crítico c de f. Si $f''(c) < 0$, entonces f tiene un _____ _____ en c. Si $f''(c) = 0$, entonces f puede o no tener un _____ _____ en c.
6. La recta $x = a$ es una asíntota vertical de la gráfica f si en por lo menos uno de los siguientes es verdadero: $\lim_{x\to a^+} f(x) =$ _____ o $\lim_{x\to a^-} f(x) =$ _____.
7. Una función racional $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, la recta $x = a$ es una asíntota vertical de la gráfica de f si $Q(a) =$ _____ pero $P(a) \neq$ _____.
8. La recta $y = b$ es una asíntota horizontal de la gráfica de una función f si $\lim_{x\to\infty} f(x) =$ _____ o $\lim_{x\to-\infty} f(x) =$ _____.
9. a. Una función f tiene un máximo absoluto en c si _____ para todos x en el dominio D de f. El número $f(c)$ se llama el _____ _____ _____ de f en D.
   b. Una función f tiene un mínimo relativo en c si _____ para todos los valores de x en algún _____ _____ contenga c.
10. El teorema del valor extremo establece que si f es _____ en intervalo cerrado $[a, b]$, entonces f tiene un valor máximo _____ y un valor mínimo _____ en $[a, b]$.

CAPÍTULO 10 Ejercicios de revisión

En los ejercicios 1-12, (a) determine los intervalos donde la función f es creciente y donde es decreciente, (b) determine los extremos relativos de f, (c) determine los intervalos donde f es cóncava hacia arriba y donde es cóncava hacia abajo y (d) determine, si los hubiera, los puntos de inflexión de f.

1. $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + x - 6$
2. $f(x) = (x - 2)^3$
3. $f(x) = x^4 - 2x^2$
4. $f(x) = x + \dfrac{4}{x}$
5. $f(x) = \dfrac{x^2}{x - 1}$
6. $f(x) = \sqrt{x - 1}$
7. $f(x) = (1 - x)^{1/3}$
8. $f(x) = x\sqrt{x - 1}$
9. $f(x) = \dfrac{2x}{x + 1}$
10. $f(x) = \dfrac{-1}{1 + x^2}$
11. $f(x) = (4 - x)e^x$
12. $f(x) = x^2 \ln x$

En los ejercicios 13-22, obtenga tanta información como le sea posible sobre cada una de las funciones. Después utilícela para trazar la grafica de la función.

13. $f(x) = x^2 - 5x + 5$

14. $f(x) = -2x^2 - x + 1$

15. $g(x) = 2x^3 - 6x^2 + 6x + 1$

16. $g(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + x - 3$

17. $h(x) = x\sqrt{x - 2}$

18. $h(x) = \frac{2x}{1 + x^2}$

19. $f(x) = \frac{x - 2}{x + 2}$

20. $f(x) = x - \frac{1}{x}$

21. $f(x) = xe^{-2x}$

22. $f(x) = x^2 - \ln x$

En los ejercicios 23-26, determine las asíntotas horizontal y vertical de las gráficas de las funciones. No trace las gráficas.

23. $f(x) = \frac{1}{2x + 3}$

24. $f(x) = \frac{2x}{x + 1}$

25. $f(x) = \frac{5x}{x^2 - 2x - 8}$

26. $f(x) = \frac{x^2 + x}{x(x - 1)}$

En los ejercicios 27-38, determine los valores máximo absoluto y mínimo absoluto, si los hubiera, de la función proporcionada.

27. $f(x) = 2x^2 + 3x - 2$

28. $g(x) = x^{2/3}$

29. $g(t) = \sqrt{25 - t^2}$

30. $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + x + 1$ en $[0, 2]$

31. $h(t) = t^3 - 6t^2$ en $[2, 5]$

32. $g(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$ en $[0, 5]$

33. $f(x) = x - \frac{1}{x}$ en $[1, 3]$

34. $h(t) = 8t - \frac{1}{t^2}$ en $[1, 3]$

35. $f(x) = te^{-t}$ en $[-2, 2]$

36. $g(t) = \frac{\ln t}{t}$ en $[1, 2]$

37. $f(s) = s\sqrt{1 - s^2}$ en $[-1, 1]$

38. $f(x) = \frac{x^2}{x - 1}$ en $[-1, 3]$

39. **Maximización de utilidades** Las utilidades mensuales de Odyssey Travel Agency (en dólares) dependen de la cantidad de dinero (en miles de dólares) que se gasta en publicidad cada mes, con base en la norma

$$P(x) = -x^2 + 8x + 20$$

Para maximizar sus utilidades mensuales, ¿cuál sería el presupuesto mensual en publicidad de Odyssey Travel Agency?

40. **Reservaciones de hotel en línea** La industria de reservaciones en línea se prevé que crezca de manera espectacular. En un estudio realizado en 1999, los analistas proyectaron que en las reservaciones en línea en Estados Unidos el gasto por alojamiento será aproximadamente

$$f(t) = 0.157t^2 + 1.175t + 2.03 \qquad (0 \leq t \leq 6)$$

miles de millones de dólares, donde t se mide en años, con $t = 0$ correspondiente a 1999.

a. Demuestre que f es creciente en el intervalo $(0, 6)$.
b. Demuestre que la gráfica de f es cóncava hacia arriba en $(0, 6)$.
c. ¿Qué le indican los resultados de los incisos (a) y (b) acerca del crecimiento del gasto de alojamiento en las reservaciones en línea en los años en cuestión?

Fuente: International Data Corp.

41. **Ventas de teléfonos con cámara** Los teléfonos con cámara, prácticamente inexistentes hasta hace unos años, están ganando popularidad rápidamente. La función

$$N(t) = 8.125t^2 + 24.625t + 18.375 \qquad (0 \leq t \leq 3)$$

da los embarques proyectados a nivel mundial de teléfonos con cámara (en millones de unidades) al año t, con $t = 0$ correspondiente a 2002.

a. Determine $N'(t)$. ¿Qué le indica esto acerca de las ventas de los teléfonos con cámara entre 2002 y 2005?
b. Determine $N''(t)$. ¿Qué le indica esto acerca de la tasa de ventas de los teléfonos con cámara entre 2002 y 2005?

Fuente: In-Stat/MDR

42. **Índice de calidad ambiental** El Departamento del Interior de un país africano comenzó a registrar el índice de calidad ambiental que medía el progreso o deterioro de la calidad del aire en su vida silvestre. El índice de 1998 a 2008 se aproxima por la función

$$I(t) = \frac{50t^2 + 600}{t^2 + 10} \qquad (0 \leq t \leq 10)$$

a. Calcule $I'(t)$ y demuestre que $I(t)$ es decreciente en el intervalo $(0, 10)$.
b. Calcule $I''(t)$. Estudie la concavidad de la gráfica de I.
c. Trace la gráfica de I.
d. Interprete sus resultados.

43. **Maximización de utilidades** La demanda semanal de DVD fabricados por Herald Media Corporation está dada por

$$p = -0.0005x^2 + 60$$

donde p denota el precio unitario en dólares y x la cantidad demandada. La función del costo total semanal asociada con la fabricación de estos discos está dada por

$$C(x) = -0.001x^2 + 18x + 4{,}000$$

donde $C(x)$ denota el costo total (en dólares) en que se incurre en la impresión de x discos. Determine el nivel de producción que conducirá a utilidades máximas para el fabricante. **Sugerencia:** utilice la fórmula cuadrática.

44. Maximización de utilidades La utilidad mensual estimada (en dólares) a obtener por Cannon Precision Instruments para la fabricación y venta de x unidades de su cámara digital Modelo M1 es

$$P(x) = -0.04x^2 + 240x - 10{,}000$$

Para maximizar sus utilidades, ¿cuántas cámaras debería Cannon fabricar cada mes?

45. Minimización del costo promedio El costo total mensual (en dólares) en que incurre Carlota Music al fabricar x unidades en sus guitarras Professional Series está dado por la función

$$C(x) = 0.001x^2 + 100x + 4{,}000$$

a. Determine el costo promedio de la función $\overline{C}$.
b. Determine el nivel de producción que se traducirá en el costo promedio de producción más bajo.

46. Eficiencia de los trabajadores El trabajador promedio en Wakefield Avionics puede ensamblar

$$N(t) = -2t^3 + 12t^2 + 2t \qquad (0 \leq t \leq 4)$$

aviones con radio control listos para volar en t hrs de las 8 a.m. a las 12 del día del turno matutino. ¿En qué momento durante el cambio de turno el trabajador promedio trabaja a su máxima eficiencia?

47. Adultos mayores en la fuerza de trabajo El porcentaje de mujeres de 65 años y de mayor edad dentro de la fuerza de trabajo desde 1970 hasta el año 2000 se aproxima por la función

$$P(t) = -0.0002t^3 + 0.018t^2 - 0.36t + 10 \qquad (0 \leq t \leq 30)$$

donde t se mide en años, con $t = 0$ correspondiente a principios de 1970.

a. Determine el intervalo donde P es decreciente y el intervalo donde P es creciente.
b. Determine el mínimo absoluto de P.
c. Interprete los resultados de los incisos (a) y (b).

Fuente: U.S. Census Bureau

48. Propagación de una enfermedad contagiosa La incidencia (número de nuevos casos por día) de propagación de una enfermedad contagiosa en una población de M personas está dada por

$$R(x) = kx(M - x)$$

donde k es una constante positiva y x denota el número de personas infectadas. Muestre que la incidencia R es mayor cuando la mitad de la población está infectada.

49. Maximización del volumen de una caja Se construirá una caja con tapa abierta a partir de un trozo cuadrado de cartón de 10 pulgadas de ancho, cortando un cuadro de cada una de las cuatro esquinas y doblando hacia arriba los lados. ¿Cuál es el volumen máximo de esta caja?

50. Minimización de los costos de construcción Un hombre desea construir un barril cilíndrico con una capacidad de 32π pies^3. El costo del material por pie cuadrado del lado del barril es la mitad que la del costo por pie cuadrado para las partes superior e inferior. Ayude al hombre a determinar las dimensiones del barril para que pueda construirlo con un costo mínimo de material empleado.

51. Empaque Usted desea construir una caja rectangular cerrada que tenga un volumen de 4 pies^3. La longitud de la base de la caja será dos veces mayor que su ancho. El material para las partes superior e inferior de la caja cuesta 30¢ por pie cuadrado. El material para los lados de la caja cuesta 20¢/pie cuadrado. Determine las dimensiones de la caja más barata que pueda construirse.

52. Control y planeación de inventarios Lehen Vinters importa una cierta marca de cerveza. La demanda, que puede asumirse será uniforme, es de 8,000,000 cajas al año. El costo por ordenar un embarque de cerveza es \$500, el costo anual por almacenar cada caja de cerveza es \$2. Determine cuántas cajas de cerveza deberá tener cada embarque si los costos por ordenar y almacenar serán mínimos (suponga que cada embarque de cerveza llega justo al momento que el previo se ha vendido).

53. Sea $f(x) = x^2 + ax + b$. Determine las constantes a y b, dado que f tiene un mínimo relativo en $x = 2$ y el valor mínimo relativo es 7.

54. Determine los valores de c, dado que la gráfica de

$$f(x) = x^4 + 2x^3 + cx^2 + 2x + 2$$

es cóncava hacia arriba en todo lugar.

55. Suponga que el punto $(a, f(a))$ es un punto de inflexión de la gráfica de $y = f(x)$. Muestre que el número lleva a un extremo relativo de la función f'.

56. Sea

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + 1 & \text{si } x \neq 0 \\ 2 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

a. Calcule $f'(x)$ y demuestre que no cambia de signo a medida que nos movemos a lo largo de $x = 0$.
b. Demuestre que f tiene un máximo relativo en $x = 0$. ¿Esto contradice la prueba de la primera derivada? Explique su respuesta.

CAPÍTULO 10 Antes de continuar . . .

1. Determine el (los) intervalo(s) donde $f(x) = \dfrac{x^2}{1 - x}$ es creciente y donde es decreciente.

2. Determine los máximos relativos y el punto de inflexión de la gráfica $f(x) = xe^{-x}$.

3. Determine los intervalos donde $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x + 1$ es cóncava hacia arriba, los intervalos donde f es cóncava hacia abajo y el (los) punto(s) de inflexión de f.

4. Trace la gráfica de $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 1$.

5. Determine los valores máximo y mínimo absolutos de $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 1$ en el intervalo $[-2, 3]$.

6. Una cubeta en forma de cilindro circular con capacidad de 1 pie^3 será construido. Determine el radio y la altura del cilindro si la cantidad de material empleada es la mínima.

INTEGRACIÓN

11

EL CÁLCULO DIFERENCIAL tiene que ver con el problema de determinar la razón de cambio de una cantidad con respecto a otra. Este capítulo inicia con el estudio de la otra rama del cálculo conocida como cálculo integral. Aquí el interés radica precisamente en el problema opuesto: ¿si conocemos la razón de cambio de una cantidad con respecto a otra, puede determinarse la relación entre las dos cantidades? La principal herramienta empleada en el estudio del cálculo integral es la *antiderivada* de una función y, al desarrollar reglas para la antidiferenciación o la i*ntegración*, como se le llama al proceso de determinar la antiderivada. Se demostrará también el vínculo entre el cálculo diferencial e integral mediante el teorema fundamental del cálculo.

¿Cuánta electricidad debe producirse en los próximos tres años para satisfacer la demanda proyectada? En el ejemplo 9, de la página 780, podrá ver cómo la tasa del consumo actual puede utilizarse para responder este cuestionamiento.

11.1 Antiderivadas y las reglas de integración

Las antiderivadas

Regrese, una vez más, al ejemplo que involucra el movimiento de un tren de levitación magnética (maglev) (figura 1).

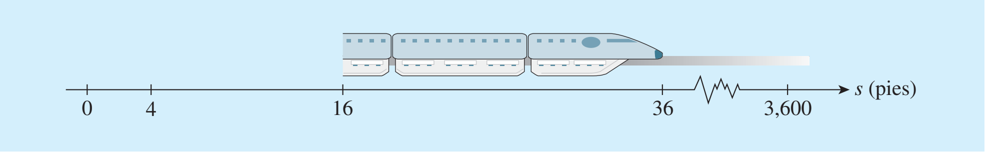


FIGURA 1
Un maglev que se mueve a lo largo de una pista de un monorriel elevado.

En el capítulo 9 se analiza el siguiente problema:

Si se conoce la posición del maglev en cualquier momento t, ¿se puede determinar su velocidad en el momento t?

Resulta que, si la posición del maglev está descrita por la posición de la función f, entonces su velocidad en cualquier momento t está dada por $f'(t)$. Aquí f', la función de la velocidad del tren, es sólo la derivada de f.

Ahora, en este capítulo se considera precisamente el problema opuesto:

Si se conoce la velocidad del tren en cualquier momento t, ¿puede determinarse su posición en el momento t?

Al plantear otra forma, si se conoce la función de velocidad f' del maglev, ¿podrá determinarse la función de su posición f?

Para resolver este problema, se necesita el concepto de la antiderivada de una función.

Antiderivada

Una función F es una **antiderivada** de f sobre el intervalo I si $F'(x) = f(x)$ para toda x en I.

Por consiguiente, una antiderivada de una función f es una función F cuya derivada es f. Por ejemplo, $F(x) = x^2$ es una antiderivada de $f(x) = 2x$ debido a que

$$F'(x) = \frac{d}{dx}(x^2) = 2x = f(x)$$

y $F(x) = x^3 + 2x + 1$ es una antiderivada de $f(x) = 3x^2 + 2$ debido a que

$$F'(x) = \frac{d}{dx}(x^3 + 2x + 1) = 3x^2 + 2 = f(x)$$

EJEMPLO 1 Sea $F(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + x - 1$. Demuestre que F es una antiderivada de $f(x) = x^2 - 4x + 1$.

Solución Al diferenciar la función F, obtenemos

$$F'(x) = x^2 - 4x + 1 = f(x)$$

y los resultados deseados son los siguientes. ■

EJEMPLO 2 Sea $F(x) = x$, $G(x) = x + 2$ y $H(x) = x + C$, donde C es una constante. Demostramos que F, G y H son todas antiderivadas de la función f definida por $f(x) = 1$.

Solución Dado que

$$F'(x) = \frac{d}{dx}(x) = 1 = f(x)$$

$$G'(x) = \frac{d}{dx}(x + 2) = 1 = f(x)$$

$$H'(x) = \frac{d}{dx}(x + C) = 1 = f(x)$$

observe que F, G y H de hecho son antiderivadas de f. ■

El ejemplo 2 demuestra una vez más que una antiderivada G de una función f es conocida, luego otra antiderivada de f puede determinarse al sumar una constante arbitraria a la función G. El siguiente teorema plantea que ninguna otra función, con excepción de una obtenida de este modo, puede ser una antiderivada de f (se omite la prueba).

TEOREMA 1

Sea G una antiderivada de una función f. Luego, cada antiderivada F de f debe ser de la forma $F(x) = G(x) + C$, donde C es una constante.

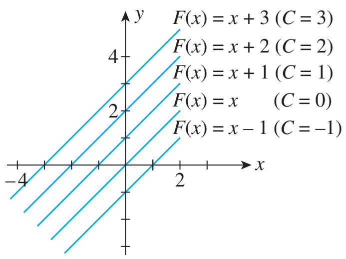


FIGURA 2
Las gráficas de algunas antiderivadas de $f(x) = 1$.

De vuelta al ejemplo 2, observe que existen infinidad de antiderivadas de una función $f(x) = 1$. Cada una se obtiene al especificar la constante C en la función $F(x) = x + C$. La figura 2 muestra las gráficas de algunas de estas antiderivadas por valores seleccionados de C. Estas gráficas constituyen parte de una familia de muchas rectas paralelas infinitas, cada una tiene una pendiente igual a 1. Este resultado es esperado, ya que existe infinidad de curvas (líneas rectas) con una pendiente igual a 1. Las antiderivadas $F(x) = x + C$ (C, una constante) son precisamente las funciones que representan a esta familia de líneas rectas.

EJEMPLO 3 Demuestre que la función $G(x) = x^2$ es una antiderivada de la función $f(x) = 2x$. Escriba una expresión general para las antiderivadas de f.

Solución Ya que $G'(x) = 2x = f(x)$, hemos demostrado que $G(x) = x^2$ es una antiderivada de $f(x) = 2x$. Por el teorema 1, cada antiderivada de la función $f(x) = 2x$ tiene la forma $F(x) = x^2 + C$, donde C es alguna constante. Las gráficas de algunas de las antiderivadas de f se muestran en la figura 3. ■

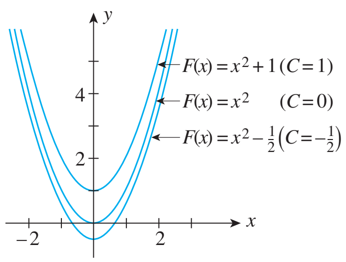


FIGURA 3
Las gráficas de algunas antiderivadas de $f(x) = 2x$.

Exploración con TECNOLOGÍA

Sea $f(x) = x^2 - 1$.

1. Demuestre que $F(x) = \frac{1}{3}x^3 - x + C$, donde C es una constante arbitraria, es una antiderivada de f.
2. Use la calculadora graficadora para trazar las gráficas de las antiderivadas de f que corresponden a $C = -2$, $C = -1$, $C = 0$, $C = 1$ y $C = 2$ sobre el mismo conjunto de ejes, utilice la ventana de visualización $[-4, 4] \times [-4, 4]$.
3. Si su calculadora tiene la capacidad, dibuje la recta tangente de cada una de las gráficas del punto 2 en el punto cuya coordenada x es 2. ¿Qué puede decir acerca de esta familia de rectas tangentes?
4. ¿Cuál es la pendiente de la recta tangente en esta familia? Explique cómo obtuvo su respuesta.

La integral indefinida

El proceso para determinar todas las antiderivadas de una función se llama **antidiferenciación** o **integración**. Utilice el símbolo $\int$, llamado **signo integral**, para indicar que la operación de integración se lleva a cabo en alguna función f. Por tanto,

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

[al leer "la integral indefinida de $f(x)$ con respecto a x es igual a $F(x)$ más C"] indica que la **integral indefinida** de f es la familia de funciones dadas por $F(x) + C$, donde $F'(x) = f(x)$. La función f al ser integrada se le da el nombre de **integrando**, y la constante C se llama **constante de integración**. La expresión dx seguida del integrando $f(x)$ recuerda que la operación se lleva a cabo con respecto a x. Si la variable independiente es t, escriba mejor $\int f(t)\,dt$. En este sentido ambas t y x son "variables ficticias".

Al utilizar esta notación, se pueden escribir los resultados de los ejemplos 2 y 3 como

$$\int 1\,dx = x + C \quad \text{y} \quad \int 2x\,dx = x^2 + K$$

donde C y K son constantes arbitrarias.

Reglas básicas de integración

La siguiente tarea es desarrollar algunas reglas para determinar la integral indefinida de una función f dada. Debido a que la integración y la diferenciación son operaciones inversas, se descubren muchas de las reglas de integración al realizar primero una cierta base en la antiderivada F de la función f al ser integrada. Después este resultado se verifica al demostrar que $F' = f$.

Regla 1: La integral indefinida de una constante

$$\int k\,dx = kx + C \qquad (k\text{, una constante})$$

Al demostrar este resultado, se observa que

$$F'(x) = \frac{d}{dx}(kx + C) = k$$

EJEMPLO 4 Determine cada una de las siguientes integrales indefinidas:

a. $\int 2\,dx$ **b.** $\int \pi^2\,dx$

Solución Cada uno de los integrandos tiene la forma $f(x) = k$, donde k es una constante. Al aplicar la regla 1 en cada caso da

a. $\int 2\,dx = 2x + C$

b. $\int \pi^2\,dx = \pi^2 x + C$ ■

Luego, de la regla de diferenciación,

$$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$$

obtenemos la siguiente regla de integración.

Regla 2: La regla de potencia

$$\int x^n\,dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C \qquad (n \neq -1)$$

Una antiderivada de una función de potencia es otra función de potencia obtenida desde el integrando al incrementar en 1 y dividir la expresión resultante entre la nueva potencia.

Para demostrar este resultado, observe que

$$\begin{aligned} F'(x) &= \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{n+1}x^{n+1} + C\right) \\ &= \frac{n+1}{n+1}x^n \\ &= x^n \\ &= f(x) \end{aligned}$$

EJEMPLO 5 Determine cada una de las siguientes integrales indefinidas:

a. $\int x^3\,dx$ **b.** $\int x^{3/2}\,dx$ **c.** $\int \frac{1}{x^{3/2}}\,dx$

Solución Cada integrando es una función de potencia con un exponente $n \neq -1$. Al aplicar la regla 2 en cada caso obtenemos los siguientes resultados:

a. $\int x^3\,dx = \frac{1}{4}x^4 + C$

b. $\int x^{3/2}\,dx = \frac{1}{\frac{5}{2}}x^{5/2} + C = \frac{2}{5}x^{5/2} + C$

c. $\int \frac{1}{x^{3/2}}\,dx = \int x^{-3/2}\,dx = \frac{1}{-\frac{1}{2}}x^{-1/2} + C = -2x^{-1/2} + C = -\frac{2}{x^{1/2}} + C$

Estos resultados pueden verificarse al diferenciar cada una de las antiderivadas y demostrar que el resultado es igual al integrando correspondiente. ■

La siguiente regla expresa que un factor constante puede moverse a través de un signo integral.

Regla 3: La integral indefinida de una función constante múltiple

$$\int cf(x)\,dx = c\int f(x)\,dx \qquad (c,\ \text{es una constante})$$

La integral indefinida de una función constante múltiple es igual a la constante múltiple de la integral indefinida de la función.

Este resultado se deduce de la regla correspondiente de diferenciación (vea la regla 3, sección 9.4).

Sólo una constante puede “salir” de un signo integral. Por ejemplo, sería incorrecto escribir

$$\int x^2\,dx = x^2\int 1\,dx$$

De hecho, $\int x^2\,dx = \frac{1}{3}x^3 + C$, mientras que $x^2\int 1\,dx = x^2(x + C) = x^3 + Cx^2$.

EJEMPLO 6 Determine cada una de las siguientes integrales indefinidas:

a. $\int 2t^3\, dt$ **b.** $\int -3x^{-2}\, dx$

Solución Cada integrando tiene la forma $cf(x)$, donde c es una constante. Al aplicar la regla 3, obtenemos:

a. $\int 2t^3\, dt = 2\int t^3\, dt = 2\left(\frac{1}{4}t^4 + K\right) = \frac{1}{2}t^4 + 2K = \frac{1}{2}t^4 + C$

donde $C = 2K$. A partir de ahora, se escribirá la constante de integración como C, ya que cualquier múltiplo distinto de cero de una constante arbitraria es una constante.

b. $\int -3x^{-2}\, dx = -3\int x^{-2}\, dx = (-3)(-1)\, x^{-1} + C = \frac{3}{x} + C$ ■

Regla 4: La regla de la suma

$$\int [f(x) + g(x)]\, dx = \int f(x)\, dx + \int g(x)\, dx$$

$$\int [f(x) - g(x)]\, dx = \int f(x)\, dx - \int g(x)\, dx$$

La integral indefinida de una suma (diferencia) de dos funciones integrables es igual a la suma (diferencia) de sus integrales indefinidas.

Este resultado es fácilmente extendible al caso que involucra la suma y la diferencia de cualquier número finito de funciones. Como en la regla 3, al demostrar la regla 4 se desprende la regla correspondiente de diferenciación (vea la regla 4, sección 9.4).

VIDEO

EJEMPLO 7 Determine la integral indefinida

$$\int (3x^5 + 4x^{3/2} - 2x^{-1/2})\, dx$$

Solución Al aplicar la versión extendida de la regla 4, encontramos que

$$\begin{aligned}
&\int (3x^5 + 4x^{3/2} - 2x^{-1/2})\, dx \\
&\quad = \int 3x^5\, dx + \int 4x^{3/2}\, dx - \int 2x^{-1/2}\, dx \\
&\quad = 3\int x^5\, dx + 4\int x^{3/2}\, dx - 2\int x^{-1/2}\, dx && \text{Regla 3} \\
&\quad = (3)\left(\frac{1}{6}\right)x^6 + (4)\left(\frac{2}{5}\right)x^{5/2} - (2)(2)x^{1/2} + C && \text{Regla 2} \\
&\quad = \frac{1}{2}x^6 + \frac{8}{5}x^{5/2} - 4x^{1/2} + C
\end{aligned}$$ ■

Observe que se han combinado las tres constantes de integración, las cuales surgen de la evaluación de las tres integrales indefinidas para obtener una constante C. Después de todo, la suma de las tres constantes arbitrarias es también una constante arbitraria.

Regla 5: La integral indefinida de una función exponencial

$$\int e^x\, dx = e^x + C$$

La integral indefinida de la función exponencial con base e es igual a la función misma (excepto, claro, por la constante de integración).

EJEMPLO 8 Determine la integral indefinida

$$\int (2e^x - x^3)\, dx$$

Solución Tenemos

$$\begin{aligned}\int (2e^x - x^3)\, dx &= \int 2e^x\, dx - \int x^3\, dx \\ &= 2\int e^x\, dx - \int x^3\, dx \\ &= 2e^x - \frac{1}{4}x^4 + C\end{aligned}$$

La última regla de integración en esta sección abarca la integración de la función $f(x) = x^{-1}$. Recuerde que esta función constituye el único caso excepcional en la integración de la función de potencia $f(x) = x^n$ (vea la regla 2).

Regla 6: La integral indefinida de la función $f(x) = x^{-1}$

$$\int x^{-1}\, dx = \int \frac{1}{x}\, dx = \ln|x| + C \qquad (x \neq 0)$$

Para demostrar la regla 6, observe que

$$\frac{d}{dx} \ln|x| = \frac{1}{x}$$ Vea la regla 10, sección 9.7.

EJEMPLO 9 Determine la integral indefinida

$$\int \left(2x + \frac{3}{x} + \frac{4}{x^2}\right) dx$$

Solución

$$\begin{aligned}\int \left(2x + \frac{3}{x} + \frac{4}{x^2}\right) dx &= \int 2x\, dx + \int \frac{3}{x}\, dx + \int \frac{4}{x^2}\, dx \\ &= 2\int x\, dx + 3\int \frac{1}{x}\, dx + 4\int x^{-2}\, dx \\ &= 2\left(\frac{1}{2}\right)x^2 + 3\ln|x| + 4\,(-1)x^{-1} + C \\ &= x^2 + 3\ln|x| - \frac{4}{x} + C\end{aligned}$$

Ecuaciones diferenciales

Volvamos al planteamiento del problema al inicio de la sección: *dada la derivada de una función f', ¿se puede determinar la función f?* Como ejemplo, suponga que se ha dado la función

$$f'(x) = 2x - 1 \tag{1}$$

y se desea determinar $f(x)$. Por lo que se conoce ahora, se puede determinar f mediante la integración de la ecuación (1). Por tanto,

$$f(x) = \int f'(x)\, dx = \int (2x - 1)\, dx = x^2 - x + C \tag{2}$$

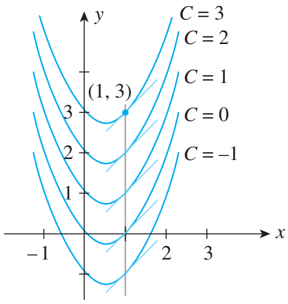


FIGURA **4**
Las gráficas de algunas funciones que tienen la derivada $f'(x) = 2x - 1$. Observe que las pendientes de las tangentes hacia las gráficas son las mismas por un valor fijo de x.

donde C es una constante arbitraria. Así, muchas funciones infinitas tienen la derivada f', cada una se diferencia de la otra por una constante.

La ecuación (1) se llama ecuación diferencial. En general, una **ecuación diferencial** es aquella que involucra la derivada o diferencial de una función desconocida. [En el caso de la ecuación (1), la función desconocida es f.] La **solución** de una ecuación diferencial es cualquier función que satisfaga a la ecuación diferencial. Por consiguiente, la ecuación (2) proporciona *todas* las soluciones a la ecuación diferencial (1) y ésta es, por consiguiente, conocida como la **solución general** de la ecuación diferencial $f'(x) = 2x - 1$.

Las gráficas de $f(x) = x^2 - x + C$ para valores seleccionados de C se muestran en la figura 4. Estas gráficas tienen en común una propiedad: para cualquier valor fijo de x, las rectas tangentes a estas gráficas tienen la misma pendiente. Esto se deduce debido a que cualquier miembro de la familia de $f(x) = x^2 - x + C$ debe tener la misma pendiente en x, a saber, $2x - 1$.

Aunque existe infinidad de soluciones para la ecuación diferencial $f'(x) = 2x - 1$, se puede obtener una **solución particular** al especificar el valor de la función que debe asumir un cierto valor de x. Por ejemplo, suponga que se estipula que la función f en consideración debe satisfacer la condición $f(1) = 3$ o, equivalentemente, la gráfica de f debe pasar por el punto $(1, 3)$. Luego, al usar la condición sobre la solución general $f(x) = x^2 - x + C$, determine que

$$f(1) = 1 - 1 + C = 3$$

y $C = 3$. Por tanto, la solución particular es $f(x) = x^2 - x + 3$ (vea la figura 4).

La condición $f(1) = 3$ es un ejemplo de una condición inicial. De forma general, una **condición inicial** es una condición impuesta sobre el valor de f en $x = a$.

Problemas del valor inicial

Un **problema del valor inicial** es uno en el que para determinar una función que satisfaga se requiere (1) una ecuación diferencial y (2) una o más condiciones iniciales. Los siguientes son ejemplos de problemas con valor inicial.

EJEMPLO 10 Determine la función f si se sabe que

$$f'(x) = 3x^2 - 4x + 8 \quad \text{y} \quad f(1) = 9$$

Solución Se requiere que resolvamos el problema del valor inicial

$$\left.\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 - 4x + 8 \\ f(1) &= \qquad\qquad\quad 9 \end{aligned}\right\}$$

La función integradora f', determina

$$\begin{aligned} f(x) &= \int f'(x)\,dx \\ &= \int (3x^2 - 4x + 8)\,dx \\ &= x^3 - 2x^2 + 8x + C \end{aligned}$$

Al utilizar la condición $f(1) = 9$, se tiene

$$9 = f(1) = 1^3 - 2(1)^2 + 8(1) + C = 7 + C \quad \text{o} \quad C = 2$$

Sin embargo, la función requerida f está dada por $f(x) = x^3 - 2x^2 + 8x + 2$. ■

EJEMPLO DE APLICACIÓN 11 Velocidad de un maglev En una prueba de funcionamiento de un maglev a lo largo de una vía recta de monorriel, los datos obtenidos de la lectura de su velocímetro indican que la velocidad del tren en el tiempo t puede ser descrita por la función de velocidad

$$v(t) = 8t \qquad (0 \leq t \leq 30)$$

Determine la función de posición del tren. Asuma que al principio el tren está localizado en el origen de una línea coordenada.

Solución Sea $s(t)$ la posición del tren en cualquier momento t $(0 \leq t \leq 30)$. Después, $s'(t) = v(t)$. Por tanto, tenemos el valor inicial del problema

$$\left.\begin{aligned} s'(t) &= 8t \\ s(0) &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Al integrar ambos lados de la ecuación diferencial $s'(t) = 8t$, obtenemos

$$s(t) = \int s'(t)\,dt = \int 8t\,dt = 4t^2 + C$$

donde C es una constante arbitraria. Al evaluar C, se utiliza la condición inicial $s(0) = 0$ para escribir

$$s(0) = 4(0) + C = 0 \quad \text{o} \quad C = 0$$

Sin embargo, la función de la posición requerida es $s(t) = 4t^2$ $(0 \leq t \leq 30)$. ■

VIDEO

EJEMPLO DE APLICACIÓN 12 Circulación de una revista La circulación actual del *Investor's Digest* es de 3,000 ejemplares por semana. El editor en jefe proyecta una tasa de crecimiento semanal de

$$4 + 5t^{2/3}$$

ejemplares por semana, t semanas a partir de ahora, para los siguientes tres años. Con base en sus cálculos, ¿cuál será la circulación del digest en 125 semanas a partir de ahora?

Solución Sea $S(t)$ la circulación del digest en t semanas a partir de ahora. Entonces, $S'(t)$ es la tasa de cambio en la circulación en la $t$ava semana y está dada por

$$S'(t) = 4 + 5t^{2/3}$$

Además, la circulación actual de 3,000 ejemplares por semana se traduce en la condición inicial $S(0) = 3{,}000$. Al integrar la ecuación diferencial con respecto a t da

$$\begin{aligned} S(t) &= \int S'(t)\,dt = \int (4 + 5t^{2/3})\,dt \\ &= 4t + 5\left(\frac{t^{5/3}}{\frac{5}{3}}\right) + C = 4t + 3t^{5/3} + C \end{aligned}$$

Al determinar el valor de C, usamos la condición $S(0) = 3{,}000$, para escribir

$$S(0) = 4(0) + 3(0) + C = 3{,}000$$

que da $C = 3{,}000$. Sin embargo, la circulación del digest en t semanas a partir de ahora será

$$S(t) = 4t + 3t^{5/3} + 3{,}000$$

En particular, la circulación en 125 semanas a partir de ahora será

$$S(125) = 4(125) + 3(125)^{5/3} + 3{,}000 = 12{,}875$$

ejemplares por semana. ■

11.1 Ejercicios de autoevaluación

1. Resuelva $\int \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{2}{x} + 3e^x\right) dx$.

2. Determine la regla para la función f dado que (1) la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en cualquier punto $P(x, f(x))$ está dada por la expresión $3x^2 - 6x + 3$ y (2) la gráfica de f pasa a por el punto $(2, 9)$.

3. Suponga que la participación de los nuevos automóviles de United Motors vendidos a un cierto país cambia a una tasa de
$$f(t) = -0.01875t^2 + 0.15t - 1.2 \qquad (0 \leq t \leq 12)$$
por ciento anual en el año t ($t = 0$ corresponde a principios de 1996). La participación de mercado de la empresa a principios de 1996 fue 48.4%. ¿Cuál fue la participación de mercado de United Motors a principios de 2008?

Las soluciones de los ejercicios de autoevaluación 11.1 se encuentran en la página 755.

11.1 Preguntas de concepto

1. ¿Qué es una antiderivada? Dé un ejemplo.

2. Si $f'(x) = g'(x)$ para toda x dentro de un intervalo I, ¿cuál es la relación entre f y g?

3. ¿Cuál es la diferencia entre una antiderivada de f y la integral indefinida de f?

4. ¿La regla de la potencia puede utilizarse para integrar $\int \frac{1}{x}\,dx$? Explique su respuesta.

11.1 Ejercicios

En los ejercicios 1-4, verifique directamente que *F* es una antiderivada de *f*.

1. $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - x + 2;\ f(x) = x^2 + 4x - 1$

2. $F(x) = xe^x + \pi;\ f(x) = e^x(1 + x)$

3. $F(x) = \sqrt{2x^2 - 1};\ f(x) = \dfrac{2x}{\sqrt{2x^2 - 1}}$

4. $F(x) = x \ln x - x;\ f(x) = \ln x$

En los ejercicios 5-8, (a) verifique que *G* es una antiderivada de *f*, (b) determine todas las antiderivadas de *f* y (c) trace las gráficas de algunas de las familias de las antiderivadas determinadas en el punto (b).

5. $G(x) = 2x;\ f(x) = 2$

6. $G(x) = 2x^2;\ f(x) = 4x$

7. $G(x) = \frac{1}{3}x^3;\ f(x) = x^2$

8. $G(x) = e^x;\ f(x) = e^x$

En los ejercicios 9-50, determine la integral indefinida.

9. $\int 6\,dx$

10. $\int \sqrt{2}\,dx$

11. $\int x^3\,dx$

12. $\int 2x^5\,dx$

13. $\int x^{-4}\,dx$

14. $\int 3t^{-7}\,dt$

15. $\int x^{2/3}\,dx$

16. $\int 2u^{3/4}\,du$

17. $\int x^{-5/4}\,dx$

18. $\int 3x^{-2/3}\,dx$

19. $\int \frac{2}{x^2}\,dx$

20. $\int \frac{1}{3x^5}\,dx$

21. $\int \pi\sqrt{t}\,dt$

22. $\int \frac{3}{\sqrt{t}}\,dt$

23. $\int (3 - 2x)\,dx$

24. $\int (1 + u + u^2)\,du$

25. $\int (x^2 + x + x^{-3})\,dx$

26. $\int (0.3t^2 + 0.02t + 2)\,dt$

27. $\int 4e^x\,dx$

28. $\int (1 + e^x)\,dx$

29. $\int (1 + x + e^x)\,dx$

30. $\int (2 + x + 2x^2 + e^x)\,dx$

31. $\int \left(4x^3 - \frac{2}{x^2} - 1\right) dx$

32. $\int \left(6x^3 + \frac{3}{x^2} - x\right) dx$

33. $\int (x^{5/2} + 2x^{3/2} - x)\,dx$

34. $\int (t^{3/2} + 2t^{1/2} - 4t^{-1/2})\,dt$

35. $\int \left(\sqrt{x} + \frac{3}{\sqrt{x}}\right) dx$

36. $\int \left(\sqrt[3]{x^2} - \frac{1}{x^2}\right) dx$

37. $\int \left(\frac{u^3 + 2u^2 - u}{3u}\right) du$

Sugerencia: $\frac{u^3 + 2u^2 - u}{3u} = \frac{1}{3}u^2 + \frac{2}{3}u - \frac{1}{3}$

38. $\int \frac{x^4 - 1}{x^2}\,dx$

Sugerencia: $\frac{x^4 - 1}{x^2} = x^2 - x^{-2}$

39. $\int (2t + 1)(t - 2)\,dt$

40. $\int u^{-2}(1 - u^2 + u^4)\,du$

41. $\int \frac{1}{x^2}(x^4 - 2x^2 + 1)\,dx$ **42.** $\int \sqrt{t}\,(t^2 + t - 1)\,dt$

43. $\int \frac{ds}{(s+1)^{-2}}$ **44.** $\int \left(\sqrt{x} + \frac{3}{x} - 2e^x\right) dx$

45. $\int (e^t + t^e)\,dt$ **46.** $\int \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx$

47. $\int \left(\frac{x^3 + x^2 - x + 1}{x^2}\right) dx$

Sugerencia: Simplifique primero el integrando.

48. $\int \frac{t^3 + \sqrt[3]{t}}{t^2}\,dt$

Sugerencia: Simplifique primero el integrando.

49. $\int \frac{(\sqrt{x} - 1)^2}{x^2}\,dx$

Sugerencia: Simplifique primero el integrando.

50. $\int (x+1)^2\left(1 - \frac{1}{x}\right) dx$

Sugerencia: Simplifique primero el integrando.

En los ejercicios 51-58, determine $f(x)$ al resolver el problema del valor inicial.

51. $f'(x) = 2x + 1;\ f(1) = 3$

52. $f'(x) = 3x^2 - 6x;\ f(2) = 4$

53. $f'(x) = 3x^2 + 4x - 1;\ f(2) = 9$

54. $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}};\ f(4) = 2$

55. $f'(x) = 1 + \frac{1}{x^2};\ f(1) = 2$

56. $f'(x) = e^x - 2x;\ f(0) = 2$

57. $f'(x) = \frac{x+1}{x};\ f(1) = 1$

58. $f'(x) = 1 + e^x + \frac{1}{x};\ f(1) = 3 + e$

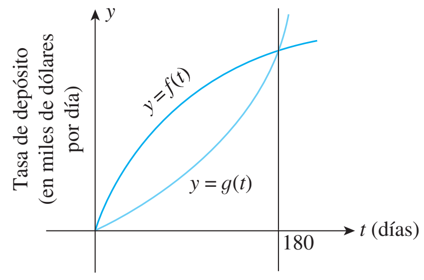
En los ejercicios 59-62, determine la función f dada la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en cualquier punto $(x, f(x))$, $f'(x)$, que la gráfica de f pase por el punto dado.

59. $f'(x) = \frac{1}{2}x^{-1/2};\ (2, \sqrt{2})$

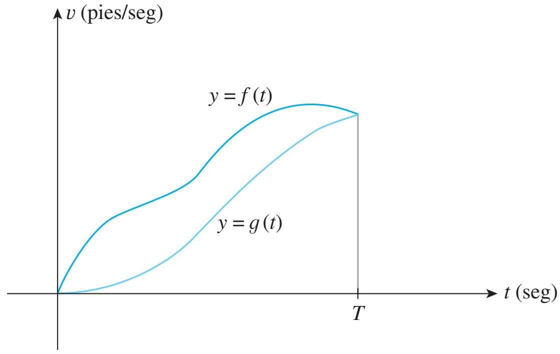
60. $f'(t) = t^2 - 2t + 3;\ (1, 2)$

61. $f'(x) = e^x + x;\ (0, 3)$ **62.** $f'(x) = \frac{2}{x} + 1;\ (1, 2)$

63. **Depósitos bancarios** Madison Finance abrió dos sucursales en septiembre 1 ($t = 0$). La sucursal A está localizada en un parque industrial establecido, y la sucursal B dentro de un nuevo desarrollo de rápido crecimiento. La tasa neta a la que el dinero fue depositado en las sucursales A y B en los primeros 180 días hábiles está dada por las gráficas de f y g, respectivamente (vea la figura). ¿Cuál de las sucursales tiene la mayor cantidad de depósitos al final de los 180 días hábiles? Explique su respuesta.



64. **Velocidad de un automóvil** Dos automóviles, uno al lado del otro, empiezan a viajar a partir del reposo a lo largo de un camino recto. La velocidad del automóvil A está dada por $v = f(t)$, y la velocidad del automóvil B por $v = g(t)$. Las gráficas de f y g se muestran en la figura siguiente. ¿Los vehículos permanecieron uno al lado del otro después de T segundos? Si no, ¿cuál de los automóviles llevaba la delantera? Justifique su respuesta.



65. **Velocidad de un automóvil** La velocidad de un automóvil (en pies por segundo) t seg a partir del reposo está dada por la función

$$f(t) = 2\sqrt{t} \qquad (0 \le t \le 30)$$

Determine la posición del automóvil, $s(t)$, en cualquier momento t. Asuma que $s(0) = 0$.

66. **Velocidad de un tren** La velocidad (en pies por segundo) de un maglev es

$$v(t) = 0.2t + 3 \qquad (0 \le t \le 120)$$

En $t = 0$, éste se encuentra en la estación. Determine la función en la posición dada del tren en el momento t, asumiendo que el movimiento toma lugar a lo largo del tramo recto del riel.

67. **Costo de producción de los relojes** Lorimar Watch Company fabrica relojes para viaje. La función del costo marginal diario que se asocia con la fabricación de estos relojes es

$$C'(x) = 0.000009x^2 - 0.009x + 8$$

donde $C'(x)$ se mide en dólares por unidad y x denota el número de unidades producidas. La gerencia ha determinado que el costo fijo diario que se tiene al fabricar estos relojes es \$120. Determine el costo que Lorimar tiene al fabricar los primeros 500 relojes para viaje por día.

68. Funciones de ingresos La gerencia de Lorimar Watch Company ha determinado que la función de ingreso marginal diario asociada con la producción y venta de sus relojes para viaje está dada por

$$R'(x) = -0.009x + 12$$

donde x denota el número de unidades producidas y vendidas y $R'(x)$ se mide en dólares por unidad.

a. Determine la función de ingreso $R(x)$ asociada con la producción y venta de estos relojes.

b. ¿Cuál es la ecuación para la demanda que relaciona el precio unitario de la venta total con la cantidad demandada de relojes para viaje?

69. Funciones de utilidad Cannon Precision Instruments fabrica un flash electrónico automático con circuitos Thyrister. La utilidad marginal vinculada con la producción y venta de estos flashes electrónicos es

$$P'(x) = -0.004x + 20$$

dólares/unidad/mes cuando el nivel de producción es x por mes. El costo fijo de Cannon por la producción y venta de estos flashes electrónicos es \$16,000 por mes. ¿A qué nivel de producción Cannon obtiene una utilidad máxima? ¿Cuál es la utilidad mensual máxima?

70. Costo de producción de las guitarras Carlota Music Company estima que el costo marginal producción de su Serie Guitarras Profesionales es

$$C'(x) = 0.002x + 100$$

dólares por mes, cuando el nivel de producción es x por mes. Los costos fijos que tiene la empresa son \$4,000 por mes. Determine el costo mensual total que Carlota tiene en la producción de guitarras por mes.

71. Costos de atención médica Se proyecta que los gastos nacionales en atención médica crecerán a una tasa de

$$r(t) = 0.0058t + 0.159 \qquad (0 \leq t \leq 13)$$

billones de dólares por año desde 2002 hasta 2015. Aquí $t = 0$ corresponde a 2002. El gasto en 2002 fue de \$1.60 billones.

a. Determine una función f que dé los gastos nacionales en atención médica previstos en el año t.

b. ¿Qué proyecta el modelo del gasto nacional en atención médica para 2015?

Fuente: National Health Expenditures

72. Control de calidad Como parte del programa de control de calidad, el juego de ajedrez fabricado por los hermanos Jones es sometido a una inspección final antes del embalaje. La tasa del número de juegos revisados por un inspector en t horas entre las 8 a.m. y hasta las 12 del día es de aproximadamente

$$N'(t) = -3t^2 + 12t + 45 \qquad (0 \leq t \leq 4)$$

a. Determine una expresión $N(t)$ que se aproxime al número de juegos inspeccionados al final de t horas.
Sugerencia: $N(0) = 0$.

b. ¿Cuántos juegos en promedio supervisó el inspector durante el cambio de turno matutino?

73. Suscripciones de radio satelital Con base en datos obtenidos por medio del sondeo de compradores de automóviles, el número de suscriptores de radio satelital se espera crezca a una tasa de

$$r(t) = -0.375t^2 + 2.1t + 2.45 \qquad (0 \leq t \leq 5)$$

millones de suscriptores por año entre 2003 ($t = 0$) y 2008 ($t = 5$). El número de suscriptores de radio satelital a principios de 2003 fue 1.5 millones.

a. Determine una expresión que dé el número de suscriptores de radio satelital al año t ($0 \leq t \leq 5$).

b. Con base en este modelo, ¿cuál fue el número de suscriptores de radio satelital en 2008?

Fuente: Carmel Group

74. Riesgo de síndrome Down La tasa a la cual cambia el riesgo de síndrome Down se aproxima por la función

$$r(x) = 0.004641x^2 - 0.3012x + 4.9 \qquad (20 \leq x \leq 45)$$

donde $r(x)$ se mide en porcentaje de nacimientos por año y x es la edad materna al momento del parto.

a. Determine una función f que dé el riesgo como un porcentaje de todos los nacimientos, cuando la edad materna al momento del parto es x años, ya que el riesgo de síndrome Down a los 30 años es 0.14% de todos los nacimientos.

b. Con base en este modelo, ¿cuál es el riesgo de síndrome Down cuando la edad materna al momento del parto es de 40 años? ¿A los 45?

Fuente: New England Journal of Medicine

75. Deudas en tarjetas de crédito La deuda promedio en tarjetas de crédito por hogar en Estados Unidos entre 1990 ($t = 0$) y 2003 ($t = 13$) crecía a un ritmo de aproximadamente

$$D(t) = -4.479t^2 + 69.8t + 279.5 \qquad (0 \leq t \leq 13)$$

dólares por año. La deuda promedio en tarjeta de crédito por hogar en Estados Unidos fue \$2,917 en 1990.

a. Determine una función f que dé el promedio aproximado de deuda en tarjeta de crédito por cada hogar estadounidense en el año t ($0 \leq t \leq 13$).

b. Utilice el resultado del inciso (a) para estimar el promedio de deuda en tarjeta de crédito por cada hogar estadounidense en 2003.

Fuente: Encore Capital Group

76. Cultivos genéticamente modificados El número total de acres de cultivos genéticamente modificados en todo el mundo ha crecido desde 1997 hasta 2003, cambiando a una tasa de

$$R(t) = 2.718t^2 - 19.86t + 50.18 \qquad (0 \leq t \leq 6)$$

millones de acres por año. El número total de acres de dichos cultivos ha crecido en 1997 ($t = 0$) y fue de 27.2 millones de acres. ¿Cuántos acres de cultivos genéticamente modificados se cultivaron en todo el mundo durante 2003?

Fuente: International Services for the Acquisition of Agri-biotech Applications

77. Cirugías de bypass gástrico Un método para perder peso que ha ganado popularidad es el de la reducción mediante cirugía. En general está reservado para personas con por lo menos 100 libras de sobrepeso, debido a que el procedimiento conlleva un serio riesgo de muerte o complicaciones. Según la Sociedad Estadounidense de Cirugía Bariatra, el número de pacientes con obesidad mórbida que se somete a este procedimiento se incrementó a una tasa de

$$R(t) = 9.399t^2 - 13.4t + 14.07 \qquad (0 \leq t \leq 3)$$

miles por año, con $t = 0$ correspondiente a 2000. El número de cirugías de bypass gástrico realizadas en 2000 fue 36,700.

a. Determine una expresión que dé el número de cirugías de bypass gástrico realizadas por año t $(0 \leq t \leq 3)$.

b. Utilice el resultado del inciso (a) para determinar el número de cirugías por bypass gástrico llevadas a cabo en 2003.

Fuente: American Society for Bariatric Surgery

78. Venta de anuncios en línea Según un estudio realizado en 2004, la proporción de la publicidad en línea en todo el mundo, como porcentaje del mercado total de la publicidad, se espera crezca a una tasa de

$$R(t) = -0.033t^2 + 0.3428t + 0.07 \qquad (0 \leq t \leq 6)$$

por ciento al año en el tiempo t (en años), con $t = 0$ correspondiente a principios de 2000. El mercado en línea a principios de 2000 fue 2.9% del total del mercado de la publicidad.

a. ¿Cuál es la participación de mercado de la publicidad en línea en cualquier momento t?

b. ¿Cuál fue la participación de mercado de la publicidad en línea proyectada a principios de 2005?

Fuente: Jupiter Media Metrix, Inc.

79. Costo de la atención médica Los costos promedio del Medicare (cobertura de gastos médicos) tradicional están fuera del alcance de sus beneficiarios (incluyen las primas, participación de los gastos y medicamentos con receta que no están cubiertos por Medicare) y se prevé que crezcan a una tasa de

$$C'(t) = 12.288t^2 - 150.5594t + 695.23$$

dólares por año, donde t se mide en intervalos de 5 años, con $t = 0$ correspondiente a 2000. Los costos fuera del alcance de los beneficiarios en 2000 fueron $3,142.

a. Determine una expresión que dé los costos fuera del alcance de los beneficiarios en el año t.

b. ¿Cuál es el promedio proyectado para los costos fuera del alcance de los beneficiarios en 2010?

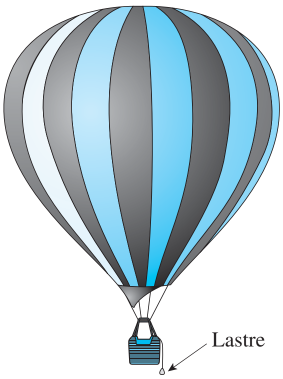
Fuente: The Urban Institute

80. Lastre de un globo aerostático El lastre se deja caer desde un globo aerostático que se cierne a una altitud de 400 pies. Su velocidad después de t segundos es $32t$ pies por segundo.

a. Determine la altura del lastre al momento t.
Sugerencia: $h'(t) = -32t$ y $h(0) = 400$.

b. ¿Cuándo el lastre golpeará el suelo?

c. Determine la velocidad del lastre cuando éste golpea el suelo.



81. Suscriptores de televisión por cable Un estudio realizado por TeleCable estima que el número de suscriptores de televisión por cable crecerá a una tasa de

$$100 + 210t^{3/4}$$

nuevos suscriptores por mes, t mes desde la fecha de inicio del servicio. Si 5,000 suscriptores contrataron el servicio antes de la fecha inicial, ¿cuántos suscriptores más habrá después de 16 meses a partir de esa fecha?

82. Contaminación por ozono La tasa de cambio del nivel de ozono, un gas invisible que es irritante y afecta la respiración, presente en la atmósfera en un cierto día de mayo en la ciudad de Riverside está dado por

$$R(t) = 3.2922t^2 - 0.366t^3 \qquad (0 < t < 11)$$

(medido por el índice estándar de contaminación por hora). Aquí t se mide en horas, con $t = 0$ corresponde a las 7 a.m. Determine el nivel de ozono $A(t)$ en cualquier momento t, asumiendo que a las 7 a.m. es cero.
Sugerencia: $A'(t) = R(t)$ y $A(0) = 0$.

Fuente: Los Angeles Times

83. Vuelo de un cohete La velocidad, en pies por segundo, de un cohete en t seg dentro de un vuelo vertical está dada por

$$v(t) = -3t^2 + 192t + 120$$

Determine la expresión $h(t)$ que proporciona la altitud del cohete, en pies, t seg después del despegue. ¿Cuál es la altitud del cohete 30 seg después de haber despegado?
Sugerencia: $h'(t) = v(t)$; $h(0) = 0$.

84. Crecimiento de la población El desarrollo de AstroWorld (“El Parque de Diversiones del Futuro”) en las afueras de una ciudad incrementará la población de la misma a una tasa de

$$4{,}500\sqrt{t} + 1{,}000$$

personas por año, t año desde el inicio de la construcción. La población antes de la construcción es 30,000. Determine la población proyectada 9 años después de que la construcción del parque haya iniciado.

85. Ventas de leche orgánica en Estados Unidos Las ventas de leche orgánica desde 1999 hasta 2004 crecieron a un ritmo de aproximadamente

$$R(t) = 3t^3 - 17.9445t^2 + 28.7222t + 26.632 \qquad (0 \le t \le 5)$$

millones de dólares por año, donde t se mide en años, con $t = 0$ correspondiente a 1999. El total de las ventas de leche orgánica en 1999 fue $108 millones.

a. Determine una expresión que dé el total de las ventas de la leche orgánica al año $t(0 \le t \le 5)$.

b. Con base en este modelo, ¿cuáles fueron las ventas totales de leche orgánica en 2004?

Fuente: Resource, Inc.

86. Área de la superficie de un cuerpo humano Datos empíricos sugieren que la superficie de un cuerpo humano de 180 cm de estatura cambia a una tasa de

$$S'(W) = 0.131773W^{-0.575}$$

metros cuadrados por kilogramo, donde W es el peso del cuerpo en kilogramos. Si el área de la superficie de un cuerpo humano de 180 cm de alto que pesa 70 kg es 1.886277 m^2, ¿cuál es el área de la superficie de un cuerpo humano de la misma estatura y peso de 75 kg?

87. Compañías de servicios para pacientes ambulatorios El número de agencias de cuidado de la salud certificadas por Medicare para la atención domiciliaria (70% son independientes y 30% son propiedad de un hospital o de grandes centros) ha disminuido a una tasa de

$$0.186e^{-0.02t} \qquad (0 \le t \le 14)$$

miles de agencias por año entre 1988 ($t = 0$) y 2002 ($t = 14$). El número de dichas agencias fue 9,300 unidades en 1988.

a. Determine una expresión que dé el número de agencias al cuidado de la salud en el año t.

b. ¿Cuál fue el número de agencias al cuidado de la salud en 2002?

c. Si este modelo se sostuvo hasta 2005, ¿cuántas agencias de atención existieron en 2005?

Fuente: Centers for Medicare and Medicaid Services

88. Estatura de los niños Según un modelo de Jenss para predecir la estatura de los niños en edad preescolar, la tasa de crecimiento de un niño típico es

$$R(t) = 25.8931e^{-0.993t} + 6.39 \qquad \left(\frac{1}{4} \le t \le 6\right)$$

centímetros por año, donde t se mide en años. La estatura de un niño preescolar de 3 meses de edad es 60.2952 cm.

a. Determine un modelo para predecir la estatura de un niño típico de preescolar a la edad t.

b. Utilice el resultado del inciso (a) para estimar la estatura de un niño de 1 año de edad.

89. Flujo sanguíneo en una arteria El físico del siglo XIX Jean Louis Marie Poiseuille descubrió que la tasa de cambio de la velocidad de la sangre r cm desde el eje central de una arteria (en centímetros/segundo/centímetro) está dada por

$$a(r) = -kr$$

donde k es una constante. Si el radio de una arteria es R cm, determine una expresión para la velocidad de la sangre como una función de r (vea la siguiente figura).

Sugerencia: $v'(r) = a(r)$ y $v(R) = 0$. (¿Por qué?)

Vaso sanguíneo

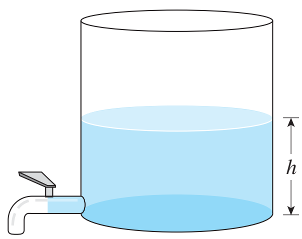
90. Aceleración de un automóvil Un automóvil que circula por una carretera recta a 66 pies por segundo, aceleró a una velocidad de 88 pies por segundo sobre una distancia de 440 pies. ¿Cuál fue la aceleración del automóvil asumiendo que ésta era constante?

91. Desaceleración de un automóvil ¿Qué desaceleración constante tendría un automóvil en marcha por un camino recto al ser sometido si fuera llevado desde el punto de reposo hasta una velocidad de 88 pies por segundo en 9 segundos? ¿Cuál sería la distancia de frenado?

92. Aterrizaje en un portaviones Un piloto aterriza un avión de combate sobre un portaviones. Al momento de aterrizar, la velocidad del avión es 160 mph. Si el avión es forzado a realizar una parada completa en 1 segundo y la desaceleración se supone constante, determine el número g en que el piloto está sometido durante el aterrizaje (1 g = 32 pies/seg^2).

93. Cruce de la línea de meta Después de dar la vuelta final, dos corredores emergen a la cabeza de una multitud. Cuando el corredor A está a 200 pies de la línea de meta, su velocidad es 22 pies por segundo, la cual mantiene hasta cruzar la línea de meta. En ese instante, el corredor B, quien está 20 pies detrás del corredor A y que corre a una velocidad de 20 pies/seg comienza el sprint. Suponiendo que el corredor B comience el sprint con una aceleración constante, ¿qué aceleración mínima le permitirá cruzar la línea de meta antes que el corredor A?

94. Drenado de un tanque Un tanque tiene un área constante transversal seccionada de 50 pies^2 y un orificio de un área constante seccionada transversalmente de $\frac{1}{2}$ pie^2 localizada en el fondo del tanque (vea la siguiente figura).



Si el tanque se llena con agua a una altura de h pies y se drena, entonces la altura del agua disminuye a un ritmo descrito por la ecuación

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{1}{25}\left(\sqrt{20} - \frac{t}{50}\right) \qquad (0 \le t \le 50\sqrt{20})$$

Determine una expresión para la altura del agua en cualquier momento t si su altura inicial es 20 pies.

95. Cantidad de lluvia Durante una tormenta eléctrica, la lluvia caía a una tasa de

$$\frac{8}{(t+4)^2} \qquad (0 \leq t \leq 2)$$

pulgadas por hora.

a. Determine una expresión que dé la cantidad total de lluvia después de t horas.

Sugerencia: La cantidad total de lluvia en $t = 0$ es cero.

b. ¿Cuánta lluvia ha caído después de 1 hora? ¿Después de 2 horas?

96. Aterrizaje de un avión de combate Un avión de combate aterrizó desde la cubierta de un portaaviones clase Nimitz con la ayuda de una catapulta de vapor. Si la aeronave está por alcanzar una velocidad de despegue de por lo menos 240 pies/seg después de recorrer 800 metros a lo largo de la cubierta de vuelo, determine la mínima aceleración a la que deberá someterse, suponiendo que ésta sea constante.

En los ejercicios 97-100, determine si el pronunciamiento es verdadero o falso. Si es verdadero, explique por qué lo es. Si es falso, dé un ejemplo para demostrar por qué lo es.

97. Si F y G son antiderivadas de f sobre un intervalo I, entonces $F(x) = G(x) + C$ en I.

98. Si F es una antiderivada de f sobre un intervalo I, entonces, $\int f(x)\,dx = F(x)$.

99. Si f y g son integrables, entonces $\int [2f(x) - 3g(x)]\,dx = 2\int f(x)\,dx - 3\int g(x)\,dx$.

100. Si f y g son integrables, entonces $\int f(x)g(x)\,dx = [\int f(x)\,dx][\int g(x)\,dx]$.

11.1 Soluciones de los ejercicios de autoevaluación

1.
$$\begin{aligned}\int\left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{2}{x} + 3e^x\right)dx &= \int\left(x^{-1/2} - \frac{2}{x} + 3e^x\right)dx \\ &= \int x^{-1/2}\,dx - 2\int\frac{1}{x}\,dx + 3\int e^x\,dx \\ &= 2x^{1/2} - 2 \text{ En } |x| + 3e^x + C \\ &= 2\sqrt{x} - 2 \text{ En } |x| + 3e^x + C\end{aligned}$$

2. La pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función f en cualquier punto $P(x, f(x))$ está dada por la derivada f' de f. Por tanto, la primera condición implica que

$$f'(x) = 3x^2 - 6x + 3$$

donde k es la constante de la integración.

$$\begin{aligned}f(x) &= \int(3x^2 - 6x + 3)\,dx \\ &= x^3 - 3x^2 + 3x + k\end{aligned}$$

donde k es la constante de la integración.

Para evaluar a k, utilice la condición inicial (2), la cual implica que $f(2) = 9$, o

$$9 = f(2) = 2^3 - 3(2)^2 + 3(2) + k$$

o $k = 7$. Así, la regla de definición requerida de la función f es

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 7$$

3. Sea $M(t)$ que denota la participación de mercado de United Motors en el año t. Entonces,

$$\begin{aligned}M(t) &= \int f(t)\,dt \\ &= \int(-0.01875t^2 + 0.15t - 1.2)\,dt \\ &= -0.00625t^3 + 0.075t^2 - 1.2t + C\end{aligned}$$

Para determinar el valor de C, utilice la condición inicial $M(0) = 48.4$, obteniendo $C = 48.4$. Sin embargo,

$$M(t) = -0.00625t^3 + 0.075t^2 - 1.2t + 48.4$$

En particular, la participación de mercado de automóviles nuevos de United Motors a principios de 2008 está dada por

$$\begin{aligned}M(t) = {}& -0.00625(12)^3 + 0.075(12)^2 \\ & -1.2(12) + 48.4 = 34\end{aligned}$$

o 34%.

11.2 Integración por sustitución

En la sección 11.1 se desarrollaron ciertas reglas de integración que están íntimamente relacionadas con las reglas de diferenciación correspondientes en el capítulo 9. En esta sección se presenta un método de integración llamado **método de sustitución**, el cual se relaciona con la regla de la cadena para diferenciar funciones. Cuando son utilizadas junto con las reglas de integración desarrolladas antes, el método de sustitución es una poderosa herramienta para la integración de una clasificación mayor de funciones.

Cómo funciona el método de sustitución

Considere la integral indefinida

$$\int 2(2x + 4)^5\,dx \tag{3}$$

Una forma de evaluar esta integral es expandir la expresión $(2x + 4)^5$ y después incorporar el integrando resultante término por término. Como una aproximación alterna, observe si puede simplificar la integral al realizar un cambio en la variable. Escriba

$$u = 2x + 4$$

con diferencial*

$$du = 2\,dx$$

Si primero se sustituyen estas cantidades dentro de la ecuación (3), obtenemos

$$\int 2(2x+4)^5\,dx = \underbrace{\int (2x+4)^5\,(2\,dx)}_{\text{Reescriba}} = \underbrace{\int u^5\,du}_{\left\{\begin{array}{l} u = 2x+4 \\ du = 2\,dx \end{array}\right.}$$

Ahora, la última integral involucra a una función de potencia y es fácilmente evaluada al utilizar la regla 2 de la sección 11.1. Por tanto,

$$\int u^5\,du = \frac{1}{6}u^6 + C$$

Sin embargo, al utilizar este resultado y reemplazar u por $u = 2x + 4$, obtenemos

$$\int 2(2x+4)^5\,dx = \frac{1}{6}(2x+4)^6 + C$$

Se puede verificar que el resultado anterior es de hecho el correcto al calcular

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{6}(2x+4)^6 + C\right] &= \frac{1}{6}\cdot 6(2x+4)^5(2) \qquad \text{Utilizar la regla de la cadena.} \\ &= 2(2x+4)^5 \end{aligned}$$

y al observar que la última expresión es sólo el integrando de (3).

El método de integración por sustitución

Para ver por qué la aproximación utilizada en la evaluación de la integral en (3) es exitosa, escriba

$$f(x) = x^5 \quad \text{y} \quad g(x) = 2x + 4$$

Entonces, $g'(x) = 2$. Además, el integrando de (3) es sólo la composición de f y g. Así,

$$\begin{aligned} (f \circ g)(x) &= f(g(x)) \\ &= [g(x)]^5 = (2x+4)^5 \end{aligned}$$

Sin embargo, el (3) puede escribirse como

$$\int f(g(x))\,g'(x)\,dx \tag{4}$$

A continuación se observará que una integral que tiene la forma (4) puede estar escrita siempre como

$$\int f(u)\,du \tag{5}$$

Suponga que F es una antiderivada de f. Por la regla de la cadena tenemos

$$\frac{d}{dx}[F(g(x))] = F'(g(x))g'(x)$$

*Si $u = f(x)$, la *diferencial* de u, escrita du, es $du = f'(x)dx$.

Sin embargo,

$$\int F'(g(x))\, g'(x)\, dx = F(g(x)) + C$$

Siendo $F' = f$ y al realizar la sustitución $u = g(x)$, tenemos

$$\int f(g(x))\, g'(x)\, dx = F(u) + C = \int F'(u)\, du = \int f(u)\, du$$

como se desea demostrar. Así, si la integral transformada es fácilmente evaluada, como es el caso de la integral (3), entonces el método de sustitución se aprobará con éxito.

Antes de observar más ejemplos, se resumen los pasos involucrados en la integración por sustitución.

Integración por sustitución

Paso 1 Sea $u = g(x)$, donde $g(x)$ es parte del integrando, normalmente la "función interna" de la función compuesta $f(g(x))$.

Paso 2 Determine $du = g'(x)\, dx$.

Paso 3 Utilice la sustitución $u = g(x)$ y $du = g'(x)\, dx$ para convertir la integral *inicial* en una que involucre *solamente a u.*

Paso 4 Calcule la integral resultante.

Paso 5 Reemplace u por $g(x)$ para obtener la solución final como una función de x.

Nota Algunas veces es necesario considerar diferentes alternativas de g para la sustitución $u = g(x)$ a fin de llevar a cabo el paso 3 y/o el paso 4. ■

EJEMPLO 1 Determine $\int 2x(x^2 + 3)^4\, dx$.

Solución

Paso 1 Observe que el integrando involucra la función compuesta $(x^2 + 3)^4$ con una "función interna" $g(x) = x^2 + 3$. Por consiguiente, elegimos $u = x^2 + 3$.

Paso 2 Determine $du = 2x\, dx$.

Paso 3 Al realizar la sustitución $u = x^2 + 3$ y $du = 2x\, dx$, obtenemos

$$\int 2x(x^2 + 3)^4\, dx \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Reescriba}}}{=} \int (x^2 + 3)^4(2x\, dx) = \int u^4\, du$$

una integral que involucra sólo la variable u.

Paso 4 Calcule

$$\int u^4\, du = \frac{1}{5}u^5 + C$$

Paso 5 Al reemplazar u por $x^2 + 3$, obtenemos

$$\int 2x(x^2 + 3)^4\, dx = \frac{1}{5}(x^2 + 3)^5 + C$$ ■

EJEMPLO 2 Determine $\int 3\sqrt{3x + 1}\, dx$.

Solución

Paso 1 El integrando que involucra la función compuesta $\sqrt{3x + 1}$ con la "función interna" $g(x) = 3x + 1$. Por tanto, $u = 3x + 1$.

Paso 2 Determine $du = 3\, dx$.

Paso 3 Al realizar la sustitución $u = 3x + 1$ y $du = 3\,dx$, obtenemos

$$\int 3\sqrt{3x+1}\,dx = \int \sqrt{3x+1}\,(3\,dx) \int \sqrt{u}\,du$$

una integral que involucra sólo la variable u.

Paso 4 Calcule

$$\int \sqrt{u}\,du = \int u^{1/2}\,du = \frac{2}{3}u^{3/2} + C$$

Paso 5 Al reemplazar u por $3x + 1$, obtenemos

$$\int 3\sqrt{3x+1}\,dx = \frac{2}{3}(3x+1)^{3/2} + C$$

EJEMPLO 3 Determine $\int x^2(x^3+1)^{3/2}\,dx$.

Solución

Paso 1 El integrando contiene la función compuesta $(x^3 + 1)^{3/2}$ con una “función interna” $g(x) = x^3 + 1$. Por consiguiente, $u = x^3 + 1$.

Paso 2 Determine $du = 3x^2\,dx$.

Paso 3 Realice la sustitución $u = x^3 + 1$ y $du = 3x^2\,dx$, o $x^2\,dx = \frac{1}{3}\,du$, obtenemos

$$\begin{aligned}\int x^2(x^3+1)^{3/2}\,dx &= \int (x^3+1)^{3/2}(x^2\,dx)\\ &= \int u^{3/2}\left(\frac{1}{3}\,du\right) = \frac{1}{3}\int u^{3/2}\,du\end{aligned}$$

una integral que involucra sólo u.

Paso 4 Calcule

$$\frac{1}{3}\int u^{3/2}\,du = \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{5}u^{5/2} + C = \frac{2}{15}u^{5/2} + C$$

Paso 5 Al reemplazar u por $x^3 + 1$, obtenemos

$$\int x^2(x^3+1)^{3/2}\,dx = \frac{2}{15}(x^3+1)^{5/2} + C$$

Explore y analice

Sea $f(x) = x^2(x^3 + 1)^{3/2}$. Al utilizar el resultado del ejemplo 3, se observa que una antiderivada de f es $F(x) = \frac{2}{15}(x^3 + 1)^{5/2}$. Sin embargo, en términos de u (donde $u = x^3 + 1$), una antiderivada de f es $G(u) = \frac{2}{15}u^{5/2}$. Calcule $F(2)$. Luego, suponga que desea calcular $F(2)$ al utilizar mejor la función G. ¿En qué valor de u evaluaría $G(u)$ para obtener el resultado deseado? Explique su respuesta.

En los ejemplos restantes se llevan a la práctica cada uno de los pasos involucrados al evaluar cada integral.

VIDEO

EJEMPLO 4 Determine $\int e^{-3x}\,dx$.

Solución Sea $u = -3x$ por tanto $du = -3\,dx$, o $dx = -\frac{1}{3}\,du$. Entonces,

$$\begin{aligned}\int e^{-3x}\,dx &= \int e^u\left(-\frac{1}{3}\,du\right) = -\frac{1}{3}\int e^u\,du\\ &= -\frac{1}{3}e^u + C = -\frac{1}{3}e^{-3x} + C\end{aligned}$$

EJEMPLO 5 Determine $\int \frac{x}{3x^2 + 1}\, dx$.

Solución Sea $u = 3x^2 + 1$. Entonces $du = 6x\, dx$, o $x\, dx = \frac{1}{6}\, du$. Al realizar las sustituciones apropiadas, obtenemos

$$\begin{aligned}
\int \frac{x}{3x^2 + 1}\, dx &= \int \frac{\frac{1}{6}}{u}\, du \\
&= \frac{1}{6} \int \frac{1}{u}\, du \\
&= \frac{1}{6} \ln |u| + C \\
&= \frac{1}{6} \ln(3x^2 + 1) + C \qquad \text{Puesto que } 3x^2 + 1 > 0
\end{aligned}$$

■

EJEMPLO 6 Determine $\int \frac{(\ln x)^2}{2x}\, dx$.

Solución Sea $u = \ln x$. Entonces,

$$du = \frac{d}{dx}(\ln x)\, dx = \frac{1}{x}\, dx$$

$$\begin{aligned}
\int \frac{(\ln x)^2}{2x}\, dx &= \frac{1}{2} \int \frac{(\ln x)^2}{x}\, dx \\
&= \frac{1}{2} \int u^2\, du \\
&= \frac{1}{6} u^3 + C \\
&= \frac{1}{6} (\ln x)^3 + C
\end{aligned}$$

■

Explore y analice

Suponga que $\int f(u)\, du = F(u) + C$.

1. Demuestre que $\int f(ax + b)\, dx = \frac{1}{a} F(ax + b) + C$.

2. ¿Cómo puede utilizar este resultado a fin de facilitar la evaluación de integrales como $\int (2x + 3)^5\, dx$ y $\int e^{3x-2}\, dx$? Explique su respuesta.

Los ejemplos 7 y 8 muestran cómo el método de sustitución puede utilizarse en situaciones prácticas.

VIDEO

EJEMPLO DE APLICACIÓN 7 Costo de producción de paneles para celdas solares En 1990 el director de la oficina de investigación y desarrollo de Soloron Corporation afirmó que el costo de producción de los paneles de celdas solares caería a una tasa de

$$\frac{58}{(3t + 2)^2} \qquad (0 \leq t \leq 10)$$

dólares por watt pico para los próximos t años, con $t = 0$ correspondiente a 1990 (un watt pico es la energía producida al medio día de un día soleado). En 1990 los paneles, que se usan para el sistema de energía fotovoltaica, tienen un costo de \$10 por watt pico. Determine una expresión que dé el costo por watt pico al fabricar paneles de energía solar a principios del año t. ¿Cuál fue el costo a principios de 2000?

Solución $C(t)$ denota el costo por watt pico al fabricar paneles de energía solar a inicios del año t. Entonces,

$$C'(t) = -\frac{58}{(3t + 2)^2}$$

Al integrar, determine que

$$\begin{aligned} C(t) &= \int \frac{-58}{(3t + 2)^2}\, dt \\ &= -58 \int (3t + 2)^{-2}\, dt \end{aligned}$$

Sea $u = 3t + 2$ por tanto

$$du = 3\, dt \quad \text{o} \quad dt = \frac{1}{3}\, du$$

Entonces,

$$\begin{aligned} C(t) &= -58\left(\frac{1}{3}\right) \int u^{-2} du \\ &= -\frac{58}{3}(-1)u^{-1} + k \\ &= \frac{58}{3(3t + 2)} + k \end{aligned}$$

donde k es una constante arbitraria. Para determinar el valor de k, observe que el costo por watt pico al producir paneles de energía solar a inicios de 1990 ($t = 0$) era 10, o $C(0) = 10$. Esto da

$$C(0) = \frac{58}{3(2)} + k = 10$$

o $k = \frac{1}{3}$. Sin embargo, la expresión requerida está dada por

$$\begin{aligned} C(t) &= \frac{58}{3(3t + 2)} + \frac{1}{3} \\ &= \frac{58 + (3t + 2)}{3(3t + 2)} = \frac{3t + 60}{3(3t + 2)} \\ &= \frac{t + 20}{3t + 2} \end{aligned}$$

El costo por watt pico para la fabricación de paneles de energía solar a principios de 2000 está dada por

$$C(10) = \frac{10 + 20}{3(10) + 2} \approx 0.94$$

o aproximadamente \$0.94 por watt pico. ■

Exploración con TECNOLOGÍA

Refiérase al ejemplo 7.

1. Use la calculadora graficadora para trazar la gráfica de

$$C(t) = \frac{t + 20}{3t + 2}$$

utilice la ventana de visualización $[0, 10] \times [0, 5]$. Después, utilice la capacidad de diferenciación numérica de la calculadora para calcular $C'(10)$.

2. Trace la gráfica de

$$C'(t) = -\frac{58}{(3t + 2)^2}$$

utilice la ventana de visualización $[0, 10] \times [-10, 0]$. Después, utilice la capacidad de evaluación de la calculadora graficadora para determinar $C'(10)$. ¿Es éste el valor de $C'(10)$ el mismo que se obtuvo en el punto 1? Explique su respuesta.

EJEMPLO DE APLICACIÓN 8 Projecciones de ventas de computadoras Un estudio preparado por el departamento de marketing de Universal Instruments pronosticó que, después de que su nueva línea de computadoras personales Galaxy salgan al mercado, las ventas crecerán a una tasa de

$$2{,}000 - 1{,}500e^{-0.05t} \qquad (0 \leq t \leq 60)$$

unidades por mes. Determine una expresión que dé el número total de computadoras que se venderán en t meses después de que estén disponibles en el mercado. ¿Cuántas computadoras venderá Universal en el primer año en que estén en el mercado?

Solución Sea $N(t)$ que denota el número total de computadoras que se podría esperar vender en t meses después de su introducción en el mercado. Entonces, la tasa de crecimiento de las ventas está dada por $N'(t)$ unidades por mes. Por tanto,

$$N'(t) = 2{,}000 - 1{,}500e^{-0.05t}$$

así

$$\begin{aligned} N(t) &= \int (2{,}000 - 1{,}500e^{-0.05t})\, dt \\ &= \int 2{,}000\, dt - 1{,}500 \int e^{-0.05t}\, dt \end{aligned}$$

Sobre la integración de la segunda integral por el método de sustitución, obtenemos

$$\begin{aligned} N(t) &= 2{,}000t + \frac{1{,}500}{0.05} e^{-0.05t} + C \\ &= 2{,}000t + 30{,}000e^{-0.05t} + C \end{aligned}$$

Sea $u = -0.05t$; después $du = -0.05\, dt$.

Para determinar el valor de C, observe que el número de computadoras vendidas al final del mes 0 es cero, así que $N(0) = 0$. Esto da

$$N(0) = 30{,}000 + C = 0$$

Ya que $e^0 = 1$

o $C = -30{,}000$. Sin embargo, la expresión requerida está dada por

$$\begin{aligned} N(t) &= 2{,}000t + 30{,}000e^{-0.05t} - 30{,}000 \\ &= 2{,}000t + 30{,}000(e^{-0.05t} - 1) \end{aligned}$$

El número de computadoras que Universal puede esperar vender en el primer año está dada por

$$N(12) = 2{,}000(12) + 30{,}000(e^{-0.05(12)} - 1) \approx 10{,}464$$

11.2 Ejercicios de autoevaluación

1. Calcule $\int \sqrt{2x+5}\, dx$.

2. Calcule $\int \frac{x^2}{(2x^3+1)^{3/2}}\, dx$.

3. Calcule $\int xe^{2x^2-1}\, dx$.

4. Según un estudio conjunto realizado por el departamento de administración ambiental de Oxnard y una agencia del gobierno estatal, la concentración de monóxido de carbono (CO) en el aire debido a la emisión del escape del automóvil aumenta a una tasa dada por

$$f(t) = \frac{8(0.1t+1)}{300(0.2t^2+4t+64)^{1/3}}$$

partes por millón (ppm) por año t. En la actualidad, la concentración de CO debido al escape del automóvil es 0.16 ppm. Determine una expresión que dé la concentración de CO en t años a partir de ahora.

Las soluciones de los ejercicios de autoevaluación 11.2 se encuentran en la página 764.

11.2 Preguntas de concepto

1. Explique cómo el método de sustitución funciona al mostrar los pasos utilizados para determinar $\int f(g(x))g'(x)\, dx$.

2. Explique por qué el método de sustitución funciona para la integral $\int xe^{-x^2}\, dx$, pero no para la integral $\int e^{-x^2}\, dx$.

11.2 Ejercicios

En los ejercicios 1-50, determine la integral indefinida.

1. $\int 4(4x+3)^4\, dx$
2. $\int 4x(2x^2+1)^7\, dx$
3. $\int (x^3-2x)^2(3x^2-2)\, dx$
4. $\int (3x^2-2x+1)(x^3-x^2+x)^4\, dx$
5. $\int \frac{4x}{(2x^2+3)^3}\, dx$
6. $\int \frac{3x^2+2}{(x^3+2x)^2}\, dx$
7. $\int 3t^2\sqrt{t^3+2}\, dt$
8. $\int 3t^2(t^3+2)^{3/2}\, dt$
9. $\int (x^2-1)^9 x\, dx$
10. $\int x^2(2x^3+3)^4\, dx$
11. $\int \frac{x^4}{1-x^5}\, dx$
12. $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^3-1}}\, dx$
13. $\int \frac{2}{x-2}\, dx$
14. $\int \frac{x^2}{x^3-3}\, dx$
15. $\int \frac{0.3x-0.2}{0.3x^2-0.4x+2}\, dx$
16. $\int \frac{2x^2+1}{0.2x^3+0.3x}\, dx$
17. $\int \frac{x}{3x^2-1}\, dx$
18. $\int \frac{x^2-1}{x^3-3x+1}\, dx$
19. $\int e^{-2x}\, dx$
20. $\int e^{-0.02x}\, dx$
21. $\int e^{2-x}\, dx$
22. $\int e^{2t+3}\, dt$
23. $\int xe^{-x^2}\, dx$
24. $\int x^2e^{x^3-1}\, dx$
25. $\int (e^x-e^{-x})\, dx$
26. $\int (e^{2x}+e^{-3x})\, dx$
27. $\int \frac{e^x}{1+e^x}\, dx$
28. $\int \frac{e^{2x}}{1+e^{2x}}\, dx$
29. $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\, dx$
30. $\int \frac{e^{-1/x}}{x^2}\, dx$
31. $\int \frac{e^{3x}+x^2}{(e^{3x}+x^3)^3}\, dx$
32. $\int \frac{e^x-e^{-x}}{(e^x+e^{-x})^{3/2}}\, dx$
33. $\int e^{2x}(e^{2x}+1)^3\, dx$
34. $\int e^{-x}(1+e^{-x})\, dx$
35. $\int \frac{\ln 5x}{x}\, dx$
36. $\int \frac{(\ln u)^3}{u}\, du$
37. $\int \frac{1}{x\ln x}\, dx$
38. $\int \frac{1}{x(\ln x)^2}\, dx$
39. $\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x}\, dx$
40. $\int \frac{(\ln x)^{7/2}}{x}\, dx$
41. $\int \left(xe^{x^2} - \frac{x}{x^2+2}\right) dx$
42. $\int \left(xe^{-x^2} + \frac{e^x}{e^x+3}\right) dx$

43. $\displaystyle\int \frac{x+1}{\sqrt{x}-1}\,dx$

Sugerencia: Sea $u = \sqrt{x} - 1$.

44. $\displaystyle\int \frac{e^{-u}-1}{e^{-u}+u}\,du$

Sugerencia: Sea $v = e^{-u} + u$.

45. $\displaystyle\int x(x-1)^5\,dx$

Sugerencia: $u = x - 1$ implica $x = u + 1$.

46. $\displaystyle\int \frac{t}{t+1}\,dt$

Sugerencia: $\dfrac{t}{t+1} = 1 - \dfrac{1}{t+1}$.

47. $\displaystyle\int \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\,dx$

Sugerencia: Sea $u = 1 + \sqrt{x}$.

48. $\displaystyle\int \frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\,dx$

Sugerencia: Sea $u = 1 - \sqrt{x}$.

49. $\displaystyle\int v^2(1-v)^6\,dv$

Sugerencia: Sea $u = 1 - v$.

50. $\displaystyle\int x^3(x^2+1)^{3/2}\,dx$

Sugerencia: Sea $u = x^2 + 1$.

En los ejercicios 51-54, determine la función *f*, dado que la pendiente de la recta tangente a la gráfica de *f* en cualquier punto $(x, f(x))$ es $f'(x)$ y que la gráfica de *f* pase por el punto dado.

51. $f'(x) = 5(2x-1)^4$; $(1, 3)$

52. $f'(x) = \dfrac{3x^2}{2\sqrt{x^3-1}}$; $(1, 1)$

53. $f'(x) = -2xe^{-x^2+1}$; $(1, 0)$

54. $f'(x) = 1 - \dfrac{2x}{x^2+1}$; $(0, 2)$

55. **SUSCRIPTORES DE TELEFONÍA POR CABLE** El número de suscriptores de telefonía por cable se situó en 3.2 millones al inicio de 2004 ($t = 0$). Para los próximos 5 años, el número proyectado crecerá a una tasa de

$$R(t) = 3.36(t+1)^{0.05} \qquad (0 \le t \le 5)$$

millones de suscriptores por año. Si la proyección es verdadera, ¿cuántos suscriptores de telefonía por cable hubo al inicio de 2008 ($t = 4$)?

Fuente: Sanford C. Bernstein

56. **TELESPECTADORES DE UN PROGRAMA DE NOTICIAS** El número de telespectadores de un programa semanal de noticias presentado en la temporada 2003 ha aumentado a una tasa de

$$3\left(2 + \frac{1}{2}t\right)^{-1/3} \qquad (1 \le t \le 6)$$

millones de telespectadores por año en su *t*er año al aire. El número de telespectadores del programa durante su primer año al aire está dado por $9(5/2)^{2/3}$ millones. Determine cuántos espec-tadores se esperan durante la temperada 2008.

57. **ALUMNOS MATRICULADOS** El secretario de Kellogg University estima que el número de estudiantes matriculados en la División de Educación Continua crecerá a una tasa de

$$N'(t) = 2{,}000(1 + 0.2t)^{-3/2}$$

estudiantes por año, *t* años a partir de ahora. Si la matrícula estudiantil actual es 1,000, determine una expresión que dé el total de estudiantes matriculados *t* años a partir de ahora. ¿Cuál será el número de estudiantes matriculados dentro de cinco años a partir de ahora?

58. **TV EN TELÉFONOS CELULARES** El número de personas que ve televisión en los teléfonos celulares se espera que crezca a una tasa de

$$N'(t) = \frac{5.4145}{\sqrt{1 + 0.91t}} \qquad (0 \le t \le 4)$$

millones por año. A principios de 2007 dicho número ($t = 0$) era 11.9 millones.

a. Determine una expresión que dé el número de personas que ve televisión en teléfonos celulares al año *t*.

b. Con base en esta proyección, ¿cuántas personas verán la televisión en teléfonos celulares a principios de 2011?

Fuente: International Data Corporation, U.S. forecast

59. **DEMANDA: BOTAS PARA MUJER** La tasa de cambio del precio unitario *p* (en dólares) de botas para mujer Apex está dada por

$$p'(x) = \frac{-250\,x}{(16 + x^2)^{3/2}}$$

donde *x* es la cantidad de demanda diaria en unidades de centena. Determine la función de la demanda para estas botas si la cantidad de demanda diaria es 300 pares ($x = 3$) cuando el precio unitario es \$50 por par.

60. **CRECIMIENTO DE LA POBLACIÓN** La población de cierta ciudad se proyecta que crezca a una tasa de

$$r(t) = 400\left(1 + \frac{2t}{24 + t^2}\right) \qquad (0 \le t \le 5)$$

personas por año, *t* años a partir de ahora. La población actual es 60,000. ¿Cuál será la población dentro de 5 años a partir de ahora?

61. **DERRAME DE PETRÓLEO** En aguas tranquilas, el derrame de petróleo proveniente de la ruptura de un casco de un buque cisterna genera una mancha de aceite de forma circular. Si el radio *r* del círculo es cada vez mayor a una tasa de

$$r'(t) = \frac{30}{\sqrt{2t + 4}}$$

pies/min, *t* min después de que ocurrió la ruptura, determine una expresión para el radio en cualquier momento *t*. ¿Qué tan grande es el área contaminada después de 16 minutos de que ocurrió la ruptura?

Sugerencia: $r(0) = 0$.

62. **ESPERANZA DE VIDA DE UNA MUJER** Suponga que en un país determinado la esperanza de vida de una mujer al nacer cambia a una tasa de

$$g'(t) = \frac{5.45218}{(1 + 1.09t)^{0.9}}$$

años/año. Aquí, *t* se mide en años, con $t = 0$ correspondiente a inicios de 1900. Determine una expresión $g(t)$ que dé la esperanza de vida al nacer (en años) de una mujer en esa ciudad si la esperanza a principios de 1900 era 50.02 años. ¿Cuál es la esperanza de vida en el nacimiento de una mujer nacida en 2000 en esa ciudad?

63. Estatura promedio en niños Al utilizar los datos recabados en el Kaiser Hospital, los pediatras estiman que la estatura promedio de los hijos varones cambia a una tasa de

$$h'(t) = \frac{52.8706^{-0.3277t}}{(1 + 2.449^{-0.3277t})^2}$$

pulgadas por año, donde la estatura del niño $h(t)$ se mide en pulgadas y t, la edad del niño, se mide en años, con $t = 0$ correspondiente a la edad de nacimiento. Determine una expresión $h(t)$ para la estatura promedio de un niño a la edad t si la estatura al nacer de un niño promedio es 19.4 pulgadas. ¿Cuál es la estatura promedio de un niño de 8 años de edad?

64. Curvas de aprendizaje El promedio de estudiantes matriculados en las 20 semanas de un curso en los Archivos de la Corte I en el American Institute of Court Reporting progresa con base en la regla

$$N'(t) = 6e^{-0.05t} \qquad (0 \leq t \leq 20)$$

donde $N'(t)$ mide la tasa de cambio en el número de palabras por minuto de dictado que el estudiante toma en la máquina después de t semanas en el curso. Suponiendo que el promedio de los estudiantes matriculados en este curso comience con una velocidad de dictado de 60 palabras por minuto, determine una expresión $N(t)$ que dé la velocidad del dictado del estudiante después de t semanas en el curso.

65. Cantidad de glucosa en el torrente sanguíneo Suponga que un paciente recibe una infusión intravenosa continua de glucosa a una tasa constante de r mg/min. Entonces la tasa a la que la cantidad de glucosa en el torrente sanguíneo cambia al tiempo t debido a esta infusión está dada por

$$A'(t) = re^{-at}$$

mg/min donde a es una constante positiva asociada con la tasa a la que el exceso de glucosa es eliminado del torrente sanguíneo y depende del metabolismo del paciente. Deduzca una expresión para la cantidad de glucosa en el torrente sanguíneo en el tiempo t.
Sugerencia: $A(0) = 0$.

66. Concentración de un fármaco en un órgano Un medicamento que se introduce dentro de un órgano de volumen V cm^3 por un líquido que entra al órgano a una tasa de a cm^3/seg y lo deja a una tasa de b cm^3/seg. La concentración del fármaco en el líquido entrando al órgano es c g/cm^3. Si la concentración del fármaco en el momento t se incrementa a una tasa de

$$x'(t) = \frac{1}{V}(ac - bx_0)e^{-bt/V}$$

g/cm^3/seg, y dicha concentración inicialmente es x_0 g/cm^3. Demuestre que la concentración del fármaco en el órgano en el momento t está dado por

$$x(t) = \frac{ac}{b} + \left(x_0 - \frac{ac}{b}\right)e^{-bt/V}$$

En los ejercicios 67-68, determine si el enunciado es verdadero o falso. Si es verdadero, explique por qué lo es. Si es falso, proporcione un ejemplo para demostrar por qué lo es.

67. Si f es continua, entonces $\int xf(x^2)\,dx = \frac{1}{2}\int f(x)\,dx$.

68. Si f es continua, entonces $\int f(ax + b)\,dx = a\int f(x)\,dx$.

11.2 Soluciones de los ejercicios de autoevaluación

1. Sea $u = 2x + 5$. Entonces, $du = 2\,dx$, o $dx = \frac{1}{2}\,du$. Al realizar las sustituciones apropiadas, tenemos

$$\begin{aligned}\int \sqrt{2x+5}\,dx &= \int \sqrt{u}\left(\frac{1}{2}\,du\right) = \frac{1}{2}\int u^{1/2}\,du\\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)u^{3/2} + C\\ &= \frac{1}{3}(2x+5)^{3/2} + C\end{aligned}$$

2. Sea $u = 2x^3 + 1$, así que $du = 6x^2\,dx$, o $x^2\,dx = \frac{1}{6}\,du$. Al realizar las sustituciones apropiadas, tenemos

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2}{(2x^3+1)^{3/2}}\,dx &= \int \frac{\left(\frac{1}{6}\right)du}{u^{3/2}} = \frac{1}{6}\int u^{-3/2}\,du\\ &= \left(\frac{1}{6}\right)(-2)u^{-1/2} + C\\ &= -\frac{1}{3}(2x^3+1)^{-1/2} + C\\ &= -\frac{1}{3\sqrt{2x^3+1}} + C\end{aligned}$$

3. Sea $u = 2x^2 - 1$, por tanto $du = 4x\,dx$, o $x\,dx = \frac{1}{4}\,du$. Entonces,

$$\begin{aligned}\int xe^{2x^2-1}\,dx &= \frac{1}{4}\int e^u\,du\\ &= \frac{1}{4}e^u + C\\ &= \frac{1}{4}e^{2x^2-1} + C\end{aligned}$$

4. Sea $C(t)$ que denota la concentración de CO en el aire debido a las emisiones de los escapes de automóvil en t años a partir de ahora. Entonces,

$$\begin{aligned}C'(t) = f(t) &= \frac{8(0.1t+1)}{300(0.2t^2+4t+64)^{1/3}}\\ &= \frac{8}{300}(0.1t+1)(0.2t^2+4t+64)^{-1/3}\end{aligned}$$

Al integrar, determinamos

$$\begin{aligned}C(t) &= \int \frac{8}{300}(0.1t+1)(0.2t^2+4t+64)^{-1/3}\,dt\\ &= \frac{8}{300}\int (0.1t+1)(0.2t^2+4t+64)^{-1/3}\,dt\end{aligned}$$

Sea $u = 0.2t^2 + 4t + 64$, por consiguiente $du = (0.4t + 4)\,dt = 4(0.1t + 1)\,dt$, o

$$(0.1t + 1)\,dt = \frac{1}{4}\,du$$

Después,

$$\begin{aligned} C(t) &= \frac{8}{300}\left(\frac{1}{4}\right)\int u^{-1/3}\,du \\ &= \frac{1}{150}\left(\frac{3}{2}u^{2/3}\right) + k \\ &= 0.01(0.2t^2 + 4t + 64)^{2/3} + k \end{aligned}$$

donde k es una constante arbitraria. Para determinar el valor de k, se utiliza la condición $C(0) = 0.16$, obteniendo

$$\begin{aligned} C(0) = 0.16 &= 0.01(64)^{2/3} + k \\ 0.16 &= 0.16 + k \\ k &= 0 \end{aligned}$$

Entonces,

$$C(t) = 0.01(0.2t^2 + 4t + 64)^{2/3}$$

11.3 El área y la integral definida

Una mirada intuitiva

Suponga que la tasa anual de consumo de petróleo de un cierto estado por un periodo de más de 4 años es constante y está dada por la función

$$f(t) = 1.2 \qquad (0 \leq t \leq 4)$$

donde t se mide en años y $f(t)$ en millones de barriles por año. Después, el consumo total de petróleo del estado sobre el periodo en cuestión es

$$(1.2)(4 - 0) \qquad \text{Tasa de consumo} \times \text{Tiempo transcurrido}$$

o 4.8 millones de barriles. Si examina la gráfica de f mostrada en la figura 5, observará que este total es sólo el área de la región rectangular limitada arriba por la gráfica de f, debajo por el eje t, y a la izquierda y derecha por las líneas verticales $t = 0$ (el eje y) y $t = 4$, respectivamente.

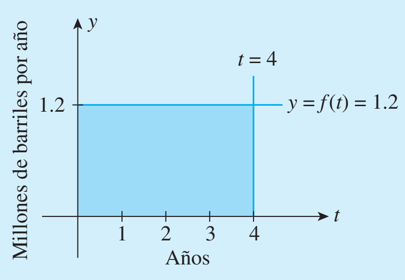


FIGURA 5
El consumo total de petróleo está dado por el área de la región rectangular.

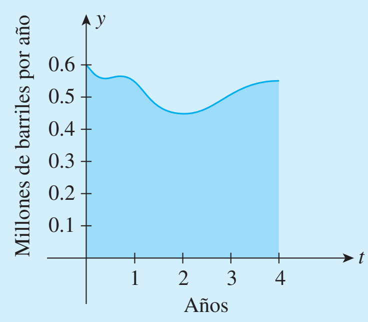


FIGURA 6
El consumo diario de petróleo está dado por el "área" de la región sombreada.

La figura 6 demuestra el consumo actual de petróleo de Nueva Inglaterra por un periodo mayor a 4 años desde 1990 ($t = 0$) hasta 1994 ($t = 4$). Observe que la tasa de consumo no es constante, esto es, la función f no es una función constante. ¿Cuál es el consumo total de petróleo de la ciudad durante este periodo de 4 años? Parece razonable conjeturar que éste está dado por el "área" de la región limitada arriba por la gráfica de f, abajo por el eje t, y a la izquierda y derecha por las líneas verticales $t = 0$ y $t = 4$, respectivamente.

Este ejemplo plantea dos cuestiones:

1. ¿Cuál es el "área" de la región que se muestra en la figura 6?
2. ¿Cómo se calcula esta área?

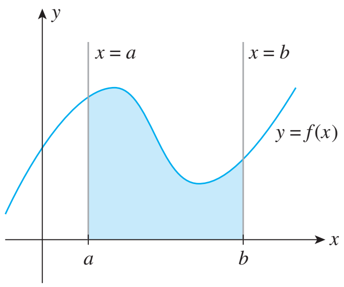


FIGURA 7
El área bajo la curva de f sobre $[a, b]$.

El problema del área

El ejemplo anterior toca el segundo problema fundamental en el cálculo: calcular el área de la región limitada por la gráfica de una función f no negativa, el eje x, y las líneas verticales $x = a$ y $x = b$ (figura 7). Esta área se llama **área bajo la curva de f** sobre el intervalo $[a, b]$, o desde a hasta b.

Dos ejemplos de definición del área

Sólo se utilizaron las pendientes de las líneas secantes (cantidades que podría calcular) para ayudarlo a definir la pendiente de la recta tangente a un punto sobre la gráfica de una función, ahora adoptamos una aproximación paralela y utilizamos las áreas de los rectángulos (cantidades que puede calcular) para ayudar a definir el área bajo la curva de una función. Comenzamos por observar un ejemplo específico.

EJEMPLO 1 Sea $f(x) = x^2$ y considere la región R bajo la curva de f sobre el intervalo $[0, 1]$ (figura 8a). Para obtener una aproximación del área de R, construya cuatro rectángulos no superpuestos como sigue: divida el intervalo $[0, 1]$ en 4 subintervalos.

$$\left[0, \frac{1}{4}\right], \quad \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right], \quad \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right], \quad \left[\frac{3}{4}, 1\right]$$

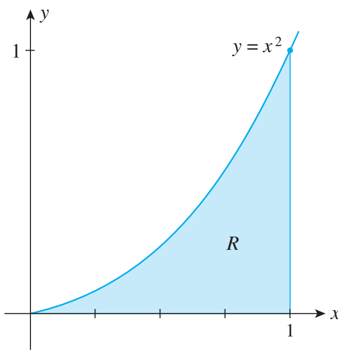
de igual longitud $\frac{1}{4}$. Después, construya cuatro rectángulos con estos subintervalos como bases y con las alturas dadas por los valores de la función en los puntos medios

$$\frac{1}{8}, \quad \frac{3}{8}, \quad \frac{5}{8}, \quad \frac{7}{8}$$

de cada uno de los subintervalos. Entonces, cada uno de estos rectángulos tiene un ancho de $\frac{1}{4}$ y una altura

$$f\left(\frac{1}{8}\right), \quad f\left(\frac{3}{8}\right), \quad f\left(\frac{5}{8}\right), \quad f\left(\frac{7}{8}\right)$$

respectivamente (figura 8b).



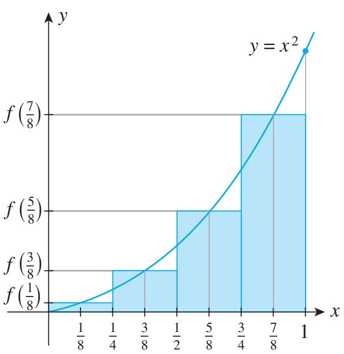
(a)

Si se aproxima el área A de R por la suma de las áreas de los cuatro rectángulos, obtenemos

$$\begin{aligned} A &\approx \frac{1}{4}f\left(\frac{1}{8}\right) + \frac{1}{4}f\left(\frac{3}{8}\right) + \frac{1}{4}f\left(\frac{5}{8}\right) + \frac{1}{4}f\left(\frac{7}{8}\right) \\ &= \frac{1}{4}\left[f\left(\frac{1}{8}\right) + f\left(\frac{3}{8}\right) + f\left(\frac{5}{8}\right) + f\left(\frac{7}{8}\right)\right] \\ &= \frac{1}{4}\left[\left(\frac{1}{8}\right)^2 + \left(\frac{3}{8}\right)^2 + \left(\frac{5}{8}\right)^2 + \left(\frac{7}{8}\right)^2\right] \\ &= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{64} + \frac{9}{64} + \frac{25}{64} + \frac{49}{64}\right) = \frac{21}{64} \end{aligned}$$

Recuerde que $f(x) = x^2$.

o aproximadamente 0.328125 unidades cuadradas. ■



(b)

FIGURA 8
El área de la región bajo la curva de f sobre $[0, 1]$ en (a) es aproximada por la suma de las áreas de los cuatro rectángulos en (b).

Al seguir el procedimiento del ejemplo 1, se pueden obtener las aproximaciones del área de la región R utilizando cualquier número n de rectángulos ($n = 4$ en el ejemplo 1). La figura 9a muestra la aproximación del área A de R al utilizar 8 rectángulos ($n = 8$), y la figura 9b muestra la aproximación del área A de R utilizando 16 rectángulos.

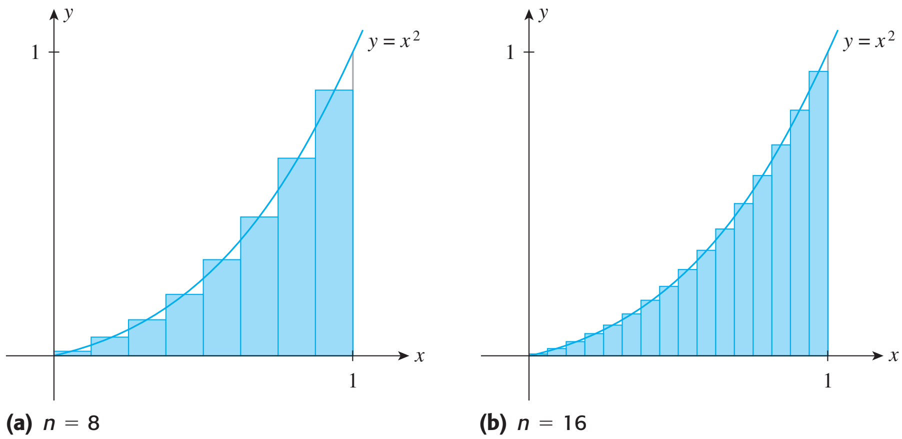


FIGURA **9**
Conforme n aumenta, el número de rectángulos también, y la aproximación mejora.

Estas figuras sugieren que la aproximación parece mejorar conforme n crece. Ésta se confirma por los resultados dados en la tabla 1, los cuales se obtuvieron al usar una computadora.

TABLA **1**

Número de rectángulos, n	4	8	16	32	64	100	200
Aproximación de A	0.328125	0.332031	0.333008	0.333252	0.333313	0.333325	0.333331

Los cálculos parecen sugerir que las aproximaciones enfocan al número $\frac{1}{3}$ conforme n se vuelve más y más grande. Este resultado sugiere que al *definir* el área de la región bajo la curva de $f(x) = x^2$ sobre el intervalo [0, 1] para ser $\frac{1}{3}$ de unidad cuadrada.

En el ejemplo 1 elegimos el *punto medio* de cada subintervalo como el punto en el cual evaluar $f(x)$ para obtener la altura del rectángulo cercano. Considere otro ejemplo, esta vez elija el *extremo izquierdo* de cada subintervalo.

VIDEO

EJEMPLO 2 Sea R la región bajo la curva de $f(x) = 16 - x^2$ sobre el intervalo [1, 3]. Determine una aproximación del área A de R utilizando cuatro subintervalos de [1, 3] de igual longitud y elija el extremo izquierdo de cada subintervalo para evaluar $f(x)$ para obtener la altura del rectángulo cercano.

Solución La gráfica de f está trazada en la figura 10a. Ya que la longitud de [1, 3] es 2, observe que la longitud de cada subintervalo es $\frac{2}{4}$, o $\frac{1}{2}$. Sin embargo, los cuatro subintervalos son

$$\left[1, \frac{3}{2}\right], \quad \left[\frac{3}{2}, 2\right], \quad \left[2, \frac{5}{2}\right], \quad \left[\frac{5}{2}, 3\right]$$

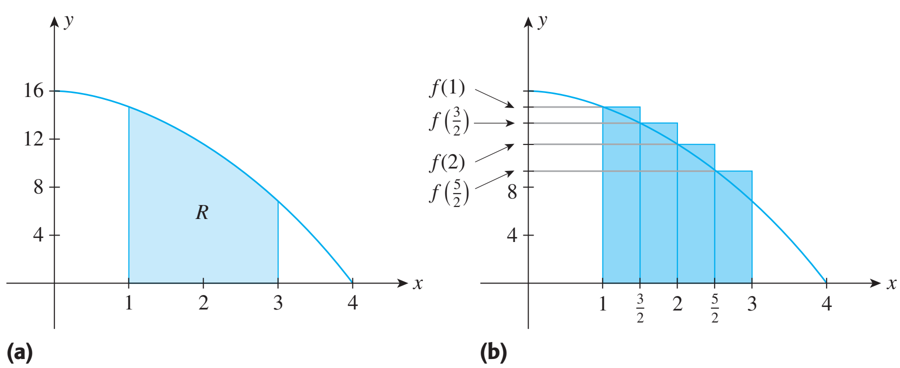


FIGURA **10**
El área de R en (a) es aproximada por la suma de las áreas de los cuatro rectángulos en (b).

Los extremos izquierdos de estos subintervalos son 1, $\frac{3}{2}$, 2 y $\frac{5}{2}$, respectivamente, por tanto, las alturas de los rectángulos cercanos son $f(1)$, $f(\frac{3}{2})$, $f(2)$ y $f(\frac{5}{2})$, respectivamente (figura 10b). Sin embargo, la aproximación requerida es

$$\begin{aligned}
A &\approx \frac{1}{2}f(1) + \frac{1}{2}f\left(\frac{3}{2}\right) + \frac{1}{2}f(2) + \frac{1}{2}f\left(\frac{5}{2}\right)\\
&= \frac{1}{2}\left[f(1) + f\left(\frac{3}{2}\right) + f(2) + f\left(\frac{5}{2}\right)\right]\\
&= \frac{1}{2}\left\{[16 - (1)^2] + \left[16 - \left(\frac{3}{2}\right)^2\right]\right.\\
&\qquad \left. + [16 - (2)^2] + \left[16 - \left(\frac{5}{2}\right)^2\right]\right\}\\
&= \frac{1}{2}\left(15 + \frac{55}{4} + 12 + \frac{39}{4}\right) = \frac{101}{4}
\end{aligned}$$

Recuerde que $f(x) = 16 - x^2$.

o aproximadamente 25.25 unidades cuadradas. ■

La tabla 2 demuestra la aproximación del área A de la región R del ejemplo 2 cuando n rectángulos se utilizan para la aproximación y las alturas de los rectángulos cercanos son determinadas al evaluar $f(x)$ en los extremos izquierdos.

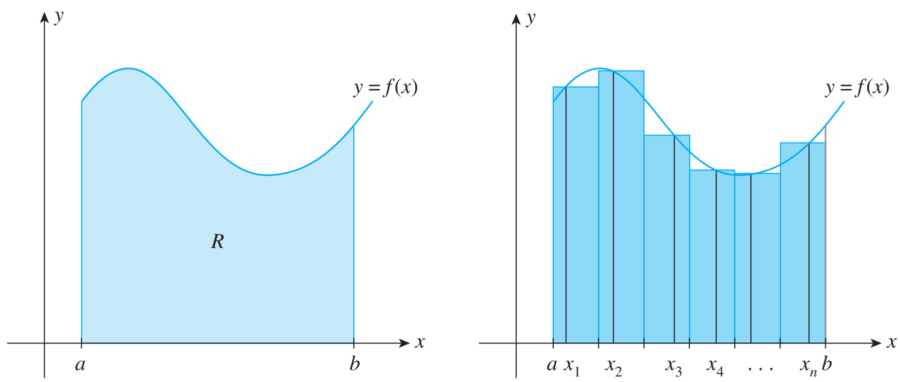
TABLA **2**

Número de rectángulos, *n*	4	10	100	1,000	10,000	50,000	100,000
Aproximación de *A*	25.2500	24.1200	23.4132	23.3413	23.3341	23.3335	23.3334

Una vez más, observe que las aproximaciones parecen acercarse a un número único conforme n se vuelve más y más grande, esta vez el número es $23\frac{1}{3}$. Este resultado sugiere que al *definir* el área de la región bajo la curva de $f(x) = 16 - x^2$ sobre el intervalo [1, 3] para ser $23\frac{1}{3}$ unidades cuadradas.

El caso general de definición del área

Los ejemplos 1 y 2 señalan la forma para definir el área A bajo la curva de una función f arbitraria, pero continua y no negativa sobre un intervalo $[a, b]$ (figura 11a).



(a) (b)

FIGURA **11**
El área de la región bajo la curva de f sobre $[a, b]$ en el inciso (a) es aproximada por la suma de las áreas de los n rectángulos mostrados en el inciso (b).

Divida el intervalo $[a, b]$ dentro de n subintervalos de igual longitud $\Delta x = (b - a)/n$. Después, elija n puntos arbitrarios $x_1, x_2, \ldots, x_n$ llamados *puntos representativos*, desde los primeros, segundos, . . . , y n-ésimo subintervalos, respectivamente (figura

11b). Después, al aproximar el área A de la región R por los n rectángulos de ancho Δx y alturas $f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n)$, por tanto, las áreas de los rectángulos son $f(x_1)\Delta x, f(x_2)\Delta x, \ldots, f(x_n)\Delta x$, obtenemos

$$A \approx f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + \cdots + f(x_n)\Delta x$$

La suma del lado derecho de esta expresión se conoce como **suma de Riemann**, en honor al matemático alemán Bernhard Riemann (1826-1866). Ahora, como los ejemplos anteriores parecen sugerir, la suma de Riemann se aproximará a un número único conforme n se vuelva arbitrariamente mayor.* Defina este número para ser el área A de la región R.

El área bajo la curva de una función

Sea f una función continua no negativa sobre $[a, b]$. Entonces, el área de la región bajo la curva de f es

$$A = \lim_{n\to\infty} \left[f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)\right] \Delta x \qquad \textbf{(6)}$$

donde $x_1, x_2, \ldots, x_n$ son puntos arbitrarios en los n subintervalos de $[a, b]$ de igual ancho $\Delta x = (b - a)/n$.

La integral definida

Como se acaba de ver, el área bajo la curva de una función f continua *no negativa* sobre un intervalo $[a, b]$ está definida por el límite de la suma de Riemann

$$\lim_{n\to\infty} \left[f(x_1)\,\Delta x + f(x_2)\,\Delta x + \cdots + f(x_n)\,\Delta x\right]$$

Ahora enfocamos la atención en el estudio de los límites de las sumas de Riemann que involucran funciones que no son necesariamente no negativas. Dichos límites surgen en muchas aplicaciones de cálculo.

Por ejemplo, el cálculo de la distancia cubierta por un cuerpo que viaja a lo largo de una línea recta que involucra la evaluación de un límite de esta forma. El cálculo de los ingresos totales obtenidos por una empresa sobre un cierto periodo, el cálculo de la cantidad total de electricidad consumida en un hogar típico por un periodo de 24 horas, la concentración promedio de un fármaco en un cuerpo en un cierto intervalo de tiempo, y el volumen de un sólido, todo involucra límites de este tipo.

Comience con la siguiente definición.

La integral definida

Sea f una función continua definida sobre $[a, b]$. Si

$$\lim_{n\to\infty} \left[f(x_1)\,\Delta x + f(x_2)\,\Delta x + \cdots + f(x_n)\,\Delta x\right]$$

existe por todas las selecciones de puntos representativos $x_1, x_2, \ldots, x_n$ en los n subintervalos de $[a, b]$ de igual anchura $\Delta x = (b - a)/n$, entonces este límite se llama **integral definida** de f desde a hasta b y se denota por $\int_a^b f(x)\,dx$. Por tanto,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \left[f(x_1)\,\Delta x + f(x_2)\,\Delta x + \cdots + f(x_n)\,\Delta x\right] \qquad \textbf{(7)}$$

El número a es el **límite inferior de integración**, y el número b es el **límite superior de integración**.

*Aunque elegimos los puntos representativos para ser los puntos medios de los subintervalos en el ejemplo 1 y los puntos extremos izquierdos en el ejemplo 2, éste puede demostrar que cada una de las sumas respectivas siempre se aproximarán al único número conforme n se aproxima al infinito.

Notas

1. Si f es no negativa, entonces el límite en (7) es el mismo que el límite en (6); sin embargo, la integral definida da el área bajo la curva de f sobre $[a, b]$.
2. El límite en (7) se denota por el signo integral $\int$ debido a que, como se observará más tarde, la integral definida y la antiderivada de una función f están relacionadas.
3. Es importante darse cuenta de que la integral definida $\int_a^b f(x)$ es un *número*, mientras que la integral indefinida $\int f(x)$ representa una *familia de funciones* (las antiderivadas de f).
4. Si el límite en (7) existe, se dice que f es **integrable** sobre el intervalo $[a, b]$. ■

¿Cuándo una función es integrable?

El teorema siguiente, el cual se determina sin prueba, garantiza que una función continua es integrable.

La integrabilidad de una función

Sea f continua sobre $[a, b]$. Entonces, f es integrable sobre $[a, b]$; esto es, la integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$ existe.

La interpretación geométrica de la integral definida

Si f es no negativa e integrable sobre $[a, b]$, entonces se tiene la siguiente interpretación geométrica de la integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$.

La interpretación geométrica $\int_a^b f(x)\,dx$ para $f(x) \geq 0$ sobre $[a, b]$

Si f es no negativa y continua sobre $[a, b]$, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx \tag{8}$$

es igual al área de la región bajo la curva de f sobre $[a, b]$ (figura 12).

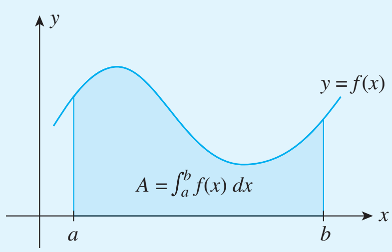


FIGURA 12
Si $f(x) \geq 0$ sobre $[a, b]$, entonces $\int_a^b f(x)\,dx$ = al área bajo la curva de f sobre $[a, b]$.

Explore y analice

Suponga que f es no positiva [que es $f(x) \leq 0$] y continua sobre $[a, b]$. Explique por qué el área de la región bajo el eje x y sobre la gráfica de f está dada por $-\int_a^b f(x)\,dx$.

Después, amplíe su interpretación geométrica de la integral definida para incluir el caso donde f asume ambos valores tanto positivo como negativo sobre $[a, b]$. Considere una suma de Riemann típica de la función f,

$$f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + \cdots + f(x_n)\Delta x$$

correspondiente a la división de $[a, b]$ en n subintervalos de igual anchura $(b - a)/n$, donde $x_1, x_2, \ldots, x_n$ son puntos representativos en los subintervalos. La suma consiste en n términos en los que un término positivo corresponde al área de un rectángulo de altura $f(x_k)$ (por algún número entero positivo k) que está sobre el eje x y un término negativo corresponde al área de un rectángulo de altura $-f(x_k)$ que permanece bajo el eje x (vea la figura 13, que describe una situación con $n = 6$).

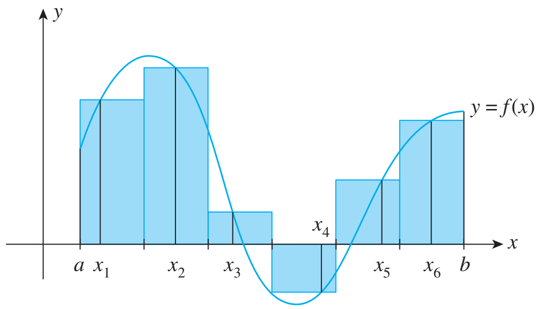


FIGURA 13
Los términos positivos en la suma de Riemann se asocian con las áreas de los rectángulos que están sobre el eje x, y los términos negativos se asocian con las áreas de aquellas que permanecen bajo el eje x.

Conforme n es más y más grande, las sumas de las áreas de los rectángulos que permanecen sobre el eje x parece dar una aproximación cada vez mejor del área de la región que permanece sobre el eje x (figura 14). De forma similar, las sumas de las áreas de aquellos rectángulos que permanecen debajo del eje x parecen dar una aproximación cada vez mejor del área de la región que permanece bajo el eje x.

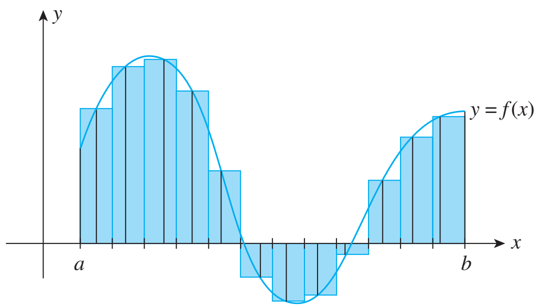


FIGURA 14
Conforme n es más grande, la aproximación mejora. Aquí, $n = 12$ y se aproxima dos veces en tantos rectángulos como en la figura 13.

Estas observaciones sugieren la siguiente interpretación geométrica de la integral definida por una función arbitraria continua sobre un intervalo $[a, b]$.

Interpretación geométrica de $\int_a^b f(x)\,dx$ sobre $[a, b]$

Si f es continua sobre $[a, b]$, entonces,

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

es igual al área de la región por arriba de $[a, b]$ menos el área de la región por debajo de $[a, b]$ (figura 15).

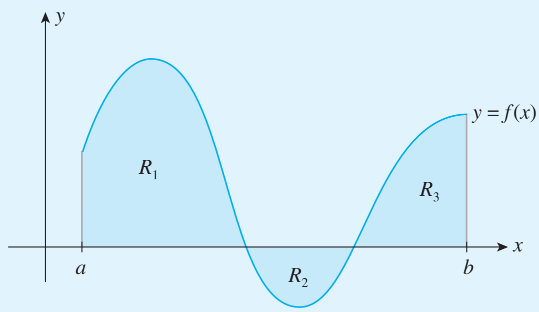


FIGURA 15
$\int_a^b f(x)\,dx =$ Área de R_1
$-$ Área de R_2
$+$ Área de R_3

11.3 Ejercicios de autoevaluación

Determine una aproximación del área de la región R bajo la curva de $f(x) = 2x^2 + 1$ sobre el intervalo $[0, 3]$, utilizando cuatro subintervalos de $[0, 3]$ de igual longitud y seleccionando el punto medio de cada subintervalo como un punto representativo.

La solución del ejercicio de autoevaluación 11.3 se encuentra en la página 774.

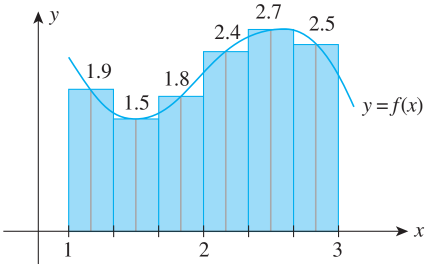
11.3 Preguntas de concepto

1. Explique cómo definiría el área de la región bajo la curva de una función f continua no negativa sobre el intervalo $[a, b]$.
2. Defina la integral definida de una función continua sobre el intervalo $[a, b]$. Dé una interpretación geométrica de $\int_a^b f(x)\,dx$ para el caso donde (a) f es no negativa sobre $[a, b]$ y (b) f asume ambos valores tanto positivo como negativo sobre $[a, b]$. Presente gráficamente sus respuestas.

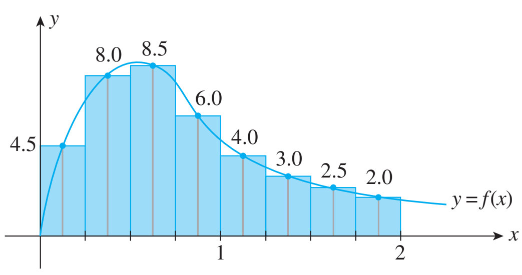
11.3 Ejercicios

En los ejercicios 1 y 2, determine una aproximación del área de la región *R* bajo la curva de *f* al calcular la suma de Riemann de *f* correspondiente a la división del intervalo dentro de los subintervalos mostrados en las figuras anexas. En cada caso utilice los puntos medios de los subintervalos, así como los puntos representativos.

1.



2.



3. Sea $f(x) = 3x$.
   a. Trace la región R bajo la curva de f sobre el intervalo $[0, 2]$ y determine su área exacta utilizando la geometría.
   b. Utilice la suma Riemann con cuatro subintervalos de igual longitud ($n = 4$) para aproximar el área de R. Elija los puntos representativos para ser los extremos izquierdos de los subintervalos.
   c. Repita el inciso (b) con ocho subintervalos de igual longitud ($n = 8$).
   d. Compare las aproximaciones obtenidas en los incisos (b) y (c) con el área exacta que se determinó en el inciso (a). ¿Las aproximaciones mejoran con n más grande?

4. Repita el ejercicio 3, eligiendo los puntos representantivos para ser los extremos derechos de los subintervalos.

5. Sea $f(x) = 4 - 2x$.
   a. Trace la región R bajo la curva de f sobre el intervalo $[0, 2]$ y determine su área exacta utilizando la geometría.
   b. Utilice la suma de Riemann con cinco subintervalos de igual longitud ($n = 5$) para aproximar el área de R. Elija los puntos representativos para ser los extremos izquierdos de los subintervalos.
   c. Repita el inciso (b) con 10 subintervalos de igual longitud ($n = 10$).
   d. Compare las aproximaciones obtenidas en los incisos (b) y (c) con el área exacta determinada en el inciso (a). ¿Las aproximaciones mejoran con la n más grande?

6. Repita el ejercicio 5, eligiendo los puntos representativos para ser los extremos derechos de los subintervalos.

7. Sea $f(x) = x^2$ y calcule la suma de Riemann de f sobre el intervalo [2, 4] utilizando

a. Dos subintervalos de igual longitud ($n = 2$).
b. Cinco subintervalos de igual longitud ($n = 5$).
c. Diez subintervalos de igual longitud ($n = 10$).
En cada caso, elija los puntos representativos para ser los puntos medios de los subintervalos.
d. ¿Podría descifrar el área de la región bajo la curva de f sobre el intervalo [2, 4]?

8. Repita el ejercicio 7, eligiendo los puntos representativos para ser los extremos izquierdos de los subintervalos.

9. Repita el ejercicio 7, eligiendo los puntos representativos para ser los extremos derechos de los subtintervalos.

10. Sea $f(x) = x^3$ y calcule la suma Riemann de f sobre el intervalo [0, 1], utilizando
a. Dos intervalos de igual longitud ($n = 2$).
b. Cinco intervalos de igual longitud ($n = 5$).
c. Diez intervalos de igual longitud ($n = 10$).
En cada caso, elija los puntos representativos para ser los puntos medios de los subintervalos.
d. ¿Puede descifrar el área bajo la curva de la región de f sobre el intervalo [0, 1]?

11. Repita el ejercicio 10, eligiendo los puntos representativos para ser los extremos izquierdos de los subintervalos.

12. Repita el ejercicio 10, eligiendo los puntos representativos para ser los extremos derechos de los subintervalos.

En los ejercicios 13-16, determine el área de aproximación de la región *R* bajo la curva de la función *f* sobre el intervalo [*a*, *b*]. En cada caso, utilice *n* subintervalos y elija los puntos representativos como se indica.

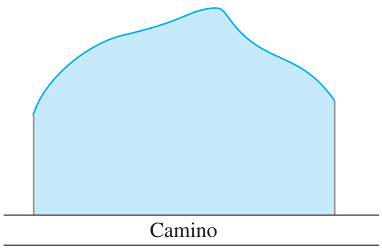
13. $f(x) = x^2 + 1$; [0, 2]; $n = 5$; puntos medios

14. $f(x) = 4 - x^2$; [−1, 2]; $n = 6$; extremos izquierdos

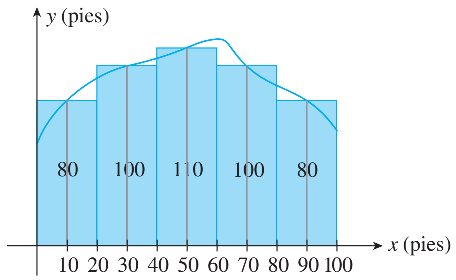
15. $f(x) = \dfrac{1}{x}$; [1, 3]; $n = 4$; extremos derechos

16. $f(x) = e^x$; [0, 3]; $n = 5$; puntos medios

17. **BIENES RAÍCES** La figura (a) muestra un lote vacante con una fachada de 100 pies en un desarrollo. Para calcular su área, introduzca un sistema de coordenadas, de modo que el eje x coincida con el borde del camino recto que forma el límite inferior de la propiedad, como se muestra en la figura (b). Después, piense en el límite superior de la propiedad como la gráfica de una función continua f sobre el intervalo de [0, 100], observe que el problema es matemáticamente equivalente al de determinar el área bajo la curva de f en [0, 100]. Para estimar el área del lote mediante una suma de Riemann, divida el intervalo de [0, 100] en cinco subintervalos iguales de 20 pies de longitud. Después use un equipo para peritos, mida la distancia desde el punto medio de cada uno de estos subintervalos hasta el límite superior de la propiedad. Estas medidas dan los valores de $f(x)$ en $x = 10$, 30, 50, 70 y 90. ¿Cuál es el área aproximada del lote?

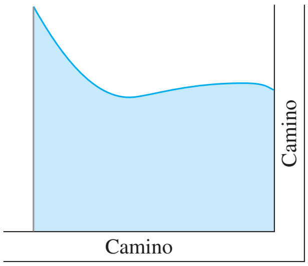


(a)

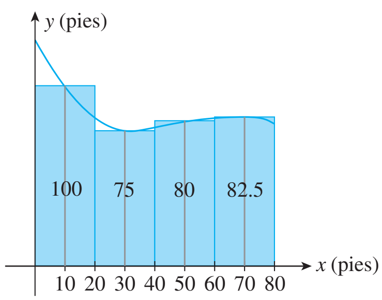


(b)

18. **BIENES RAÍCES** Utilice la técnica del ejercicio 17 para obtener una estimación del área del lote vacante mostrado en las figuras anexas.



(a)



(b)

10.3 Soluciones de los ejercicios de autoevaluación

La longitud de cada intervalo es $\frac{3}{4}$. Sin embargo, los cuatro subintervalos son

$$\left[0, \frac{3}{4}\right], \quad \left[\frac{3}{4}, \frac{3}{2}\right], \quad \left[\frac{3}{2}, \frac{9}{4}\right], \quad \left[\frac{9}{4}, 3\right]$$

Los puntos representativos son $\frac{3}{8}, \frac{9}{8}, \frac{15}{8}$ y $\frac{21}{8}$, respectivamente. Sin embargo, la aproximación requerida es

$$\begin{aligned}
A &= \frac{3}{4}f\left(\frac{3}{8}\right) + \frac{3}{4}f\left(\frac{9}{8}\right) + \frac{3}{4}f\left(\frac{15}{8}\right) + \frac{3}{4}f\left(\frac{21}{8}\right) \\
&= \frac{3}{4}\left[f\left(\frac{3}{8}\right) + f\left(\frac{9}{8}\right) + f\left(\frac{15}{8}\right) + f\left(\frac{21}{8}\right)\right] \\
&= \frac{3}{4}\left\{\left[2\left(\frac{3}{8}\right)^2 + 1\right] + \left[2\left(\frac{9}{8}\right)^2 + 1\right] + \left[2\left(\frac{15}{8}\right)^2 + 1\right]\right. \\
&\qquad \left. + \left[2\left(\frac{21}{8}\right)^2 + 1\right]\right\} \\
&= \frac{3}{4}\left(\frac{41}{32} + \frac{113}{32} + \frac{257}{32} + \frac{473}{32}\right) = \frac{663}{32}
\end{aligned}$$

o aproximadamente 20.72 unidades cuadradas.

11.4 El teorema fundamental del cálculo

El teorema fundamental del cálculo

En la sección 11.3 se define la integral definida de una función arbitraria continua sobre un intervalo $[a, b]$ como un límite de las sumas Riemann. Calcular el valor de una integral definida tomando el límite de dichas sumas es en realidad tedioso y en la mayoría de los casos poco práctico. Es importante lograr que los resultados numéricos obtenidos en los ejemplos 1 y 2 de la sección 11.3 sean *aproximaciones* de las áreas respectivas de las regiones en cuestión, aunque estos resultados le permiten *hacer conjeturas* de cuáles podrían ser las áreas reales. Por fortuna, existe una mejor forma para determinar el valor exacto de una integral definida.

El siguiente teorema demuestra cómo evaluar la integral definida de una función continua dada, podemos determinar una antiderivada de esta función. Debido a su importancia para establecer una relación entre diferenciación e integración, este teorema, descubierto de forma independiente por Isaac Newton (1642-1727) en Inglaterra y Gottfied Wilhelm Leibniz (1646-1716) en Alemania, se llama el **teorema fundamental del cálculo**.

TEOREMA 2

El teorema fundamental del cálculo

Sea f continua sobre $[a, b]$. Entonces,

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) \tag{9}$$

donde F es cualquier antiderivada de f; esto es, $F'(x) = f(x)$.

Al final de esta sección se explicará por qué este teorema es verdadero.

Cuando se aplica el teorema fundamental del cálculo, es conveniente utilizar la notación

$$F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Por ejemplo, al utilizar esta notación, la ecuación (9) se escribe

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

VIDEO

EJEMPLO 1 Sea R la región bajo la curva de $f(x) = x$ sobre el intervalo [1, 3]. Utilice el teorema fundamental del cálculo para determinar el área A de R y verifique su resultado por medios elementales.

Solución La región R se muestra en la figura 16a. Ya que f es no negativa sobre [1, 3], el área de R está dada por la integral definida de f desde 1 hasta 3; que es,

$$A = \int_1^3 x\,dx$$

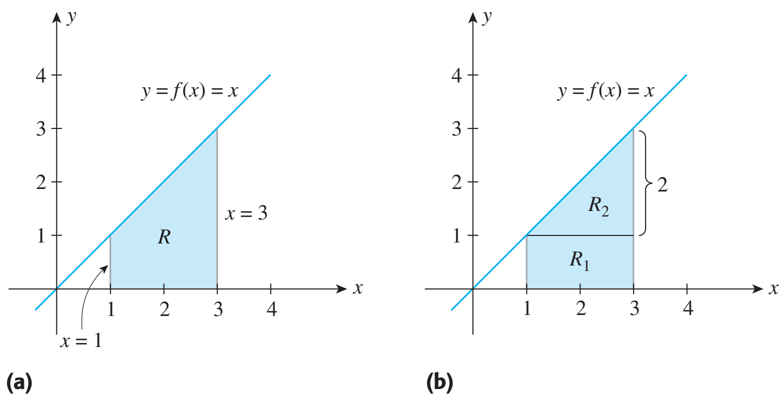


FIGURA **16**
El área de R puede calcularse de dos formas.

Para calcular la integral definida, observe que una antiderivada de $f(x) = x$ es $F(x) = \frac{1}{2}x^2 + C$, donde C es una constante arbitraria. Sin embargo, por el teorema fundamental del cálculo, obtenemos

$$\begin{aligned} A &= \int_1^3 x\,dx = \frac{1}{2}x^2 + C\Big|_1^3 \\ &= \left(\frac{9}{2} + C\right) - \left(\frac{1}{2} + C\right) = 4 \text{ unidades cuadradas} \end{aligned}$$

Para verificar este resultado por medios elementales, observe que el área A es el área del rectángulo R_1 (ancho × altura) más el área del triángulo R_2 ($\frac{1}{2}$ base × altura) (vea la figura 16b); esto es,

$$2(1) + \frac{1}{2}(2)(2) = 2 + 2 = 4$$

el cual coincide con el resultado obtenido antes. ■

Observe que en la evaluación de la integral definida en el ejemplo 1, la constante de integración "se anula". En general esto es verdad, si $F(x) + C$ denota una antiderivada de alguna función f, entonces

$$\begin{aligned} F(x) + C\Big|_a^b &= [F(b) + C] - [F(a) + C] \\ &= F(b) + C - F(a) - C \\ &= F(b) - F(a) \end{aligned}$$

Con este hecho podemos, en todos los cálculos futuros en la evaluación de una integral definida, excluir la constante de integración de sus cálculos.

Determinación del área bajo una curva

El observar qué tan efectivo es el teorema fundamental del cálculo para ayudar a determinar el área de regiones sencillas, ahora es útil para determinar el área de regiones más complicadas.

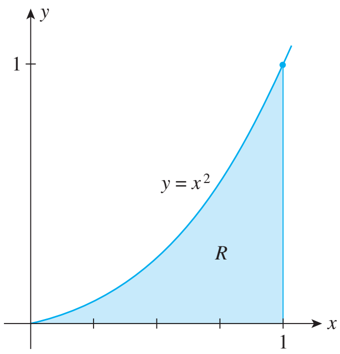


FIGURA **17**
El área de R es $\int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3}$.

EJEMPLO 2 En la sección 11.3 se especula que el área de la región R bajo la curva de $f(x) = x^2$ sobre el intervalo $[0, 1]$ fue $\frac{1}{3}$ de unidad cuadrada. Utilice el teorema fundamental de cálculo para verificar este supuesto.

Solución La región R se reproduce en la figura 17. Observe que f es no negativa sobre $[0, 1]$, por consiguiente el área de R está dada por $A = \int_0^1 x^2\,dx$. Ya que una antiderivada de $f(x) = x^2$ es $F(x) = \frac{1}{3}x^3$, se observa, al utilizar el teorema fundamental del cálculo, que

$$A = \int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3}x^3\Big|_0^1 = \frac{1}{3}(1) - \frac{1}{3}(0) = \frac{1}{3} \text{ de unidad cuadrada}$$

como se desea demostrar. ■

Nota Es importante darse cuenta de que el valor $\frac{1}{3}$, es por definición el valor exacto del área de R. ■

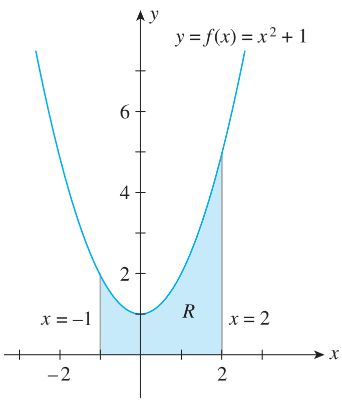


FIGURA **18**
El área de R es $\int_{-1}^{2} (x^2 + 1)\,dx$.

EJEMPLO 3 Determine el área de la región R bajo la curva de $y = x^2 + 1$ desde $x = -1$ hasta $x = 2$.

Solución La región R bajo consideración se muestra en la figura 18. Al utilizar el teorema fundamental del cálculo, encontramos que el área requerida es

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{2} (x^2 + 1)\,dx &= \left(\frac{1}{3}x^3 + x\right)\Big|_{-1}^{2}\\ &= \left[\frac{1}{3}(8) + 2\right] - \left[\frac{1}{3}(-1)^3 + (-1)\right] = 6\end{aligned}$$

o 6 unidades cuadradas. ■

Evaluación de las integrales definidas

En los ejemplos 4 y 5 se utilizan las reglas de integración de la sección 11.1 que ayudan a evaluar las integrales definidas.

EJEMPLO 4 Evalúe $\int_1^3 (3x^2 + e^x)\,dx$.

Solución

$$\begin{aligned}\int_1^3 (3x^2 + e^x)\,dx &= x^3 + e^x\Big|_1^3\\ &= (27 + e^3) - (1 + e) = 26 + e^3 - e\end{aligned}$$
■

EJEMPLO 5 Evalúe $\int_1^2 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right)dx$.

Solución

$$\begin{aligned}\int_1^2 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right)dx &= \int_1^2 \left(\frac{1}{x} - x^{-2}\right)dx\\ &= \ln|x| + \frac{1}{x}\Big|_1^2\\ &= \left(\ln 2 + \frac{1}{2}\right) - (\ln 1 + 1)\\ &= \ln 2 - \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Recuerde, $\ln 1 = 0$. ■

Explore y analice

Considere la integral definida $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2}\,dx$.

1. Demuestre que una aplicación formal de la ecuación (9) lleva a

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2}\,dx = -\frac{1}{x}\bigg|_{-1}^{1} = -1 - 1 = -2$$

2. Observe que $f(x) = 1/x^2$ es positiva en cada valor de x en $[-1, 1]$ donde ésta es definida. Por consiguiente, se puede esperar que la integral definida con el integrando f tiene un valor positivo, si éste existe.

3. Explique esta aparente contradicción en el resultado (1) y la observación (2).

La integral definida como una medida de cambio neto

En las aplicaciones reales, a menudo se está interesado en el cambio neto de una cantidad sobre un periodo. Por ejemplo, suponga que P es una función que da la población, $P(t)$, de una ciudad en un momento t. Luego, el *cambio neto* en la población sobre el periodo desde $t = a$ hasta $t = b$ está dado por

$$P(b) - P(a) \qquad \text{Población en } t = b \text{ menos la población en } t = a$$

Si P tiene una derivada continua P' en $[a, b]$, entonces se puede recurrir al teorema fundamental del cálculo al escribir

$$P(b) - P(a) = \int_a^b P'(t)\,dt \qquad P \text{ es una antiderivada de } P'.$$

Por tanto, si conoce la *tasa de cambio* de la población en cualquier momento t, entonces se calcula el cambio neto en la población desde $t = a$ hasta $t = b$ al calcular la integral definida adecuada.

EJEMPLO DE APLICACIÓN 6 Crecimiento de la población en el condado de Clark El condado de Clark en Nevada, dominado por Las Vegas, es el área metropolitana de más rápido crecimiento en Estados Unidos. Desde 1970 hasta 2000, la población ha crecido a una tasa de

$$R(t) = 133{,}680t^2 - 178{,}788t + 234{,}633 \qquad (0 \le t \le 3)$$

personas por década, donde $t = 0$ corresponde a principios de 1970. ¿Cuál fue el cambio neto en la población de la década desde 1980 hasta 1990?

Fuente: U.S. Census Bureau

Solución El cambio neto en la población en la década desde 1980 ($t = 1$) hasta 1990 ($t = 2$) está dada por $P(2) – P(1)$, donde P denota la población del condado en el momento t. Pero $P' = R$, y, por tanto

$$\begin{aligned}
P(2) - P(1) &= \int_1^2 P'(t)\,dt = \int_1^2 R(t)\,dt \\
&= \int_1^2 (133{,}680t^2 - 178{,}788t + 234{,}633)\,dt \\
&= 44{,}560t^3 - 89{,}394t^2 + 234{,}633t\bigg|_1^2 \\
&= [44{,}560(2)^3 - 89{,}394(2)^2 + 234{,}633(2)] \\
&\quad - [44{,}560 - 89{,}394 + 234{,}633] \\
&= 278{,}371
\end{aligned}$$

y, por consiguiente, el cambio neto es 278,371. ■

De manera más general, tenemos el siguiente resultado. Asumimos que f tiene una derivada continua, aunque la integrabilidad de f' es suficiente.

Fórmula de cambio neto

El cambio neto en una función f sobre un intervalo $[a, b]$ está dado por

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(x)\,dx \tag{10}$$

siempre que f' sea continua sobre $[a, b]$.

Como otro ejemplo del cambio neto de una función, considere el siguiente ejemplo.

EJEMPLO DE APLICACIÓN 7 Costos de producción La gerencia de Staedtler Office Equipment ha determinado que la función del costo marginal diario asociada con la producción del sacapuntas eléctrico operado con baterías está dada por

$$C'(x) = 0.000006x^2 - 0.006x + 4$$

donde $C'(x)$ se mide en dólares por unidad y x denota el número de unidades producidas. La gerencia también ha determinado que el costo fijo diario en la producción de estos sacapuntas es \$100. Determine el costo total diario de Staedtler al fabricar (a) las primeras 500 unidades y (b) la 201ava hasta la 400ava unidad.

Solución

a. Puesto que $C'(x)$ es la función del costo marginal, su antiderivada $C(x)$ es la función del costo total. El costo fijo diario en la fabricación del sacapuntas eléctrico es $C(0)$ dólares. Ya que el costo fijo diario está dado como \$100, obtenemos $C(0) = 100$. Se requiere que determinemos $C(500)$. Calculemos $C(500) - C(0)$, el cambio neto en la función del costo total $C(x)$ sobre el intervalo $[0, 500]$. Al utilizar el teorema fundamental del cálculo, determinamos

$$\begin{aligned}
C(500) - C(0) &= \int_0^{500} C'(x)\,dx \\
&= \int_0^{500} (0.000006x^2 - 0.006x + 4)\,dx \\
&= 0.000002x^3 - 0.003x^2 + 4x \Big|_0^{500} \\
&= [0.000002(500)^3 - 0.003(500)^2 + 4(500)] \\
&\quad - [0.000002(0)^3 - 0.003(0)^2 + 4(0)] \\
&= 1\,500
\end{aligned}$$

Sin embargo, $C(500) = 1{,}500 + C(0) = 1{,}500 + 100 = 1{,}600$, por tanto el costo total diario de Staedtler al fabricar 500 sacapuntas eléctricos es \$1,600.

b. El costo total diario de Staedler al fabricar de 201 a 400 unidades de sacapuntas eléctricos operados con baterías está dado por

$$\begin{aligned}
C(400) - C(200) &= \int_{200}^{400} C'(x)\,dx \\
&= \int_{200}^{400} (0.000006x^2 - 0.006x + 4)\,dx \\
&= 0.000002x^3 - 0.003x^2 + 4x \Big|_{200}^{400} \\
&= [0.000002(400)^3 - 0.003(400)^2 + 4(400)] \\
&\quad - [0.000002(200)^3 - 0.003(200)^2 + 4(200)] \\
&= 552
\end{aligned}$$

o \$552. ■

Ya que $C'(x)$ es no negativa para x en el intervalo $(0, \infty)$, se tiene la siguiente interpretación geométrica de las dos integrales definidas en el ejemplo 7: $\int_0^{500} C'(x)\,dx$ es el área de la región bajo la curva de la función C' desde $x = 0$ hasta $x = 500$, mostradas en la figura 19a, y $\int_{200}^{400} C'(x)\,dx$ es el área de la región desde $x = 200$ hasta $x = 400$, que se muestra en la figura 19b.

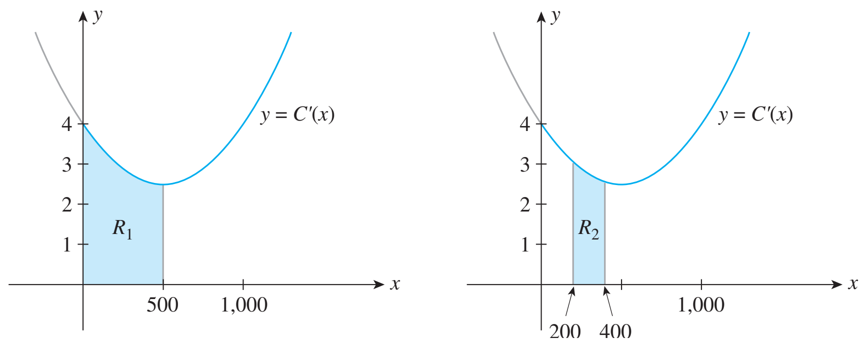


FIGURA **19**

(a) Área de $R_1 = \int_0^{500} C'(x)\,dx$ **(b)** Área de $R_2 = \int_{200}^{400} C'(x)\,dx$

VIDEO

EJEMPLO DE APLICACIÓN 8 Tiempo de ensamble de los trabajadores Un estudio de eficiencia realizado por Elektra Electronics mostró que la tasa a la que los walkie-talkies Space Commander son ensamblados en t horas promedio por trabajador, después de iniciar labores a las 8 a.m. está dada por la función

$$f(t) = -3t^2 + 12t + 15 \qquad (0 \leq t \leq 4)$$

Determine cuántos walkie-talkies promedio pueden ser ensamblados por trabajador en la primera hora promedio del turno matutino.

Solución Sea $N(t)$ el número de walkie-talkies promedio por trabajador en t horas después de iniciar el turno matutino. Entonces, tenemos

$$N'(t) = f(t) = -3t^2 + 12t + 15$$

Sin embargo, el número promedio de unidades ensambladas por trabajador en la primera hora del turno matutino es

$$\begin{aligned}
N(1) - N(0) &= \int_0^1 N'(t)\,dt = \int_0^1 (-3t^2 + 12t + 15)\,dt \\
&= -t^3 + 6t^2 + 15t \Big|_0^1 = -1 + 6 + 15 \\
&= 20
\end{aligned}$$

o 20 unidades. ■

Exploración con TECNOLOGÍA

Usted puede demostrar gráficamente que $\int_0^x t\,dt = \frac{1}{2}x^2$ como sigue:

1. Trace las gráficas de $y1 = \text{fnInt}\,(t, t, 0, x) = \int_0^x t\,dt$ y $y2 = \frac{1}{2}x^2$ en el mismo conjunto de ejes, utilizando la ventana de visualización $[-5, 5] \times [0, 10]$.
2. Compare las gráficas de $y1$ y $y2$ y dibuje la conclusión deseada.

Explore y analice

La integral definida $\int_{-3}^{3} \sqrt{9 - x^2}\,dx$ no puede ser evaluada aquí al utilizar el teorema fundamental del cálculo debido a que el método de esta sección no permite determinar una antiderivada del integrando. Pero la integral puede ser evaluada al interpretarla como el área de una cierta región plana. ¿Cuál es la región? Y, ¿cuál es el valor de la integral?

EJEMPLO DE APLICACIÓN 9 Demanda proyectada de electricidad El promedio de consumo de electricidad en cierta ciudad se espera que crezca exponencialmente a un ritmo constante de $k = 0.04$. Si la tasa actual de consumo es 40 millones de kilowatts-hora (kWh) por año, ¿cuál sería la producción total de electricidad de los siguientes 3 años para satisfacer la demanda proyectada?

Solución Si $R(t)$ denota la tasa esperada de consumo de electricidad en t años a partir de ahora, entonces

$$R(t) = 40e^{0.04t}$$

millones de kWh por año. Luego, si $C(t)$ denota el consumo total esperado de electricidad por un periodo de más de t años, entonces

$$C'(t) = R(t)$$

Sin embargo, el consumo total de electricidad esperado en los próximos 3 años está dado por

$$\begin{aligned}\int_0^3 C'(t)\,dt &= \int_0^3 40e^{0.04t}dt\\ &= \frac{40}{0.04}\,e^{0.04t}\Big|_0^3\\ &= 1{,}000\,(e^{0.12} - 1)\\ &= 127.5\end{aligned}$$

o 127.5 millones kWh, la cantidad que debe producirse en los próximos 3 años para satisfacer la demanda. ■

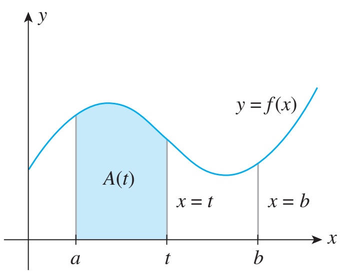


FIGURA 20
$A(t)$ = el área bajo la curva de f desde $x = a$ hasta $x = t$.

Validez del teorema fundamental del cálculo

Para demostrar la plausibilidad del teorema fundamental del cálculo para el caso donde f es no negativa sobre un intervalo $[a, b]$, defina una "función de área" A como sigue. Sea $A(t)$ que denota el área de la región R bajo la curva de $y = f(x)$ desde $x = a$ hasta $x = t$, donde $a \leq t \leq b$ (figura 20).

Si h es un número pequeño positivo, entonces $A(t + h)$ es el área de la región bajo la curva de $y = f(x)$ desde $x = a$ hasta $x = t + h$. Sin embargo, la diferencia

$$A(t + h) - A(t)$$

es el área bajo la curva de $y = f(x)$ desde $x = t$ hasta $x = t + h$ (figura 21).

Ahora, el área de esta última región puede ser aproximada por el área del rectángulo de ancho h y altura $f(t)$, esto es, por la expresión $h \cdot f(t)$ (figura 22). Por consiguiente,

$$A(t + h) - A(t) \approx h \cdot f(t)$$

donde las aproximaciones mejoran en tanto h tiende a ser más y más pequeño.

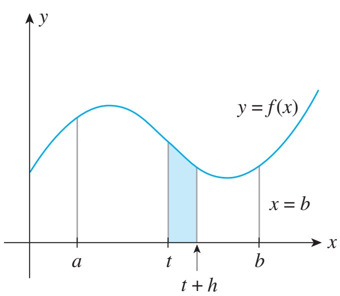


FIGURA 21
$A(t + h) - A(t)$ = el área bajo la curva de f desde $x = t$ hasta $x = t + h$.

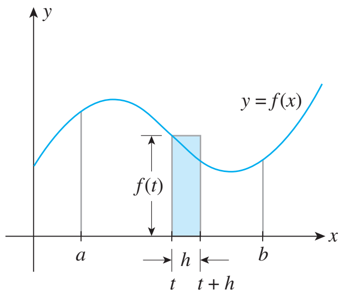


FIGURA 22
El área del rectángulo es $h \cdot f(t)$.

Al dividir ambos lados de la relación anterior entre h, obtenemos

$$\frac{A(t+h)-A(t)}{h} \approx f(t)$$

Tomando el límite conforme h se aproxima a cero determine, por la definición de la derivada, que el lado de la mano izquierda es

$$\lim_{h \to 0} \frac{A(t+h)-A(t)}{h} \approx A'(t)$$

El lado derecho, el cual es independiente de h, permanece constante a través del proceso al límite. Debido a que la aproximación se vuelve exacta conforme h se aproxima a cero, determinamos que

$$A'(t) = f(t)$$

Ya que la ecuación anterior permanece para todos los valores de f en el intervalo $[a, b]$, hemos demostrado que la *función del área A* es una antiderivada de la función $f(x)$. Por el teorema 1 de la sección 11.1, concluimos que $A(x)$ debe tener la forma

$$A(x) = F(x) + C$$

donde F es cualquier antiderivada de f y C es una constante. Para determinar el valor de C observe que $A(a) = 0$. Esta condición implica que

$$A(a) = F(a) + C = 0$$

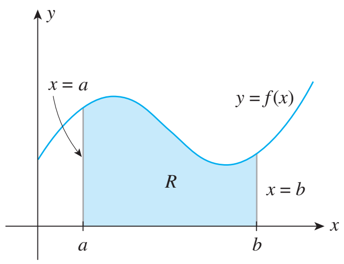


FIGURA 23
El área de R está dada por $A(b)$.

o $C = -F(a)$. Después, ya que el área de la región R es $A(b)$ (figura 23), observe que el área requerida es

$$\begin{aligned} A(b) &= F(b) + C \\ &= F(b) - F(a) \end{aligned}$$

Ya que el área de la región R es

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

tenemos

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

como lo expusimos para demostrar.

11.4 Ejercicios de autoevaluación

1. Evaluar $\int_0^2 (x + e^x)\,dx$.

2. La función de utilidad marginal diaria se asocia con la producción y venta de la salsa picante TexaPep es

$$P'(x) = -0.000006x^2 + 6$$

donde x denota el número de cajas (cada caja contiene 24 botellas) fabricadas y vendidas diariamente y $P'(x)$ se mide en dólares por unidad. El costo fijo es \$400.

a. ¿Cuál es la utilidad total al fabricar y vender 1,000 cajas de TexaPep por día?
b. ¿Cuál es la utilidad adicional si la producción y venta de TexaPep se incrementa de 1,000 a 1,200 cajas por día?

Las soluciones de los ejercicios de autoevaluación 11.4 se encuentran en la página 784.

11.4 Preguntas de concepto

1. Explique el teorema fundamental del cálculo.
2. Exprese la fórmula de cambio neto y utilícela para responder los siguientes cuestionamientos:
   a. Si una empresa genera ingresos a una tasa de R dólares por día, explique lo que mide $\int_a^b R(t)\,dt$, donde a y b se miden en días con $a < b$.
   b. Si un jet privado consume combustible a una tasa de R gal/min, escriba una integral que dé el consumo neto de combustible del jet entre momentos $t = a$ y $t = b$ $(a < b)$, donde t se mide en minutos.

11.4 Ejercicios

En los ejercicios 1-4, determine el área de la región bajo la curva de la función *f* sobre el intervalo [*a*, *b*], utilizando el teorema fundamental del cálculo. Después verifique su resultado utilizando geometría.

1. $f(x) = 2;\ [1, 4]$
2. $f(x) = 4;\ [-1, 2]$
3. $f(x) = 2x;\ [1, 3]$
4. $f(x) = -\frac{1}{4}x + 1;\ [1, 4]$

En los ejercicios 5-16, determine el área de la región bajo la curva de la función *f* sobre el intervalo [*a*, *b*].

5. $f(x) = 2x + 3;\ [-1, 2]$
6. $f(x) = 4x - 1;\ [2, 4]$
7. $f(x) = -x^2 + 4;\ [-1, 2]$
8. $f(x) = 4x - x^2;\ [0, 4]$
9. $f(x) = \frac{1}{x};\ [1, 2]$
10. $f(x) = \frac{1}{x^2};\ [2, 4]$
11. $f(x) = \sqrt{x};\ [1, 9]$
12. $f(x) = x^3;\ [1, 3]$
13. $f(x) = 1 - \sqrt[3]{x};\ [-8, -1]$
14. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}};\ [1, 9]$
15. $f(x) = e^x;\ [0, 2]$
16. $f(x) = e^x - x;\ [1, 2]$

En los ejercicios 17-40, evalúe la integral definida.

17. $\int_2^4 3\,dx$
18. $\int_{-1}^2 -2\,dx$
19. $\int_1^3 (2x + 3)\,dx$
20. $\int_{-1}^0 (4 - x)\,dx$
21. $\int_{-1}^3 2x^2\,dx$
22. $\int_0^2 8x^3\,dx$
23. $\int_{-2}^2 (x^2 - 1)\,dx$
24. $\int_1^4 \sqrt{u}\,du$
25. $\int_1^8 4x^{1/3}\,dx$
26. $\int_1^4 2x^{-3/2}\,dx$
27. $\int_0^1 (x^3 - 2x^2 + 1)\,dx$
28. $\int_1^2 (t^5 - t^3 + 1)\,dt$
29. $\int_2^4 \frac{1}{x}\,dx$
30. $\int_1^3 \frac{2}{x}\,dx$
31. $\int_0^4 x(x^2 - 1)\,dx$
32. $\int_0^2 (x - 4)(x - 1)\,dx$
33. $\int_1^3 (t^2 - t)^2\,dt$
34. $\int_{-1}^1 (x^2 - 1)^2\,dx$
35. $\int_{-3}^{-1} \frac{1}{x^2}\,dx$
36. $\int_1^2 \frac{2}{x^3}\,dx$
37. $\int_1^4 \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx$
38. $\int_0^1 \sqrt{2x}(\sqrt{x} + \sqrt{2})\,dx$
39. $\int_1^4 \frac{3x^3 - 2x^2 + 4}{x^2}\,dx$
40. $\int_1^2 \left(1 + \frac{1}{u} + \frac{1}{u^2}\right) du$

41. **COSTO MARGINAL** Una división de Ditton Industries fabrica un tostador de lujo. La gerencia ha determinado que la función de costo marginal diario asociada con la fabricación de estos tostadores está dada por

$$C'(x) = 0.0003x^2 - 0.12x + 20$$

donde $C'(x)$ se mide en dólares por unidad y x denota el número de unidades fabricadas. La gerencia también ha determinado que el costo fijo diario en la fabricación es \$800.
   a. Determine el costo total diario de Ditton al producir los primeros 300 tostadores.
   b. ¿Cuál es el costo total de Ditton al fabricar de 201 hasta 300 unidades por día?

42. **INGRESOS MARGINALES** La gerencia de Ditton Industries ha determinado que la función de ingresos marginales por día asociada con la venta de x unidades de sus tostadores está dada por

$$R'(x) = -0.1x + 40$$

donde $R'(x)$ se mide en dólares por unidad.
   a. Determine el ingreso total diario obtenido de la venta de 200 unidades del horno tostador.
   b. Determine el ingreso adicional obtenido cuando el nivel de producción (y ventas) aumenta de 200 a 300 unidades.

43. **UTILIDAD MARGINAL** Refiérase al ejercicio 41. La función de utilidad marginal diaria asociada con la fabricación y venta de los hornos tostadores de lujo se conoce por

$$P'(x) = -0.0003x^2 + 0.02x + 20$$

donde x denota el número de unidades fabricadas y vendidas diariamente y $P'(x)$ se mide en dólares por unidad.

a. Determine la utilidad total realizada de la fabricación y venta de 200 unidades de los tostadores por día.
Sugerencia: $P(200) - P(0) = \int_0^{200} P'(x)\,dx$, $P(0) = -800$.

b. ¿Cuál es la utilidad adicional diaria si la fabricación y venta del horno tostador aumentó de 200 a 220 unidades por día?

44. Publicidad por Internet Los ingresos en publicidad por Internet en Estados Unidos creció a una tasa de

$$R(t) = 0.82t + 1.14 \qquad (0 \le t \le 4)$$

miles de millones de dólares por año entre 2002 ($t = 0$) y 2006 ($t = 4$). Los ingresos por publicidad en 2002 fueron \$5,900 millones.

a. Determine una expresión que dé los ingresos por publicidad en el año t.

b. Si la tendencia continua, ¿cuál fue el ingreso por publicidad en Internet en 2007?

Fuente: Interactive Advertising Bureau

45. Gasto en anuncios por teléfono celular El gasto en anuncios por teléfono celular se espera crezca a una tasa de

$$R(t) = 0.8256t^{-0.04} \qquad (1 \le t \le 5)$$

miles de millones de dólares por año entre 2007 ($t = 1$) y 2011 ($t = 5$). Dicho gasto en 2007 fue \$900 millones.

a. Determine una expresión que dé el gasto en anuncios por teléfono celular al año t.

b. Si la tendencia continúa, ¿cuál será el gasto en anuncios por teléfono celular en 2012?

Fuente: Interactive Advertising Bureau

46. Estudios de eficiencia Tempco Electronics, una división de Tempco Toys, fabrica un juego electrónico de fútbol. Un estudio de eficiencia demostró que la tasa a la que los juegos se ensamblan en promedio por trabajador en t horas después de iniciar su jornada, a las 8 a.m., es

$$-\frac{3}{2}t^2 + 6t + 20 \qquad (0 \le t \le 4)$$

unidades por hora.

a. Determine el número promedio total de juegos que el trabajador espera ensamblar en el turno matutino de 4 horas.

b. ¿Cuántas unidades promedio espera el trabajador poder ensamblar en la primera hora del turno matutino? ¿En la segunda hora del turno matutino?

47. Carrera de lanchas de velocidad En una reciente carrera para el récord mundial de velocidad en el agua, la rapidez del *Sea Falcon II* t segundos después del disparo de salida está dada por

$$v(t) = -t^2 + 20t + 440 \qquad (0 \le t \le 20)$$

pies por segundo. Determine la distancia cubierta por el yate en un periodo de 20 segundos después del disparo de salida.
Sugerencia: La distancia está dada por $\int_0^{20} v(t)\,dt$.

48. Computadoras de bolsillo Las ventas anuales (en millones de unidades) de computadoras de bolsillo se espera que crezcan con base en la función

$$f(t) = 0.18t^2 + 0.16t + 2.64 \qquad (0 \le t \le 6)$$

donde t se mide en años, con $t = 0$ correspondiente a 1997. ¿Cuántas computadoras de bolsillo se vendieron durante el periodo entre principios de 1997 y finales de 2002?

Fuente: Dataquest, Inc.

49. Hogares encabezados por madres solteras El porcentaje de familias con niños encabezado por mujeres solteras creció a una tasa de

$$R(t) = 0.8499t^2 - 3.872t + 5 \qquad (0 \le t \le 3)$$

hogares por década entre 1970 ($t = 0$) y 2000 ($t = 3$). El número de estos hogares se situó en 5.6% de todas las familias en 1970.

a. Determine una expresión que dé el porcentaje de estos hogares en la t-ésima década.

b. Si la tendencia continúa, estime el porcentaje de estos hogares en 2010.

c. ¿Cuál fue el aumento neto en el porcentaje de estos hogares desde 1970 hasta 2000?

Fuente: U.S. Census Bureau

50. Purificadores de aire Para probar purificadores de aire, ingenieros llenaron de humo una habitación de 10×20 pies. Mientras se realizaba la prueba para determinada marca de purificador de aire, se determinó que la cantidad de humo en la habitación disminuía a una tasa de

$$R(t) = 0.00032t^4 - 0.01872t^3 + 0.3948t^2 - 3.83t + 17.63 \qquad (0 \le t \le 20)$$

el porcentaje de la cantidad (original) de humo por minuto, t min después de iniciada la prueba. ¿Cuánto humo quedó en la habitación después de 5 minutos de iniciada la prueba? ¿Diez minutos después de iniciada la prueba?

Fuente: Consumer Reports

51. Decodificador de señal de televisión El número de decodificadores de señal de televisión enviados a todo el mundo desde principios de 2003 hasta principios de 2009 está proyectada para ser

$$f(t) = -0.05556t^3 + 0.262t^2 + 17.46t + 63.4 \qquad (0 \le t \le 6)$$

millones de unidades por año, donde t se mide en años, con $t = 0$ correspondiente a 2003. Si la proyección es cierta, ¿cuántos decodificadores se esperó que fueran enviados desde principios de 2003 hasta principios de 2009?

Fuente: In-Stat.

52. Producción de arenas petrolíferas canadienses La producción de petróleo (en millones de barriles por día) extraído de arenas petrolíferas en Canadá está proyectada para crecer con base en la función

$$P(t) = \frac{4.76}{1 + 4.11e^{-0.22t}} \qquad (0 \le t \le 15)$$

donde t se mide en años, donde $t = 0$ corresponde a 2005. ¿Cuál es la producción total de petróleo extraído de las arenas petrolíferas a lo largo de los años desde 2005 hasta 2020 ($t = 15$)?
Sugerencia: multiplique el integrando por $\dfrac{e^{0.22t}}{e^{0.22t}}$.

Fuente: Canadian Association of Petroleum Producers.

53. CIUDADANOS ADULTOS MAYORES La población con 65 años de edad y mayores (en millones) desde 2000 a 2050 está proyectada para ser

$$f(t) = \frac{85}{1 + 1.859e^{-0.66t}} \qquad (0 \leq t \leq 5)$$

donde t se mide en décadas con $t = 0$ correspondiente a 2000. ¿Por cuánto la población de 65 años y más crecerá desde principios de 2000 hasta principios de 2030?
Sugerencia: Multiplique el integrando por $e^{0.66t}/e^{0.66t}$.

Fuente: U.S. Census Bureau

54. TORRENTE SANGUÍNEO Considere una arteria de longitud L cm y radio de R cm. Al utilizar la ley de Poiseuille (página 131), ésta puede demostrar que la tasa a la que la sangre fluye a través de la arteria (medida en centímetros cúbicos por segundo) está dada por

$$V = \int_0^R \frac{k}{L} x(R^2 - x^2)\, dx$$

donde k es una constante. Determine una expresión para V que *no* involucre una integral.
Sugerencia: Utilice la sustitución $u = R^2 - x^2$.

55. Determine el área de la región limitada por la gráfica de la función $f(x) = x^4 - 2x^2 + 2$, el eje x y las líneas $x = a$ y $x = b$, donde $a < b$ y a y b son las coordenadas x del punto máximo relativo y el punto mínimo relativo de f, respectivamente.

56. Determine el área de la región limitada por la gráfica de la función $f(x) = (x + 1)/\sqrt{x}$, el eje x, y las líneas $x = a$ y $x = b$, donde a y b son, respectivamente, las coordenadas x del punto mínimo relativo y el punto de inflexión de f.

En los ejercicios 57-60, determine si el enunciado es verdadero o falso. Proporcione un argumento de su respuesta.

57. $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^3}\, dx = -\frac{1}{2x^2}\bigg|_{-1}^{1} = -\frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right) = 0$

58. $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{x}\, dx = \ln|x|\bigg|_{-1}^{1} = \ln|1| - \ln|-1| = \ln 1 - \ln 1 = 0$

59. $\int_0^2 (1 - x)\, dx$ da el área de la región bajo la curva de $f(x) = 1 - x$ en el intervalo [0, 2].

60. Los ingresos totales obtenidos por la venta de las primeras 500 unidades de un producto están dados por

$$\int_0^{500} R'(x)\, dx = R(500) - R(0)$$

donde $R(x)$ es el ingreso total.

11.4 Soluciones de los ejercicios de autoevaluación

1.
$$\begin{aligned}\int_0^2 (x + e^x)\, dx &= \frac{1}{2}x^2 + e^x\bigg|_0^2 \\ &= \left[\frac{1}{2}(2)^2 + e^2\right] - \left[\frac{1}{2}(0) + e^0\right] \\ &= 2 + e^2 - 1 \\ &= e^2 + 1\end{aligned}$$

2. a. Se desea $P(1{,}000)$, pero

$$\begin{aligned}P(1{,}000) - P(0) &= \int_0^{1{,}000} P'(x)\, dx = \int_0^{1{,}000} (-0.000006x^2 + 6)dx \\ &= -0.000002x^3 + 6x\bigg|_0^{1{,}000} \\ &= -0.000002(1{,}000)^3 + 6(1{,}000) \\ &= 4{,}000\end{aligned}$$

Por consiguiente, $P(1{,}000) = 4{,}000 + P(0) = 4{,}000 - 400$, o \$3,600 por día $[P(0) = -C(0)]$.

b. La utilidad adicional obtenida está dada por

$$\begin{aligned}\int_{1{,}000}^{1{,}200} P'(x)\, dx &= -0.000002x^3 + 6x\bigg|_{1{,}000}^{1{,}200} \\ &= [-0.000002(1{,}200)^3 + 6(1{,}200)] \\ &\quad - [-0.000002(1{,}000)^3 + 6(1{,}000)] \\ &= 3{,}744 - 4{,}000 \\ &= -256\end{aligned}$$

Esto es, la empresa sostiene una pérdida de \$256 por día si la fabricación aumenta de 1,000 a 1,200 cajas por día.

USO DE LA TECNOLOGÍA

Evaluación de las integrales definidas

Algunas utilerías de graficación tienen una operación para determinar la integral definida de una función. Si su utilería de graficación tiene esta capacidad, úsela para trabajar en el ejemplo y los ejercicios de esta sección.

EJEMPLO 1 Use la operación integral numérica de la calculadora graficadora para evaluar

$$\int_{-1}^{2} \frac{2x + 4}{(x^2 + 1)^{3/2}}\, dx$$

Solución Usando la operación integral numérica de una calculadora graficadora, determinamos

$$\int_{-1}^{2} \frac{2x + 4}{(x^2 + 1)^{3/2}}\, dx = \text{fnInt}((2x + 4)/(x\text{^}2 + 1)\text{^}1.5,\ x,\ -1,\ 2) \approx 6.92592226$$ ■

EJERCICIOS CON TECNOLOGÍA

En los ejercicios 1-4 determine el área de la región bajo la curva de *f* sobre el intervalo [*a*, *b*]. Exprese su respuesta con cuatro decimales.

1. $f(x) = 0.002x^5 + 0.032x^4 - 0.2x^2 + 2;\ [-1.1, 2.2]$
2. $f(x) = x\sqrt{x^3 + 1};\ [1, 2]$
3. $f(x) = \sqrt{x}e^{-x};\ [0, 3]$
4. $f(x) = \dfrac{\ln x}{\sqrt{1 + x^2}};\ [1, 2]$

En los ejercicios 5-10, evalúe la integral definida.

5. $\displaystyle\int_{-1.2}^{2.3} (0.2x^4 - 0.32x^3 + 1.2x - 1)\, dx$
6. $\displaystyle\int_{1}^{3} x(x^4 - 1)^{3.2}\, dx$
7. $\displaystyle\int_{0}^{2} \frac{3x^3 + 2x^2 + 1}{2x^2 + 3}\, dx$
8. $\displaystyle\int_{1}^{2} \frac{\sqrt{x} + 1}{2x^2 + 1}\, dx$
9. $\displaystyle\int_{0}^{2} \frac{e^x}{\sqrt{x^2 + 1}}\, dx$
10. $\displaystyle\int_{1}^{3} e^{-x} \ln(x^2 + 1)\, dx$
11. Trabaje de nuevo en el ejercicio 50 de los ejercicios 11.4.
12. Trabaje de nuevo en el ejercicio 53 de los ejercicios 11.4.
13. **EPIDEMIA GLOBAL** El número de muertes relacionadas con el SIDA por año en Estados Unidos está dada por la función

$$f(t) = -53.254t^4 + 673.7t^3 - 2801.07t^2 + 8833.379t + 20{,}000 \qquad (0 \le t \le 9)$$

donde $t = 0$ corresponde a principios de 1988. Determine el número total de muertes relacionado con el SIDA en Estados Unidos entre principios de 1988 y finales de 1996.

Fuente: Centers for Disease Control

14. **ARRESTOS POR POSESIÓN DE MARIHUANA** El número de arrestos por la venta y posesión de marihuana en la ciudad de Nueva York creció a un ritmo de aproximadamente

$$f(t) = 0.0125t^4 - 0.01389t^3 + 0.55417t^2 + 0.53294t + 4.95238 \qquad (0 \le t \le 5)$$

miles por año, donde t se mide en años, donde $t = 0$ corresponde a inicios de 1992. Determine el número de arrestos por posesión de marihuana en la ciudad desde principios de 1992 hasta finales de 1997.

Fuente: State Division of Criminal Justice Services

15. **CRECIMIENTO DE LA POBLACIÓN** La población de una determinada ciudad se proyecta que crezca a una tasa de $18\sqrt{t + 1} \ln \sqrt{t + 1}$ miles de personas por año t años a partir de ahora. Si la población actual es 800,000, ¿cuál será la población dentro de 45 años a partir de ahora?

11.5 Evaluación de integrales definidas

Esta sección continúa la discusión sobre las aplicaciones del teorema fundamental del cálculo.

Propiedades de la integral definida

Antes de continuar, se listan las siguientes propiedades útiles de la integral definida, algunas de las cuales son similares a las reglas de integración de la sección 11.1.

Propiedades de la integral definida

Sean f y g funciones integrables; entonces,

1. $\displaystyle\int_a^a f(x)\,dx = 0$

2. $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$

3. $\displaystyle\int_a^b cf(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx$ (c, una constante)

4. $\displaystyle\int_a^b [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$

5. $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$ $(a < c < b)$

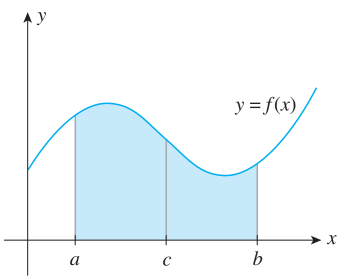


FIGURA 24
$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$

La propiedad 5 expresa que si c es un número que permanece entre a y b, por consiguiente, el intervalo $[a, b]$ está dividido entre los intervalos $[a, c]$ y $[c, b]$, entonces la integral de f sobre el intervalo $[a, b]$ puede expresarse como la suma de la integral de f sobre el intervalo $[a, c]$ y la integral de f sobre el intervalo $[c, b]$.

La propiedad 5 tiene la siguiente interpretación geométrica cuando f es no negativa. Por la definición

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

es el área de la región bajo la curva de $y = f(x)$ desde $x = a$ hasta $x = b$ (figura 24). De forma similar, interprete las integrales definidas

$$\int_a^c f(x)\,dx \quad \text{y} \quad \int_c^b f(x)\,dx$$

como las áreas de las regiones bajo la curva de $y = f(x)$ desde $x = a$ hasta $x = c$ y desde $x = c$ hasta $x = b$, respectivamente. Ya que las dos regiones no se traslapan, observe que

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

El método de sustitución para las integrales definidas

El primer ejemplo demuestra dos aproximaciones que se utilizan por lo general cuando se evalúa una integral definida empleando el método de sustitución.

EJEMPLO 1 Evalúe $\displaystyle\int_0^4 x\sqrt{9 + x^2}\,dx$.

Solución

Método 1 Determinamos primero la integral indefinida correspondiente:

$$I = \int x\sqrt{9 + x^2}\,dx$$

Realice la sustitución $u = 9 + x^2$, por tanto

$$\begin{aligned} du &= \frac{d}{dx}(9 + x^2)\,dx \\ &= 2x\,dx \\ x\,dx &= \frac{1}{2}\,du \end{aligned}$$

Divida ambos lados entre 2.

Después,

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{1}{2}\sqrt{u}\,du = \frac{1}{2}\int u^{1/2}\,du \\ &= \frac{1}{3}u^{3/2} + C = \frac{1}{3}(9 + x^2)^{3/2} + C \end{aligned}$$

Sustituya $9 + x^2$ por u.

Utilice este resultado para evaluar ahora la integral definida dada:

$$\begin{aligned} \int_0^4 x\sqrt{9 + x^2}\,dx &= \frac{1}{3}(9 + x^2)^{3/2}\Big|_0^4 \\ &= \frac{1}{3}\left[(9 + 16)^{3/2} - 9^{3/2}\right] \\ &= \frac{1}{3}(125 - 27) = \frac{98}{3} = 32\tfrac{2}{3} \end{aligned}$$

Método 2 *Cambio de los límites de integración*. Como antes, realice la sustitución

$$u = 9 + x^2 \tag{11}$$

Por tanto

$$\begin{aligned} du &= 2x\,dx \\ x\,dx &= \frac{1}{2}\,du \end{aligned}$$

Después, observe que la integral definida es evaluada *con respecto a x,* con el rango de integración dado por el intervalo [0, 4]. Si se realiza la integración *con respecto a u* vía la sustitución (11), después debe ajustar el rango de integración para reflejar el hecho que la integración está siendo realizada con respecto a la nueva variable u. Al determinar el rango de integración apropiado, observe que cuando $x = 0$, implica que la ecuación (11)

$$u = 9 + 0^2 = 9$$

que da el límite inferior de integración requerido con respecto a u.
De forma similar, cuando $x = 4$,

$$u = 9 + 16 = 25$$

es el límite superior de integración requerido con respecto a u. Así, el rango de integración cuando la integración se lleva a cabo con respecto a u está dado por el intervalo [9, 25]. Sin embargo, tenemos

$$\begin{aligned} \int_0^4 x\sqrt{9 + x^2}\,dx &= \int_9^{25} \frac{1}{2}\sqrt{u}\,du = \frac{1}{2}\int_9^{25} u^{1/2}\,du \\ &= \frac{1}{3}u^{3/2}\Big|_9^{25} = \frac{1}{3}(25^{3/2} - 9^{3/2}) \\ &= \frac{1}{3}(125 - 27) = \frac{98}{3} = 32\tfrac{2}{3} \end{aligned}$$

que coincide con el resultado obtenido al utilizar el método 1. ■

Cuando utilice el método de sustitución, asegúrese de ajustar los límites de integración a fin de reflejar la integración con respecto a la nueva variable u.

Exploración con TECNOLOGÍA

Refiérase al ejemplo 1. Puede confirmar los resultados obtenidos ahí mediante el uso de la calculadora graficadora como sigue:

1. Use la operación de integración numérica de la calculadora graficadora para evaluar

$$\int_0^4 x\sqrt{9+x^2}\,dx$$

2. Evalúe $\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_9^{25} \sqrt{u}\,du$

3. Concluya que $\displaystyle\int_0^4 x\sqrt{9+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_9^{25}\sqrt{u}\,du.$

EJEMPLO 2 Evalúe $\displaystyle\int_0^2 xe^{2x^2}\,dx.$

Solución Sea $u = 2x^2$ así que $du = 4x\,dx$, o $x\,dx = \frac{1}{4}\,du$. Cuando $x = 0$, $u = 0$, y cuando $x = 2$, $u = 8$. Éste da los límites inferiores y superiores de integración con respecto a u. Al realizar las sustituciones indicadas, determine

$$\int_0^2 xe^{2x^2}\,dx = \int_0^8 \frac{1}{4}e^u\,du = \frac{1}{4}e^u\Big|_0^8 = \frac{1}{4}(e^8 - 1)$$

EJEMPLO 3 Evalúe $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{x^3+1}\,dx.$

Solución Sea $u = x^3 + 1$ así que $du = 3x^2\,dx$, o $x^2\,dx = \frac{1}{3}\,du$. Cuando $x = 0$, $u = 1$, y cuando $x = 1$, $u = 2$. Éste da los límites inferiores y superiores de integración con respecto a u. Al realizar las sustituciones indicadas, determine

$$\int_0^1 \frac{x^2}{x^3+1}\,dx = \frac{1}{3}\int_1^2 \frac{du}{u} = \frac{1}{3}\ln|u|\Big|_1^2$$

$$= \frac{1}{3}(\ln 2 - \ln 1) = \frac{1}{3}\ln 2$$

Determinar el área bajo una curva

VIDEO

EJEMPLO 4 Determine el área de la región R bajo la curva de $f(x) = e^{(1/2)x}$ desde $x = -1$ hasta $x = 1$.

Solución La región R se muestra en la figura 25. Su área está dada por

$$A = \int_{-1}^1 e^{(1/2)x}\,dx$$

Para evaluar esta integral, realizamos la sustitución

$$u = \frac{1}{2}x$$

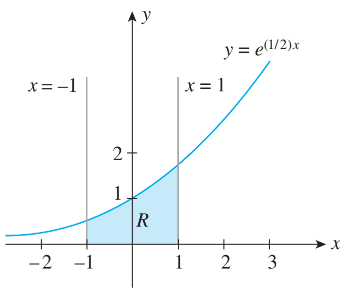


FIGURA 25
El área de $R = \int_{-1}^{1} e^{(1/2)x}\,dx$.

por tanto

$$du = \frac{1}{2}\,dx$$
$$dx = 2\,du$$

Cuando $x = -1$, $u = -\frac{1}{2}$, y cuando $x = 1$, $u = \frac{1}{2}$. Al realizar las sustituciones adecuadas, obtenemos

$$A = \int_{-1}^{1} e^{(1/2)x}\,dx = 2\int_{-1/2}^{1/2} e^{u}\,du$$
$$= 2e^{u}\Big|_{-1/2}^{1/2} = 2(e^{1/2} - e^{-1/2})$$

o aproximadamente 2.08 unidades cuadradas. ■

Explore y analice

Sea f una función definida en partes por la regla

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{si } 0 \le x \le 1 \\ \dfrac{1}{x} & \text{si } 1 < x \le 2 \end{cases}$$

¿Cómo utilizaría la propiedad 5 de las integrales definidas para determinar el área de la región bajo la curva de f sobre $[0, 2]$? ¿Cuál es el área?

Valor promedio de una función

El *valor promedio* de una función sobre un intervalo se nos provee con una aplicación de la integral definida. Recuerde que el valor promedio de un conjunto de n números es el número

$$\frac{y_1 + y_2 + \cdots + y_n}{n}$$

Suponga ahora que f es una función continua definida sobre $[a, b]$. Divida el intervalo $[a, b]$ entre n subintervalos de igual longitud $(b - a)/n$. Elija los puntos $x_1, x_2, \ldots, x_n$ en el primero, segundo, . . . , y n-ésimo subintervalos, respectivamente. Después, el valor promedio de los números $f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n)$, dados por

$$\frac{f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)}{n}$$

es una aproximación del promedio de todos los valores de $f(x)$ sobre el intervalo $[a, b]$. Esta expresión puede escribirse en la forma

$$\frac{(b-a)}{(b-a)}\left[f(x_1)\cdot\frac{1}{n} + f(x_2)\cdot\frac{1}{n} + \cdots + f(x_n)\cdot\frac{1}{n}\right]$$
$$= \frac{1}{b-a}\left[f(x_1)\cdot\frac{b-a}{n} + f(x_2)\cdot\frac{b-a}{n} + \cdots + f(x_n)\cdot\frac{b-a}{n}\right]$$
$$= \frac{1}{b-a}\left[f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + \cdots + f(x_n)\Delta x\right] \tag{12}$$

Conforme n se haga más y más grande, la expresión (12) aproxima al valor promedio de $f(x)$ sobre $[a, b]$ con el crecimiento exacto. Pero la suma dentro de los corchetes en (12) es una suma Riemann de la función f sobre $[a, b]$. En vista de esto, se obtiene

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}&\left[\frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}\right]\\&=\frac{1}{b-a}\lim_{n\to\infty}\,[f(x_1)\,\Delta x+f(x_2)\,\Delta x+\cdots+f(x_n)\,\Delta x]\\&=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\end{aligned}$$

Esta discusión motiva la siguiente definición.

Valor promedio de una función

Suponga que f es integrable sobre $[a, b]$. Entonces el **valor promedio** de f sobre $[a, b]$ es

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

EJEMPLO 5 Determine el valor promedio de la función $f(x) = \sqrt{x}$ sobre el intervalo $[0, 4]$.

Solución El valor promedio requerido está dado por

$$\begin{aligned}\frac{1}{4-0}\int_0^4 \sqrt{x}\,dx&=\frac{1}{4}\int_0^4 x^{1/2}\,dx\\&=\frac{1}{6}x^{3/2}\Big|_0^4=\frac{1}{6}(4^{3/2})\\&=\frac{4}{3}\end{aligned}$$

■

EJEMPLO DE APLICACIÓN 6 Financiamiento para automóvil

Las tasas de interés aplicadas por Madison Finance sobre préstamos para automóvil en vehículos usados durante un periodo de 6 meses en 2008 son aproximadas por la función

$$r(t)=-\frac{1}{12}t^3+\frac{7}{8}t^2-3t+12\qquad(0\le t\le 6)$$

donde t se mide en meses y $r(t)$ es la la tasa porcentual anual. ¿Cuál es la tasa promedio de los préstamos para automóvil otorgados por Madison durante 6 meses?

Solución La tasa promedio por un periodo en cuestión de 6 meses está dada por

$$\begin{aligned}\frac{1}{6-0}&\int_0^6\left(-\frac{1}{12}t^3+\frac{7}{8}t^2-3t+12\right)dt\\&=\frac{1}{6}\left(-\frac{1}{48}t^4+\frac{7}{24}t^3-\frac{3}{2}t^2+12t\right)\Big|_0^6\\&=\frac{1}{6}\left[-\frac{1}{48}(6^4)+\frac{7}{24}(6^3)-\frac{3}{2}(6^2)+12(6)\right]\\&=9\end{aligned}$$

o 9% anual.

■

EJEMPLO DE APLICACIÓN 7 Concentración de un fármaco en el cuerpo La cantidad de cierto fármaco después de que ha sido administrado al cuerpo de un paciente en t días es

$$C(t) = 5e^{-0.2t}$$

unidades. Determine la cantidad promedio del fármaco presente en el cuerpo del paciente por los primeros 4 días después de que se le suministró.

Solución La cantidad promedio del fármaco presente en el cuerpo del paciente por los primeros 4 días después de habérsele suministrado está dada por

$$\begin{aligned} \frac{1}{4-0}\int_0^4 5e^{-0.2t}\,dt &= \frac{5}{4}\int_0^4 e^{-0.2t}\,dt \\ &= \frac{5}{4}\left[\left(-\frac{1}{0.2}\right)e^{-0.2t}\Big|_0^4\right] \\ &= \frac{5}{4}(-5e^{-0.8}+5) \\ &\approx 3.44 \end{aligned}$$

o aproximadamente 3.44 unidades. ■

Ahora damos una interpretación geométrica al valor promedio de una función f sobre un intervalo $[a, b]$. Suponga que $f(x)$ es no negativa, por tanto, la integral definida

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

da el área bajo la curva de f desde $x = a$ hasta $x = b$ (figura 26). Observe que, en general, la "altura" de $f(x)$ varía de un punto a otro. ¿Se puede reemplazar $f(x)$ por una función constante $g(x) = k$ (la cual tiene una altura constante) dichas áreas bajo cada una de las dos funciones f y g son las mismas? De ser así, ya que el área bajo la curva de g desde $x = a$ hasta $x = b$ es $k(b - a)$, se tiene

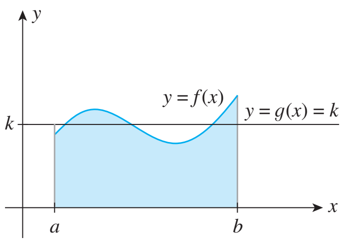


FIGURA **26**
El valor promedio de f sobre $[a, b]$ es k.

$$\begin{aligned} k(b-a) &= \int_a^b f(x)\,dx \\ k &= \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \end{aligned}$$

por consiguiente k es el valor promedio de f sobre $[a, b]$. De esta manera, el valor promedio de una función f sobre un intervalo $[a, b]$ es la altura de un rectángulo con una base de longitud $(b - a)$ que tiene la misma área como aquélla de la región bajo la curva de f desde $x = a$ hasta $x = b$.

11.5 Ejercicios de autoevaluación

1. Evalúe $\displaystyle\int_0^2 \sqrt{2x+5}\,dx$.

2. Determine el valor promedio de la función $f(x) = 1 - x^2$ sobre el intervalo $[-1, 2]$.

3. El precio medio de una casa en un estado del suroeste entre enero 1 de 2003, y enero 1 de 2008, está aproximado por la función

$$f(t) = t^3 - 7t^2 + 17t + 280 \qquad (0 \le t \le 5)$$

donde $f(t)$ se mide en miles de dólares y t se expresa en años, donde $t = 0$ corresponde a principios de 2003. Determine el precio medio promedio de una casa sobre ese intervalo de tiempo.

Las soluciones de los ejercicios de autoevaluación 11.5 se encuentran en la página 795.

11.5 Preguntas de concepto

1. Describa dos aproximaciones empleadas para evaluar una integral definida utilizando el método de sustitución. Ilustre con la integral $\int_0^1 x^2(x^3+1)^2\,dx$.

2. Defina el valor promedio de una función f sobre un intervalo $[a, b]$. Proporcione una interpretación geométrica.

11.5 Ejercicios

En los ejercicios 1-28, evalúe la integral definida.

1. $\displaystyle\int_0^2 x(x^2-1)^3\,dx$
2. $\displaystyle\int_0^1 x^2(2x^3-1)^4\,dx$
3. $\displaystyle\int_0^1 x\sqrt{5x^2+4}\,dx$
4. $\displaystyle\int_1^3 x\sqrt{3x^2-2}\,dx$
5. $\displaystyle\int_0^2 x^2(x^3+1)^{3/2}\,dx$
6. $\displaystyle\int_1^5 (2x-1)^{5/2}\,dx$
7. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{2x+1}}\,dx$
8. $\displaystyle\int_0^2 \frac{x}{\sqrt{x^2+5}}\,dx$
9. $\displaystyle\int_1^2 (2x-1)^4\,dx$
10. $\displaystyle\int_1^2 (2x+4)(x^2+4x-8)^3\,dx$
11. $\displaystyle\int_{-1}^1 x^2(x^3+1)^4\,dx$
12. $\displaystyle\int_1^2 \left(x^3+\frac{3}{4}\right)(x^4+3x)^{-2}\,dx$
13. $\displaystyle\int_1^5 x\sqrt{x-1}\,dx$
14. $\displaystyle\int_1^4 x\sqrt{x+1}\,dx$
   Sugerencia: Sea $u = x + 1$.
15. $\displaystyle\int_0^2 xe^{x^2}\,dx$
16. $\displaystyle\int_0^1 e^{-x}\,dx$
17. $\displaystyle\int_0^1 (e^{2x}+x^2+1)\,dx$
18. $\displaystyle\int_0^2 (e^t-e^{-t})\,dt$
19. $\displaystyle\int_{-1}^1 xe^{x^2+1}\,dx$
20. $\displaystyle\int_0^4 \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$
21. $\displaystyle\int_3^6 \frac{2}{x-2}\,dx$
22. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{1+2x^2}\,dx$
23. $\displaystyle\int_1^2 \frac{x^2+2x}{x^3+3x^2-1}\,dx$
24. $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x}\,dx$
25. $\displaystyle\int_1^2 \left(4e^{2u}-\frac{1}{u}\right)du$
26. $\displaystyle\int_1^2 \left(1+\frac{1}{x}+e^x\right)dx$
27. $\displaystyle\int_1^2 \left(2e^{-4x}-\frac{1}{x^2}\right)dx$
28. $\displaystyle\int_1^2 \frac{\ln x}{x}\,dx$

En los ejercicios 29-34, determine el área de la región bajo la curva de f sobre $[a, b]$.

29. $f(x) = x^2 - 2x + 2$; $[-1, 2]$
30. $f(x) = x^3 + x$; $[0, 1]$
31. $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$; $[1, 2]$
32. $f(x) = 2 + \sqrt{x+1}$; $[0, 3]$
33. $f(x) = e^{-x/2}$; $[-1, 2]$
34. $f(x) = \dfrac{\ln x}{4x}$; $[1, 2]$

En los ejercicios 35-44, determine el valor promedio de la función f sobre el intervalo indicado $[a, b]$.

35. $f(x) = 2x + 3$; $[0, 2]$
36. $f(x) = 8 - x$; $[1, 4]$
37. $f(x) = 2x^2 - 3$; $[1, 3]$
38. $f(x) = 4 - x^2$; $[-2, 3]$
39. $f(x) = x^2 + 2x - 3$; $[-1, 2]$
40. $f(x) = x^3$; $[-1, 1]$
41. $f(x) = \sqrt{2x+1}$; $[0, 4]$
42. $f(x) = e^{-x}$; $[0, 4]$
43. $f(x) = xe^{x^2}$; $[0, 2]$
44. $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$; $[0, 2]$

45. **Producción mundial de carbón** Un estudio propuesto en 1980 por investigadores acerca de los mayores productores y consumidores mundiales de carbón llegó a la conclusión de que el carbón podría y debería desempeñar un papel importante en el crecimiento económico del combustible a nivel mundial en los próximos 20 años. La producción mundial de carbón en 1980 fue de 3,500 millones de toneladas métricas. Si la producción creció a una tasa de $3.5e^{0.05t}$ miles de millones de toneladas métricas por año en el año t ($t = 0$ correspondiente a 1980), determine cuánto carbón se produjo a nivel mundial entre 1980 y finales del siglo XX.

46. **Ley de Newton del enfriamiento** Una botella de vino blanco en una habitación con temperatura (68° F) se coloca en un refrigerador a las 4 p.m. Su temperatura después de t horas es cambiante a una tasa de
$$-18e^{-0.6t}$$
°F/hora. ¿A cuántos grados habrá descendido la temperatura del vino a las 7 p.m.? ¿Cuál será la temperatura del vino a las 7 p.m.?

47. **Flujo neto de la inversión** El flujo neto de la inversión (tasa de formación de capital) del gigantesco conglomerado LTF Incorporated proyecta que sea
$$t\sqrt{\frac{1}{2}t^2+1}$$

millones de dólares por año en el año t. Determine las reservas sobre capital acumulado por la empresa en el segundo año.
Sugerencia: La cantidad está dada por

$$\int_1^2 t\sqrt{\frac{1}{2}t^2 + 1}\, dt$$

48. **Producción de petróleo** Con base en un informe preliminar por un grupo de investigadores geológicos, se estimó que un yacimiento recientemente descubierto se puede esperar que produzca petróleo a una tasa de

$$R(t) = \frac{600t^2}{t^3 + 32} + 5 \qquad (0 \le t \le 20)$$

miles de barriles por año, t años después de que la producción inicie. Determine la cantidad de petróleo que se puede esperar que el yacimiento dé durante los primeros 5 años de producción, suponiendo que la proyección sea verdad.

49. **Depreciación: método del saldo decreciente doble** Suponga que un tractor fue adquirido a un precio de $60,000 para ser depreciado por el *método del saldo decreciente doble* por un periodo a 10 años. Éste puede demostrar que la tasa a la cual el valor en libros decrecerá está dada por

$$R(t) = 13388.61e^{-0.22314t} \qquad (0 \le t \le 10)$$

dólares por año en el año t. Determine la cantidad por la que el valor en libros del tractor se depreció en los primeros 5 años de su vida.

50. **Velocidad de un automóvil** Un automóvil circula a lo largo de un camino recto de tal manera que su velocidad (en pies por segundo) en cualquier momento t (en segundos) está dada por

$$v(t) = 3t\sqrt{16 - t^2} \qquad (0 \le t \le 4)$$

Determine la distancia recorrida por el automóvil en 4 segundos desde $t = 0$ hasta $t = 4$.

51. **Gasto en anuncios por teléfono celular** El gasto en anuncios por teléfono celular entre 2005 ($t = 1$) y 2011 ($t = 7$) está proyectado para ser

$$S(t) = 0.86t^{0.96} \qquad (1 \le t \le 7)$$

donde $S(t)$ se mide en miles de millones de dólares y t en años. ¿Cuál es el promedio de gasto proyectado por año en teléfono celular entre 2005 y 2011?

Fuente: Interactive Advertising Bureau

52. **Calentamiento global** El incremento de dióxido de carbono (CO_2) en la atmósfera es una de las principales causas del calentamiento global. Al utilizar los datos obtenidos por Charles David Keeling, profesor en el Scripps Institution of Oceanography, la cantidad promedio de CO_2 en la atmósfera desde 1958 hasta 2007 se aproxima por

$$A(t) = 0.010716t^2 + 0.8212t + 313.4 \qquad (1 \le t \le 50)$$

donde $A(t)$ se mide en partes por millón por volumen (ppmv) y t en años, donde $t = 1$ corresponde a 1958. Determine la tasa promedio de aumento de la cantidad promedio de CO_2 en la atmósfera desde 1958 hasta 2007.

Fuente: Scripps Institution of Oceanography

53. **Uso proyectado de gasolina en Estados Unidos** La Casa Blanca quiere reducir el uso de gasolina por año de 140 mil millones de galones en 2007 a 128 mil millones de galones en 2017. Pero la estimación realizada por la Agencia de Información del Departamento de Energía sugiere que eso no sucederá. De hecho, la agencia proyecta que el uso de gasolina desde principios de 2007 hasta principios de 2017 está dada por

$$A(t) = 0.014t^2 + 1.93t + 140 \qquad (0 \le t \le 10)$$

donde $A(t)$ está en miles de millones de galones por año y t en años, donde $t = 0$ corresponde a 2007.

a. Con base en la proyección de la Agencia, ¿cuál será el consumo de gasolina a principios de 2017?
b. ¿Cuál será el consumo promedio por año en el periodo de principios de 2007 a principios de 2017?

Fuente: U.S. Department of Energy, Energy Information Agency

54. **Ciudadanos de 65 años de edad y mayores en Estados Unidos** El número de ciudadanos de 65 años de edad y mayores en Estados Unidos de 1900 a 2050 se estima será a una tasa creciente de

$$R(t) = 0.063t^2 - 0.48t + 3.87 \qquad (0 \le t \le 15)$$

millones de personas por década, donde t se mide en décadas donde $t = 0$ y corresponde a 1900. Demuestre que la tasa de crecimiento de ciudadanos en Estados Unidos de 65 años de edad y mayores entre 2000 y 2050 será dos veces la tasa entre 1950 y 2000.

Fuente: American Heart Association

55. **Tasa de vacantes de oficina** La tasa total de vacantes (en porcentaje) en las oficinas en Manhattan desde 2000 hasta 2006 se aproxima por la función

$$R(t) = 0.032t^4 - 0.26t^3 - 0.478t^2 + 5.82t + 3.8 \qquad (0 \le t \le 6)$$

donde t se mide en años, donde $t = 0$ corresponde a 2000. ¿Cuál fue la tasa de vacantes en oficinas de Manhattan en el periodo de 2000 hasta 2006?

Fuente: Cushman and Wakefield

56. **Promedio de ventas anuales** Las ventas de Universal Instruments en el primer año t de su operación se aproximan por la función

$$S(t) = t\sqrt{0.2t^2 + 4}$$

donde $S(t)$ se mide en millones de dólares. ¿Cuáles fueron las ventas anuales promedio de Universal en sus primeros 5 años de operación?

57. **Suscriptores de televisión por cable** El gerente de Cable Telestar Service estima que el número total de suscriptores para el servicio en cierta ciudad en año t a partir de ahora será

$$N(t) = -\frac{40{,}000}{\sqrt{1 + 0.2t}} + 50{,}000$$

determine el número promedio de suscriptores de televisión por los próximos 5 años si su pronóstico es verdad.

58. Concentración de un fármaco en el torrente sanguíneo La concentración de un cierto fármaco en el torrente sanguíneo de un paciente t horas después de la inyección es

$$C(t) = \frac{0.2t}{t^2 + 1}$$

mg/cm^3. Determine la concentración promedio del fármaco en el torrente sanguíneo del paciente en las primeras 4 horas después de que el fármaco fue inyectado.

59. Precio promedio de un producto El precio en dólares de un cierto producto por unidad de tiempo (medida en semanas) está dado por

$$p = 18 - 3e^{-2t} - 6e^{-t/3}$$

¿Cuál es el precio promedio de un producto por un periodo de 5 semanas desde $t = 0$ hasta $t = 5$?

60. Flujo de sangre en una arteria Según una ley descubierta por Jean Louis Marie Poiseuille, un médico del siglo XIX, la velocidad en la sangre (en centímetros por segundo) r cm desde el eje central de una arteria está dada por

$$v(r) = k(R^2 - r^2)$$

donde k es una constante y R es el radio de la arteria. Determine la velocidad promedio de la sangre a través de un radio de la arteria (vea la siguiente figura).

Sugerencia: Evalúe $\frac{1}{R}\int_0^R v(r)\,dr$.

Vaso sanguíneo

61. Disposición de basura Cuando los residuos orgánicos son arrojados a un estanque, el proceso de oxidación que tiene lugar reduce el contenido de oxígeno del estanque. Sin embargo, con el tiempo, la naturaleza restaurará el contenido de oxígeno a su nivel natural. Suponga que el contenido de oxígeno en t días después de que los residuos orgánicos han sido arrojados a un estanque está dado por

$$f(t) = 100\left(\frac{t^2 + 10t + 100}{t^2 + 20t + 100}\right)$$

por ciento de su nivel normal. Determine el contenido promedio de oxígeno en el estanque en los primeros 10 días después de que los residuos orgánicos fueron arrojados dentro de él.

Sugerencia: Demuestre que

$$\frac{t^2 + 10t + 100}{t^2 + 20t + 100} = 1 - \frac{10}{t + 10} + \frac{100}{(t + 10)^2}$$

62. Velocidad de la caída de un martillo Durante la construcción de un alto edificio de departamentos, un trabajador de la construcción dejó caer de forma accidental un martillo a una distancia vertical de h pies. La velocidad del martillo después de caer a una distancia x es $v = \sqrt{2gx}$ pies/seg $(0 \leq x \leq h)$. Demuestre que la velocidad promedio del martillo sobre esta ruta es $\bar{v} = \frac{2}{3}\sqrt{2gh}$ pies por segundo.

63. Demuestre la propiedad 1 de la integral definida.
Sugerencia: Sea F una antiderivada de f y utilice la definición de la integral definida.

64. Demuestre la propiedad 2 de la integral definida.
Sugerencia: Vea el ejercicio 63.

65. Verifique por el cálculo directo que

$$\int_1^3 x^2\,dx = -\int_3^1 x^2\,dx$$

66. Demuestre la propiedad 3 de la integral definida.
Sugerencia: Vea el ejercicio 63.

67. Verifique por cálculo directo que

$$\int_1^9 2\sqrt{x}\,dx = 2\int_1^9 \sqrt{x}\,dx$$

68. Verifique por cálculo directo que

$$\int_0^1 (1 + x - e^x)\,dx = \int_0^1 dx + \int_0^1 x\,dx - \int_0^1 e^x\,dx$$

¿Qué propiedades de la integral definida se demuestran en este ejercicio?

69. Verifique por cálculo directo que

$$\int_0^3 (1 + x^3)\,dx = \int_0^1 (1 + x^3)\,dx + \int_1^3 (1 + x^3)\,dx$$

¿Qué propiedad de la integral definida se demuestra aquí?

70. Verifique por cálculo directo que

$$\int_0^3 (1 + x^3)\,dx$$

$$= \int_0^1 (1 + x^3)\,dx + \int_1^2 (1 + x^3)\,dx + \int_2^3 (1 + x^3)\,dx$$

por tanto, demuestre que la propiedad 5 puede extenderse.

71. Evalúe $\int_3^3 (1 + \sqrt{x})e^{-x}\,dx$.

72. Evalúe $\int_3^0 f(x)\,dx$, dado que $\int_0^3 f(x)\,dx = 4$.

73. Dado que $\int_{-1}^2 f(x)\,dx = -2$ y $\int_{-1}^2 g(x)\,dx = 3$, evalúe

a. $\int_{-1}^2 [2f(x) + g(x)]\,dx$

b. $\int_{-1}^2 [g(x) - f(x)]\,dx$

c. $\int_{-1}^2 [2f(x) - 3g(x)]\,dx$

74. Dado que $\int_{-1}^2 f(x)\,dx = 2$ y $\int_0^2 f(x)\,dx = 3$, evalúe

a. $\int_{-1}^0 f(x)\,dx$ **b.** $\int_0^2 f(x)\,dx - \int_{-1}^0 f(x)\,dx$

En los ejercicios 75-80, determine si el enunciado es verdadero o falso. Si es verdadero, explique por qué lo es. Si es falso explique por qué lo es o dé un ejemplo para demostrarlo.

75. $\displaystyle\int_2^2 \frac{e^x}{\sqrt{1+x}}\,dx = 0$

76. $\displaystyle\int_1^3 \frac{dx}{x-2} = -\int_3^1 \frac{dx}{x-2}$

77. $\displaystyle\int_0^1 x\sqrt{x+1}\,dx = \sqrt{x+1}\int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}x^2\sqrt{x+1}\Big|_0^1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$

78. Si f' es continua sobre $[0, 2]$, entonces $\int_0^2 f'(x)\,dx = f(2) - f(0)$.

79. Si f y g son continuas sobre $[a, b]$ y k una constante, entonces,

$$\int_a^b [kf(x) + g(x)]\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

80. Si f es continua sobre $[a, b]$ y $a < c < b$, entonces

$$\int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx$$

11.5 Soluciones a los ejercicios de autoevaluación

1. Sea $u = 2x + 5$. Después, $du = 2\,dx$, o $dx = \frac{1}{2}\,du$. También, cuando $x = 0$, $u = 5$, y cuando $x = 2$, $u = 9$. Sin embargo,

$$\begin{aligned}\int_0^2 \sqrt{2x+5}\,dx &= \int_0^2 (2x+5)^{1/2}\,dx\\ &= \frac{1}{2}\int_5^9 u^{1/2}\,du\\ &= \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{2}{3}u^{3/2}\right)\Big|_5^9\\ &= \frac{1}{3}[9^{3/2} - 5^{3/2}]\\ &= \frac{1}{3}(27 - 5\sqrt{5})\end{aligned}$$

2. El valor promedio requerido está dado por

$$\begin{aligned}\frac{1}{2-(-1)}\int_{-1}^2 (1-x^2)\,dx &= \frac{1}{3}\int_{-1}^2 (1-x^2)\,dx\\ &= \frac{1}{3}\left(x - \frac{1}{3}x^3\right)\Big|_{-1}^2\\ &= \frac{1}{3}\left[\left(2-\frac{8}{3}\right) - \left(-1+\frac{1}{3}\right)\right] = 0\end{aligned}$$

3. El precio medio promedio de una casa sobre el intervalo de tiempo expresado está dado por

$$\begin{aligned}&\frac{1}{5-0}\int_0^5 (t^3 - 7t^2 + 17t + 280)\,dt\\ &\quad= \frac{1}{5}\left(\frac{1}{4}t^4 - \frac{7}{3}t^3 + \frac{17}{2}t^2 + 280t\right)\Big|_0^5\\ &\quad= \frac{1}{5}\left[\frac{1}{4}(5)^4 - \frac{7}{3}(5)^3 + \frac{17}{2}(5)^2 + 280(5)\right]\\ &\quad= 295.417\end{aligned}$$

o \$295,417.

USO DE LA TECNOLOGÍA

Evaluación de las integrales definidas con funciones definidas por partes

Continuamos usando la calculadora graficadora para determinar la integral definida de una función. Pero aquí se hará uso de la propiedad 5 de las propiedades de la integral definida (página 786).

EJEMPLO 1 Use la operación integral numérica de la calculadora graficadora para evaluar

$$\int_{-1}^2 f(x)\,dx$$

(continúa)

donde

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{si } x < 0 \\ \sqrt{x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Solución Al utilizar la propiedad 5 de la integral definida, podemos escribir

$$\int_{-1}^{2} f(x)\,dx = \int_{-1}^{0} -x^2\,dx + \int_{0}^{2} x^{1/2}\,dx$$

Al usar la calculadora graficadora, determinamos

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{2} f(x)\,dx &= \text{fnInt}\,(-x\text{^}2, x, -1, 0) + \text{fnInt}\,(x\text{^}0.5, x, 0, 2)\\ &\approx -0.333333 + 1.885618\\ &= 1.552285\end{aligned}$$

EJERCICIOS CON TECNOLOGÍA

En los ejercicios 1-4, utilice la propiedad 5 de las propiedades de la integral definida (página 786) para evaluar la integral definida a seis decimales exactas.

1. $\int_{-1}^{2} f(x)\,dx$, donde

$$f(x) = \begin{cases} 2.3x^3 - 3.1x^2 + 2.7x + 3 & \text{si } x < 1 \\ -1.7x^2 + 2.3x + 4.3 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

2. $\int_{0}^{3} f(x)\,dx$, donde $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x}}{1 + x^2} & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 0.5e^{-0.1x^2} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

3. $\int_{-2}^{2} f(x)\,dx$, donde $f(x) = \begin{cases} x^4 - 2x^2 + 4 & \text{si } x < 0 \\ 2\ln(x + e^2) & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

4. $\int_{-2}^{6} f(x)\,dx$, donde

$$f(x) = \begin{cases} 2x^3 - 3x^2 + x + 2 & \text{si } x < -1 \\ \sqrt{3x + 4} - 5 & \text{si } -1 \leq x \leq 4 \\ x^2 - 3x - 5 & \text{si } x > 4 \end{cases}$$

5. **El SIDA en Massachusetts** La tasa de crecimiento (y declinación) del número de casos diagnosticados de SIDA en Massachusetts desde principios de 1989 ($t = 0$) hasta el final de 1997 ($t = 8$) se aproxima por la función

$$f(t) = \begin{cases} 69.83333t^2 + 30.16667t + 1{,}000 & \text{si } 0 \leq t < 3 \\ 1{,}719 & \text{si } 3 \leq t < 4 \\ -28.79167t^3 + 491.37500t^2 & \\ \quad -2985.083333t + 7{,}640 & \text{si } 4 \leq t \leq 8 \end{cases}$$

donde $f(t)$ se mide por el número de casos por año. Calcule el número total de casos de SIDA diagnosticados en Massachusetts desde principios de 1989 hasta el final de 1997.

Fuente: Massachusetts Department of Health

6. **Rendimiento de los cultivos** Si no se trata en los tallos del frijol, los pulgones (pequeños insectos que succionan los jugos de la planta) se multiplican a un ritmo creciente durante los meses de verano y reducen la productividad y el rendimiento del cultivo de las especies cultivadas. Pero si los pulgones son tratados a mediados de junio, las cifras disminuyen drásticamente a menos de 100/tallos de frijol, permitiendo que aumente el rendimiento de los cultivos. La función

$$F(t) = \begin{cases} 62e^{1.152t} & \text{si } 0 \leq t < 1.5 \\ 349e^{-1.324(t-1.5)} & \text{si } 1.5 \leq t \leq 3 \end{cases}$$

da el número de pulgones en un tallo de frijol típico en el tiempo t, donde t se mide en meses, con $t = 0$ correspondiente al inicio de mayo. Determine el número promedio de pulgones en un tallo de frijol típico en el periodo de inicios de mayo a principios de agosto.

7. **Absorción de fármacos** Jane ingirió 100 mg de un fármaco en la mañana y otros 100 mg a la misma hora de la mañana siguiente. La cantidad de fármaco en su cuerpo t días después de que ingiriera la primera dosis está dada por

$$A(t) = \begin{cases} 100e^{-1.4t} & \text{si } 0 \leq t < 1 \\ 100(1 + e^{1.4})e^{-1.4t} & \text{si } t \geq 1 \end{cases}$$

Determine la cantidad promedio del fármaco en el cuerpo de Jane por los 2 primeros días.

8. **Absorción de fármacos** La concentración de un fármaco en un organismo en cualquier momento t (segundos) está dada por

$$C(t) = \begin{cases} 0.3t - 18(1 - e^{-t/60}) & \text{si } 0 \leq t \leq 20 \\ 18e^{-t/60} - 12e^{-(t-20)/60} & \text{si } t > 20 \end{cases}$$

donde $C(t)$ se mide en gramos por centímetro cúbico (g/cm^3). Determine la concentración promedio del fármaco en el organismo por los primeros 30 segundos después de que éste es administrado.

11.6 El área entre dos curvas

Suponga que el consumo de petróleo en cierta ciudad se espera crezca a una tasa de $f(t)$ millones de barriles por año, en t años a partir de ahora, por los próximos 5 años. Entonces, el consumo total de petróleo de la ciudad por el periodo en cuestión está dado por el área bajo la curva de f sobre el intervalo $[0, 5]$ (figura 27).

Después suponga que, debido a la implementación de ciertas medidas de conservación de energía, la tasa de crecimiento del consumo de petróleo se espera que sea $g(t)$ millones de barriles por año. Entonces, el consumo total de petróleo proyectado en la ciudad por el periodo de 5 años está dado por el área bajo la curva de g sobre el intervalo $[0, 5]$ (figura 28).

Sin embargo, el área de la región sombreada S que está entre las dos gráficas de f y g sobre el intervalo $[0, 5]$ (figura 29) proporciona la cantidad de petróleo que se ahorraría en el periodo de 5 años debido a las medidas de conservación.

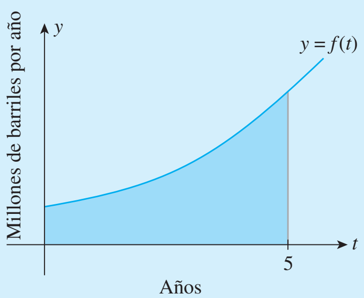


FIGURA 27
A una tasa de consumo de $f(t)$ millones de barriles por año, el consumo total de petróleo está dado por el área de la región bajo la curva de f.

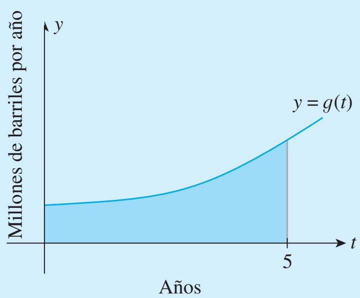


FIGURA 28
A una tasa de consumo de $g(t)$ millones de barriles por año, el consumo total de petróleo está dado por el área de la región bajo la curva de g.

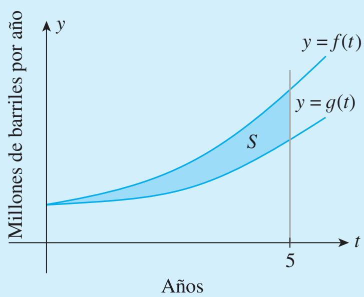


FIGURA 29
El área S da la cantidad de petróleo que se ahorraría en un periodo de 5 años.

Pero el área S está dada por

El área bajo la curva de f sobre $[a, b]$ – el área bajo la curva de g sobre $[a, b]$

$$= \int_0^5 f(t)\,dt - \int_0^5 g(t)\,dt$$

$$= \int_0^5 [f(t) - g(t)]\,dt \qquad \text{Por la propiedad 4, sección 11.5}$$

Este ejemplo demuestra que algunos problemas prácticos pueden resolverse al determinar el área de la región entre dos curvas, que a su vez se pueden determinar al calcular una integral definida apropiada.

Determinación del área entre dos curvas

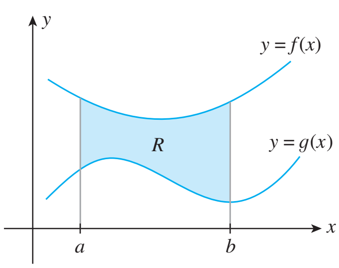


FIGURA 30
El área de $R = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx$.

Volvamos nuestra atención al problema general de determinar el área de una región plana limitada, tanto por arriba como por debajo por las gráficas de funciones. Primero, considere la situación en la que la gráfica de una función permanece arriba de la otra. Más específicamente, sea R la región en el plano xy (figura 30) que está limitada arriba por la gráfica de una función continua f, debajo por una función continua g donde

$f(x) \geq g(x)$ sobre $[a, b]$, y a la izquierda y derecha por las líneas verticales $x = a$ y $x = b$, respectivamente. Desde la figura, se puede observar que

$$\begin{aligned} \text{El área de } R &= \text{el área bajo } f(x) - \text{el área bajo } g(x) \\ &= \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx \\ &= \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx \end{aligned}$$

sobre el uso de la propiedad 4 de la integral definida.

El área entre dos curvas

Sean f y g funciones continuas como $f(x) \geq g(x)$ sobre el intervalo $[a, b]$. Entonces el área de la región limitada arriba por $y = f(x)$ y debajo por $y = g(x)$ sobre $[a, b]$ está dada por

$$= \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx \qquad \textbf{(13)}$$

Aunque se asumió que ambas f y g fueron no negativas en la derivación de (13), puede demostrarse que esta ecuación es válida si f y g son negativas (observe el ejercicio 57). Observe también que si $g(x)$ es 0 para toda x, esto es, cuando el límite inferior de la región R es el eje x, la ecuación (13) da el área de la región debajo de la curva $y = f(x)$ desde $x = a$ hasta $x = b$, como lo esperaría.

EJEMPLO 1 Determine el área de la región limitada por el eje x, la gráfica de $y = -x^2 + 4x - 8$, y las líneas $x = -1$ y $x = 4$.

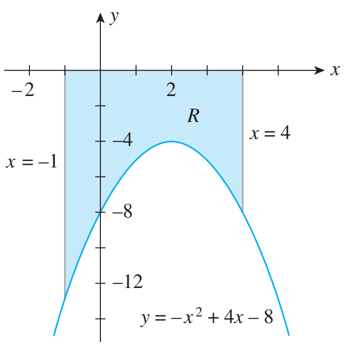


FIGURA **31**
El área de $R = -\int_{-1}^{4} g(x)\,dx$.

Solución La región R bajo consideración se muestra en la figura 31. Podemos ver a R como la región limitada arriba por la gráfica de $f(x) = 0$ (el eje x) y abajo por la gráfica de $g(x) = -x^2 + 4x - 8$ sobre $[-1, 4]$. Sin embargo, el área R está dada por

$$\begin{aligned} \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx &= \int_{-1}^4 [0 - (-x^2 + 4x - 8)]\,dx \\ &= \int_{-1}^4 (x^2 - 4x + 8)\,dx \\ &= \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 8x \Big|_{-1}^4 \\ &= \left[\frac{1}{3}(64) - 2(16) + 8(4)\right] - \left[\frac{1}{3}(-1) - 2(1) + 8(-1)\right] \\ &= 31\tfrac{2}{3} \end{aligned}$$

o $31\frac{2}{3}$ unidades cuadradas. ■

EJEMPLO 2 Determine el área de la región R limitada por las gráficas de

$$f(x) = 2x - 1 \quad \text{y} \quad g(x) = x^2 - 4$$

y las líneas verticales $x = 1$ y $x = 2$.

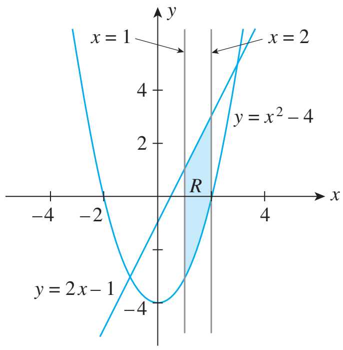


FIGURA 32
El área de $R = \int_1^2 [f(x) - g(x)]\, dx$.

Solución Trazamos primero las gráficas de las funciones $f(x) = 2x - 1$ y $g(x) = x^2 - 4$ y las líneas verticales $x = 1$ y $x = 2$, y después identificamos la región R cuya área será calculada (figura 32).

Ya que la gráfica de f siempre permanece arriba de g para x en el intervalo $[1, 2]$, observamos que por la ecuación (13) el área requerida está dada por

$$
\begin{aligned}
\int_1^2 [f(x) - g(x)]\, dx &= \int_1^2 [(2x - 1) - (x^2 - 4)]\, dx \\
&= \int_1^2 (-x^2 + 2x + 3)\, dx \\
&= -\frac{1}{3}x^3 + x^2 + 3x \Big|_1^2 \\
&= \left(-\frac{8}{3} + 4 + 6\right) - \left(-\frac{1}{3} + 1 + 3\right) = \frac{11}{3}
\end{aligned}
$$

u $\frac{11}{3}$ unidades cuadradas. ■

EJEMPLO 3 Determine el área de la región R que está completamente rodeada por las gráficas de las funciones

$$f(x) = 2x - 1 \quad \text{y} \quad g(x) = x^2 - 4$$

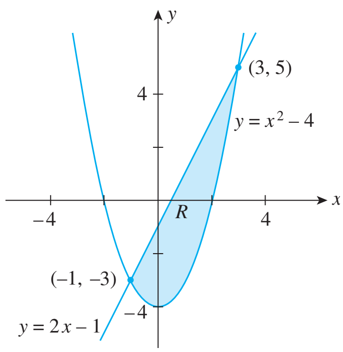


FIGURA 33
El área de $R = \int_{-1}^3 [f(x) - g(x)]\, dx$.

Solución La región R se muestra en la figura 33. Primero, determine los puntos de intersección de las dos curvas. Al realizar esto, resolvemos el sistema que consiste en las dos ecuaciones $y = 2x - 1$ y $y = x^2 - 4$. Al equiparar los dos valores de y da

$$
\begin{aligned}
x^2 - 4 &= 2x - 1 \\
x^2 - 2x - 3 &= 0 \\
(x + 1)(x - 3) &= 0
\end{aligned}
$$

por consiguiente, $x = -1$ o $x = 3$. Esto es, las dos curvas intersecan cuando $x = -1$ y $x = 3$.

Observe que podría considerar también la región R como la región limitada arriba por la gráfica de la función $f(x) = 2x - 1$, debajo por la gráfica de la función $g(x) = x^2 - 4$, y a la izquierda y derecha por las líneas verticales $x = -1$ y $x = 3$, respectivamente.

Después, ya que la gráfica de la función f permanece siempre arriba de la función g sobre $[-1, 3]$, puede utilizar (13) para calcular el área deseada:

$$
\begin{aligned}
\int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx &= \int_{-1}^3 [(2x - 1) - (x^2 - 4)]\, dx \\
&= \int_{-1}^3 (-x^2 + 2x + 3)\, dx \\
&= -\frac{1}{3}x^3 + x^2 + 3x \Big|_{-1}^3 \\
&= (-9 + 9 + 9) - \left(\frac{1}{3} + 1 - 3\right) = \frac{32}{3} \\
&= 10\tfrac{2}{3}
\end{aligned}
$$

o $10\frac{2}{3}$ unidades cuadradas. ■

EJEMPLO 4 Determine el área de la región R limitada por las gráficas de las funciones

$$f(x) = x^2 - 2x - 1 \quad \text{y} \quad g(x) = -e^x - 1$$

y las líneas verticales $x = -1$ y $x = 1$.

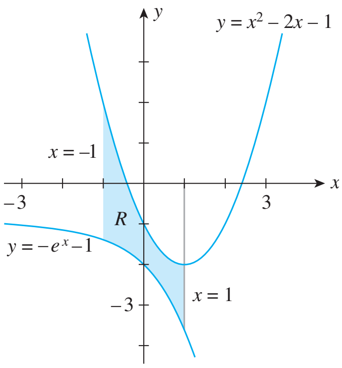


FIGURA **34**
El área de $R = \int_{-1}^{1} [f(x) - g(x)]\, dx$.

Solución La región R se muestra en la figura 34. Ya que la gráfica de la función f permanece siempre arriba de la función g, el área de la región R está dada por

$$\begin{aligned}\int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx &= \int_{-1}^{1} [(x^2 - 2x - 1) - (-e^x - 1)]\, dx \\ &= \int_{-1}^{1} (x^2 - 2x + e^x)\, dx \\ &= \frac{1}{3}x^3 - x^2 + e^x \Big|_{-1}^{1} \\ &= \left(\frac{1}{3} - 1 + e\right) - \left(-\frac{1}{3} - 1 + e^{-1}\right) \\ &= \frac{2}{3} + e - \frac{1}{e}, \text{ o aproximadamente 3.02 unidades cuadradas}\end{aligned}$$ ■

La ecuación (13), que da el área de la región entre las curvas $y = f(x)$ y $y = g(x)$ para $a \leq x \leq b$, es válida cuando la gráfica de la función f permanece arriba de la función g sobre el intervalo $[a, b]$. El ejemplo 5 muestra cómo utilizar (13) para determinar el área de una región cuando la última condición no se mantiene.

EJEMPLO 5 Determine el área de la región limitada por la gráfica de la función $f(x) = x^3$, el eje x y las líneas $x = -1$ y $x = 1$.

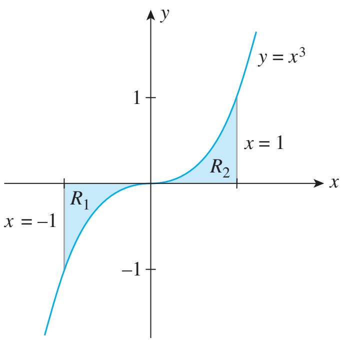


FIGURA **35**
El área de R_1 = El área de R_2.

Solución La región R en consideración puede ser asumida como una compuesta por las dos subregiones R_1 y R_2, como se muestra en la figura 35.

Recuerde que el eje x está representado por la función $g(x) = 0$. Ya que $g(x) \geq f(x)$ sobre $[-1, 0]$, observamos que el área R_1 está dada por

$$\begin{aligned}\int_a^b [g(x) - f(x)]\, dx &= \int_{-1}^{0} (0 - x^3)\, dx = -\int_{-1}^{0} x^3\, dx \\ &= -\frac{1}{4}x^4 \Big|_{-1}^{0} = 0 - \left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}\end{aligned}$$

Para determinar el área de R_2 observe que $f(x) \geq g(x)$ sobre $[0, 1]$, por consiguiente está dada por

$$\begin{aligned}\int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx &= \int_0^1 (x^3 - 0)\, dx = \int_0^1 x^3\, dx \\ &= \frac{1}{4}x^4 \Big|_0^1 = \left(\frac{1}{4}\right) - 0 = \frac{1}{4}\end{aligned}$$

Sin embargo, el área de R es $\frac{1}{4} + \frac{1}{4}$, o $\frac{1}{2}$, unidades cuadradas.

Al hacer uso de la simetría, podría haber obtenido el mismo resultado al calcular

$$-2\int_{-1}^{0} x^3 dx \quad \text{o} \quad 2\int_0^1 x^3 dx$$

como se puede confirmar. ■

Explore y analice

Una función es *par* si satisface la condición $f(-x) = f(x)$, y es *impar* si satisface la condición $f(-x) = -f(x)$. Demuestre que la gráfica de una función par es simétrica con respecto al eje y mientras que la gráfica de una función impar es simétrica con respecto al origen. Explique por qué

$$\int_{-a}^{a} f(x)\, dx = 2\int_0^a f(x)\, dx \quad \text{si } f \text{ es par}$$

y

$$\int_{-a}^{a} f(x)\, dx = 0 \qquad \text{si } f \text{ es impar}$$

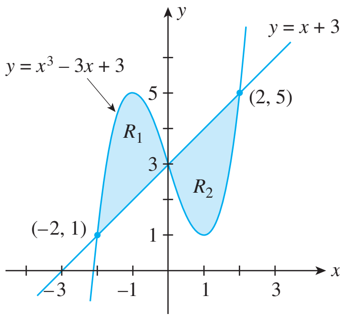


FIGURA 36
El área de R_1 + el área de R_2

$= \int_{-2}^{0}[f(x) - g(x)]\,dx$
$+\int_{0}^{2}[g(x) - f(x)]\,dx$

EJEMPLO 6 Determine el área de la región completamente rodeada por las gráficas de las funciones

$$f(x) = x^3 - 3x + 3 \quad \text{y} \quad g(x) = x + 3$$

Solución Primero, trace las gráficas de $y = x^3 - 3x + 3$ y $y = x + 3$ y luego identifique la región requerida R. Podemos ver la región R como compuesta por las dos subregiones R_1 y R_2, como se muestra en la figura 36. Al resolver las ecuaciones $y = x + 3$ y $y = x^3 - 3x + 3$ simultáneamente, determinamos los puntos de la intersección de las dos curvas. Al equiparar los dos valores de y, obtenemos

$$\begin{aligned} x^3 - 3x + 3 &= x + 3 \\ x^3 - 4x &= 0 \\ x(x^2 - 4) &= 0 \\ x(x + 2)(x - 2) &= 0 \\ x &= 0, -2, 2 \end{aligned}$$

Por tanto, los puntos de intersección de las dos curvas son $(-2, 1)$, $(0, 3)$ y $(2, 5)$.

Para $-2 \le x \le 0$, vemos que la gráfica de la función f está arriba de la función g, por consiguiente, el área de la región R_1 es, por virtud de (13).

$$\begin{aligned} \int_{-2}^{0} [(x^3 - 3x + 3) - (x + 3)]\,dx &= \int_{-2}^{0} (x^3 - 4x)\,dx \\ &= \frac{1}{4}x^4 - 2x^2\Big|_{-2}^{0} \\ &= -(4 - 8) \\ &= 4 \end{aligned}$$

o 4 unidades cuadradas. Para $0 \le x \le 2$, la gráfica de la función g permanece arriba de la función f, y el área de R_2, está dada por

$$\begin{aligned} \int_{0}^{2} [(x + 3) - (x^3 - 3x + 3)]\,dx &= \int_{0}^{2} (-x^3 + 4x)\,dx \\ &= -\frac{1}{4}x^4 + 2x^2\Big|_{0}^{2} \\ &= -4 + 8 \\ &= 4 \end{aligned}$$

o 4 unidades cuadradas. Sin embargo, el área requerida es la suma del área de las dos regiones $R_1 + R_2$, esto es, $4 + 4$, u 8 unidades cuadradas. ■

VIDEO

EJEMPLO DE APLICACIÓN 7 Conservación del petróleo En 2002 se desarrolló un estudio por el Consejo de Desarrollo Económico del país, expertos economistas gubernamentales y de energía concluyeron que si el Proyecto de Conservación de Energía era implementado en 2003, el consumo de petróleo del país por los siguientes 5 años se esperaría creciera con base en el modelo

$$R(t) = 20e^{0.05t}$$

donde t se mide en años ($t = 0$ correspondiente a 2003) y $R(t)$ en millones de barriles por año. Sin las medidas impuestas por el gobierno para la conservación, la tasa de crecimiento esperada sobre el consumo de petróleo estaría dada por

$$R_1(t) = 20e^{0.08t}$$

millones de barriles por año. Al utilizar estos modelos, determine cuánto petróleo se hubiese ahorrado desde 2003 hasta 2008 si el proyecto hubiese sido implementado.

Solución Bajo el Proyecto de Conservación de Energía, la cantidad total que se hubiera consumido entre 2003 y 2008 está dada por

$$\int_0^5 R(t)\, dt = \int_0^5 20e^{0.05t}\, dt \tag{14}$$

Sin el Proyecto, la cantidad total de petróleo que se hubiera consumido entre 2003 y 2008 está dada por

$$\int_0^5 R_1(t)\, dt = \int_0^5 20e^{0.08t}\, dt \tag{15}$$

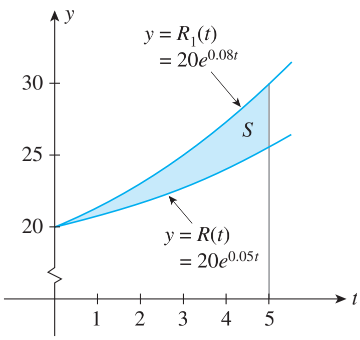


FIGURA **37**
El área de $S = \int_0^5 [R_1(t) - R(t)]\, dt$.

La ecuación (14) puede interpretarse como el área de la región bajo la curva $y = R(t)$ desde $t = 0$ hasta $t = 5$. De forma similar, interprete (15) como el área de la región bajo la curva $y = R_1(t)$ desde $t = 0$ hasta $t = 5$. Más aún, observe que la gráfica de $y = R_1(t) = 20e^{0.08t}$ permanece siempre sobre o arriba de la gráfica de $y = R(t) = 20e^{0.05t}$ $(t \geq 0)$. De esta manera, el área de la región sombreada S en la figura 37 demuestra la cantidad de petróleo que se hubiera ahorrado desde 2003 a 2008 si el Proyecto de Conservación de Energía hubiera sido implementado. Pero el área de la región S está dada por

$$\begin{aligned}
\int_0^5 [R_1(t) - R(t)]\, dt &= \int_0^5 [20e^{0.08t} - 20e^{0.05t}]\, dt \\
&= 20\int_0^5 (e^{0.08t} - e^{0.05t})\, dt \\
&= 20\left(\frac{e^{0.08t}}{0.08} - \frac{e^{0.05t}}{0.05}\right)\Bigg|_0^5 \\
&= 20\left[\left(\frac{e^{0.4}}{0.08} - \frac{e^{0.25}}{0.05}\right) - \left(\frac{1}{0.08} - \frac{1}{0.05}\right)\right] \\
&\approx 9.3
\end{aligned}$$

o aproximadamente 9.3 unidades cuadradas. Por consiguiente, la cantidad de petróleo que se hubiera ahorrado es 9.3 millones de barriles. ■

Exploración con TECNOLOGÍA

Refiérase al ejemplo 7. Suponga que desea construir un modelo matemático que dé la cantidad de petróleo ahorrado desde 2003 hasta el año $(2003 + x)$ donde $x \geq 0$. En el ejemplo 7, por ejemplo, se toma $x = 5$.

1. Demuestre que este modelo está dado por

$$\begin{aligned}
F(x) &= \int_0^x [R_1(t) - R(t)]\, dt \\
&= 250e^{0.08x} - 400e^{0.05x} + 150
\end{aligned}$$

   Sugerencia: Puede encontrar útil usar algunos de los resultados del ejemplo 7.

2. Use una utilería de graficación para trazar la gráfica de F, utilizando la ventana de visualización $[0, 10] \times [0, 50]$.
3. Determine $F(5)$ y así confirme el resultado del ejemplo 5.
4. ¿Cuál es la ventaja principal de este modelo?

11.6 Ejercicios de autoevaluación

1. Determine el área de la región limitada por las gráficas de $f(x) = x^2 + 2$ y $g(x) = 1 - x$ y las líneas verticales $x = 0$ y $x = 1$.

2. Determine el área de la región rodeada totalmente por las gráficas de $f(x) = -x^2 + 6x + 5$ y $g(x) = x^2 + 5$.

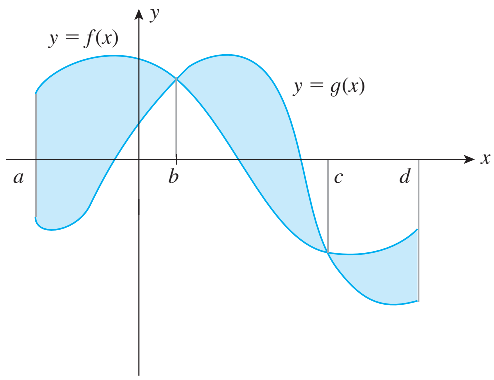
3. La gerencia de Kane Corporation, que opera una cadena de hoteles, espera que sus utilidades crezcan a una tasa de $1 + t^{2/3}$ millones de dólares por año t años a partir de ahora. Sin embargo, con las renovaciones y reformas de los hoteles existentes y las adquisiciones planeadas en los nuevos hoteles, las utilidades de Kane se espera crezcan a una tasa de $t - 2\sqrt{t} + 4$ millones de dólares por año en la siguiente década. ¿Qué utilidades adicionales se esperan para los siguientes 10 años si el grupo implementa los planes propuestos?

Las soluciones de los ejercicios de autoevaluación 11.6 se encuentran en la página 807.

11.6 Preguntas de concepto

1. Suponga que f y g son funciones continuas como $f(x) \geq g(x)$ sobre el intervalo $[a, b]$. Escriba una integral que dé el área de la región limitada arriba por la gráfica de f, debajo por la gráfica de g, y sobre la izquierda y derecha por las líneas $x = a$ y $x = b$.

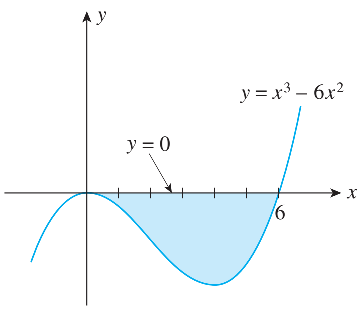
2. Escriba una expresión en términos de integrales definidas que den el área de la región sombreada en la siguiente figura:



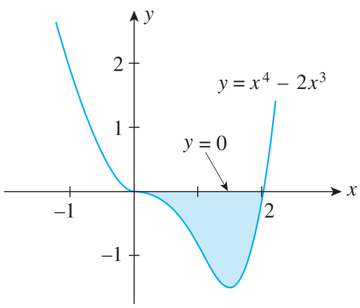
11.6 Ejercicios

En los ejercicios 1-8, determine el área de la región sombreada.

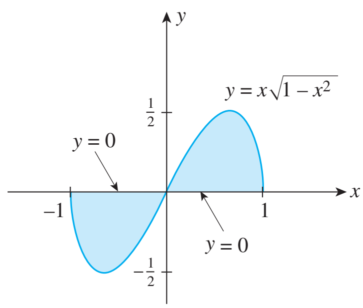
1.



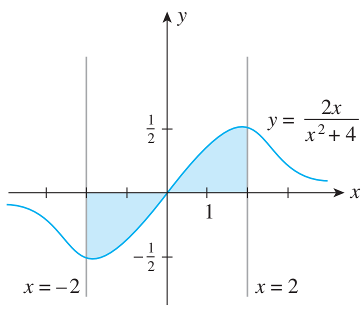
2.



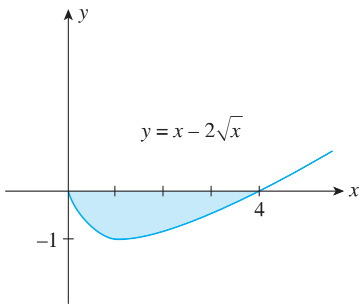
3.



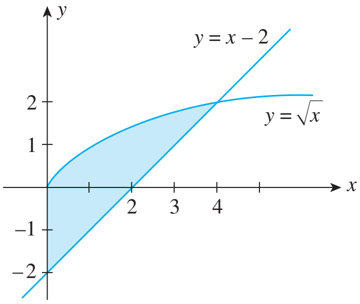
4.



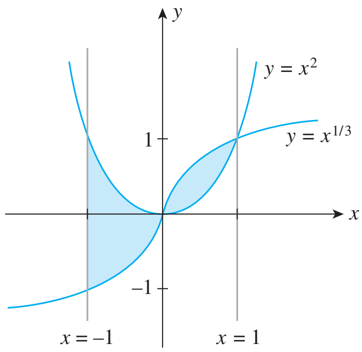
5.



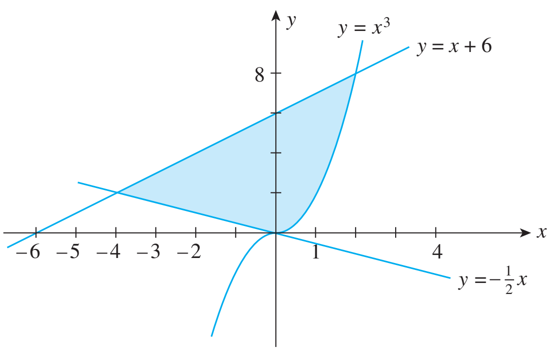
6.



7.



8.



En los ejercicios 9-16 trace la gráfica y determine el área de la región limitada abajo por la gráfica de cada función y arriba por el eje *x* desde *x* = *a* y *x* = *b*.

9. $f(x) = -x^2$; $a = -1$, $b = 2$

10. $f(x) = x^2 - 4$; $a = -2$, $b = 2$

11. $f(x) = x^2 - 5x + 4$; $a = 1$, $b = 3$

12. $f(x) = x^3$; $a = -1$, $b = 0$

13. $f(x) = -1 - \sqrt{x}$; $a = 0$, $b = 9$

14. $f(x) = \frac{1}{2}x - \sqrt{x}$; $a = 0$, $b = 4$

15. $f(x) = -e^{(1/2)x}$; $a = -2$, $b = 4$

16. $f(x) = -xe^{-x^2}$; $a = 0$, $b = 1$

En los ejercicios 17-26, trace las gráficas de las funciones *f* y *g* y determine el área de la región rodeada por estas gráficas y por las líneas verticales *x* = *a* y *x* = *b*.

17. $f(x) = x^2 + 3$, $g(x) = 1$; $a = 1$, $b = 3$

18. $f(x) = x + 2$, $g(x) = x^2 - 4$; $a = -1$, $b = 2$

19. $f(x) = -x^2 + 2x + 3$, $g(x) = -x + 3$; $a = 0$, $b = 2$

20. $f(x) = 9 - x^2$, $g(x) = 2x + 3$; $a = -1$, $b = 1$

21. $f(x) = x^2 + 1$, $g(x) = \frac{1}{3}x^3$; $a = -1$, $b = 2$

22. $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = -\frac{1}{2}x - 1$; $a = 1$, $b = 4$

23. $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = 2x - 1$; $a = 1$, $b = 4$

24. $f(x) = x^2$, $g(x) = \frac{1}{x^2}$; $a = 1$, $b = 3$

25. $f(x) = e^x$, $g(x) = \frac{1}{x}$; $a = 1$, $b = 2$

26. $f(x) = x$, $g(x) = e^{2x}$; $a = 1$, $b = 3$

En los ejercicios 27-34, trace la gráfica y determine el área de la región limitada por la gráfica de la función *f* y de las líneas *y* = 0, *x* = *a* y *x* = *b*.

27. $f(x) = x$; $a = -1$, $b = 2$

28. $f(x) = x^2 - 2x$; $a = -1$, $b = 1$

29. $f(x) = -x^2 + 4x - 3$; $a = -1$, $b = 2$

30. $f(x) = x^3 - x^2$; $a = -1$, $b = 1$

31. $f(x) = x^3 - 4x^2 + 3x$; $a = 0$, $b = 2$

32. $f(x) = 4x^{1/3} + x^{4/3}$; $a = -1$, $b = 8$

33. $f(x) = e^x - 1$; $a = -1$, $b = 3$

34. $f(x) = xe^{x^2}$; $a = 0$, $b = 2$

En los ejercicios 35-42, trace la gráfica y determine el área de la región completamente rodeada por las gráficas de las funciones *f* y *g* dadas.

35. $f(x) = x + 2$ y $g(x) = x^2 - 4$

36. $f(x) = -x^2 + 4x$ y $g(x) = 2x - 3$

37. $f(x) = x^2$ y $g(x) = x^3$

38. $f(x) = x^3 + 2x^2 - 3x$ y $g(x) = 0$

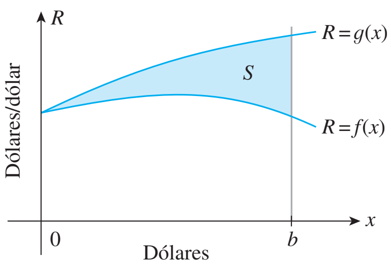
39. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$ y $g(x) = x^2 - 3x$

40. $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = x^2$

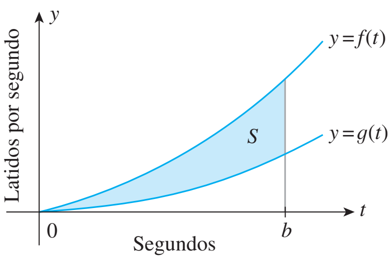
41. $f(x) = x\sqrt{9 - x^2}$ y $g(x) = 0$

42. $f(x) = 2x$ y $g(x) = x\sqrt{x + 1}$

43. Efecto de la publicidad sobre los ingresos En la siguiente figura, la función f da la tasa de cambio en los ingresos de Odyssey Travel con respecto a la cantidad x gastada en publicidad de su agencia actual. Para atraer los servicios de distintas agencias de publicidad, se espera que los ingresos de Odyssey crecerán a la tasa dada por la función g. Dé una interpretación del área A de la región S y determine una expresión para A en términos de una integral definida que involucra a f y g.

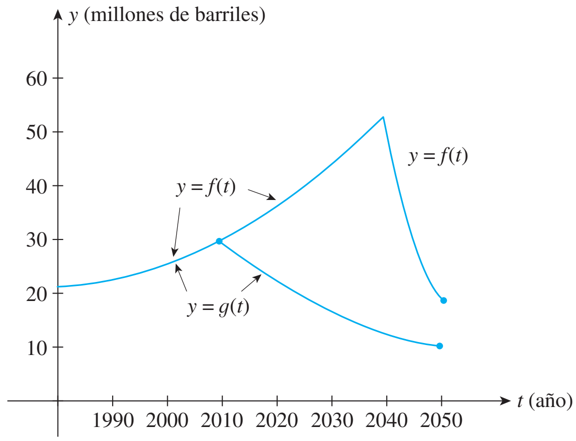


44. Tasa del pulso durante el ejercicio En la figura siguiente, la función f da la tasa de crecimiento del pulso de un individuo cuando camina un recorrido de rutina establecido desde hace 6 meses. La función g da la tasa de crecimiento de su pulso cuando comienza a caminar el mismo recorrido establecido. Dé una interpretación del área A de la región S y determine una expresión para A en términos de una integral definida que involucra tanto a f como a g.



45. Déficit de producción de petróleo Los expertos de energía están en desacuerdo sobre cuándo la producción mundial de petróleo comenzará a disminuir. En la siguiente figura, la función f proporciona la producción anual mundial de petróleo en miles de millones de barriles desde 1980 hasta 2050, según la proyección del Departamento de Energía. La función g da la producción mundial de petróleo en miles de millones de barriles por año en el mismo periodo; de acuerdo con el geólogo Colin Campbell será a largo plazo. Determine una expresión en términos de integrales definidas que involucran a f y g, dando el plazo de la producción total de petróleo en el periodo en cuestión, considerando las advertencias de Campbell.

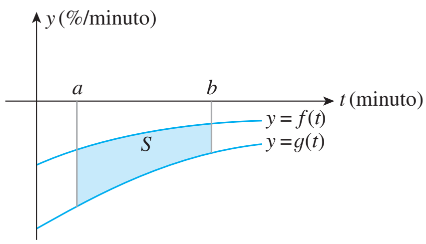
Fuente: U.S. Department of Energy; Colin Campbell



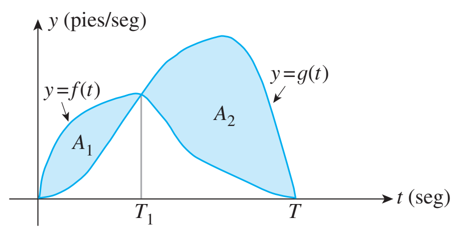
46. Purificación del aire Para estudiar la efectividad de los purificadores de aire al eliminar el humo, los ingenieros hicieron funcionar cada filtro en una habitación de 10×20 pies llena de humo. En la siguiente figura, la función f da la tasa de cambio del nivel de humo por minuto, t minutos después del inicio de la prueba, cuando se emplea un purificador de una marca A. La función g da la tasa de cambio del nivel de humo por minuto cuando se usa un purificador marca B.

a. Dé una interpretación del área de la región S.

b. Determine una expresión para el área S en términos de una integral definida que involucre a f y g.



47. Dos automóviles inician su salida uno al lado del otro y recorren un camino recto. La velocidad del automóvil 1 es $f(t)$ pies/seg, la velocidad del automóvil 2 es $g(t)$ pies/seg sobre el intervalo $[0, T]$, y $0 < T_1 < T$. Más aún, suponga que las gráficas de f y g son como indicativos en la siguiente figura. Sean A_1 y A_2 que denotan las áreas de las regiones (sombreadas).



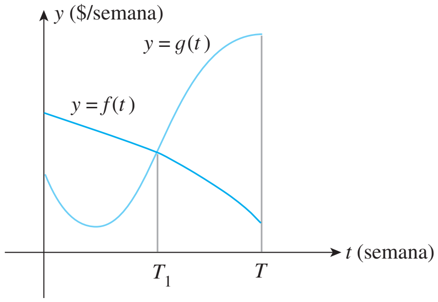
a. Escriba el número

$$\int_{T_1}^{T} [g(t) - f(t)]\,dt - \int_{0}^{T_1} [f(t) - g(t)]\,dt$$

en términos A_1 y A_2.

b. ¿Qué representa el número obtenido en el inciso (a)?

48. La tasa de cambio de los ingresos de una empresa A sobre el intervalo (tiempo) $[0, T]$ es $f(t)$ dólares por semana, mientras que la tasa de cambio del ingreso de la empresa B en el mismo periodo es $g(t)$ dólares por semana. Las gráficas de f y g se describen en la siguiente figura. Determine una expresión en términos de integrales definidas que involucran a f y g dando un ingreso adicional que la empresa B tendrá sobre la empresa A en el periodo $[0, T]$.



49. **Motor turbo-cargado frente a un motor estándar** En la prueba realizada por *Auto Test Magazine* en dos modelos idénticos del Phoenix Elite, uno equipado con un motor estándar y el otro con un motor turbo cargado, se determinó que la aceleración del primero está dada por

$$a = f(t) = 4 + 0.8t \qquad (0 \leq t \leq 12)$$

pie/seg/seg, t segundos desde el reposo hasta una aceleración completa, mientras que la aceleración del último está dada por

$$a = g(t) = 4 + 1.2t + 0.03t^2 \qquad (0 \leq t \leq 12)$$

pie/seg/seg. ¿Cuánto más veloz es el movimiento del modelo turbo cargado que del motor estándar al final de unos 10 seg de iniciada la prueba de aceleración completa?

50. **Fuentes alternas de energía** Debido al papel cada vez más importante desempeñado por el carbón como fuente viable de energía alterna, la producción de carbón ha crecido a una tasa de

$$3.5e^{0.05t}$$

miles de millones de toneladas métricas por año, t años desde 1980 (que corresponde a $t = 0$). Si no hubiera sido por la crisis energética, la tasa de producción de carbón a partir de 1980 podría haber sido sólo

$$3.5e^{0.01t}$$

miles de millones de toneladas métricas por año, t años desde 1980. Determine el monto de la producción de carbón adicional entre 1980 y a finales del siglo como una fuente alterna de energía.

51. **Efecto de la publicidad en televisión sobre la venta de automóviles** Carl Williams, propietario de Carl Williams Auto Sales, estima que con la cuantiosa publicidad por televisión, las ventas de automóviles en los próximos años podría incrementarse a la tasa de

$$5e^{0.3t}$$

miles de vehículos por año, t años a partir de hoy, en vez de la tasa actual de

$$(5 + 0.5t^{3/2})$$

miles de vehículos por año, t años a partir de hoy. Determine cuántos automóviles más espera vender Carl en los próximos 5 años implementando sus planes de publicidad.

52. **Crecimiento de la población** En un esfuerzo por frenar el crecimiento de la población en un estado de una isla al Sureste de Asia, el gobierno ha decidido lanzar una amplia campaña de propaganda. Sin frenar, el gobierno espera que la tasa de crecimiento de la población haya sido

$$60e^{0.02t}$$

miles de personas por año, t años a partir de hoy, por los próximos 5 años. Sin embargo, la implementación exitosa de la campaña propuesta se espera que resulte en un crecimiento en la población a una tasa de

$$-t^2 + 60$$

miles de personas por año, t años a partir de hoy, por los próximos 5 años. Suponiendo que la campaña es implementada, ¿cuántas personas menos habrá en esa ciudad en 5 años a partir de hoy de las que habría de no haberse implementado ningún freno?

En los ejercicios 53-56, determine si el enunciado es verdadero o falso. Si es verdadero, explique por qué lo es. Si es falso, dé un ejemplo para demostrar por qué lo es.

53. Si f y g son continuas sobre $[a, b]$ y cualquiera $f(x) \geq g(x)$ para toda x en $[a, b]$ o $f(x) \leq g(x)$ para toda x en $[a, b]$, entonces el área de la región limitada por las gráficas de f y g y las líneas verticales $x = a$ y $x = b$ está dada por $\int_a^b |f(x) - g(x)|\,dx$.

54. El área de la región limitada por las gráficas de $f(x) = 2 - x$ y $g(x) = 4 - x^2$ y las líneas verticales $x = 0$ y $x = 2$ está dada por $\int_0^2 [f(x) - g(x)]\,dx$.

55. Si A denota el área limitada por las gráficas de f y g sobre $[a, b]$, entonces

$$A^2 = \int_a^b [f(x) - g(x)]^2 dx$$

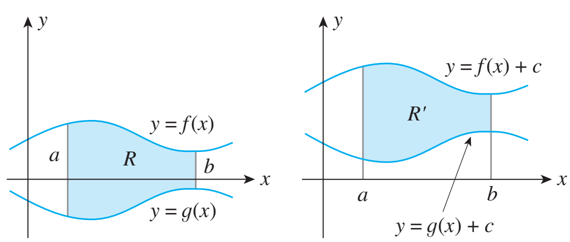
56. Si f y g son continuas sobre $[a, b]$ y $\int_a^b [f(t) - g(t)]\,dt > 0$, entonces $f(t) \geq g(t)$ para toda t en $[a, b]$.

57. Demuestre que el área de la región R limitada arriba por la gráfica de una función f y abajo por la gráfica de una función g desde $x = a$ hasta $x = b$ está dada por

$$\int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx$$

Sugerencia: La validez de la fórmula fue verificada antes para el caso en que ambas f y g fueran no negativas. Ahora, sean f y g dos funciones que $f(x) \geq g(x)$ para $a \leq x \leq b$. Entonces existe alguna constante c no negativa como las curvas $y = f(x) + c$ y $y = g(x) + c$ son transformadas en la dirección y de tal forma que la región R' tiene la misma área que la región R (vea las siguientes figuras). Demuestre que él área de R' está dada por

$$\int_a^b \{[f(x) + (c)] - [g(x) + (c)]\} = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx$$

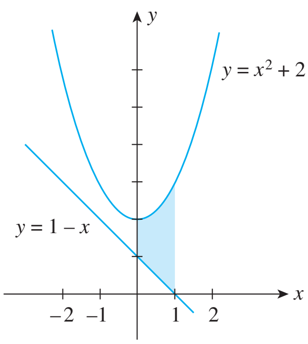


11.6 Soluciones de los ejercicios de autoevaluación

1. La región en cuestión se muestra en la siguiente figura. Ya que la gráfica de la función f permanece arriba de la función g para $0 \le x \le 1$, observe que el área requerida está dada por

$$\begin{aligned}\int_0^1 [(x^2+2)-(1-x)]\,dx &= \int_0^1 (x^2+x+1)\,dx\\ &= \frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+x\Big|_0^1\\ &= \frac{1}{3}+\frac{1}{2}+1\\ &= \frac{11}{6}\end{aligned}$$

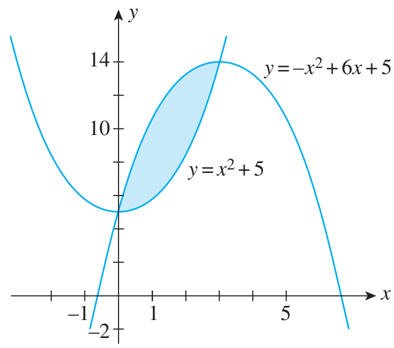
u $\frac{11}{6}$ unidades cuadradas.



2. La región en cuestión se muestra en la figura anexa. Para determinar los puntos de intersección de las dos curvas, resuelva las ecuaciones

$$\begin{aligned}-x^2+6x+5 &= x^2+5\\ 2x^2-6x &= 0\\ 2x(x-3) &= 0\end{aligned}$$

dando $x = 0$ y $x = 3$. Sin embargo, los puntos de intersección son (0, 5) y (3, 14).



Ya que la gráfica de f permanece siempre arriba de g por $0 \le x \le 3$, observe que el área requerida está dada por

$$\begin{aligned}\int_0^3 [(-x^2+6x+5)-(x^2+5)]\,dx &= \int_0^3 (-2x^2+6x)\,dx\\ &= -\frac{2}{3}x^3+3x^2\Big|_0^3\\ &= -18+27\\ &= 9\end{aligned}$$

o 9 unidades cuadradas.

3. Las utilidades adicionales realizables para los próximos 10 años están dadas por

$$\begin{aligned}&\int_0^{10} [(t-2\sqrt{t}+4)-(1+t^{2/3})]\,dt\\ &= \int_0^{10} (t-2t^{1/2}+3-t^{2/3})\,dt\\ &= \frac{1}{2}t^2-\frac{4}{3}t^{3/2}+3t-\frac{3}{5}t^{5/3}\Big|_0^{10}\\ &= \frac{1}{2}(10)^2-\frac{4}{3}(10)^{3/2}+3(10)-\frac{3}{5}(10)^{5/3}\\ &\approx 9.99\end{aligned}$$

o aproximadamente \$10 millones.

USO DE LA TECNOLOGÍA

Determinación del área entre dos curvas

La operación integral numérica puede utilizarse también para determinar el área entre dos curvas. Al realizar esto use la operación integral numérica para evaluar una integral definida apropiada o la suma (diferencia) de las integrales definidas apropiadas. En los ejemplos siguientes, la operación de intersección se utiliza también como ventaja para ayudarnos a determinar los límites de integración.

EJEMPLO 1 Use la calculadora graficadora para determinar el área de la región más pequeña de R que está completamente rodeada por las gráficas de las funciones

$$f(x) = 2x^3 - 8x^2 + 4x - 3 \quad \text{y} \quad g(x) = 3x^2 + 10x - 11$$

(*continúa*)

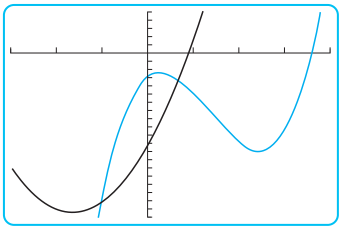


FIGURA **T1**
La región R está completamente rodeada por las gráficas de f y g.

Solución Las gráficas de f y g en la ventana de visualización $[-3, 4] \times [-20, 5]$ se muestran en la figura T1.

Al usar la operación de intersección de una calculadora graficadora, determinamos las coordenadas x de los puntos de intersección de las dos gráficas para ser aproximadamente -1.04 y 0.65, respectivamente. Ya que la gráfica de f permanece sobre g sobre el intervalo $[-1.04, 0.65]$, observe que el área de R está dada por

$$\begin{aligned} A &= \int_{-1.04}^{0.65} [(2x^3 - 8x^2 + 4x - 3) - (3x^2 + 10x - 11)]\, dx \\ &= \int_{-1.04}^{0.65} (2x^3 - 11x^2 - 6x + 8)\, dx \end{aligned}$$

Al usar la función integral numérica de la calculadora graficadora, encontramos $A \approx 9.87$, o también el área de R es aproximadamente de 9.87 unidades cuadradas. ■

EJERCICIOS CON TECNOLOGÍA

En los ejercicios 1-6, (a) trace las gráficas de las funciones f y g y (b) determine el área de la región rodeada por estas gráficas y por las líneas verticales $x = a$ y $x = b$. Exprese sus respuestas para cuatro decimales exactas.

1. $f(x) = x^3(x - 5)^4$, $g(x) = 0$; $a = 1$, $b = 3$
2. $f(x) = x - \sqrt{1 - x^2}$, $g(x) = 0$; $a = -\frac{1}{2}$, $b = \frac{1}{2}$
3. $f(x) = x^{1/3}(x + 1)^{1/2}$, $g(x) = x^{-1}$; $a = 1.2$, $b = 2$
4. $f(x) = 2$, $g(x) = \ln(1 + x^2)$; $a = -1$, $b = 1$
5. $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = \dfrac{x^2 - 3}{x^2 + 1}$; $a = 0$, $b = 3$
6. $f(x) = \dfrac{4}{x^2 + 1}$, $g(x) = x^4$; $a = -1$, $b = 1$

En los ejercicios 7-12, (a) trace las gráficas de las funciones f y g y (b) determine el área de la región rodeada totalmente por las gráficas de estas funciones.

7. $f(x) = 2x^3 - 8x^2 + 4x - 3$ y $g(x) = -3x^2 + 10x - 10$
8. $f(x) = x^4 - 2x^2 + 2$ y $g(x) = 4 - 2x^2$
9. $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + x + 5$ y $g(x) = e^{2x} - 3$
10. $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3$ y $g(x) = \ln x$
11. $f(x) = xe^{-x}$ y $g(x) = x - 2\sqrt{x}$
12. $f(x) = e^{-x^2}$ y $g(x) = x^4$
13. Refiérase al ejemplo 1. Determine el área de la región más grande que está rodeada por completo por las gráficas de las funciones f y g.

11.7 Aplicaciones de la integral definida a negocios y economía

En esta sección se consideran varias aplicaciones de la integral definida en los campos de los negocios y la economía.

Excedentes del consumidor y del productor

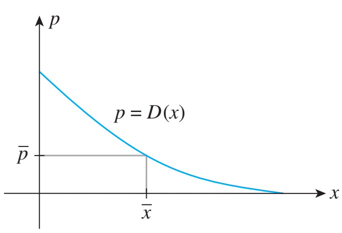


FIGURA **38**
$D(x)$ es una función de demanda.

Comience por determinar una fórmula para calcular el excedente del consumidor. Suponga que $p = D(x)$ es la función de demanda que se refiere al precio unitario p de un producto a la cantidad x demandada de éste. Por otra parte, suponga que un precio de mercado unitario fijo $\overline{p}$ ha sido establecido para el producto y a este precio unitario corresponde la cantidad demandada que es $\overline{x}$ unidades (figura 38). Entonces, aquellos consumidores que estarían dispuestos a pagar un precio unitario superior a $\overline{p}$ por el producto en efecto experimentarían un ahorro. Esta diferencia entre lo que los consumidores *estarían* dispuestos a pagar por $\overline{x}$ unidades del producto y lo que *en realidad* pagan por él se llama **excedente del consumidor**.

Para determinar una fórmula que calcule el excedente del consumidor, divida el intervalo $[0, \overline{x}]$ entre n subintervalos, cada uno de longitud $\Delta x = \overline{x}/n$, y denote los extremos derechos de estos subintervalos por $x_1, x_2, \ldots, x_n = \overline{x}$ (figura 39).

En la figura 39 observe que existen consumidores que pagarían un precio unitario de por lo menos $D(x_1)$ dólares por las primeras Δx unidades del producto en lugar del precio de mercado de $\overline{p}$ dólares por unidad. Los ahorros para estos consumidores son aproximados por

$$D(x_1)\Delta x - \overline{p}\Delta x = [D(x_1) - \overline{p}]\Delta x$$

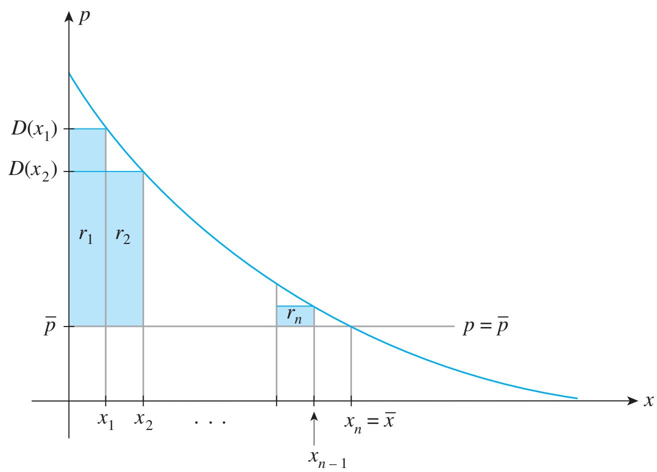


FIGURA 39
El excedente del consumidor es aproximado por la suma de las áreas de los rectángulos $r_1, r_2, \ldots, r_n$.

que es el área del rectángulo r_1. Prosiga con la misma línea de razonamiento, determine que los ahorros de los consumidores quienes estarían dispuestos a pagar un precio por unidad de por lo menos $D(x_2)$ dólares por las próximas Δx unidades (desde x_1 hasta x_2) del producto, en lugar del precio de mercado de $\overline{p}$ dólares por unidad, es aproximada por

$$D(x_2)\Delta x - \overline{p}\Delta x = [D(x_2) - \overline{p}]\Delta x$$

A continuación, aproxime los ahorros totales de los consumidores al comprar $\overline{x}$ unidades del producto por la suma

$$\begin{aligned}
&\left[D(x_1) - \overline{p}\right]\Delta x + \left[D(x_2) - \overline{p}\right]\Delta x + \cdots + \left[D(x_n) - \overline{p}\right]\Delta x \\
&\quad = \left[D(x_1) + D(x_2) + \cdots + D(x_n)\right]\Delta x - \underbrace{\left[\overline{p}\Delta x + \overline{p}\Delta x + \cdots + \overline{p}\Delta x\right]}_{n \text{ términos}} \\
&\quad = \left[D(x_1) + D(x_2) + \cdots + D(x_n)\right]\Delta x - n\overline{p}\Delta x \\
&\quad = \left[D(x_1) + D(x_2) + \cdots + D(x_n)\right]\Delta x - \overline{p}\,\overline{x}
\end{aligned}$$

Ahora, el primer término de la última expresión es la suma de Riemann de la función de la demanda $p = D(x)$ sobre el intervalo $[0, \overline{x}]$ con los puntos representativos $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Siendo n una aproximación infinita, obtenga la siguiente fórmula para el excedente del consumidor CS.

Excedente del consumidor

El excedente del consumidor está dado por

$$CS = \int_0^{\overline{x}} D(x)\,dx - \overline{p}\,\overline{x} \qquad \textbf{(16)}$$

donde D es la función de la demanda, $\overline{p}$ es el precio de mercado por unidad, y $\overline{x}$ es la cantidad vendida.

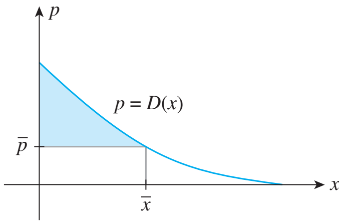


FIGURA 40
El excedente del consumidor.

El excedente del consumidor está dado por el área de la región limitada arriba por la curva de la demanda $p = D(x)$ y debajo por la línea recta $p = \overline{p}$ desde $x = 0$ hasta $x = \overline{x}$ (figura 40). También puede observar esto si reescribe la ecuación (16) en la forma

$$\int_0^{\overline{x}} [D(x) - \overline{p}]\, dx$$

e interprete geométricamente el resultado.

De manera análoga, puede obtener una fórmula para calcular el excedente del productor. Suponga que $p = S(x)$ es la ecuación de la demanda que relaciona el precio unitario p de un cierto producto con la cantidad x que el proveedor pondrá disponible en el mercado a ese precio.

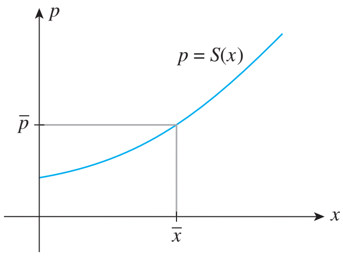


FIGURA 41
$S(x)$ es una función de oferta.

De nuevo suponga que un precio de mercado fijo $\overline{p}$ ha sido establecido para el producto y, correspondiente a este precio por unidad, un número de $\overline{x}$ unidades que estarán disponibles en el mercado por el proveedor (figura 41). Entonces, los proveedores quienes estarían dispuestos a que el producto esté disponible a un precio inferior resultan ganadores con el hecho de que el precio de mercado también se establece como tal. La diferencia entre lo que los proveedores reciben en realidad y a lo que estarían dispuestos a recibir se llama **excedente del productor**. Al proseguir de forma similar a la determinación de la ecuación para calcular el excedente del consumidor, determinamos que el excedente del productor PS se define como sigue:

Excedente del productor

El excedente del productor está dado por

$$PS = \overline{p}\,\overline{x} - \int_0^{\overline{x}} S(x)\, dx \qquad \textbf{(17)}$$

donde $S(x)$ es la función de oferta, $\overline{p}$ es el precio de mercado por unidad, y $\overline{x}$ es la cantidad ofrecida.

En términos geométricos, el excedente del productor está dado por el área de la región limitada arriba por la línea recta $p = \overline{p}$ y abajo por la curva de la oferta $p = S(x)$ desde $x = 0$ hasta $x = \overline{x}$ (figura 42).

También se puede demostrar que el último pronunciamiento es verdadero al convertir la ecuación (17) a la forma

$$\int_0^{\overline{x}} [\overline{p} - S(x)]\, dx$$

e interpretar geométricamente la integral definida.

VIDEO

EJEMPLO 1 La función de la demanda para determinadas bicicletas de 10 velocidades está dada por

$$p = D(x) = -0.001x^2 + 250$$

donde p es el precio por unidad en dólares y x es la cantidad demandada en unidades de millar. La función de la oferta para estas bicicletas está dada por

$$p = S(x) = 0.0006x^2 + 0.02x + 100$$

donde p es el precio por unidad y x es el número de bicicletas que el proveedor colocará en el mercado, en unidades de millar. Determine los excedentes del consumidor y del productor si el precio de mercado de una bicicleta se fija en el precio de equilibrio.

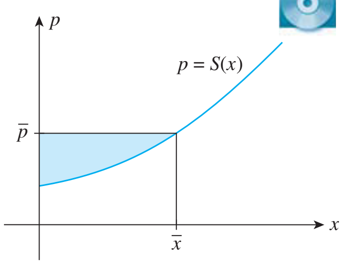


FIGURA 42
El excedente del productor.

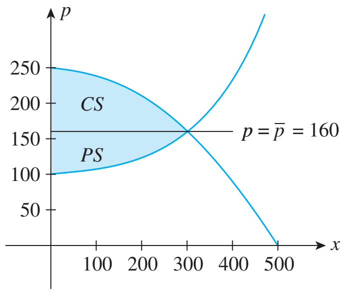


FIGURA **43**
El excedente del consumidor cuando el precio de mercado = al precio de equilibrio.

Solución Recuerde que el precio de equilibrio es el precio unitario de un producto cuando se presenta el equilibrio de mercado. Determinamos el precio de equilibrio al resolver los puntos de intersección de la curva de la demanda y la curva de la oferta (figura 43). Para resolver el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} p &= -0.0001x^2 \qquad\qquad + 250 \\ p &= 0.0006x^2 + 0.02x + 100 \end{aligned}$$

simplemente sustituimos la primera ecuación en la segunda, obteniendo

$$\begin{aligned} 0.0006x^2 + 0.02x + 100 &= -0.001x^2 + 250 \\ 0.0016x^2 + 0.02x - 150 &= 0 \\ 16x^2 + 200x - 1{,}500{,}000 &= 0 \\ 2x^2 + 25x - 187{,}500 &= 0 \end{aligned}$$

Al factorizar esta última ecuación, obtenemos

$$(2x + 625)(x - 300) = 0$$

Así que, $x = -625/2$ o $x = 300$. El primer número permanece fuera del intervalo de interés, por consiguiente nos quedamos con la solución $x = 300$, con un valor correspondiente de

$$p = -0.001(300)^2 + 250 = 160$$

Por tanto, el punto de equilibrio es (300, 160); esto es, la cantidad de equilibrio es 300,000, y el precio de equilibrio \$160. Al fijar el precio de mercado en \$160 por unidad y utilizar la fórmula (16) con $\overline{p} = 160$ y $\overline{x} = 300$, se determina que el excedente del consumidor está dado por

$$\begin{aligned} CS &= \int_0^{300} (-0.001x^2 + 250)\,dx - (160)(300) \\ &= \left(-\frac{1}{3{,}000}x^3 + 250x\right)\Bigg|_0^{300} - 48{,}000 \\ &= -\frac{300^3}{3{,}000} + (250)(300) - 48{,}000 \\ &= 18{,}000 \end{aligned}$$

o \$18,000,000. (Recuerde que x se mide en unidades de millar.)

Después, al utilizar (17), determinamos que el excedente del productor está dado por

$$\begin{aligned} PS &= (160)(300) - \int_0^{300} (0.0006x^2 + 0.02x + 100)\,dx \\ &= 48{,}000 - (0.0002x^3 + 0.01x^2 + 100x)\Big|_0^{300} \\ &= 48{,}000 - [(0.0002)(300)^3 + (0.01)(300)^2 + 100(300)] \\ &= 11{,}700 \end{aligned}$$

u \$11,700,000. ■

Valores presente y futuro de un flujo de ingresos

Suponga que una empresa genera un flujo de ingresos por un periodo, por ejemplo, los ingresos generados por una gran cadena de tiendas minoristas por un periodo de 5 años. A medida que el ingreso se realiza, se reinvierte y gana intereses a una tasa fija. El **flujo de ingresos futuros acumulados** durante un periodo de 5 años es la cantidad de dinero con que la empresa termina ese periodo.

La integral definida puede utilizarse para determinar este flujo de ingresos futuro, acumulado o total sobre un periodo. El valor de un flujo de ingresos futuro total proporciona una forma de medir el valor de dicho flujo. Para determinar el **valor futuro de un flujo de ingresos**, suponga

$R(t)$ = La tasa de ingreso de una generación en cualquier momento t — Dólares por año

r = Tasa de interés compuesto continuamente

T = Término de tiempo — En años

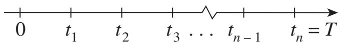


FIGURA **44**
El intervalo del tiempo [0, T] está dividido entre n subintervalos.

Divida el intervalo del tiempo $[0, T]$ entre n subintervalos de igual longitud $\Delta t = T/n$ y denote los extremos derechos de estos intervalos al $t_1, t_2, \ldots, t_n = T$, como se muestra en la figura 44.

Si R es una función continua sobre $[0, T]$, entonces $R(t)$ no difiere en mucho de $R(t_1)$ sobre el subintervalo $[0, t_1]$ siempre que el intervalo sea ínfimo (lo cual es verdad si n es mayor). Sin embargo, el ingreso generado sobre el intervalo de tiempo $[0, t_1]$ es aproximadamente

$$R(t_1)\Delta t \qquad \text{Tasa constante de ingresos} \times \text{intervalo de tiempo}$$

dólares. El valor futuro de esta cantidad, T años a partir de ahora, calculado como si éste fuera ganado en el momento t_1 es

$$[R(t_1)\Delta t]e^{r(T-t_1)} \qquad \text{Ecuación (5), sección 4.1}$$

dólares. De forma similar, el ingreso generado sobre el intervalo de tiempo $[t_1, t_2]$ es aproximadamente $R(t_2)\Delta t$ dólares y tiene un valor futuro, T años a partir de ahora, de aproximadamente

$$[R(t_2)\Delta t]e^{r(T-t_2)}$$

dólares. Sin embargo, la suma de los valores del flujo de ingresos futuro generados sobre el intervalo de tiempo $[0, T]$ es aproximadamente

$$\begin{aligned} &R(t_1)e^{r(T-t_1)}\Delta t + R(t_2)e^{r(T-t_2)}\Delta t + \cdots + R(t_n)e^{r(T-t_n)}\Delta t \\ &\quad = e^{rT}[R(t_1)e^{-rt_1}\Delta t + R(t_2)e^{-rt_2}\Delta t + \cdots + R(t_n)e^{-rt_n}\Delta t] \end{aligned}$$

dólares. Pero esta suma es sólo la suma de Riemann de las funciones $e^{rT}R(t)e^{-rt}$ sobre el intervalo $[0, T]$ con los puntos representativos $t_1, t_2, \ldots, t_n$. Al permitir que n se aproxime al infinito, se obtiene el siguiente resultado.

Valor futuro de un flujo de ingresos acumulado o total

El valor futuro de un flujo de ingresos acumulado o total después de T años con ingresos de $R(t)$ dólares por año, ganando a una tasa r de interés compuesto continuo por año, está dado por

$$FV = e^{rT}\int_0^T R(t)e^{-rt}\,dt \qquad \textbf{(18)}$$

EJEMPLO DE APLICACIÓN 2 Flujo de ingresos Crystal Car Wash compró recientemente una máquina automática para lavar automóviles que se espera genere $40,000 en ingresos por año, t años a partir de ahora, por los próximos 5 años. Si el ingreso se reinvierte en el negocio que genera una tasa de interés compuesta continuamente de 12% anual, determine el valor acumulado de este ingreso al final de 5 años.

Solución Se requiere determinar el valor futuro del flujo de ingresos total dado después de 5 años. Al utilizar la ecuación (18) con $R(t) = 40{,}000$, $r = 0.12$ y $T = 5$, observe que el valor requerido está dado por

$$e^{0.12(5)}\int_0^5 40{,}000e^{-0.12t}\,dt$$
$$= e^{0.6}\left[-\frac{40{,}000}{0.12}e^{-0.12t}\right]\Bigg|_0^5 \qquad \text{Al integrar, utilice la sustitución } u = -0.12t.$$
$$= -\frac{40{,}000e^{0.6}}{0.12}(e^{-0.6} - 1) \approx 274{,}039.60$$

o aproximadamente \$274,040. ■

Otra forma de medir el valor de un ingreso es al considerar su valor presente. El **valor presente de un flujo de ingresos** de $R(t)$ dólares por año durante un periodo de T años, devengando a una tasa r de interés compuesto continuo por año, P es el capital que producirá el mismo valor futuro, será como si P se invierte hoy por un periodo de T años a la misma tasa de interés. En otras palabras

$$Pe^{rT} = e^{rT}\int_0^T R(t)e^{-rt}\,dt$$

Al dividir ambos lados de la ecuación entre e^{rT} da el siguiente resultado.

Valor presente de un flujo de ingresos

El valor presente de un flujo de ingresos de $R(t)$ dólares por año, a una tasa de interés r compuesto continuamente por año, está dado por

$$PV = \int_0^T R(t)e^{-rt}\,dt \tag{19}$$

VIDEO

EJEMPLO DE APLICACIÓN 3 Análisis de inversiones El propietario de un cine local considera dos planes alternos para renovar o mejorar el teatro. El plan A requiere un desembolso de efectivo inmediato de \$250,000, mientras que el plan B requiere uno de \$180,000. Se estima que el adoptar el plan A daría lugar a un flujo de ingresos neto a una tasa de

$$f(t) = 630{,}000$$

dólares por año, mientras que adoptar el plan B resultaría en un flujo de ingresos neto a una tasa de

$$g(t) = 580{,}000$$

dólares por año en los próximos 3 años. Si la tasa de interés prevaleciente para los próximos 5 años es 10% anual, ¿qué plan generaría un ingreso neto mayor al final de los 3 años?

Solución Ya que el desembolso inicial es \$250,000, determinamos, utilizando la ecuación (19) con $R(t) = 630{,}000$, $r = 0.1$ y $T = 3$, el valor presente del ingreso neto bajo el plan A estará dado por

$$\int_0^3 630{,}000e^{-0.1t}\,dt - 250{,}000$$
$$= \frac{630{,}000}{-0.1}e^{-0.1t}\Bigg|_0^3 - 250{,}000 \qquad \text{Integrar utilizando la sustitución } u = -0.1t.$$
$$= -6{,}300{,}000e^{-0.3} + 6{,}300{,}000 - 250{,}000$$
$$\approx 1{,}382{,}845$$

o aproximadamente \$1,382,845.

Para determinar el valor presente del ingreso neto bajo el plan B, utilizamos (19) con $R(t) = 580{,}000$, $r = 0.1$ y $T = 3$, obteniendo

$$\int_0^3 580{,}000e^{-0.1t}dt - 180{,}000$$

dólares. Al proseguir como en el cálculo anterior, vemos que el valor requerido es \$1,323,254 (vea el ejercicio 8, página 818).

Al comparar el valor presente de cada plan, concluimos que el plan A generaría un ingreso neto mayor al final de los 3 años. ■

Nota La función R en el ejemplo 3 es una función constante. Si R no es una función constante, entonces podríamos necesitar técnicas más sofisticadas de integración para evaluar la integral en (19). ■

Monto y valor presente de una anualidad

Una anualidad es una secuencia de pagos realizada en intervalos de tiempo regulares. El periodo en que estos pagos se realizan se llama *vencimiento* de la anualidad. Aunque los pagos no necesariamente son iguales en monto, lo son en muchas aplicaciones importantes, y se asumirá que en nuestro estudio son iguales. Los ejemplos de anualidades son depósitos regulares para una cuenta de ahorros, pago de hipotecas y pagos mensuales de seguros.

El **monto de una anualidad** es la suma de pagos más el interés generado. Una fórmula para calcular la cantidad de una anualidad A puede encontrarse con la ayuda de (18).

P = Monto de cada pago de la anualidad
r = Tasa de interés compuesto continuo
T = Vencimiento de la anualidad (en años)
m = Número de pagos por año

Los pagos de la anualidad constituyen el flujo de ingresos constante $R(t) = mP$ dólares por año. Con este valor de $R(t)$, (18) permanece

$$\begin{aligned} A &= e^{rT}\int_0^T R(t)e^{-rt}\,dt = e^{rT}\int_0^T mPe^{-rt}\,dt \\ &= mPe^{rT}\left[-\frac{e^{-rt}}{r}\right]\Bigg|_0^T = mPe^{rT}\left[-\frac{e^{-rT}}{r} + \frac{1}{r}\right] \\ &= \frac{mP}{r}(e^{rT} - 1) \qquad \text{Ya que } e^{rT}\cdot e^{-rT} = 1 \end{aligned}$$

Esto conduce a la siguiente fórmula.

Monto de una anualidad

El monto de una anualidad es

$$A = \frac{mP}{r}(e^{rT} - 1) \tag{20}$$

donde P, r, T y m serán definidas más tarde.

EJEMPLO DE APLICACIÓN 4 Cuentas de Retiro Individuales En enero 1 de 1992, Marcus Chapman depositó \$2,000 en una Cuenta de Retiro Individual (CRI), pagando una tasa de interés compuesto continuo de 5%

anual. Suponiendo que depositó \$2,000 anualmente en la cuenta, ¿cuánto tenía en su CRI a principios de 2008?

Solución Podemos utilizar (20), con $P = 2{,}000$, $r = 0.05$, $T = 16$ y $m = 1$, obteniendo

$$\begin{aligned} A &= \frac{2{,}000}{0.05}(e^{0.8} - 1) \\ &\approx 49{,}021.64 \end{aligned}$$

Por tanto, Marcus tenía aproximadamente \$49,022 en su cuenta a principios de 2008. ■

Exploración con TECNOLOGÍA

Refiérase al ejemplo 4. Suponga que Marcus deseaba saber cuánto tenía en su CRI en cualquier momento, no sólo a principios de 2008, como se le pidió que calculara en el ejemplo.

1. Al utilizar la fórmula (18) y el dato relevante del ejemplo 4, demuestre que la cantidad requerida en cualquier momento x (x está medida en años, $x > 0$) está dada por

$$A = f(x) = 20{,}000(e^{0.05x} - 1)$$

2. Use la calculadora respectiva para trazar la gráfica de f, utilizando la ventana de visualización $[0, 30] \times [2{,}000, 400{,}000]$.
3. Utilice ZOOM y TRACE, o la capacidad de evaluación de una función de su calculadora graficadora, use el resultado del punto 2 para verificar el resultado obtenido en el ejemplo 4. Comente las ventajas del modelo matemático determinado en el punto 1.

Al utilizar (19), podemos encontrar la siguiente fórmula para el valor presente de la anualidad.

Valor presente de una anualidad

El valor presente de una anualidad está dado por

$$PV = \frac{mP}{r}(1 - e^{-rT}) \tag{21}$$

donde P, r, T y m serán definidas más tarde.

EJEMPLO DE APLICACIÓN 5 Fondos de amortización Tomas Perez, propietario de una tienda de discos duros, desea crear un fondo del cual retirará \$1,000 por mes por los próximos 10 años. Si el fondo gana una tasa de interés compuesto continuo de 6% anual, ¿cuánto dinero necesita para crear el fondo?

Solución Deseamos determinar el valor presente de una anualidad con $P = 1{,}000$, $r = 0.06$, $T = 10$ y $m = 12$. Utilizando la ecuación (21), determinamos

$$\begin{aligned} PV &= \frac{12{,}000}{0.06}(1 - e^{-(0.06)(10)}) \\ &\approx 90{,}237.70 \end{aligned}$$

Por tanto, Tomas necesita aproximadamente \$90,238 para crear un fondo. ■

Curvas de Lorentz y distribución del ingreso

Un método empleado por los economistas al estudiar la distribución del ingreso en una sociedad está basado en la **curva de Lorentz**, llamada así por el experto norteamericano en estadística M.D. Lorentz. Para describir la curva de Lorentz, sea $f(x)$ la proporción del ingreso total de $100x\%$ recibido por los más pobres de la población para $0 \leq x \leq 1$. Al utilizar esta terminología, $f(0.3) = 0.1$ sencillamente declara que menos de 30% de los receptores del ingreso reciben 10% del ingreso total.

La función f tiene las siguientes propiedades:

1. El dominio de f es $[0, 1]$.
2. El rango de f es $[0, 1]$.
3. $f(0) = 0$ y $f(1) = 1$.
4. $f(x) \leq x$ por cada x en $[0, 1]$.
5. f es creciente sobre $[0, 1]$.

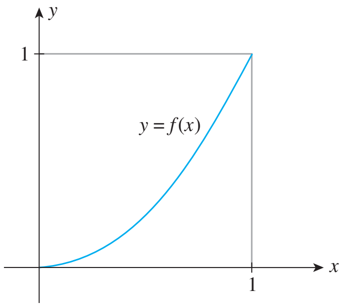


FIGURA 45
Una curva de Lorentz.

Las primeras dos propiedades se deducen del hecho de que ambas x y $f(x)$ son fracciones de enteros. La propiedad 3 declara que 0% de los receptores del ingreso recibe 0% del ingreso total y 100% de los receptores del ingreso recibe 100% del ingreso total. La propiedad 4 se deduce del hecho que menos de $100x\%$ de los receptores del ingreso no pueden recibir más de $100x\%$ del ingreso total. Una curva de Lorentz típica se muestra en la figura 45.

EJEMPLO DE APLICACIÓN 6 Curvas de Lorentz La distribución del ingreso de un país en vías de desarrollo está descrita por la función

$$f(x) = \frac{19}{20}x^2 + \frac{1}{20}x$$

a. Trace la curva de Lorentz para la función dada.
b. Calcule $f(0.2)$ y $f(0.8)$ e interprete sus resultados.

Solución

a. La curva de Lorentz se muestra en la figura 46.

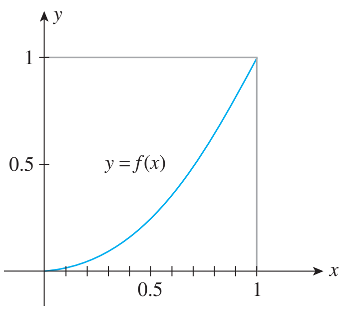


FIGURA 46
La curva de Lorentz $f(x) = \frac{19}{20}x^2 + \frac{1}{20}x$.

b.
$$f(0.2) = \frac{19}{20}(0.2)^2 + \frac{1}{20}(0.2) = 0.048$$

Por tanto, menos de 20% de las personas recibe 4.8% del ingreso total.

$$f(0.8) = \frac{19}{20}(0.8)^2 + \frac{1}{20}(0.8) = 0.648$$

Por tanto, menos de 80% de las personas recibe 64.8% del ingreso total. ■

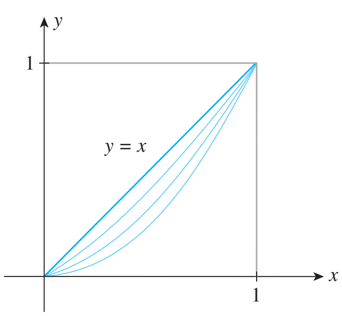


FIGURA 47
La curva de Lorentz más cercana es hacia la línea, la distribución del ingreso más equitativa.

Después, considere la curva de Lorentz descrita por la función $y = f(x) = x$. Ya que exactamente $100x\%$ del ingreso total es recibido por menos de 100% de los receptores, la línea $y = x$ se llama **línea de equidad absoluta**. Por ejemplo, 10% del ingreso total es recibido por menos de 10% de los receptores del ingreso, 20% del ingreso total es recibido por menos de 20% de los receptores, y continúa así. Ahora, es evidente que lo más cercano a una curva de Lorentz es esta línea, la distribución del ingreso más equitativa está entre los receptores. Pero la proximidad de una curva de Lorentz a la línea de equidad absoluta está reflejada por el área entre la curva de Lorentz y la línea $y = x$ (figura 47). Lo más cercano a la curva es la línea, la parte más pequeña del área rodeada.

Esta observación sugiere que se puede definir un número, llamado el coeficiente de inequidad de una curva de Lorentz, como la razón del área entre la línea de equidad absoluta y la curva Lorentz sobre el área bajo la línea de equidad absoluta. Ya que el área bajo la línea de equidad absoluta es $\frac{1}{2}$, observe que el coeficiente de inequidad está dado por la siguiente fórmula.

Coeficiente de inequidad de una curva de Lorentz

El coeficiente de inequidad, o **índice Gini**, de una curva de Lorentz es

$$L = 2\int_0^1 [x - f(x)]\,dx \tag{22}$$

El coeficiente de inequidad es un número entre 0 y 1. Por ejemplo, un coeficiente cero implica que la distribución del ingreso es perfectamente uniforme.

EJEMPLO DE APLICACIÓN 7 Distribuciones del ingreso En un estudio llevado a cabo por el Consejo de Desarrollo Económico de cierta ciudad con respecto a la distribución del ingreso de ciertos segmentos de la fuerza de trabajo de la misma, se determinó que las curvas de Lorentz para la distribución de los ingresos de médicos y actores de cine están descritos por las funciones

$$f(x) = \frac{14}{15}x^2 + \frac{1}{15}x \quad \text{y} \quad g(x)\,\frac{5}{8}x^4 + \frac{3}{8}x$$

respectivamente. Calcule el coeficiente de inequidad para cada curva de Lorentz. ¿Qué profesiones tuvieron una distribución más equitativa del ingreso?

Solución Los coeficientes de inequidad requeridos son, respectivamente,

$$\begin{aligned}
L_1 &= 2\int_0^1 \left[x - \left(\frac{14}{15}x^2 + \frac{1}{15}x\right)\right] dx = 2\int_0^1 \left(\frac{14}{15}x - \frac{14}{15}x^2\right) dx \\
&= \frac{28}{15}\int_0^1 (x - x^2)\,dx = \frac{28}{15}\left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3\right)\Bigg|_0^1 \\
&= \frac{14}{45} \approx 0.311 \\
L_2 &= 2\int_0^1 \left[x - \left(\frac{5}{8}x^4 + \frac{3}{8}x\right)\right] dx = 2\int_0^1 \left(\frac{5}{8}x - \frac{5}{8}x^4\right) dx \\
&= \frac{5}{4}\int_0^1 (x - x^4)\,dx = \frac{5}{4}\left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{5}x^5\right)\Bigg|_0^1 \\
&= \frac{15}{40} = 0.375
\end{aligned}$$

Concluimos que en esta ciudad los ingresos de los médicos son distribuidos más equitativamente que los ingresos de los actores de cine. ■

11.7 Ejercicios de autoevaluación

La función de la demanda de una bicicleta para ejercicio que se vende exclusivamente en televisión por cable es

$$p = d(x) = \sqrt{9 - 0.02x}$$

donde p es el precio unitario en cientos de dólares y x es la cantidad demandada por semana. La función de suministro correspondiente está dada por

$$p = s(x) = \sqrt{1 + 0.02x}$$

donde p tiene el mismo significado que el anterior y x es el número de bicicletas para ejercicio que el proveedor tendrá disponible al precio p. Determine los excedentes del consumidor y del productor si el precio unitario es sostenido al precio de equilibrio.

Las soluciones de los ejercicios de autoevaluación 11.7 se encuentran en la página 820.

11.7 Preguntas de concepto

1. **a.** Defina el excedente del consumidor. Proporcione una fórmula para calcularlo.
   b. Defina el excedente del productor. Proporcione una fórmula para calcularlo.
2. **a.** Defina el valor futuro del flujo del ingreso. Proporcione una fórmula para calcularlo.
   b. Defina el valor presente del flujo del ingreso. Proporcione una fórmula para calcularlo.
3. Defina el monto de una anualidad. Proporcione una fórmula para calcularlo.
4. Explique los siguientes términos: (a) la curva de Lorentz y (b) el coeficiente de inequidad de una curva de Lorentz.

11.7 Ejercicios

1. **Excedente del consumidor** La función de la demanda de ciertos cartuchos de repuesto para un purificador de agua está dada por
$$p = -0.01x^2 - 0.1x + 6$$
donde p es el precio unitario en dólares y x la cantidad demandada por semana, medida en miles de unidades. Determine el excedente del consumidor si el precio de mercado se fija en \$4 por cartucho.

2. **Excedente del consumidor** La función de la demanda para cierta marca de discos compactos (CD) está dada por
$$p = -0.01x^2 - 0.2x + 8$$
donde p es el precio unitario en dólares de la venta al mayoreo y x es la cantidad demandada por semana, medida en miles de unidades. Determine el excedente del consumidor si el precio de mercado de venta al mayoreo se fija en \$5 por disco.

3. **Excedente del consumidor** Se sabe que la cantidad demandada x de cierta secadora de cabello portátil en cientos de unidades por semana y el precio unitario correspondiente por la venta al mayoreo es
$$p = \sqrt{225 - 5x}$$
dólares. Determine el excedente del consumidor si el precio de mercado al mayoreo se fija en \$10 por unidad.

4. **Excedente del productor** El proveedor de las secadoras de cabello portátiles en el ejercicio 3 colocará x cientos de unidades de secadoras para el cabello disponibles en el mercado cuando el precio unitario de venta al mayoreo es
$$p = \sqrt{36 + 1.8x}$$
dólares. Determine el excedente del productor si el precio de mercado de venta al mayoreo se fija en \$9 por unidad.

5. **Excedente del productor** La función de oferta para CD del ejercicio 2 está dada por
$$p = 0.01x^2 + 0.1x + 3$$
donde p es el precio unitario de venta al mayoreo en dólares y x corresponde a la cantidad que estará disponible en el mercado por el proveedor, medida en miles de unidades. Determine el excedente del productor si el precio de mercado de venta al mayoreo se fija al precio de equilibrio.

6. **Excedentes del consumidor y del productor** La gerencia de Titan Tire Company ha determinado que la cantidad demandada x de sus neumáticos Super Titan por semana está relacionada con el precio unitario p por la relación
$$p = 144 - x^2$$
donde p se mide en dólares y x en miles de unidades. Titan colocará x unidades de neumáticos disponibles en el mercado si el precio unitario es
$$p = 48 + \frac{1}{2}x^2$$
dólares. Determine el excedente del consumidor y el excedente del productor cuando el precio unitario de mercado se fija al precio de equilibrio.

7. **Excedentes del consumidor y del productor** La cantidad demandada de x (en cientos de unidades) de las cámaras en miniatura Mikado por semana está relacionada con el precio unitario p (en dólares) por
$$p = -0.2x^2 + 80$$
y la cantidad x (en cientos de unidades) que el proveedor está dispuesto a tener disponibles en el mercado está relacionada con el precio unitario p (en dólares) por
$$p = 0.1x^2 + x + 40$$
Si el precio de mercado se fija al precio de equilibrio, determine los excedentes del consumidor y del productor.

8. Refiérase al ejemplo 3, página 813. Verifique que
$$\int_0^3 580{,}000e^{-0.1t}dt - 180{,}000 \approx 1{,}323{,}254$$

9. **Valor presente de una inversión** Suponga que una inversión se espera que genere ingresos a una tasa de
$$R(t) = 200{,}000$$

dólares por año durante los próximos 5 años. Determine el valor presente de esta inversión si la tasa de interés compuesto continuo prevaleciente es 8% anual.

10. Franquicias Camille compró una franquicia por 15 años para una tienda de computadoras que se espera genere ingresos a la tasa de

$$R(t) = 400{,}000$$

dólares por año. Si la tasa de interés compuesto continuo vigente es 10% anual, determine el valor presente de la franquicia.

11. Monto de una anualidad Determine el monto de una anualidad si se pagan $250 al mes por ella durante un periodo de 20 años, ganando una tasa de interés compuesto continuo de 8% anual.

12. Monto de una anualidad Determine el monto de una anualidad si se pagan $400 al mes por ella durante un periodo de 20 años, devengando intereses compuestos continuos a una tasa de 6% anual.

13. Monto de una anualidad Aiso deposita $150 por mes en una cuenta de ahorros que paga un interés compuesto continuo de 6% anual. Estime la cantidad que habrá en su cuenta después de 15 años.

14. Cuentas en custodia Los Armstrong desean establecer una cuenta en custodia para financiar la educación de sus hijos. Si depositan $200 mensuales durante 10 años en una cuenta de ahorros que paga 6% anual compuesto continuo, ¿cuánto tendrán en sus cuentas de ahorro al final de este periodo?

15. Cuentas de Retiro Individuales Refiérase al ejemplo 4, página 814. Suponga que Marcus realizó su pago al CRI el 1 de abril de 1992, y después cada año. Si el interés se paga a la misma tasa inicial ¿cuánto tuvo Marcus aproximadamente en su cuenta al inicio de 2008?

16. Valor presente de una anualidad Estime el valor presente de una anualidad si los pagos son de $800 al mes durante 12 años y la cuenta devenga intereses a una tasa de 5% anual compuesto continuo.

17. Valor presente de una anualidad Estime el valor presente de una anualidad si los pagos son $1,200 mensuales por 15 años y la cuenta devenga intereses a la tasa de 6% anual compuesto continuo.

18. Pagos de lotería Una comisión de la lotería estatal paga al ganador del "Millón de dólares" de la lotería 20 anualidades de $50,000 cada una. Si la tasa de interés vigente es 6% anual compuesto continuo, determine el valor presente del billete ganador.

19. Anualidad inversa para hipotecas Sinclair desea complementar sus ingresos por retiro de $300 por mes durante los próximos 10 años. Él planea obtener una anualidad inversa para la hipoteca Reverse Annuity Mortgages (RAM) de su casa para satisfacer esta necesidad. Estime la cantidad de la hipoteca que requerirá si la tasa de interés prevaleciente es 8% anual compuesto continuo.

20. Anualidad inversa para hipotecas Refiérase al ejercicio 19. Leah desea complementar sus ingresos por jubilación de $400 por mes para los próximos 15 años al obtener el RAM. Calcule el importe de la hipoteca que requerirá si la tasa de interés vigente es 6% anual compuesto continuo.

21. Curvas de Lorentz La distribución del ingreso de un determinado país es descrita por la función

$$f(x) = \frac{15}{16}x^2 + \frac{1}{16}x$$

a. Trace la curva de Lorentz para esta función.
b. Calcule $f(0.4)$ y $f(0.9)$ e interprete sus resultados.

22. Curvas de Lorentz En un estudio realizado por el Consejo de Desarrollo Económico de un país, se determinó que la curva de Lorentz para la distribución del ingreso de los docentes universitarios fue descrita por la función

$$f(x) = \frac{13}{14}x^2 + \frac{1}{14}x$$

y la de los abogados por la función

$$g(x) = \frac{9}{11}x^4 + \frac{2}{11}x$$

a. Calcule el coeficiente de desigualdad para cada curva de Lorentz.
b. ¿Qué profesión tiene una distribución más equitativa del ingreso?

23. Curva de Lorentz La distribución de ingresos de un determinado país se describe por la función

$$f(x) = \frac{14}{15}x^2 + \frac{1}{15}x$$

a. Trace la curva de Lorentz para esta función
b. Calcule $f(0.3)$ y $f(0.7)$.

24. Curvas de Lorentz En un estudio realizado por el Consejo de Desarrollo Económico de un país, se determinó que la curva de Lorentz para la distribución del ingreso de los corredores de bolsa fue descrita por la función

$$f(x) = \frac{11}{12}x^2 + \frac{1}{12}x$$

y la de profesores de escuelas secundarias por la función

$$g(x) = \frac{5}{6}x^2 + \frac{1}{6}x$$

a. Calcule el coeficiente de desigualdad para cada curva de Lorentz.
b. ¿Qué profesión tiene una distribución más equitativa del ingreso?

11.7 Soluciones de los ejercicios de autoevaluación

Determine el precio y la cantidad de equilibrio al resolver el sistema de ecuaciones

$$p = \sqrt{9 - 0.02x}$$
$$p = \sqrt{1 + 0.02x}$$

simultáneamente. Al sustituir la primera ecuación en la segunda, obtenemos

$$\sqrt{9 - 0.02x} = \sqrt{1 + 0.02x}$$

Al elevar al cuadrado ambos lados de la ecuación, esto nos lleva a

$$9 - 0.02x = 1 + 0.02x$$
$$x = 200$$

Sin embargo,

$$p = \sqrt{9 - 0.02(200)}$$
$$= \sqrt{5} \approx 2.24$$

El precio de equilibrio es \$224, y la cantidad de equilibrio 200. El excedente del consumidor está dado por

$$\begin{aligned}
CS &= \int_0^{200} \sqrt{9 - 0.02x}\,dx - (2.24)(200)\\
&= \int_0^{200} (9 - 0.02x)^{1/2}\,dx - 448\\
&= -\frac{1}{0.02}\left(\frac{2}{3}\right)(9 - 0.02x)^{3/2}\Big|_0^{200} - 448 \qquad \text{Integrar por sustitución.}\\
&= -\frac{1}{0.03}(5^{3/2} - 9^{3/2}) - 448\\
&\approx 79.32
\end{aligned}$$

o aproximadamente \$7,932.

Después, el excedente del productor está dado por

$$\begin{aligned}
PS &= (2.24)(200) - \int_0^{200} \sqrt{1 + 0.02x}\,dx\\
&= 448 - \int_0^{200} (1 + 0.02x)^{1/2}\,dx\\
&= 448 - \frac{1}{0.02}\left(\frac{2}{3}\right)(1 + 0.02x)^{3/2}\Big|_0^{200}\\
&= 448 - \frac{1}{0.03}(5^{3/2} - 1)\\
&\approx 108.66
\end{aligned}$$

o aproximadamente \$10,866.

USO DE LA TECNOLOGÍA

Aplicaciones a negocios y economía/ejercicios de tecnología

1. Resuelva el ejemplo 1, sección 11.7, usando la calculadora graficadora.
   Sugerencia: Utilice la operación de intersección para determinar la cantidad y el precio de equilibrio. Utilice la operación numérica integral para evaluar la integral definida.
2. Resuelva el ejercicio 7, sección 11.7, usando la calculadora graficadora.
   Sugerencia: Vea el ejercicio 1.
3. La función de la demanda para determinada marca de relojes para viaje con alarma está dada por

$$p = -0.01x^2 - 0.3x + 10$$

   donde p es el precio unitario de venta al detalle (o menudeo) en dólares y x es la cantidad demandada por mes, medida en miles de unidades. La función de oferta para esta marca de relojes está dada por

$$p = -0.01x^2 + 0.2x + 4$$

   donde p tiene el mismo significado que el anterior y x es la cantidad, en miles, que el proveedor tendrá disponible en el mercado por mes. Determine los excedentes del consumidor y del productor cuando el precio unitario de mercado se fije al precio de equilibrio.
4. La cantidad requerida de cierto organizador de discos compactos es x miles de unidades por semana, y que corresponde al precio unitario de venta al mayoreo

$$p = \sqrt{400 - 8x}$$

dólares. El proveedor de los organizadores colocará x miles de unidades disponibles en el mercado cuando el precio unitario de venta al mayoreo es

$$p = 0.02x^2 + 0.04x + 5$$

dólares. Determine los excedentes del consumidor y del productor cuando el precio unitario de mercado se fija al precio de equilibrio.

5. La inversión A se espera genere una utilidad a la tasa de

$$R_1(t) = 50{,}000 + 10{,}000\sqrt{t}$$

dólares por año por los próximos 5 años y la inversión B se espera que genere utilidad a una tasa de

$$R_2(t) = 50{,}000 + 6{,}000t$$

dólares por año en el mismo periodo. Si la tasa de interés prevaleciente para los 5 años siguientes es 10% anual, ¿cuál inversión generará una utilidad neta mayor al final de los 5 años?

6. La inversión A se espera que generará una utilidad a la tasa de

$$R_1(t) = 40{,}000 + 5{,}000t + 100t^2$$

dólares por año durante los próximos 10 años y la inversión B se espera que genere una utilidad a una tasa de

$$R_2(t) = 60{,}000 + 2{,}000t$$

dólares por año en el mismo periodo. Si la tasa de interés prevaleciente para los próximos 10 años es 8% anual, ¿cuál inversión generará una utilidad neta mayor al final de 10 años?

CAPÍTULO 11 Resumen de las fórmulas y términos principales

FÓRMULAS

1. Integral indefinida de una constante	$\int k\,du = ku + C$
2. Regla de potencia	$\int u^n\,du = \dfrac{u^{n+1}}{n+1} + C \qquad (n \neq -1)$
3. Regla de multiplicación de constantes	$\int k f(u)\,du = k\int f(u)\,du$ (k, una constante)
4. Regla de la suma	$\int [f(u) \pm g(u)]\,du = \int f(u)\,du \pm \int g(u)\,du$
5. Integral indefinida de una función exponencial	$\int e^u\,du = e^u + C$
6. Integral indefinida de $f(u) = \dfrac{1}{u}$	$\int \dfrac{du}{u} = \ln\lvert u\rvert + C$
7. Método de sustitución	$\int f'(g(x))g'(x)\,dx = \int f'(u)\,du$

8. Integral definida como límite de una suma	$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} S_n$, donde S_n es una suma de Riemann
9. El teorema fundamental del cálculo	$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a), F'(x) = f(x)$
10. Valor promedio de f sobre $[a, b]$	$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$
11. El área entre dos curvas	$\int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx, f(x) \geq g(x)$
12. Excedente del consumidor	$CS = \int_0^{\bar{x}} D(x)\,dx - \bar{p}\,\bar{x}$
13. Excedente del productor	$PS = \bar{p}\,\bar{x} - \int_0^{\bar{x}} S(x)\,dx$
14. Valor futuro de un flujo de ingresos	$FV = e^{rT}\int_0^T R(t)e^{-rt}\,dt$
15. Valor presente de un flujo de ingresos	$PV = \int_0^T R(t)e^{-rt}\,dt$
16. Monto de una anualidad	$A = \frac{mP}{r}(e^{rT} - 1)$
17. Valor presente de una anualidad	$PV = \frac{mP}{r}(1 - e^{-rT})$
18. Coeficiente de inequidad de una curva de Lorentz	$L = 2\int_0^1 [x - f(x)]\,dx$

TÉRMINOS

antiderivada (742)
antidiferenciación (744)
constante de integración (744)
curva de Lorentz (816)
ecuación diferencial (748)
integración (744)
integral definida (769)
integral indefinida (744)
integrando (744)
límite inferior de integración (769)
límite superior de integración (769)
línea de equidad absoluta (816)
problema del valor inicial (748)
suma de Riemann (769)

CAPÍTULO 11 Preguntas de revisión de conceptos

Llene los espacios en blanco.

1. **a.** Una función F es una antiderivada de f sobre un intervalo, si _____ para toda x en I.
   b. Si F es una antiderivada de f sobre el intervalo I, entonces cada antiderivada de f sobre I tiene la forma _____.
2. **a.** $\int cf(x)\,dx =$ _____
   b. $\int [f(x) \pm g(x)]\,dx =$ _____
3. **a.** Una ecuación diferencial es aquella que involucra la derivada o diferencial de un/una _____ función.
   b. Una solución de una ecuación diferencial sobre un intervalo I es cualquier _____ que satisface la ecuación diferencial.
4. Si $u = g(x)$, entonces $du =$ _____, y la sustitución transforma la integral $\int f(g(x))g'(x)\,dx$ dentro de la integral _____ que involucra solamente u.
5. **a.** Si f es continua y no negativa sobre un intervalo $[a, b]$ entonces el área de la región bajo la curva de f sobre $[a, b]$ está dada por _____.
   b. Si f es continua sobre el intervalo $[a, b]$, entonces $\int_a^b f(x)\,dx$ es igual al (a las) área(s) de las regiones que están sobre el eje x y delimitado por la gráfica de f sobre $[a, b]$ _____ el (las) área(s) de las regiones que permanecen bajo el eje x y la limitada por la gráfica de f sobre $[a, b]$.

6. **a.** El teorema fundamental del cálculo determina que si f es continua sobre $[a, b]$, entonces $\int_a^b f(x)\,dx =$ _____ donde F es una _____ de f.
   b. El cambio neto en una función f sobre un intervalo $[a, b]$ está dado por $f(b) - f(a) =$ _____, dado que f' es continua sobre $[a, b]$.

7. **a.** Si f es continua sobre $[a, b]$, entonces el valor promedio de f sobre $[a, b]$ es el número _____.
   b. Si f es una función continua y no negativa sobre $[a, b]$, entonces el valor promedio de f sobre $[a, b]$ puede imaginarse como la _____ del rectángulo con la base sobre el intervalo $[a, b]$ y teniendo la misma _____ como la región bajo la curva de f sobre $[a, b]$.

8. Si f y g son continuas sobre $[a, b]$ y $f(x) \geq g(x)$ para toda x en $[a, b]$, entonces el área de la región entre las gráficas de f y g y las líneas verticales $x = a$ y $x = b$ es $A =$ _____.

9. **a.** El excedente del consumidor está dado por $CS =$ _____.
   b. El excedente del productor está dado por $PS =$ _____.

10. **a.** El valor acumulado después de T años de un flujo de ingresos $R(t)$ dólares por día, ganando a una tasa r de interés compuesto continuo anual, está dado por $A =$ _____.
    b. El valor presente del flujo de un ingreso está dado por $VP =$ _____.

11. El monto de una anualidad es $A =$ _____.

12. El coeficiente de inequidad de una curva de Lorentz es $L =$ _____.

CAPÍTULO 11 Ejercicios de revisión

En el ejercicio 1-20, determine cada integral indefinida.

1. $\int (x^3 + 2x^2 - x)\,dx$
2. $\int \left(\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 8\right) dx$
3. $\int \left(x^4 - 2x^3 + \frac{1}{x^2}\right) dx$
4. $\int (x^{1/3} - \sqrt{x} + 4)\,dx$
5. $\int x(2x^2 + x^{1/2})\,dx$
6. $\int (x^2 + 1)(\sqrt{x} - 1)\,dx$
7. $\int \left(x^2 - x + \frac{2}{x} + 5\right) dx$
8. $\int \sqrt{2x + 1}\,dx$
9. $\int (3x - 1)(3x^2 - 2x + 1)^{1/3}\,dx$
10. $\int x^2(x^3 + 2)^{10}\,dx$
11. $\int \frac{x - 1}{x^2 - 2x + 5}\,dx$
12. $\int 2e^{-2x}\,dx$
13. $\int \left(x + \frac{1}{2}\right)e^{x^2 + x + 1}\,dx$
14. $\int \frac{e^{-x} - 1}{(e^{-x} + x)^2}\,dx$
15. $\int \frac{(\ln x)^5}{x}\,dx$
16. $\int \frac{\ln x^2}{x}\,dx$
17. $\int x^3(x^2 + 1)^{10}\,dx$
18. $\int x\sqrt{x + 1}\,dx$
19. $\int \frac{x}{\sqrt{x - 2}}\,dx$
20. $\int \frac{3x}{\sqrt{x + 1}}\,dx$

En los ejercicios 21-32, evalúe cada integral definida.

21. $\int_0^1 (2x^3 - 3x^2 + 1)\,dx$
22. $\int_0^2 (4x^3 - 9x^2 + 2x - 1)\,dx$
23. $\int_1^4 (\sqrt{x} + x^{-3/2})\,dx$
24. $\int_0^1 20x(2x^2 + 1)^4\,dx$
25. $\int_{-1}^0 12(x^2 - 2x)(x^3 - 3x^2 + 1)^3\,dx$
26. $\int_4^7 x\sqrt{x - 3}\,dx$
27. $\int_0^2 \frac{x}{x^2 + 1}\,dx$
28. $\int_0^1 \frac{dx}{(5 - 2x)^2}$
29. $\int_0^2 \frac{4x}{\sqrt{1 + 2x^2}}\,dx$
30. $\int_0^2 xe^{(-1/2)x^2}\,dx$
31. $\int_{-1}^0 \frac{e^{-x}}{(1 + e^{-x})^2}\,dx$
32. $\int_1^e \frac{\ln x}{x}\,dx$

En los ejercicios 33-36, determine la función f dado que la pendiente de la recta tangente hasta la gráfica en cualquier punto $(x, f(x))$ es $f'(x)$ y que la gráfica de f pase a por los puntos dados.

33. $f'(x) = 3x^2 - 4x + 1$; $(1, 1)$
34. $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$; $(0, 1)$
35. $f'(x) = 1 - e^{-x}$; $(0, 2)$
36. $f'(x) = \frac{\ln x}{x}$; $(1, -2)$

37. Sea $f(x) = -2x^2 + 1$ calcule la suma Riemann de f sobre el intervalo $[1, 2]$ y divida los intervalos en cinco subintervalos con la misma longitud ($n = 5$), donde los puntos p_i $(1 \leq i \leq 5)$ se toman como los extremos *derechos* en los subintervalos respectivos.

38. Funciones de costo marginal La gerencia de National Electric ha determinado que la función diaria del costo marginal asociada con la fabricación de sus cafeteras de goteo automático está dada por

$$C'(x) = 0.00003x^2 - 0.03x + 20$$

donde $C'(x)$ se mide en dólares por unidad y x denota el número de unidades fabricadas. La gerencia también ha determinado que el costo fijo diario derivado de la fabricación de estas cafeteras es \$500. ¿Cuál es el costo de National en la fabricación de las primeras 400 cafeteras por día?

39. Funciones del ingreso marginal Refiérase al ejercicio 38. La gerencia también ha determinado que la función diaria del ingreso marginal asociada con la producción y venta de sus cafeteras está dada por

$$R'(x) = -0.03x + 60$$

donde x denota el número de unidades fabricadas y vendidas y $R'(x)$ se mide en dólares por unidad.

a. Determine la función de ingreso $R(x)$ que se asocia con la producción y venta de estas cafeteras.

b. ¿Cuál es la ecuación de demanda que relaciona el precio unitario de venta al mayoreo con la cantidad demandada de cafeteras?

40. Valor de reventa de una computadora Franklin National Life Insurance adquirió nuevas computadoras por \$200,000. Si la tasa de cambio promedio del valor de reventa de las computadoras está dada por la función

$$V'(t) = 3{,}800(t - 10)$$

donde t es la cantidad de tiempo desde la fecha de la compra y $V'(t)$ es medida en dólares por año, determine una expresión $V(t)$ que dé el valor de reventa de las computadoras después de t años. ¿Cuánto costarían las computadoras después de 6 años?

41. Medición de la temperatura La temperatura en un día determinado, medida en el aeropuerto de una ciudad cambia a una tasa de

$$T'(t) = 0.15t^2 - 3.6t + 14.4 \qquad (0 \le t \le 4)$$

°F/hora, donde t se mide en horas, con $t = 0$ correspondiente a las 6 a.m. La temperatura a esta hora fue 24°F.

a. Determine una expresión que dé la temperatura T en el aeropuerto a cualquier hora entre 6 y 10 a.m.

b. ¿Cuál es la temperatura a las 10 a.m.?

42. Ventas de DVD El número total de DVD vendidos a los distribuidores en Estados Unidos para el alquiler y venta desde 1999 hasta 2003 creció a un ritmo de aproximadamente

$$R(t) = -0.03t^2 + 0.218t - 0.032 \qquad (0 \le t \le 4)$$

miles de millones de unidades por año, donde t se mide en años, donde $t = 0$ corresponde a 1999. El número total de DVD vendidos a partir de 1999 fue 0.1 miles de millones de unidades.

a. Determine una expresión que dé el número total de DVD vendidos por t años $(0 \le t \le 4)$.

b. ¿Cuántos DVD se vendieron en 2003?

Fuente: Adams Media

43. Contaminación del aire En un día promedio durante el verano, el nivel de monóxido de carbono (CO) en el aire de una ciudad es 2 partes por millón (ppm). Un estudio de la agencia de protección ambiental predice que, a menos que se adopten medidas más severas para proteger la atmósfera de la ciudad, la actual concentración de CO en el aire aumentará a una tasa de

$$0.003t^2 + 0.06t + 0.1$$

ppm por año, t años a partir de ahora. Si no se hacen esfuerzos para controlar la contaminación, ¿cuál será la concentración promedio de CO en un día de verano en 5 años a partir de ahora?

44. Venta de televisores de proyección El departamento de publicidad de Vista Vision pronostica que las ventas de su nueva línea de sistemas de televisión de proyección crecerá a la tasa de

$$3{,}000 - 2{,}000e^{-0.04t} \qquad (0 \le t \le 24)$$

unidades por mes, una vez introducidas en el mercado. Determine una expresión que dé el número total proyectado del sistema de televisión que Vista espera vender en t meses desde el momento en que se coloquen en el mercado. ¿Cuántas unidades de sistemas de televisión espera vender Vista durante el primer año?

45. Tendencias de viaje Debido a los costos crecientes de los combustibles, la gerencia de la Autoridad de Tránsito de la Ciudad estima que el número de viajeros que utiliza el sistema de metro se incrementará a la tasa de

$$3{,}000(1 + 0.4t)^{-1/2} \qquad (0 \le t \le 36)$$

por mes, t meses a partir de hoy. Si 100,000 viajeros utilizan actualmente el sistema, determine una expresión que indique el número total de viajeros que usará el metro en t meses a partir de hoy. ¿Cuántos viajeros usarán el metro dentro de 6 meses a partir de hoy?

46. Ventas de altavoces Las ventas de altavoces modelo F de Acrosonic han crecido a una tasa de

$$f'(t) = 2{,}000(3 - 2e^{-t})$$

unidades por año, donde t representa el número de años en que estos sistemas de altavoces han estado en el mercado. Determine el número de sistemas de altavoces que se vendieron en los primeros 5 años después de que aparecieran en el mercado.

47. Oferta de botas para mujer La tasa de cambio del precio unitario p (en dólares) de las botas Apex para mujer está dado por

$$p'(x) = \frac{240}{(5 - x)^2}$$

donde x es el número de unidades en cientos de pares que el proveedor pondrá a disposición en el mercado por día cuando el precio unitario es \$$p$/par. Determine la ecuación de oferta para estas botas, si la cantidad que el proveedor está dispuesto a poner a disposición es 200 pares por día $(x = 2)$ cuando el precio unitario es \$50 por par.

48. **Funciones de costo marginal** La gerencia de una división de Ditton Industries ha determinado que la función del costo marginal diario está asociada con la producción de sus rosetas de maíz inflado por medio de aire caliente está dada por

$$C'(x) = 0.00003x^2 - 0.03x + 10$$

donde $C'(x)$ se mide en dólares por unidad y x representa el número de unidades producidas. La gerencia también ha determinado que el costo fijo diario que origina la producción de estas rosetas de maíz inflado es \$600. Determine el costo de Ditton al producir las primeras 500 rosetas de maíz inflado.

49. **Censo de Estados Unidos** El número de estadounidenses entre 45-54 años (que se situó en 25 millones a principios de 1990) creció a una tasa de

$$R(t) = 0.00933t^3 + 0.019t^2 - 0.10833t + 1.3467$$

millones de personas por año, t años desde el inicio de 1990. ¿Cuántos estadounidenses entre 45 y 54 se agregaron a la población entre 1990 y el 2000?

Fuente: U.S. Census Bureau

50. **Ventas al detalle (o al menudeo) en línea** Desde el inicio de la Web, el comercio en línea ha tenido un crecimiento fenomenal. Pero el crecimiento, liderado por sectores tan importantes como libros, billetes y material de oficina, se prevé que tenga una desaceleración en los próximos años. El crecimiento proyectado de las ventas al detalle en línea está dado por

$$R(t) = 15.82e^{-0.176t} \qquad (0 \leq t \leq 4)$$

donde t se mide en años donde $t = 0$ corresponde a 2007 y $R(t)$ se mide en miles de millones de dólares por año. Las ventas al detalle en línea en 2007 fueron \$116 mil millones.

a. Determine una expresión para las ventas al detalle en línea en el año t.

b. Si la proyección es verdad, ¿cuál será la venta al detalle en línea en 2011?

Fuente: Jupiter Research

51. Determine el área bajo la curva de la región $y = 3x^2 + 2x + 1$ desde $x = -1$ hasta $x = 2$.

52. Determine el área bajo la curva de la región $y = e^{2x}$ desde $x = 0$ hasta $x = 2$.

53. Determine el área de la región limitada por la gráfica de la función $y = 1/x^2$, el eje x y las líneas $x = 1$ y $x = 3$.

54. Determine el área de la región limitada por la curva $y = -x^2 - x + 2$ y el eje x.

55. Determine el área de la región limitada por las gráficas de las funciones $f(x) = e^x$ y $g(x) = x$ y por las líneas $x = 0$ y $x = 2$.

56. Determine el área de la región que está completamente encerrada por las gráficas de $f(x) = x^4$ y $g(x) = x$.

57. Determine el área de la región entre la curva $y = x(x - 1)(x - 2)$ y el eje x.

58. **Producción de petróleo** Con base en las técnicas de producción actual, la tasa de producción de un yacimiento de petróleo determinado en t años y a partir de hoy se estima que es

$$R_1(t) = 100e^{0.05t}$$

miles de barriles por año. Con base en una nueva técnica de producción, sin embargo, se estima que la tasa de producción de petróleo de este pozo petrolero en t años a partir de hoy será

$$R_2(t) = 100e^{0.08t}$$

miles de barriles por año. Determine cuánto petróleo adicional se producirá en los próximos 10 años si la nueva técnica es adoptada.

59. Determine el valor promedio de la función

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 16}}$$

sobre el intervalo [0, 3].

60. **Temperatura promedio** La temperatura (en °F) en Boston durante un periodo de 12 horas en cierto día de diciembre está dada por

$$T = -0.05t^3 + 0.4t^2 + 3.8t + 5.6 \qquad (0 \leq t \leq 12)$$

donde t se mide en horas, donde $t = 0$ corresponde a las 6 a.m. Determine la temperatura promedio de ese día durante el periodo de 12 horas desde las 6 a.m. hasta las 6 p.m.

61. **Velocidad promedio de un camión** Un camión que viaja por una carretera recta tiene una velocidad (en metros por segundo) en el tiempo t (en segundos) dada por

$$v(t) = \frac{1}{12}t^2 + 2t + 44 \qquad (0 \leq t \leq 5)$$

¿Cuál es la velocidad promedio del camión durante el intervalo de tiempo entre $t = 0$ hasta $t = 5$?

62. **Membresía en uniones de crédito** Las uniones de crédito en Massachusetts han crecido notablemente en los años recientes. Su estatus de exención de impuestos les permite ofrecer depósitos y créditos que a menudo son más favorables que los ofrecidos por los bancos. La membresía en las cooperativas de crédito de Massachusetts creció a una tasa de

$$R(t) = -0.0039t^2 + 0.0374t + 0.0046 \qquad (0 \leq t \leq 9)$$

millones de miembros por año entre 1994 ($t = 0$) y 2003 ($t = 9$). Determine la tasa de crecimiento promedio de membresías de las uniones de crédito en Massachusetts en el periodo en cuestión.

Fuente: Massachusetts Credit Union League

63. **Demanda de cintas digitales de video** La función de demanda por una marca de cintas vírgenes para cámaras digitales está dada por

$$p = -0.01x^2 - 0.2x + 23$$

donde p es el precio unitario al mayoreo en dólares y x la cantidad semanal demandada, medida en miles de unidades. Determine los excedentes de los clientes si el precio unitario al mayoreo es \$8 por cinta.

64. **Excedentes del consumidor y del productor** La cantidad demandada de x (en cientos de unidades) de una tienda de campaña deportiva de 5×7, por semana, está relacionada con el precio unitario p (en dólares) por la relación

$$p = -0.1x^2 - x + 40$$

La cantidad x (en cientos de unidades) que el proveedor está dispuesto a poner disponible en el mercado se relaciona con el precio unitario por la relación

$$p = 0.1x^2 + 2x + 20$$

Si el precio de mercado se fija al precio de equilibrio, determine los excedentes del consumidor y del productor.

65. **Cuenta de ahorro para el retiro** Chi-tai planea depositar \$4,000 por año en su Cuenta de Retiro Keogh. Si el interés está a una tasa de 8% anual compuesto continuo, ¿cuánto tendrá en su cuenta de retiro después de 20 años?

66. **Contratos a plazo** Glenda vendió su casa en virtud de un contrato a plazo mediante el cual el comprador le dio un pago inicial de \$20,000 y acordó realizar pagos mensuales de \$925 mensuales a 30 años. Si la tasa de interés vigente es 6% anual compuesto continuo, determine el valor presente del precio de compra de la casa.

67. **Valor presente de una franquicia** Alicia compró una franquicia por 10 años, de un spa para la salud que se espera genere ingresos a una tasa de

$$P(t) = 80{,}000$$

dólares por año. Si la tasa de interés vigente es 10% anual compuesto continuo, determine el valor presente de la franquicia.

68. **Distribución del ingreso de un país** La distribución de ingresos de un determinado país está descrita por la función

$$f(x) = \frac{17}{18}x^2 + \frac{1}{18}x$$

a. Trace la curva de Lorentz para esta función.
b. Calcule $f(0.3)$ y $f(0.6)$ e interprete sus resultados.
c. Calcule el coeficiente de desigualdad de esta curva de Lorentz.

69. **Crecimiento de la población** La población de una determinada ciudad de Sunbelt es actualmente 80,000 y se espera que crezca de manera exponencial en los próximos 5 años a una tasa constante de 0.05. Si la predicción es cierta, ¿cuál será la población promedio de la ciudad durante los próximos 5 años?

CAPÍTULO 11 Antes de continuar . . .

1. Determine $\displaystyle\int \left(2x^3 + \sqrt{x} + \frac{2}{x} - \frac{2}{\sqrt{x}}\right) dx$.

2. Determine f si $f'(x) = e^x + x$ y $f(0) = 2$.

3. Determine $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}\, dx$.

4. Evalúe $\displaystyle\int_0^1 x\sqrt{2 - x^2}\, dx$.

5. Determine el área de la región rodeada completamente por las gráficas $y = x^2 - 1$ y $y = 1 - x$.

CÁLCULO DE VARIAS VARIABLES

12

HASTA AHORA hemos tratado con funciones que involucran una variable. Sin embargo, diversas situaciones requieren funciones de dos o más variables. Por ejemplo, el Índice de Precios al Consumidor (IPC), compilado por la Oficina de Estadísticas Laborales de Estados Unidos, depende del precio de más de 95,000 artículos de consumo. Para estudiar su relación debemos conocer la función de varias variables, primer tema en este capítulo. Después, al generalizar el concepto derivado de la función de una variable, se estudian las *derivadas parciales* de una función de dos o más variables. Al utilizar dichas derivadas, estudiamos la tasa de cambio de una función respecto a una variable, mientras que todas las demás permanecen constantes, entonces aprenderemos cómo determinar el valor extremo de una función de varias variables por ejemplo, cómo un fabricante puede maximizar sus utilidades al fabricar una cantidad óptima de sus productos.

¿Cuántos sistemas de altavoces debería fabricar la empresa Aereosonic para maximizar sus utilidades? En el ejemplo 4, página 855, veremos cómo utilizar las técnicas de cálculo para ayudar a responder esta pregunta.

12.1 Funciones de varias variables

Hasta ahora nuestro estudio del cálculo se ha limitado a funciones de una variable. Sin embargo, en muchas situaciones prácticas, la formulación del resultado de un problema dentro del modelo matemático incluye una función de dos o más variables. Por ejemplo, suponga que Ace Novelty determina que las utilidades son \$6, \$5 y \$4 para tres tipos de souvenirs que fabrica; x, y y z denotan el número de souvenirs tipo A, tipo B y tipo C que se han fabricado; entonces la utilidad de la empresa está dada por

$$P = 6x + 5y + 4z$$

y P es una función de tres variables, x, y y z.

Funciones de dos variables

Aunque este capítulo trata del valor real de las funciones de varias variables, la mayoría de nuestras definiciones y resultados se establece en los términos de una función de dos variables. Una de las razones para adoptar este enfoque, como pronto verá, es que existe una interpretación geométrica para este caso en especial, que sirve como un apoyo visual importante. Entonces la experiencia obtenida del estudio del caso de dos variables puede ayudarnos a comprender los conceptos y resultados relacionados con la mayoría de los casos que, en general, es sólo una simple extensión del caso de dimensión menor.

Una función de dos variables

El valor real de una **función de dos variables** f consta de

1. El conjunto A de números reales pares ordenados (x, y) llamado **dominio** de la función.
2. Una regla asociada con cada uno de los pares ordenados dentro del dominio de f está indicada por un número y sólo un número real $z = f(x, y)$.

Las variables x y y se llaman **variables independientes**, y la variable z, que es dependiente de los valores de x y y, se le da el nombre de **variable dependiente**.

Como en el caso de una función variable con valor real, al número $z = f(x, y)$ se le llama **valor de *f*** en el punto (x, y). Y, a menos que se especifique, el dominio de la función f será tomado para ser el conjunto más grande posible por el cual la regla que define a f será significativa.

EJEMPLO 1 Sea f la función definida por

$$f(x, y) = x + xy + y^2 + 2$$

Calcule $f(0, 0)$, $f(1, 2)$ y $f(2, 1)$.

Solución Tenemos

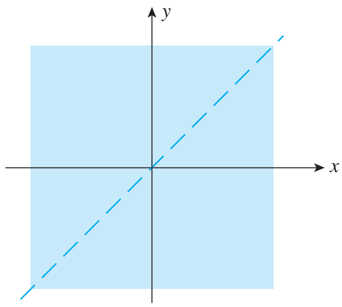
$$f(0, 0) = 0 + (0)(0) + 0^2 + 2 = 2$$
$$f(1, 2) = 1 + (1)(2) + 2^2 + 2 = 9$$
$$f(2, 1) = 2 + (2)(1) + 1^2 + 2 = 7$$

■

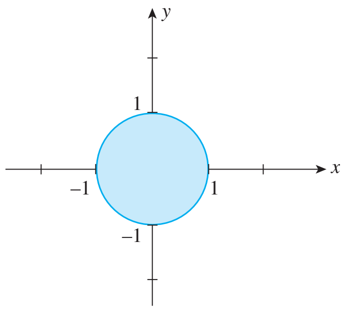
El dominio de una función de dos variables $f(x, y)$ es el conjunto de pares ordenados de números reales que pueden, por tanto, ser vistos como un subconjunto del plano xy.

EJEMPLO 2 Encuentre el dominio de cada una de las siguientes funciones:

a. $f(x, y) = x^2 + y^2$ **b.** $g(x, y) = \dfrac{2}{x - y}$ **c.** $h(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$



(a) Dominio de g



(b) Dominio de h

FIGURA **1**

Solución

a. $f(x, y)$ está definida para todos los valores reales de x y y, así que el dominio de la función f es el conjunto de todos los puntos (x, y) en el plano xy.

b. $g(x, y)$ está definida para toda $x \neq y$, así que el dominio de la función g es el conjunto de todos los puntos en el plano xy, excepto aquéllos que permanecen debajo de la recta $y = x$ (figura 1a).

c. Necesitamos que $1 - x^2 - y^2 \geq 0$ o $x^2 + y^2 \leq 1$, el cual es sólo el conjunto de todos los puntos (x, y) que permanecen por debajo de y dentro del círculo de radio 1 con centro en el origen (figura 1b).

EJEMPLO APLICADO 3 Funciones de ingresos Acrosonic fabrica un sistema de estantes con altavoces que pueden comprarse completamente ensamblados o en kit. Las ecuaciones solicitadas que relacionan la unidad de precios, p y q, con las cantidades solicitadas semanalmente, x y y, de las versiones ensambladas y en kit del sistema de altavoces están dadas por

$$p = 300 - \frac{1}{4}x - \frac{1}{8}y \quad \text{y} \quad q = 240 - \frac{1}{8}x - \frac{3}{8}y$$

a. ¿Cuál es la función del ingreso total semanal $R(x, y)$?
b. ¿Cuál es el dominio de la función R?

Solución

a. El ingreso semanal realizable de la venta de x unidades de sistemas con altavoces ensamblados, en p dólares por unidad, está dada por xp dólares. De manera similar, el ingreso semanal realizable de la venta de y unidades de los kits en q dólares por unidad está dada por yq dólares. Por tanto, la función para los ingresos semanales R está dada por

$$\begin{aligned} R(x, y) &= xp + yq \\ &= x\left(300 - \frac{1}{4}x - \frac{1}{8}y\right) + y\left(240 - \frac{1}{8}x - \frac{3}{8}y\right) \\ &= -\frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{8}y^2 - \frac{1}{4}xy + 300x + 240y \end{aligned}$$

(x^2) Vea la página 10.

b. Para encontrar el dominio de la función R, observemos que las cantidades x, y, p y q deberán ser no negativas. Esta observación nos lleva al siguiente sistema lineal de desigualdades:

$$\begin{aligned} 300 - \frac{1}{4}x - \frac{1}{8}y &\geq 0 \\ 240 - \frac{1}{8}x - \frac{3}{8}y &\geq 0 \\ x &\geq 0 \\ y &\geq 0 \end{aligned}$$

El dominio de la función R está trazado en la figura 2.

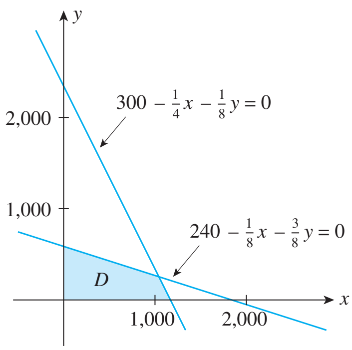


FIGURA **2**
El dominio de $R(x, y)$

Explore y analice

Suponga que la utilidad total de una empresa que fabrica dos productos está dada por $P(x, y)$, donde x denota el número de unidades del primer producto fabricado y vendido, y denota el número del segundo producto fabricado y vendido. Establecemos $x = a$, donde a es un número positivo, así que (a, y) está en el dominio de P. Describa y proporcione una interpretación económica de la función $f(y) = P(a, y)$. Después, establezca $y = b$, donde b es un número positivo, así que (x, b) está en el dominio de P. Describa y proporcione una interpretación económica de la función $g(x) = P(x, b)$.

EJEMPLO APLICADO 4 Pagos de hipoteca de vivienda El pago mensual que amortiza un préstamo de A dólares en t en años, cuando la tasa de interés anual es r, está dado por

$$P = f(A, r, t) = \frac{Ar}{12\left[1 - \left(1 + \frac{r}{12}\right)^{-12t}\right]}$$

Determine el pago mensual de una hipoteca de \$270,000 para ser amortizada durante 30 años cuando la tasa de interés anual es de 8%, compuesta mensualmente.

Solución Siendo $A = 270{,}000$, $r = 0.08$ y $t = 30$, encontramos que el pago mensual requerido será

$$\begin{aligned} P = f(270{,}000, 0.08, 30) &= \frac{270{,}000(0.08)}{12\left[1 - \left(1 + \frac{0.08}{12}\right)^{-360}\right]} \\ &\approx 1{,}981.16 \end{aligned}$$

o aproximadamente \$1,981.16. ■

Gráficas de funciones de dos variables

Para graficar una función de dos variables, necesitamos un sistema de coordenadas tridimensionales. Éste se construye al añadir un tercer eje al plano del sistema cartesiano de coordenadas, de tal forma que los tres ejes resultantes son mutuamente perpendiculares y se intersectan en O. Observe que, por la construcción, los ceros de los tres números de la escala coinciden en el origen del **sistema cartesiano de coordenadas tridimensionales** (figura 3).

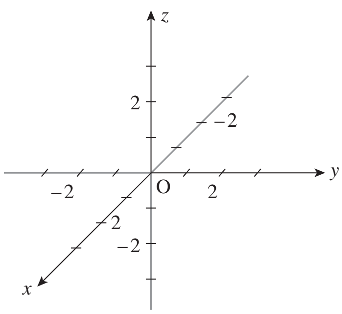
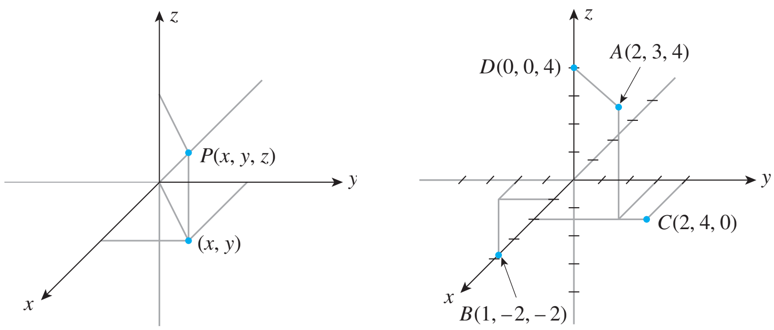


FIGURA 3
El sistema cartesiano de coordenadas tridimensionales

Un punto en el espacio tridimensional ahora puede representarse únicamente en este sistema de coordenadas por un **triple ordenado** de números (x, y, z) y, a la inversa, cada número real de orden triple (x, y, z) representa un punto en el espacio tridimensional (figura 4a). Por ejemplo, los puntos $A(2, 3, 4)$, $B(1, -2, -2)$, $C(2, 4, 0)$ y $D(0, 0, 4)$ están representados en la figura 4b.



(a) Un punto en el espacio tridimensional

(b) Algunos puntos de muestra en el espacio tridimensional

FIGURA 4

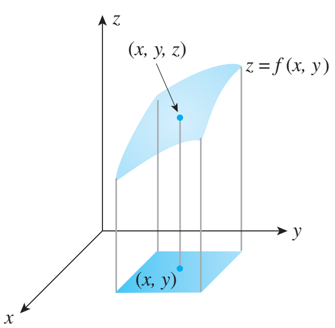
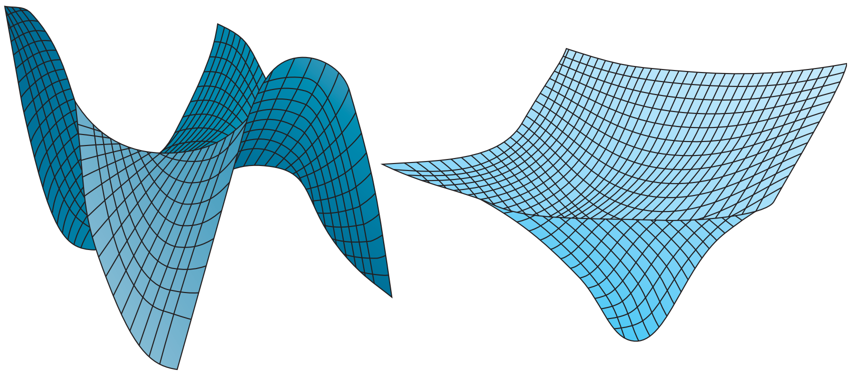


FIGURA 5
La gráfica de una función en el espacio tridimensional

Ahora, si $f(x, y)$ es una función de dos variables x y y, el dominio de f es un subconjunto de un plano xy. Sea $z = f(x, y)$ de manera que existe uno y sólo un punto $(x, y, z) \equiv (x, y, f(x, y))$ asociado con cada punto (x, y) en el dominio de f. La totalidad de estos puntos conforman la **gráfica** de la función f y es, con excepción de ciertos casos, una superficie en el espacio tridimensional (figura 5).

Al interpretar la gráfica de una función $f(x, y)$, se piensa a menudo en el valor $z = f(x, y)$ de la función en el punto (x, y) como la "altura" del punto (x, y, z) sobre la gráfica de f. Si $f(x, y) > 0$, entonces el punto (x, y, z) es $f(x, y)$ unidades sobre el plano xy; si $f(x, y) < 0$, entonces el punto (x, y, z) es $|f(x, y)|$ unidades debajo del plano de xy.

En general es muy difícil trazar una gráfica de una función de dos variables. Pero se han desarrollado técnicas por computadora que permiten generarlas con un mínimo de esfuerzo. La figura 6 muestra la gráfica de dos funciones generadas por computadora.



(a) $f(x, y) = x^3 - 3y^2x$ **(b)** $f(x, y) = \ln(x^2 + 2y^2 + 1)$

FIGURA **6**
Gráficas por computadora de funciones de dos variables.

Curvas de nivel

Como se mencionó, a menudo es muy difícil trazar la gráfica de una función de dos variables y no desarrollaremos un procedimiento sistemático para el trazado. En lugar de eso describimos un método que se utiliza en la construcción de mapas topográficos. Este método es relativamente sencillo de aplicar y conlleva información suficiente que permite adquirir una idea de la gráfica de la función.

Suponga que $f(x, y)$ es una función de dos variables x y y, con una gráfica como la que se muestra en la figura 7. Si c es algún valor de la función f, entonces la ecuación $f(x, y) = c$ describe una curva sobre el plano $z = c$ llamada el **trazo** de la gráfica de f en el plano $z = c$. Si este trazo se proyecta dentro del plano xy, a la curva resultante en la gráfica de xy se le llama **curva de nivel**. Al dibujar la curva de nivel correspondiente a varios valores permitidos de c, obtenemos un **mapa del contorno**. Observe que, por la construcción, cada punto sobre una curva de nivel particular corresponde a un punto sobre la superficie $z = f(x, y)$ que está a cierta distancia fija en el plano xy. Así, al elevar o bajar el nivel de las curvas que forman el mapa del contorno en nuestra mente, es posible obtener una idea de la forma general de la superficie representada por la función f.

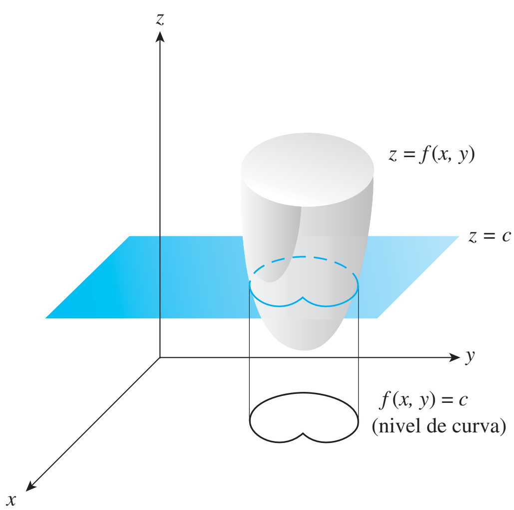


FIGURA **7**
La gráfica de la función $z = f(x, y)$ y su intersección con el plano $z = c$.

La figura 8a muestra una parte de una montaña con un pico; la figura 8b está asociada con el mapa del contorno.

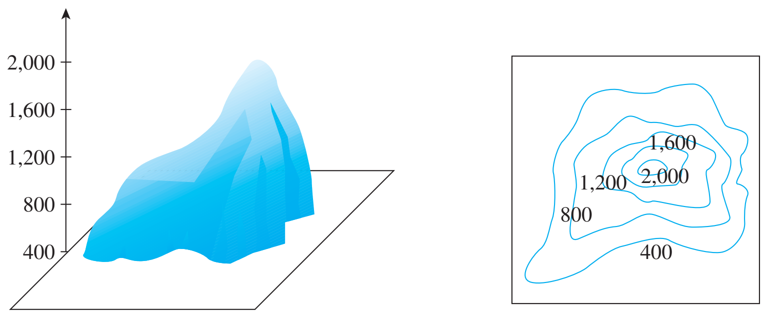


FIGURA **8** **(a)** Un pico de una montaña **(b)** El mapa del contorno del pico de la montaña

EJEMPLO 5 Trace el mapa del contorno para la función $f(x, y) = x^2 + y^2$.

Solución Las curvas de nivel son las gráficas de la ecuación $x^2 + y^2 = c$ para los números no negativos c. Tomando en cuenta que $c = 0, 1, 4, 9$ y 16, por ejemplo, obtenemos

$$
\begin{aligned}
c &= \ \ 0: x^2 + y^2 = 0 \\
c &= \ \ 1: x^2 + y^2 = 1 \\
c &= \ \ 4: x^2 + y^2 = 4 = 2^2 \\
c &= \ \ 9: x^2 + y^2 = 9 = 3^2 \\
c &= 16: x^2 + y^2 = 16 = 4^2
\end{aligned}
$$

El quinto nivel de las curvas son círculos concéntricos con el centro en el origen y un radio dado por $r = 0, 1, 2, 3$ y 4, respectivamente (figura 9a). El trazo de la gráfica de $f(x, y) = x^2 + y^2$ está incluido para su referencia en la figura 9b.

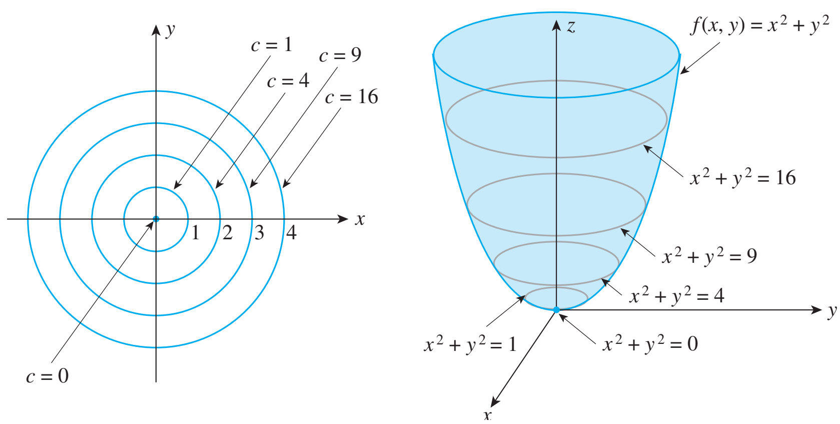


FIGURA **9** **(a)** Curvas de nivel de $f(x, y) = x^2 + y^2$ **(b)** La gráfica de $f(x, y) = x^2 + y^2$ ■

EJEMPLO 6 Trace las curvas de nivel de la función $f(x, y) = 2x^2 - y$ correspondiente a $z = -2, -1, 0, 1$ y 2.

Solución Las curvas de nivel son las gráficas de la ecuación $2x^2 - y = k$ o $y = 2x^2 - k$ para $k = -2, -1, 0, 1$ y 2. Las curvas de nivel requeridas se muestran en la figura 10. ■

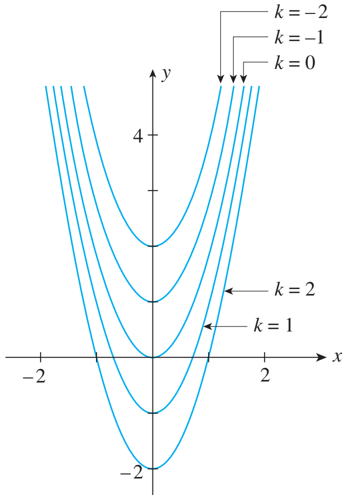


FIGURA **10**
Curvas de nivel para $f(x, y) = 2x^2 - y$.

Las curvas de nivel de las funciones de dos variables se encuentran en muchas de las aplicaciones prácticas. Por ejemplo, si $f(x, y)$ denota la temperatura de una localidad dentro de la superficie continental de Estados Unidos con longitud x y latitud y a cierta hora del día, entonces la temperatura en el punto (x, y) está dada por la "altura" de la superficie, representada por $z = f(x, y)$. En este contexto, el nivel de la curva $f(x, y) = k$ es una curva superpuesta en el mapa de Estados Unidos, uniendo los puntos que tienen la misma temperatura en un tiempo dado (figura 11). A estos niveles de la curva se les llama **isotermas**.

De igual forma, si $f(x, y)$ proporciona la presión barométrica en el lugar (x, y), entonces el nivel de las curvas de la función f son llamados **isobarras**, que son las líneas que unen los puntos que tienen la misma presión barométrica a la hora establecida.

Como ejemplo final, suponga que $P(x, y, z)$ es una función de tres variables x, y y z que dan la utilidad realizada cuando x, y y z son las unidades de tres productos, A, B y C, que son fabricados y vendidos respectivamente. Entonces la ecuación $P(x, y, z) = k$, donde k es una constante que representa una superficie en el espacio tridimensional llamado **superficie de nivel** de P. En esta situación, la superficie de nivel representada por $P(x, y, z) = k$ representa el producto mixto que resulta de una utilidad exacta de k dólares. A dicho nivel de superficie se le llama **superficie de isoutilidades**.

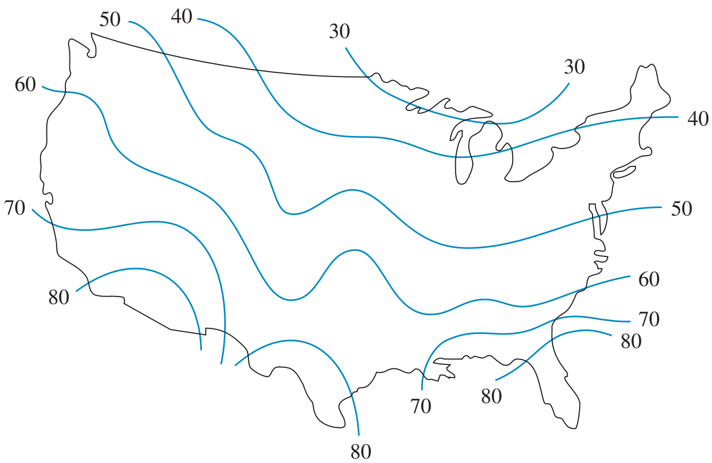


FIGURA **11**
Isotermas: son curvas que conectan los puntos que tienen la misma temperatura.

12.1 Ejercicios de autoevaluación

1. Sea $f(x, y) = x^2 - 3xy + \sqrt{x + y}$. Calcule $f(1, 3)$ y $f(-1, 1)$. ¿Está el punto $(-1, 0)$ en el dominio de f?

2. Encuentre el dominio de $f(x, y) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x - y} - e^{x+y}$.

3. La Odyssey Travel Agency tiene un presupuesto mensual de publicidad de \$20,000. La gerencia estima que si gastan x dólares en publicidad en periódico y y dólares en publicidad en televisión, los ingresos mensuales serán:

$$f(x, y) = 30x^{1/4}y^{3/4}$$

dólares. ¿Cuál será el ingreso mensual si Odyssey gasta \$5,000 por mes en publicidad en periódico y \$15,000 en publicidad de televisión? ¿Si Odyssey gasta \$4,000 por mes en anuncios de periódico y \$16,000 en anuncios de televisión?

Las soluciones de los ejercicios de autoevaluación 12.1 se encuentran en la página 836.

12.1 Preguntas de concepto

1. ¿Cuál es la función de dos variables? Dé un ejemplo de una función de dos variables y establezca su regla de definición y de dominio.

2. Si f es una función de dos variables, ¿qué puede decir acerca de la relación entre $f(a, b)$ y $f(c, d)$, si (a, b) está en el dominio de f y $c = a$, y $d = b$?

3. Defina (a) la gráfica de $f(x, y)$ y (b) una curva de nivel de f.

12.1 Ejercicios

1. Sea $f(x, y) = 2x + 3y - 4$. Calcule $f(0, 0)$, $f(1, 0)$, $f(0, 1)$, $f(1, 2)$ y $f(2, -1)$.

2. Sea $g(x, y) = 2x^2 - y^2$. Calcule $g(1, 2)$, $g(2, 1)$, $g(1, 1)$, $g(-1, 1)$ y $g(2, -1)$.

3. Sea $f(x, y) = x^2 + 2xy - x + 3$. Calcule $f(1, 2)$, $f(2, 1)$, $f(-1, 2)$ y $f(2, -1)$.

4. Sea $h(x, y) = (x + y)/(x - y)$. Calcule $h(0, 1)$, $h(-1, 1)$, $h(2, 1)$ y $h(\pi, -\pi)$.

5. Sea $g(s, t) = 3s\sqrt{t} + t\sqrt{s} + 2$. Calcule $g(1, 2)$, $g(2, 1)$, $g(0, 4)$ y $g(4, 9)$.

6. Sea $f(x, y) = xye^{x^2+y^2}$. Calcule $f(0, 0)$, $f(0, 1)$, $f(1, 1)$ y $f(-1, -1)$.

7. Sea $h(s, t) = s \ln t - t \ln s$. Calcule $h(1, e)$, $h(e, 1)$ y $h(e, e)$.

8. Sea $f(u, v) = (u^2 + v^2)e^{uv^2}$. Calcule $f(0, 1)$, $f(-1, -1)$, $f(a, b)$ y $f(b, a)$.

9. Sea $g(r, s, t) = re^{s/t}$. Calcule $g(1, 1, 1)$, $g(1, 0, 1)$ y $g(-1, -1, -1)$.

10. Sea $g(u, v, w) = (ue^{vw} + ve^{uw} + we^{uv})/(u^2 + v^2 + w^2)$. Calcule $g(1, 2, 3)$ y $g(3, 2, 1)$.

Encuentre el dominio de la función en los ejercicios 11-18.

11. $f(x, y) = 2x + 3y$
12. $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$
13. $h(u, v) = \dfrac{uv}{u - v}$
14. $f(s, t) = \sqrt{s^2 + t^2}$
15. $g(r, s) = \sqrt{rs}$
16. $f(x, y) = e^{-xy}$
17. $h(x, y) = \ln(x + y - 5)$
18. $h(u, v) = \sqrt{4 - u^2 - v^2}$

Trace la curva de nivel de la función correspondiente a cada valor de z en los ejercicios 19-24.

19. $f(x, y) = 2x + 3y$; $z = -2, -1, 0, 1, 2$
20. $f(x, y) = -x^2 + y$; $z = -2, -1, 0, 1, 2$
21. $f(x, y) = 2x^2 + y$; $z = -2, -1, 0, 1, 2$
22. $f(x, y) = xy$; $z = -4, -2, 2, 4$
23. $f(x, y) = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$; $z = 0, 1, 2, 3, 4$
24. $f(x, y) = e^x - y$; $z = -2, -1, 0, 1, 2$

25. Encuentre una ecuación de la curva de nivel de $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ que contiene el punto $(3, 4)$.

26. Encuentre una ecuación de la superficie de nivel de $f(x, y, z) = 2x^2 + 3y^2 - z$ que contiene el punto $(-1, 2, -3)$.

27. El volumen de un tanque cilíndrico con radio r y altura h está dado por

$$V = f(r, h) = \pi r^2 h$$

Calcule el volumen de un tanque cilíndrico cuyo radio es 1.5 pies y altura de 4 pies.

28. **IQs** El IQ (coeficiente intelectual) de una persona cuya edad mental es m años y cuya edad cronológica es c años está definida como

$$f(m, c) = \frac{100m}{c}$$

¿Cuál es el IQ de un niño de 9 años que tiene una edad mental de 13.5 años?

29. **Masa corporal** El índice de masa corporal (BMI) se utiliza para identificar, calcular y tratar el sobrepeso y la obesidad adulta. El valor de BMI para un adulto que pesa w (en kilogramos) y tiene una estatura h (en metros) está definida por

$$M = f(w, h) = \frac{w}{h^2}$$

Con base en los lineamientos federales, un adulto tiene sobrepeso si él o ella tienen un valor de BMI entre 25 y 29.9 y es “obeso” si el valor es mayor o igual que 30.
a. ¿Cuál es el BMI de un adulto que pesa 80 kg y mide 1.8 m?
b. ¿Cuál es el peso máximo para un adulto con una estatura de 1.8 m, que no ha sido clasificado con sobrepeso u obeso?

30. **Ley de Poiseuille** La ley de Poiseuille establece que la resistencia R del flujo sanguíneo, medida en dinas, en un vaso sanguíneo de longitud l y radio r (ambas medidas en centímetros) está dada por

$$R = f(l, r) = \frac{kl}{r^4}$$

donde k es la viscosidad de la sangre (en dina-seg/cm^2). ¿Cuál es la resistencia en términos de k del flujo sanguíneo a través de la arteria de 4 cm de longitud y radio de 0.1 cm?

31. **Funciones de ingresos** Country Workshop fabrica muebles para el hogar, tanto terminados como sin terminar. Las cantidades demandadas cada semana de sus pupitres con tapa corrediza requeridos en ambas versiones, terminadas y sin terminar, son x y y unidades cuando los precios unitarios correspondientes son

$$p = 200 - \frac{1}{5}x - \frac{1}{10}y$$
$$q = 160 - \frac{1}{10}x - \frac{1}{4}y$$

dólares, respectivamente.
a. ¿Cuál es la función de ingreso total semanal de $R(x, y)$?
b. Encuentre el dominio de la función R.

32. Para una función del ingreso total $R(x, y)$ del ejercicio 31, calcule $R(100, 60)$ y $R(60, 100)$. Interprete sus resultados.

33. Funciones de ingresos Weston Publishing publica una edición de lujo y una edición estándar de su diccionario en lengua inglesa. La gerencia de la empresa estima que el número diario de ejemplares demandado para la edición de lujo es x, y para la edición estándar es y, cuando los precios unitarios son

$$p = 20 - 0.005x - 0.001y$$
$$q = 15 - 0.001x - 0.003y$$

dólares, respectivamente.

a. Encuentre la función de ingresos totales diarios $R(x, y)$.
b. Encuentre el dominio de la función R.

34. Para la función de ingreso total $R(x, y)$ del ejercicio 33, calcule $R(300, 200)$ y $R(200, 300)$ e interprete sus resultados.

35. Volumen de un gas El volumen de cierta masa de gas está relacionado con su presión y temperatura por la fórmula

$$V = \frac{30.9T}{P}$$

donde el volumen V se mide en litros, la temperatura T en grados Kelvin (que se obtiene al añadir 273º a la temperatura en grados Celsius) y la presión P en milímetros de presión de mercurio.

a. Encuentre el dominio de la función V.
b. Calcule el volumen del gas a una temperatura y presión estándar, que es cuando, $T = 273$ K y $P = 760$ mm de mercurio.

36. Área de la superficie de un cuerpo humano Una fórmula empírica de E. F. Dubois describe la superficie S de un cuerpo humano (en yardas cuadradas) para su peso W (en kilogramos) y su estatura H (en centímetros). La fórmula está dada por

$$S = 0.007184W^{0.425}H^{0.725}$$

es utilizada por los fisiólogos en estudios de metabolismo.

a. Encuentre el dominio de la función S.
b. ¿Cuál es el área de la superficie del cuerpo humano que pesa 70 kg y tiene una estatura de 178 cm?

37. Función de producción Suponga que la producción de una ciudad está dada por

$$f(x, y) = 100x^{3/5}y^{2/5}$$

miles de millones de dólares; si x son miles de millones de dólares que se gastan en mano de obra y y son miles de millones que se gastan en capital. Calcule el total de la producción si la ciudad gasta \$32,000 millones en mano de obra y \$243,000 millones en capital.

38. Función de producción Los economistas han encontrado que el resultado de un producto terminado $f(x, y)$ es descrito algunas veces por la función

$$f(x, y) = ax^by^{1-b}$$

donde x indica la cantidad de dinero gastado en mano de obra, y y la cantidad gastada en capital, y a y b son constantes positivas con $0 < b < 1$.

a. Si p es un número positivo, demuestre que $f(px, py) = pf(x, y)$.
b. Utilice el resultado del inciso (a) para demostrar si la cantidad de dinero gastado en mano de obra y en capital, ambas han aumentado a r%, por tanto, el resultado también ha aumentado a r%.

39. Incendios premeditados para obtener beneficios Un estudio sobre incendios premeditados para obtener beneficios fue llevado a cabo por civiles expertos y detectives policiacos designados por mayoría en una gran ciudad. Se encontró que el número de incendios sospechosos en esa ciudad en 2006 estaba estrechamente vinculado con la concentración de jóvenes en vivienda de protección pública de la ciudad y el nivel de reinversión en el área de hipotecas convencionales por 10 de los bancos más importantes. De hecho, el número de incendios se aproximaba estrechamente a la fórmula

$$N(x, y) = \frac{100(1{,}000 + 0.03x^2y)^{1/2}}{(5 + 0.2y)^2}$$
$$(0 \leq x \leq 150;\ 5 \leq y \leq 35)$$

donde x denota el número de personas por región censada, y y denota el nivel de reinversión en el área en centavos de dólar depositados. Utilice la fórmula y calcule el número total de incendios sospechosos en los distritos de la ciudad donde la concentración de jóvenes de vivienda pública censada era de 100 por región y el nivel de reinversión era de 20 centavos por dólar depositados.

40. Interés compuesto continuo Si un principal de P dólares es depositado en una cuenta que gana una tasa de interés compuesta continuamente de r anual, entonces la cantidad acumulada al final de t años está dada por

$$A = f(P, r, t) = Pe^{rt}$$

dólares. Encuentre la cantidad acumulada al final de tres años si una suma de \$10,000 es depositada en una cuenta ganando una tasa de interés de 6% anual.

41. Hipotecas de vivienda El pago mensual que amortiza un préstamo de A dólares en t años cuando la tasa de interés anual es r, compuesta mensualmente está dada por

$$P = f(A, r, t) = \frac{Ar}{12\left[1 - \left(1 + \frac{r}{12}\right)^{-12t}\right]}$$

a. ¿Cuál es el pago mensual para una hipoteca de \$300,000 que será amortizada durante 30 años con una tasa de interés de 6% anual? ¿Y con una tasa de interés de 8% anual?
b. Calcule el pago mensual de una hipoteca de \$300,000 que será amortizada durante 20 años con una tasa de interés de 8% anual.

42. Hipotecas de vivienda Suponga que un comprador asegura un préstamo bancario de A dólares para comprar una casa. Si la tasa de interés aplicada es r anual y el préstamo será amortizado en t años, entonces el reembolso del principal al final de i mensual está dado por

$$\begin{aligned} B &= f(A, r, t, i) \\ &= A\left[\frac{\left(1 + \frac{r}{12}\right)^i - 1}{\left(1 + \frac{r}{12}\right)^{12t} - 1}\right] \qquad (0 \leq i \leq 12t) \end{aligned}$$

Suponga que a los Blakely el banco les prestó la suma de \$280,000 para ayudar a financiar la compra de una casa con una tasa de interés de 6% anual. Si los Blakely acuerdan reembolsar el préstamo en plazos iguales durante 30 años, ¿cuánto deberán al banco después del 60o pago (5 años)? ¿Y en el pago 240o (20 años)?

43. Fuerza generada por una centrifugadora Una centrifugadora es una máquina diseñada para un propósito específico de materiales sometidos a una fuerza centrífuga importante. La cantidad actual de fuerza centrífuga, F, está expresada en dinas (1 gramo de fuerza = 980 dinas) está dada por

$$F = f(M, S, R) = \frac{\pi^2 S^2 MR}{900}$$

donde S está en revoluciones por minuto (rpm), M en gramos y R en centímetros. Demuestre que un objeto en rotación a un ritmo de 600 rpm dentro de un círculo con un radio de 10 cm genera una fuerza centrífuga de aproximadamente 40 veces la gravedad.

44. Fórmula de Wilson del tamaño del lote La fórmula de Wilson, del tamaño del lote en economía, establece que una cantidad óptima Q de bienes para un pedido de almacén está dada por

$$Q = f(C, N, h) = \sqrt{\frac{2\,CN}{h}}$$

donde C es el costo de colocar un pedido, N es el número de artículos que vende el almacén semanalmente y h el costo semanal de almacenaje por cada artículo. Encuentre la cantidad más económica para ordenar bicicletas de carreras de 10 velocidades, si el costo del almacén por colocar un pedido es $20, por almacenaje $5 y el almacén espera vender 40 bicicletas por semana.

45. Ley del gas ideal Según la *ley del gas ideal*, el volumen V de un gas ideal está relacionado con su presión P y temperatura T por la fórmula

$$V = \frac{kT}{P}$$

donde k es una constante positiva. Describa las curvas de nivel de V y dé una interpretación física de su resultado.

46. International America´s Cup Class Diseñadas por un comité internacional en 1989, las reglas para la nueva International America´s Cup Class (IACC) incluyen una fórmula que determina las dimensiones básicas de un yate. La fórmula

$$f(L, S, D) \leq 42$$

donde

$$f(L, S, D) = \frac{L + 1.25S^{1/2} - 9.80D^{1/3}}{0.388}$$

equilibra el balance promedio de longitud L (en metros), el promedio del área de la vela S (en metros cuadrados) y el desplazamiento D (en metros cúbicos). Todos los cambios en las dimensiones básicas son pactados. Por ejemplo, si desea escoger la velocidad aumentando el área de la vela, debe pagar por eso reduciendo la longitud o aumentando el desplazamiento, ya que ambas reducen la velocidad del yate. Demuestre que el yate A de longitud promedio de 20.95 m, área promedio de la vela de 277.3 m^2 y el desplazamiento de 17.56 m^3 y el yate más grande y pesado B con $L = 21.87$, $S = 311.78$ y $D = 22.48$ satisfacen la fórmula.

Determine si el planteamiento de los ejercicios 47-52 es verdadero o falso. Si es verdadero, explique por qué. Si es falso, dé un ejemplo para mostrar por qué lo es.

47. Si h es una función de x y y, entonces existen funciones f y g de una variable como

$$h(x, y) = f(x) + g(y)$$

48. Si f es una función de x y y y a es un número real, entonces

$$f(ax, ay) = af(x, y)$$

49. El dominio de $f(x, y) = 1/(x^2 - y^2)$ es $\{(x, y) | y \neq x\}$.

50. Cada punto en en la curva de nivel de $f(x, y) = c$ corresponde a un punto en la gráfica de f que está c unidades sobre el plano xy si $c > 0$ y $|c|$ unidades debajo del plano xy si $c < 0$.

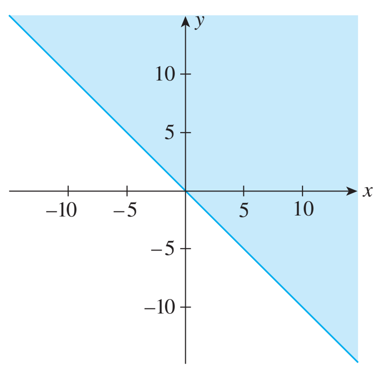
51. f es una función de x, y y, si y sólo si para cualquiera de los dos puntos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ en el dominio de f, $f(x_1, y_1) = f(x_2, y_2)$ implica que $P_1(x_1, y_1) = P_2(x_2, y_2)$.

52. La curva de nivel de una función f de dos variables, $f(x,y) = k$ existe para todos los valores de k.

12.1 Soluciones de los ejercicios de autoevaluación

1. $f(1, 3) = 1^2 - 3(1)(3) + \sqrt{1 + 3} = -6$
$f(-1, 1) = (-1)^2 - 3(-1)(1) + \sqrt{-1 + 1} = 4$

El punto $(-1, 0)$ no está en el dominio de f porque el término $\sqrt{x + y}$ no está definido cuando $x = -1$ y $y = 0$. De hecho el dominio de f consiste en todos los valores reales de x y y que satisfacen la desigualdad de $x + y \geq 0$, el medio plano sombreado muestra la figura que lo acompaña.



2. Puesto que la división entre 0 no está permitida, vemos que $x \neq 0$ y $x - y \neq 0$. Por tanto, el dominio de f es el conjunto de todos los puntos del plano xy que no están contenidos en los ejes de y ($x = 0$) y en la recta $x = y$.

3. Si Odissey gasta \$5,000 por mes en publicidad en el periódico ($x = 5{,}000$) y \$15,000 mensuales en anuncios de televisión ($y = 15{,}000$), entonces su ingreso mensual está dado por

$$\begin{aligned} f(5{,}000, 15{,}000) &= 30(5{,}000)^{1/4}(15{,}000)^{3/4} \\ &\approx 341{,}926.06 \end{aligned}$$

o aproximadamente \$341,926. Si la agencia gasta \$4,000 mensuales en publicidad en el periódico y \$16,000 mensuales en anuncios de televisión, entonces sus ingresos mensuales estarán dados por

$$\begin{aligned} f(4{,}000, 16{,}000) &= 30(4{,}000)^{1/4}(16{,}000)^{3/4} \\ &\approx 339{,}411.26 \end{aligned}$$

o aproximadamente \$339,411.

12.2 Derivadas parciales

Derivadas parciales

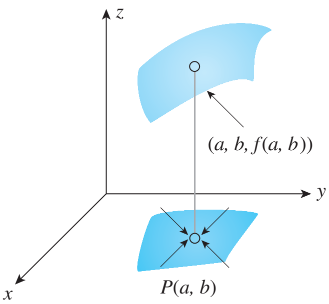


FIGURA 12
Podemos aproximarnos a un punto en el plano infinitamente desde muchas direcciones.

Para una función $f(x)$ de una variable x, no existe ambigüedad cuando hablamos acerca de la tasa de cambio de $f(x)$ con respecto a x, ya que a x se le debe restringir a desplazarse a lo largo del eje x. Sin embargo, la situación se torna más complicada cuando estudiamos la tasa de cambio de una función de dos o más variables. Por ejemplo, el dominio D de una función de dos variables $f(x, y)$ es un subconjunto del plano (figura 12), así que si $P(a, b)$ está en cualquier punto en el dominio de f, existen infinitamente muchas direcciones desde las cuales podemos aproximarnos al punto P. Así, debemos solicitar la tasa de cambio de f en P a lo largo de cualquiera de estas direcciones.

Sin embargo, no trataremos con este problema general. En vez de eso nos limitaremos a estudiar la tasa de cambio de la función $f(x, y)$ en el punto $P(a, b)$ en cada una de las dos llamadas *direcciones preferidas*, la dirección paralela al eje x y la dirección paralela al eje y. Consideramos que $y = b$, donde b es una constante, de manera que $f(x, b)$ es una función de una sola variable x. Por lo que la ecuación $z = f(x, y)$ es la de una superficie, la ecuación de $z = f(x, b)$ es la de la curva C sobre la superficie formada por la intersección de la superficie y el plano $y = b$ (figura 13).

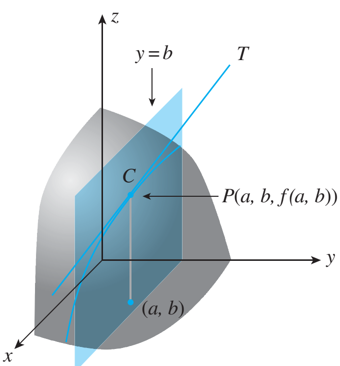


FIGURA 13
La curva C está formada por la intersección del plano $y = b$ con el de la superficie $z = f(x, y)$.

Debido a que $f(x, b)$ es una función de una variable x, podemos calcular la derivada de f con respecto a x en $x = a$. Esta derivada se obtiene al mantener la variable y fija y diferenciar la función resultante $f(x, b)$ con respecto a x, que se llama la **primera derivada parcial de *f* con respecto a *x*** en (a, b), escrito

$$\frac{\partial z}{\partial x}(a, b) \quad \text{o} \quad \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) \quad \text{o} \quad f_x(a, b)$$

Aunque,

$$\frac{\partial z}{\partial x}(a, b) = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = f_x(a, b) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h, b) - f(a, b)}{h}$$

proporciona el límite existente. La primera derivada parcial de f con respecto a x en (a, b) mide tanto la pendiente de línea de la tangente T como a la curva C y la tasa de cambio de la función f en la dirección de x cuando $x = a$ y $y = b$. También escribimos

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(a, b)} \equiv f_x(a, b)$$

De igual forma, definimos como la **primera derivada parcial de *f* con respecto a *y*** en (a, b), escrito

$$\frac{\partial z}{\partial y}(a, b) \quad \text{o} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \quad \text{o} \quad f_y(a, b)$$

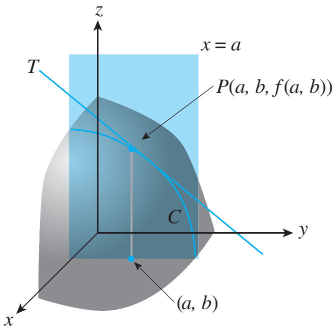


FIGURA 14
La primera derivada parcial de f con respecto a y en (a, b) mide la pendiente de la línea de la tangente T a la curva C con x constante.

como la derivada se obtiene al mantener fija la variable x y diferenciar la función resultante $f(a, b)$ con respecto a y. Esto es,

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial y}(a, b) &= \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = f_y(a, b)\\ &= \lim_{k \to 0} \frac{f(a, b+k) - f(a, b)}{k}\end{aligned}$$

si el límite existe. La primera derivada parcial de f con respecto a y en (a, b) mide tanto la pendiente de la línea tangente T a la curva C, obtenida al mantener a x constante (figura 14) y la tasa de cambio de la función f en la dirección y cuando $x = a$ y $y = b$. Escribimos

$$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(a, b)} \equiv f_y(a, b)$$

Antes de ver algunos ejemplos, hagamos un resumen de estas definiciones.

Primeras derivadas parciales de $f(x, y)$

Suponga que $f(x, y)$ es una función de dos variables x y y. Entonces la **primera derivada parcial de f** con respecto a x en el punto (x, y) es

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h}$$

provee el límite existente. La primera derivada parcial de f con respecto a y en el punto (x, y) es

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{k \to 0} \frac{f(x, y+k) - f(x, y)}{k}$$

provee el límite existente.

VIDEO

EJEMPLO 1 Encuentre las derivadas parciales $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ de la función

$$f(x, y) = x^2 - xy^2 + y^3$$

¿Cuál es la tasa de cambio de la función f en la dirección de x en el punto $(1, 2)$?
¿Cuál es la tasa de cambio de la función f en la dirección de y en el punto $(1, 2)$?

Solución Para calcular $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ piense en la variable y como una constante y diferencie la función resultante de x con respecto a x. Escribamos

$$f(x, y) = x^2 - xy^2 + y^3$$

donde la variable y es tratada como una constante mostrada en color azul. Entonces,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - y^2$$

Para calcular $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, piense en la variable x como una entidad fija, esto es, como una constante, y diferencie la función resultante de y con respecto a y. En este caso,

$$f(x, y) = x^2 - xy^2 + y^3$$

así que,

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -2xy + 3y^2$$

La tasa de cambio de la función f en la dirección x en el punto (1, 2) está dada por

$$f_x(1, 2) = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(1,\,2)} = 2(1) - 2^2 = -2$$

Esto es, f decrece 2 unidades por cada unidad que aumenta en la dirección x, y se mantiene como una constante en ($y = 2$). La tasa de cambio de la función f en la dirección y en el punto (1, 2) está dada por

$$f_y(1, 2) = \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(1,\,2)} = -2(1)(2) + 3(2)^2 = 8$$

Esto es, f aumenta 8 unidades por cada unidad que aumenta en la dirección y, x se mantiene constante en ($x = 1$).

Explore y analice

Refiérase a la sección "Explore y analice" de la página 829. Suponga que la gerencia ha decidido que las ventas proyectadas del primer producto son a unidades. Describa cómo podría ayudar a la gerencia a decidir cuántas unidades del segundo producto la empresa debería fabricar y vender para maximizar su utilidad total. Justifique su método a la gerencia. Sin embargo, suponga que la gerencia siente que b unidades del segundo producto pueden fabricarse y venderse. ¿Cómo podría ayudarle a la gerencia a decidir cuántas unidades del primer producto debe fabricar para maximizar la utilidad total de la empresa.

EJEMPLO 2 Calcule las primeras derivadas parciales de cada función.

a. $f(x, y) = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$ **b.** $g(s, t) = (s^2 - st + t^2)^5$

c. $h(u, v) = e^{u^2 - v^2}$ **d.** $f(x, y) = \ln(x^2 + 2y^2)$

Solución

a. Para calcular $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, piense en la variable y como una constante. Así,

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

Por tanto, al utilizar la regla del cociente, tenemos

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{(x^2 + y^2)y - xy(2x)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x^2y + y^3 - 2x^2y}{(x^2 + y^2)^2}$$
$$= \frac{y(y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^2}$$

sobre la simplificación y la factorización. Para calcular $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, piense en la variable x como una constante. Por tanto,

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

así que, al utilizar la regla del cociente una vez más, obtenemos

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{(x^2 + y^2)x - xy(2y)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x^3 + xy^2 - 2xy^2}{(x^2 + y^2)^2}$$
$$= \frac{x(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2}$$

b. Para calcular $\dfrac{\partial g}{\partial s}$, tratamos la variable t como si fuera una constante. Por tanto,

$$g(s, t) = (s^2 - st + t^2)^5$$

Utilizando la regla de la potencia, encontramos

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial s} &= 5(s^2 - st + t^2)^4 \cdot (2s - t)\\ &= 5(2s - t)(s^2 - st + t^2)^4\end{aligned}$$

Para calcular $\dfrac{\partial g}{\partial t}$, tratamos la variable s como si fuera una constante. Así,

$$g(s, t) = (s^2 - st + t^2)^5$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial t} &= 5(s^2 - st + t^2)^4 \cdot (2s - t)\\ &= 5(2t - s)(s^2 - st + t^2)^4\end{aligned}$$

c. Para calcular $\dfrac{\partial h}{\partial u}$, piense en la variable v como una constante. Por lo que

$$h(u, v) = e^{u^2 - v^2}$$

Al utilizar la regla de la cadena para funciones exponenciales, tenemos

$$\frac{\partial h}{\partial u} = e^{u^2 - v^2} \cdot 2u = 2ue^{u^2 - v^2}$$

El paso siguiente es que tratemos la variable u como si fuera una constante

$$h(u, v) = e^{u^2 - v^2}$$

y obtenemos

$$\frac{\partial h}{\partial v} = e^{u^2 - v^2} \cdot (-2v) = -2ve^{u^2 - v^2}$$

d. Para calcular $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, piense en la variable y como una constante. Por tanto,

$$f(x, y) = \ln(x^2 + 2y^2)$$

así que la regla de la cadena para funciones logarítmicas nos da

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2x}{x^2 + 2y^2}$$

En seguida, al tratar la variable x como si fuera una constante, encontramos

$$f(x, y) = \ln(x^2 + 2y^2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{4y}{x^2 + 2y^2}$$ ■

Para calcular la derivada parcial de una función de varias variables con respecto a una variable, digamos, x, pensemos en las otras variables como si fueran constantes y diferenciemos la función resultante con respecto a x.

Explore y analice

1. Sea (a, b) un punto en el dominio de $f(x, y)$. Establezca $g(x) = f(x, b)$ y suponga que g es diferenciable en $x = a$. Explique por qué usted puede encontrar $f_x(a, b)$ al calcular $g'(a)$. ¿Cómo evaluaría al calcular $f_y(a, b)$ utilizando una técnica similar? Dé una interpretación geométrica de estos procedimientos.
2. Sea $f(x, y) = x^2y^3 - 3x^2y + 2$. Utilice el método del problema 1 para encontrar $f_x(1, 2)$ y $f_y(1, 2)$.

EJEMPLO 3 Calcule las primeras derivadas parciales de la función:

$$w = f(x, y, z) = xyz - xe^{yz} + x \ln y$$

Solución Aquí tenemos una función de tres variables x, y y z, debemos calcular

$$\frac{\partial f}{ax}, \frac{\partial f}{ay}, \frac{\partial f}{az}$$

Para calcular f_x pensemos en las otras dos variables, y y z, como constantes y diferenciemos la función resultante de x con respecto a x, por tanto obtenemos

$$f_x = yz - e^{yz} + \ln y$$

Para calcular f_y pensemos en las otras dos variables, x y z, como constantes y diferenciamos la función resultante de y con respecto a y. Así obtenemos

$$f_y = xz - xze^{yz} + \frac{x}{y}$$

Finalmente, para calcular f_z; tratamos las variables x y y como constantes y diferenciamos la función resultante f con respecto a z, y obtenemos

$$f_z = xy - xye^{yz}$$

■

Exploración con TECNOLOGÍA

Refiérase a la sección "Explore y analice" de la página 840. Sea

$$f(x, y) = \frac{e^{\sqrt{xy}}}{(1 + xy^2)^{3/2}}$$

1. Calcule $g(x) = f(x, 1)$ y trabaje con la calculadora graficadora para trazar la gráfica de g en la ventana de visualización $[0, 2] \times [0, 2]$.
2. Utilice la operación de diferenciación de su calculadora graficadora para encontrar $g'(1)$ y, por tanto, $f_x(1, 1)$.
3. Calcule $h(y) = f(1, y)$ y use la calculadora graficadora para trazar la gráfica de h en la ventana de visualización $[0, 2] \times [0, 2]$.
4. Utilice la operación de diferenciación de su calculadora graficadora para encontrar $h'(1)$ y, por tanto $f_y(1, 1)$.

La función de producción Cobb-Douglas

Para una interpretación económica de las primeras derivadas parciales de una función de dos variables, centremos nuestra atención en la función

$$f(x, y) = ax^b y^{1-b} \tag{1}$$

donde a y b son constantes positivas con $0 < b < 1$. A esta función se le llama **función de producción Cobb-Douglas**. Aquí x representa la cantidad de dinero gastada en mano de obra, y el costo de equipo de capital (edificios, maquinaria y otras herramientas de producción) y la función f mide la producción en producto terminado (en unidades apropiadas) y se llama, como corresponde, la función de producción.

A la derivada parcial f_x se le da el nombre de **productividad marginal del trabajo**. Ésta mide la tasa de cambio de la producción con respecto a la cantidad de dinero gastada en mano de obra, con el nivel de gasto en capital como constante. De igual forma, la derivada parcial f_y, se llama **productividad marginal del capital**, mide la tasa de cambio de la producción con respecto a la cantidad gastada en capital, con el nivel fijo de gasto en mano de obra.

EJEMPLO DE APLICACIÓN 4 Productividad marginal La producción de cierto país en los primeros años siguientes a la Segunda Guerra Mundial es descrita por la función:

$$f(x, y) = 30x^{2/3}y^{1/3}$$

unidades, cuando se utilizaron x unidades de mano de obra y y unidades de capital.

a. Calcule f_x y f_y.
b. ¿Cuál es la productividad marginal de la mano de obra y la productividad marginal del capital, cuando las cantidades gastadas en cada concepto son 125 y 27 unidades respectivamente?
c. ¿El gobierno debería haber invertido en capital, más que aumentar el gasto en mano de obra para aumentar la productividad del país?

Solución

a. $f_x = 30 \cdot \dfrac{2}{3} x^{-1/3}y^{1/3} = 20\left(\dfrac{y}{x}\right)^{1/3}$

$f_y = 30x^{2/3} \cdot \dfrac{1}{3} y^{-2/3} = 10\left(\dfrac{x}{y}\right)^{2/3}$

b. La productividad marginal requerida de la mano de obra está dada por:

$$f_x(125, 27) = 20\left(\frac{27}{125}\right)^{1/3} = 20\left(\frac{3}{5}\right)$$

o 12 unidades por unidad de incremento en el gasto en mano de obra (el gasto en capital se mantiene constante en 27 unidades). La productividad marginal requerida del capital está dada por

$$f_y(125, 27) = 10\left(\frac{125}{27}\right)^{2/3} = 10\left(\frac{25}{9}\right)$$

o $27\frac{7}{9}$ unidades por unidad de incremento del gasto en capital (el gasto en mano de obra se mantiene constante en 125 unidades).

c. De los resultados del inciso (b), vemos que el gasto por unidad en gastos de capital fue el resultado de un incremento más rápido que la unidad en el gasto en mano de obra. Sin embargo, el gobierno debió fomentar el incremento del gasto en capital más que el de mano de obra durante los primeros años de reconstrucción. ■

Bienes sustitutos y bienes complementarios

Para otra aplicación de las primeras derivadas parciales de una función de dos variables en el campo de la economía, consideremos la demanda relativa de dos bienes. Decimos que los dos bienes son **bienes sustitutos** (competitivos) si un decremento en la demanda de uno resulta en un incremento en la demanda del otro. Ejemplos de bienes sustitutos son el café y el té. Por el contrario, los dos bienes son referidos como **bienes complementarios** si un decremento en la demanda de uno resulta en un decremento en la demanda del otro. Ejemplos de bienes complementarios son los automóviles y las llantas.

Ahora encontramos un criterio para determinar si dos bienes A y B son sustitutos o complementarios. Suponga que las ecuaciones para la demanda que relacionan las cantidades demandadas, x y y, con los precios unitarios, p y q, de los dos bienes están dadas por

$$x = f(p, q) \quad \text{y} \quad y = g(p, q)$$

Consideremos la derivada parcial $\partial f/\partial p$. Puesto que f es la función de demanda para el bien A, vemos que para q constante, f es una función decreciente típica de p, esto es $\partial f/\partial p < 0$. Ahora, si los dos bienes fueron sustitutos, entonces la cantidad demandada del bien B aumentaría con respecto a p, esto es, $\partial g/\partial p > 0$. Un argumento similar con p constante demuestra que si A y B son bienes sustitutos, entonces $\partial f/\partial q > 0$. Así, los dos bienes A y B son sustitutos si

$$\frac{\partial f}{\partial q} > 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial g}{\partial p} > 0$$

De igual manera, A y B son bienes complementarios si

$$\frac{\partial f}{\partial q} < 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial g}{\partial p} < 0$$

Bienes sustitutos y bienes complementarios

Dos bienes A y B son sustitutos si

$$\frac{\partial f}{\partial q} > 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial g}{\partial p} > 0 \tag{2}$$

Dos bienes A y B son complementarios si

$$\frac{\partial f}{\partial q} < 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial g}{\partial p} < 0 \tag{3}$$

EJEMPLO DE APLICACIÓN 5 Bienes sustitutos y bienes complementarios Suponga que la demanda diaria de mantequilla está dada por

$$x = f(p, q) = \frac{3q}{1 + p^2}$$

y la demanda diaria de margarina está dada por

$$y = g(p, q) = \frac{2p}{1 + \sqrt{q}} \qquad (p > 0, q > 0)$$

donde p y q denotan los precios por libra (en dólares) de mantequilla y margarina, respectivamente, x y y están medidas en millones de libras. Determine si estos dos bienes son sustitutos, complementarios, o no se relacionan.

Solución Calculamos

$$\frac{\partial f}{\partial q} = \frac{3}{1 + p^2} \quad \text{y} \quad \frac{\partial g}{\partial p} = \frac{2}{1 + \sqrt{q}}$$

Puesto que

$$\frac{\partial f}{\partial q} > 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial g}{\partial p} > 0$$

para todos los valores de $p > 0$ y $q > 0$, concluimos que la mantequilla y la margarina son bienes sustitutos. ■

Derivadas parciales de segundo orden

Las primeras derivadas parciales $f_x(x, y)$ y $f_y(x, y)$ de una función $f(x, y)$ de dos variables, x y y, son también funciones de x y y. Como tal, podemos diferenciar cada una de las funciones f_x y f_y para obtener las **derivadas parciales de segundo orden de *f*** (figura 15). Aunque, al diferenciar la función f con respecto a x conduce a la segunda derivada parcial

$$f_{xx} \equiv \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}(f_x)$$

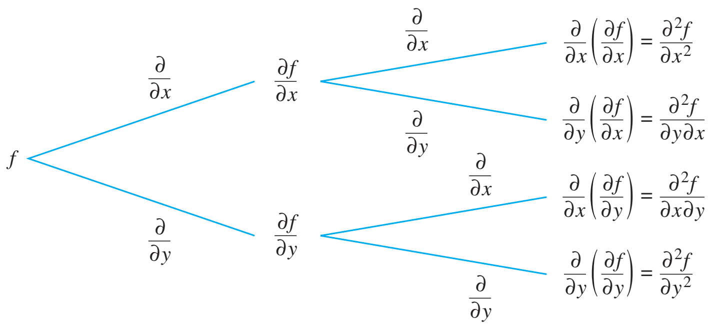


FIGURA **15**
Muestra de un esquema de cuatro derivadas parciales de segundo orden de *f*.

Sin embargo, la diferenciación de f_x con respecto a y conduce a la segunda derivada parcial

$$f_{xy} \equiv \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}(f_x)$$

De la misma forma, la diferenciación de la función f_y con respecto a x y con respecto a y conduce a

$$f_{yx} \equiv \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}(f_y)$$

$$f_{yy} \equiv \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}(f_y)$$

respectivamente. Observe que, en general, no es verdad que $f_{xy} = f_{yx}$, pero son iguales si ambas f_{xy} y f_{yx} son continuas. Podemos añadir que este es el caso en la mayoría de las aplicaciones prácticas.

EJEMPLO 6 Encuentre la derivada parcial de segundo orden de la función

$$f(x, y) = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 + y^2$$

Solución Las primeras derivadas parciales de f son

$$\begin{aligned} f_x &= \frac{\partial}{\partial x}(x^3 - 3x^2y + 3xy^2 + y^2) \\ &= 3x^2 - 6xy + 3y^2 \\ f_y &= \frac{\partial}{\partial y}(x^3 - 3x^2y + 3xy^2 + y^2) \\ &= -3x^2 + 6xy + 2y \end{aligned}$$

Por tanto

$$\begin{aligned} f_{xx} &= \frac{\partial}{\partial x}(f_x) = \frac{\partial}{\partial x}(3x^2 - 6xy + 3y^2) \\ &= 6x - 6y = 6(x - y) \\ f_{xy} &= \frac{\partial}{\partial y}(f_x) = \frac{\partial}{\partial y}(3x^2 - 6xy + 3y^2) \\ &= -6x + 6y = 6(y - x) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
f_{yx} &= \frac{\partial}{\partial x}(f_y) = \frac{\partial}{\partial x}(-3x^2 + 6xy + 2y) \\
&= -6x + 6y = 6(y - x) \\
f_{yy} &= \frac{\partial}{\partial y}(f_y) = \frac{\partial}{\partial y}(-3x^2 + 6xy + 2y) \\
&= 6x + 2
\end{aligned}
$$

EJEMPLO 7 Encuentre las derivadas parciales de segundo orden de la función

$$f(x, y) = e^{xy^2}$$

Solución Tenemos

$$
\begin{aligned}
f_x &= \frac{\partial}{\partial x}(e^{xy^2}) \\
&= y^2 e^{xy^2} \\
f_y &= \frac{\partial}{\partial y}(e^{xy^2}) \\
&= 2xye^{xy^2}
\end{aligned}
$$

así que las derivadas parciales de segundo orden de f requeridas son

$$
\begin{aligned}
f_{xx} &= \frac{\partial}{\partial x}(f_x) = \frac{\partial}{\partial x}(y^2 e^{xy^2}) \\
&= y^4 e^{xy^2} \\
f_{xy} &= \frac{\partial}{\partial y}(f_x) = \frac{\partial}{\partial y}(y^2 e^{xy^2}) \\
&= 2ye^{xy^2} + 2xy^3 e^{xy^2} \\
&= 2ye^{xy^2}(1 + xy^2) \\
f_{yx} &= \frac{\partial}{\partial x}(f_y) = \frac{\partial}{\partial x}(2xye^{xy^2}) \\
&= 2ye^{xy^2} + 2xy^3 e^{xy^2} \\
&= 2ye^{xy^2}(1 + xy^2) \\
f_{yy} &= \frac{\partial}{\partial y}(f_y) = \frac{\partial}{\partial y}(2xye^{xy^2}) \\
&= 2xe^{xy^2} + (2xy)(2xy)e^{xy^2} \\
&= 2xe^{xy^2}(1 + 2xy^2)
\end{aligned}
$$

12.2 Ejercicios de autoevaluación

1. Calcule las primeras derivadas parciales de $f(x, y) = x^3 - 2xy^2 + y^2 - 8$.

2. Encuentre las primeras derivadas parciales de $f(x, y) = x \ln y + ye^x - x^2$ en $(0, 1)$ e interprete sus resultados.

3. Encuentre las derivadas parciales de segundo orden de la función del ejercicio de autoevaluación 1.

4. La producción de cierto país es descrita por la función

$$f(x, y) = 60x^{1/3}y^{2/3}$$

cuando se emplean x unidades de mano de obra, y y unidades en capital.

a. ¿Cuál es la productividad marginal de la mano de obra y cuál la del capital cuando las cantidades gastadas tanto en mano de obra como en capital son 125 y 8 unidades, respectivamente?

b. ¿Debe el gobierno fomentar las inversiones de capital más que incrementar los gastos en mano de obra en esta época, en lugar de incrementar la productividad de la ciudad?

Las soluciones de los ejercicios de autoevaluación 12.2 se encuentran en la página 848.

12.2 Preguntas de concepto

1. a. ¿Cuál es la derivada parcial de $f(x, y)$ con respecto a x en (a, b)?
   b. Dé una interpretación geométrica de $f_x(a, b)$ y una interpretación física de $f_x(a, b)$.
2. a. ¿Cuáles son los bienes sustitutos y los bienes complementarios? Dé un ejemplo de cada uno.
   b. Suponga que $x = f(p, q)$ y $y = g(p, q)$ son funciones de demanda para los dos bienes A y B, respectivamente. Proporcione las condiciones que determinan si A y B son bienes sustitutos o complementarios.
3. Liste todas las derivadas parciales de segundo orden de f.

12.2 Ejercicios

1. Sea $f(x, y) = x^2 + 2y^2$.
   a. Encuentre $f_x(2, 1)$ y $f_y(2, 1)$.
   b. Interprete los números del inciso (a) como pendientes.
   c. Interprete los números del inciso (a) como tasa de cambio.
2. Sea $f(x, y) = 9 - x^2 + xy - 2y^2$.
   a. Encuentre $f_x(1, 2)$ y $f_y(1, 2)$.
   b. Interprete los números del inciso (a) como pendientes.
   c. Interprete los números del inciso (a) como tasa de cambio.

Encuentre las primeras derivadas parciales de la función en los ejercicios 3-24.

3. $f(x, y) = 2x + 3y + 5$
4. $f(x, y) = 2xy$
5. $g(x, y) = 2x^2 + 4y + 1$
6. $f(x, y) = 1 + x^2 + y^2$
7. $f(x, y) = \dfrac{2y}{x^2}$
8. $f(x, y) = \dfrac{x}{1 + y}$
9. $g(u, v) = \dfrac{u - v}{u + v}$
10. $f(x, y) = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$
11. $f(s, t) = (s^2 - st + t^2)^3$
12. $g(s, t) = s^2t + st^{-3}$
13. $f(x, y) = (x^2 + y^2)^{2/3}$
14. $f(x, y) = x\sqrt{1 + y^2}$
15. $f(x, y) = e^{xy+1}$
16. $f(x, y) = (e^x + e^y)^5$
17. $f(x, y) = x \text{ en } y + y \text{ en } x$
18. $f(x, y) = x^2e^{y^2}$
19. $g(u, v) = e^u \text{ en } v$
20. $f(x, y) = \dfrac{e^{xy}}{x + y}$
21. $f(x, y, z) = xyz + xy^2 + yz^2 + zx^2$
22. $g(u, v, w) = \dfrac{2uvw}{u^2 + v^2 + w^2}$
23. $h(r, s, t) = e^{rst}$
24. $f(x, y, z) = xe^{y/z}$

Calcule las primeras derivadas parciales de la función en el punto dado de los ejercicios 25-34.

25. $f(x, y) = x^2y + xy^2$; $(1, 2)$
26. $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 + 2x - y$; $(-1, 2)$
27. $f(x, y) = x\sqrt{y} + y^2$; $(2, 1)$
28. $g(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$; $(3, 4)$
29. $f(x, y) = \dfrac{x}{y}$; $(1, 2)$
30. $f(x, y) = \dfrac{x + y}{x - y}$; $(1, -2)$
31. $f(x, y) = e^{xy}$; $(1, 1)$
32. $f(x, y) = e^x \text{ en } y$; $(0, e)$
33. $f(x, y, z) = x^2yz^3$; $(1, 0, 2)$
34. $f(x, y, z) = x^2y^2 + z^2$; $(1, 1, 2)$

Encuentre las derivadas parciales de segundo orden de la función de los ejercicios 35-42. Demuestre en cada caso, que las derivadas parciales mixtas f_{xy} y f_{yx} son iguales.

35. $f(x, y) = x^2y + xy^3$
36. $f(x, y) = x^3 + x^2y + x + 4$
37. $f(x, y) = x^2 - 2xy + 2y^2 + x - 2y$
38. $f(x, y) = x^3 + x^2y^2 + y^3 + x + y$
39. $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$
40. $f(x, y) = x\sqrt{y} + y\sqrt{x}$
41. $f(x, y) = e^{-x/y}$
42. $f(x, y) = \text{en}(1 + x^2y^2)$

43. **Productividad de un país** La productividad de un país de Sudamérica está dada por la función

$$f(x, y) = 20x^{3/4}y^{1/4}$$

cuando se utilizan x unidades de mano de obra, y y unidades de capital.
   a. ¿Cuál es la productividad marginal de la mano de obra y cuál la del capital cuando las cantidades gastadas en cada concepto son 256 y 16 unidades respectivamente?
   b. ¿El gobierno debe fomentar la inversión en capital en vez de gastar más en mano de obra en este momento a fin de incrementar la productividad del país?

44. **Productividad de un país** La productividad de un país de Europa Occidental está dada por la función

$$f(x, y) = 40x^{4/5}y^{1/5}$$

cuando se utilizan x unidades de mano de obra y y unidades de capital.

a. ¿Cuál es la productividad marginal de la mano de obra y del capital cuando las cantidades gastadas en dichos insumos son 32 y 243 unidades respectivamente?

b. ¿Debe el gobierno fomentar la inversión en capital en vez de aumentar más en mano de obra en este momento a fin de incrementar la productividad del país?

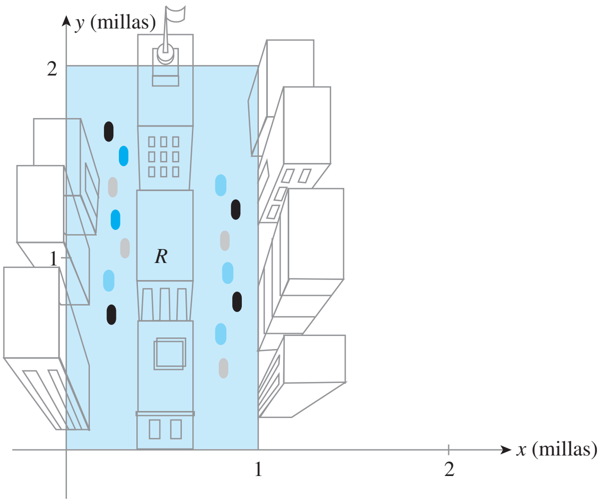
45. **Precios del terreno** La región rectangular R mostrada en la siguiente figura representa un distrito financiero de la ciudad. El precio del terreno dentro del distrito es aproximado por la función

$$p(x, y) = 200 - 10\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - 15(y - 1)^2$$

donde $p(x, y)$ es el precio del terreno en el punto de (x, y) en dólares por pie cuadrado x y y están medidas en millas. Calcule

$$\frac{\partial p}{\partial x}(0, 1) \quad \text{y} \quad \frac{\partial p}{\partial y}(0, 1)$$

e interprete sus resultados.



46. **Bienes complementarios y bienes sustitutos** En un estudio llevado a cabo por la revista *Home Entertainment*, se determinó que la ecuación requerida para reproductores VCR está dada por

$$x = f(p, q) = 10{,}000 - 10p + 0.2q^2$$

y la ecuación de la demanda de reproductores de DVD está dada por

$$y = g(p, q) = 5{,}000 + 0.8p^2 - 20q$$

donde p y q denotan los precios unitarios (en dólares) para los reproductores de VCR y DVD, respectivamente, y x y y denotan el número de reproductores de VCR y DVD demandados por semana. Determine si estos productos son sustitutos, complementarios o no tienen relación.

47. **Bienes complementarios y bienes sustitutos** En un estudio se determinó que la ecuación de la demanda de un reproductor VCR está dada por

$$x = f(p, q) = 10{,}000 - 10p - e^{0.5q}$$

La ecuación de la demanda para cintas vírgenes de reproductores VCR está dada por

$$y = g(p, q) = 50{,}000 - 4{,}000q - 10p$$

donde p y q denotan los precios unitarios, respectivamente, x y y denotan el número de reproductores VCR y de cintas vírgenes para reproductores VCR demandados por semana. Determine si estos dos productos son sustitutos, complementarios o no tienen relación.

48. **Bienes complementarios y bienes sustitutos** Refiérase a los ejercicios 31 y 12.1. Demuestre si los muebles para el hogar fabricados por Country Workshop, terminados y sin terminar, son bienes sustitutos.
Sugerencia: Resuelva el sistema de ecuaciones para x y y en términos de p y q.

49. **Funciones de ingresos** El ingreso total semanal (en dólares) de Country Workshop asociado a la fabricación y venta de sus escritorios de tapa corrediza está dado por la función

$$R(x, y) = -0.2x^2 - 0.25y^2 - 0.2xy + 200x + 160y$$

donde x denota el número de unidades terminadas y y las no terminadas fabricadas y vendidas por semana, respectivamente. Calcule $\partial R/\partial x$ y $\partial R/\partial y$ cuando $x = 300$ y $y = 250$. Interprete sus resultados.

50. **Funciones de utilidades** La utilidad mensual (en dólares) de Bond and Baker Department Store depende del nivel de inventario x (en miles de dólares) y del espacio de piso y (en miles de pies cuadrados) disponibles para exhibir la mercancía, lo cual está dado por la ecuación

$$P(x, y) = -0.02x^2 - 15y^2 + xy + 39x + 25y - 20{,}000$$

Calcule $\partial P/\partial x$ y $\partial P/\partial y$ cuando $x = 4{,}000$ y $y = 150$. Interprete sus resultados. Repita con $x = 5{,}000$ y $y = 150$.

51. **Factor de congelación del viento** Una fórmula utilizada por los metereólogos para calcular el factor de congelación del viento (la temperatura que usted siente sin correr el aire es la misma que la temperatura actual cuando se considera la presencia de viento) es

$$T = f(t, s) = 35.74 + 0.6215t - 35.75s^{0.16} + 0.4275ts^{0.16} \quad (s \geq 1)$$

donde t es la temperatura actual del aire en grados Fahrenheit y s es la velocidad del viento en mph.

a. ¿Cuál es el factor de congelación cuando la temperatura actual del aire es 32 °F y la velocidad del viento 20 mph?

b. ¿Si la temperatura es 32 °F por cuánto aproximadamente cambiaría el factor de congelación del viento si su velocidad aumenta de 20 a 21 mph.

52. **Eficiencia de un motor** La eficiencia de un motor de combustión interna está dada por

$$E = \left(1 - \frac{v}{V}\right)^{0.4}$$

donde V y v son los volúmenes máximos y mínimos, respectivamente, de aire en cada cilindro.

a. Demuestre que $\partial E/\partial V > 0$ e interprete su resultado.

b. Demuestre que $\partial E/\partial v < 0$ e interprete su resultado.

53. **Volumen de un gas** El volumen V (en litros) de cierta masa de gas está relacionada con su presión P (en milímetros de mercurio) y su temperatura T (en grados Kelvin) por la ley

$$V = \frac{30.9T}{P}$$

Calcule $\partial V/\partial T$ y $\partial V/\partial P$ cuando $T = 300$ y $P = 800$. Interprete sus resultados.

54. **Superficie de un cuerpo humano** La fórmula

$$S = 0.007184W^{0.425}H^{0.725}$$

da la superficie de un cuerpo humano S (en metros cuadrados) en términos de su peso W (en kilogramos) y su peso H (en centímetros). Calcule $\partial S/\partial W$ y $\partial S/\partial H$ cuando $W = 70$ kg y $H = 180$ cm. Interprete sus resultados.

55. Según la *ley del gas ideal*, el volumen V (en litros) de un gas ideal se relaciona con su presión P (en pascales) y temperatura T (en grados Kelvin) mediante la fórmula

$$V = \frac{kT}{P}$$

donde k es una constante. Demuestre que

$$\frac{\partial V}{\partial T} \cdot \frac{\partial T}{\partial P} \cdot \frac{\partial P}{\partial V} = -1$$

56. **Energía cinética de un cuerpo** La energía cinética K de un cuerpo cuya masa m y rapidez v está dada por

$$K = \frac{1}{2}mv^2$$

Demuestre que $\dfrac{\partial K}{\partial m} \cdot \dfrac{\partial^2 K}{\partial v^2} = K.$

Determine si el planteamiento de los ejercicios 57-60 es verdadero o falso. Si es verdadero, explique por qué lo es, si es falso, dé un ejemplo para demostrar por qué lo es.

57. Si $f_x(x, y)$ está definida en (a, b), entonces $f_y(x, y)$ deberá determinarse en (a, b).

58. Si $f_x(a, b) < 0$, entonces f es decreciente con respecto a x cerca de (a, b).

59. Si $f_{xy}(x, y)$ y $f_{yx}(x, y)$ ambas son continuas por todos los valores de x y y, entonces $f_{xy} = f_{yx}$ por todos los valores de x y y.

60. Si ambas f_{xy} y f_{yx} están definidas en (a, b) entonces f_{xx} y f_{yy} deberán estar definidas en (a, b).

12.2 Soluciones de los ejercicios de autoevaluación

1. $f_x = \dfrac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 2y^2$

$$f_y = \partial f/\partial y = -2x(2y) + 2y$$
$$= 2y(1 - 2x)$$

2. $f_x = \ln y + ye^x - 2x;\ f_y = \dfrac{x}{y} + e^x$

En particular,

$$f_x(0, 1) = \ln 1 + 1e^0 - 2(0) = 1$$

$$f_y(0, 1) = \frac{0}{1} + e^0 = 1$$

Estos resultados nos indican que en el punto $(0, 1)$, $f(x, y)$ aumenta 1 unidad por cada unidad que aumenta en la dirección de x, y y se mantiene constante; $f(x, y)$ también aumenta 1 unidad por cada una que aumenta en la dirección y, x se mantiene como constante.

3. De los resultados del ejercicio de autoevaluación 1,

$$f_x = 3x^2 - 2y^2$$

Por tanto,

$$f_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}(3x^2 - 2y^2) = 6x$$

$$f_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}(3x^2 - 2y^2) = -4y$$

También, de los resultados del ejercicio de autoevaluación 1,

$$f_y = 2y(1 - 2x)$$

De esta manera,

$$f_{yx} = \frac{\partial}{\partial x}[2y(1 - 2x)] = -4y$$

$$f_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}[2y(1 - 2x)] = 2(1 - 2x)$$

4. a. La productividad marginal de mano de obra cuando las cantidades gastadas tanto en mano de obra como en capital son x y y unidades, respectivamente, está dada por

$$f_x(x, y) = 60\left(\frac{1}{3}x^{-2/3}\right)y^{2/3} = 20\left(\frac{y}{x}\right)^{2/3}$$

En particular, la productividad marginal de la mano de obra requerida está dada por

$$f_x(125, 8) = 20\left(\frac{8}{125}\right)^{2/3} = 20\left(\frac{4}{25}\right)$$

o 3.2 unidades por unidad de aumento en el gasto en mano de obra, el gasto en capital se mantiene constante en 8 unidades. Enseguida calculamos

$$f_y(x, y) = 60x^{1/3}\left(\frac{2}{3}y^{-1/3}\right) = 40\left(\frac{x}{y}\right)^{1/3}$$

y deducimos que la productividad marginal requerida del capital está dada por

$$f_y(125, 8) = 40\left(\frac{125}{8}\right)^{1/3} = 40\left(\frac{5}{2}\right)$$

o 100 unidades por unidad en el incremento del gasto de capital, el gasto de mano de obra se mantiene constante en 125 unidades.

b. Los resultados del inciso (a) indican que el gobierno debería fomentar más el incremento de los gastos en capital más que en mano de obra.

USO DE LA TECNOLOGÍA

Encuentre las derivadas parciales en un punto dado

Suponga que $f(x, y)$ es una función de dos variables y que deseamos calcular

$$f_x(a, b) = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(a,\, b)}$$

Recuerde que en el cálculo $\partial f/\partial x$, pensamos en y como una entidad fija. Pero en esta situación, estamos evaluando $\partial f/\partial x$ en (a, b). Por tanto, establecemos que y es igual a b. Al hacerlo nos lleva a la función g de una variable, x, definida por

$$g(x) = f(x, b)$$

Sigue de la definición de la derivada parcial que

$$f_x(a, b) = g'(a)$$

De esta manera, el valor de la derivada parcial $\partial f/\partial x$ en un punto dado en (a, b) puede determinarse al calcular la derivada de la función de una variable. En particular, esta última puede encontrarse al usar la operación numérica de la derivada de la calculadora graficadora. Encontramos que $f_y(a, b)$ en forma similar.

EJEMPLO 1 Sea $f(x, y) = (1 + xy^2)^{3/2}e^{x^2y}$. Encuentre (a) $f_x(1, 2)$ y (b) $f_y(1, 2)$.

Solución

a. Defina $g(x) = f(x, 2) = (1 + 4x)^{3/2}e^{2x^2}$. Utilizando la operación numérica de la derivada para encontrar $g'(1)$, obtenemos

$$f_x(1, 2) = g'(1) \approx 429.585835$$

b. Defina $h(y) = f(1, y) = (1 + y^2)^{3/2}e^{y}$. Utilizando la operación numérica de la derivada para encontrar $h'(2)$, obtenemos

$$f_y(1, 2) = h'(2) \approx 181.7468642$$

■

EJERCICIOS CON TECNOLOGÍA

Calcule lo siguiente en el punto dado:

$$\frac{\partial f}{\partial x} \quad \text{y} \quad \frac{\partial f}{\partial y}$$

1. $f(x, y) = \sqrt{x}(2 + xy^2)^{1/3}$; (1, 2)
2. $f(x, y) = \sqrt{xy}\,(1 + 2xy)^{2/3}$; (1, 4)
3. $f(x, y) = \dfrac{x + y^2}{1 + x^2y}$; (1, 2)
4. $f(x, y) = \dfrac{xy^2}{(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2}$; (4, 1)
5. $f(x, y) = e^{-xy^2}(x + y)^{1/3}$; (1, 1)
6. $f(x, y) = \dfrac{\ln(\sqrt{x} + y^2)}{x^2 + y^2}$; (4, 1)

12.3 Máximos y mínimos de las funciones de varias variables

Máximos y mínimos

En el capítulo 10 vimos que la solución de un problema a menudo se reduce al determinar los valores extremos de una función de una variable. Sin embargo, en la práctica las situaciones también surgen en cuanto un problema se resuelve al determinar el valor máximo o mínimo absoluto de una función de dos o más variables.

Por ejemplo, suponga que Scandi Company fabrica escritorios para computadora en versiones ensambladas y sin ensamblar. Por tanto, su utilidad P es una función del número de unidades ensambladas, x, y y el número de unidades sin ensamblar fabricadas y vendidas por semana; esto es, $P = f(x, y)$. Una cuestión de suma importancia para el fabricante es, ¿cuántos escritorios ensamblados y sin ensamblar debería la empresa fabricar por semana para maximizar su utilidad semanal? En términos matemáticos, el problema se resuelve al determinar los valores de x y y que harán de $f(x, y)$ un máximo.

En esta sección enfocaremos nuestra atención en encontrar los extremos de una función de dos variables. Como en el caso de la función de una variable, distinguimos entre los extremos relativos (o locales) y los extremos absolutos de una función de dos variables.

Extremos relativos de una función de dos variables

Sea f una función definida sobre una región R que contiene el punto (a, b). Luego, f tiene un **máximo relativo** en (a, b) si $f(x, y) \leq f(a, b)$ para todos los puntos (x, y) que están lo suficientemente cerca de (a, b). El número $f(a, b)$ se llama **valor máximo relativo**. De igual manera, f tiene un **mínimo relativo** en (a, b) con un **valor mínimo relativo** $f(a, b)$ si $f(x, y) \geq f(a, b)$, para todos los puntos (x, y) que están lo suficientemente cerca de (a, b).

Hablando sin precisión, f tiene un máximo relativo en (a, b) si el punto $(a, b, f(a, b))$ es el punto más alto en la gráfica de f cuando se compara con todos los puntos cercanos. Una interpretación similar se sostiene para un mínimo relativo.

Si las desigualdades en esta última definición son sostenidas por *todos* los puntos en (x, y) en el dominio de f, entonces f tiene un **máximo absoluto** (o **mínimo absoluto**) en (a, b) con un **valor máximo absoluto** (o un **valor mínimo absoluto**) $f(a, b)$. La figura 16 muestra la gráfica de una función con máximos relativos en (a, b) y (e, f) y un mínimo relativo en (c, d). El máximo absoluto de f ocurre en (e, f) y el mínimo absoluto de f ocurre en (g, h).

Observe que en el caso de una función de una variable, un extremo relativo (máximo o mínimo relativo) puede o no ser un extremo absoluto.

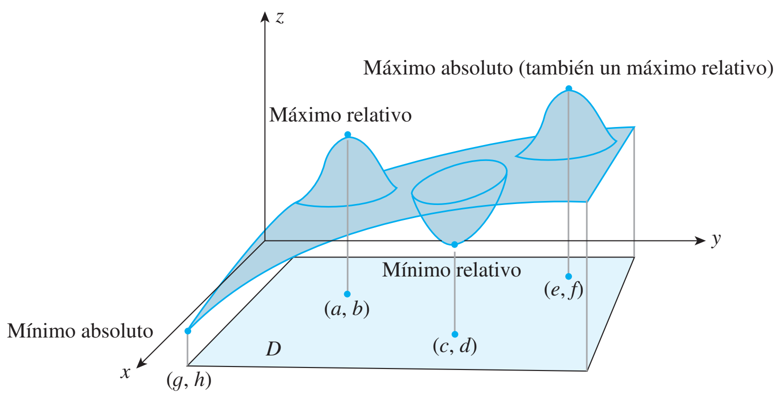


FIGURA 16

Ahora volvamos nuestra atención a estudiar los extremos relativos de una función. Suponga que una función diferenciable $f(x, y)$ de dos variables tiene un máximo relativo (mínimo relativo) en un punto (a, b) en el dominio de f. De la figura 17 es claro que en el punto (a, b) la pendiente de las "líneas tangentes" a la superficie en cualquier dirección debe ser cero. En particular, esto implica que ambas

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) \quad \text{y} \quad \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)$$

deben ser cero.

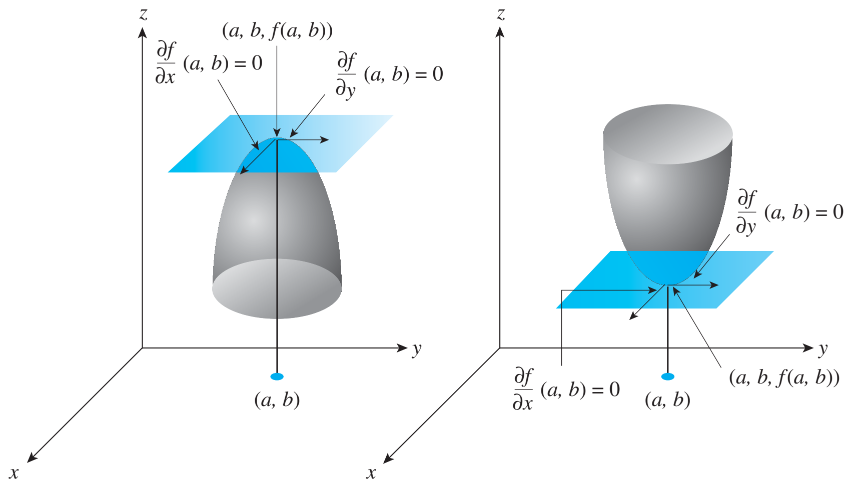


FIGURA **17**

(a) f tiene un máximo relativo en (a, b). **(b)** f tiene un mínimo relativo en (a, b).

Al fin estamos tentados para saltar a la conclusión que una función diferenciable f satisface ambas condiciones

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = 0$$

en un punto (a, b) debe tener un extremo relativo en el punto (a, b), examinemos la gráfica de las funciones f representada en la figura 18. Aquí ambas

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = 0$$

pero f no tiene un máximo relativo ni un mínimo relativo en el punto (a, b) porque algunos puntos cercanos son más altos y algunos más bajos que el punto $(a, b, f(a, b))$. El punto $(a, b, f(a, b))$ se llama un **punto silla**.

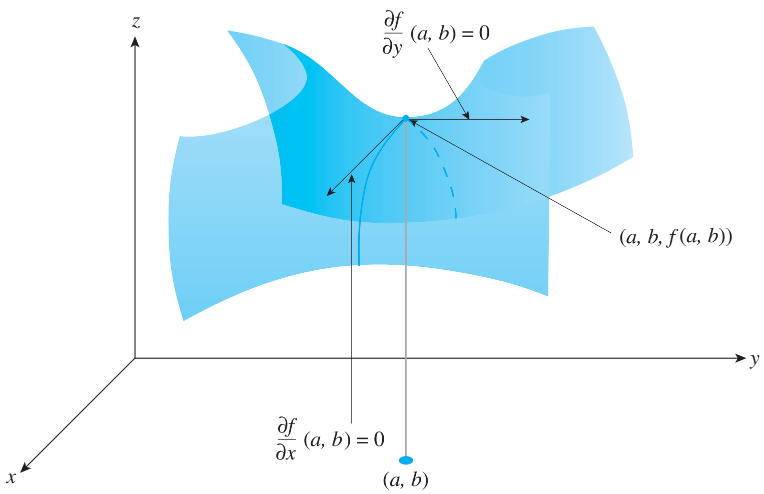


FIGURA **18**
El punto $(a, b, f(a, b))$ se llama punto silla.

PORTAFOLIO Kirk Hoiberg

PUESTO Director de Servicios Corporativos Globales
INSTITUCIÓN CB Richard Ellis (CBRE)

CBRE es la firma de servicios comerciales de bienes inmuebles más grande del mundo. A menudo las grandes empresas poseen considerables propiedades inmobiliarias y tienen que ocuparse, inevitablemente, de las actividades cotidianas, como son la toma de decisiones complejas y riesgosas acerca de las propiedades de bienes inmuebles. Sin embargo, la mayoría de las empresas desearía poder enfocarse sólo en su negocio central. Aquí es en donde nosotros entramos. Los servicios corporativos globales proporcionan estrategias corporativas amplias diseñadas para inmobiliarias, así como amplias soluciones de *outsourcing* de bienes raíces para organizaciones líderes de todo el mundo. Nos ocupamos de sofisticados negocios de más de 40% de las empresas Fortune 500 que son nuestros clientes, los cuales exigen un análisis riguroso y que apoyan nuestras recomendaciones y acciones. Hacer esto sin el uso regular de habilidades cuantitativas y matemáticas sería imposible.

Por ejemplo, cuando un cliente necesita localizar o adquirir nuevas instalaciones en algún lugar del mundo, utilizamos modelos de álgebra lineal para optimizar al mismo tiempo funciones multivariables contra una amplia gama de insumos y restricciones elaboradas de mercados de trabajo, mercados de propiedad, macroeconomía, la cadena de suministro del cliente y de muchas otras áreas más. Modelamos regularmente, a nivel local, el ciclo inmobiliario en distintas ciudades.

Como pueden ver, el reino de los bienes raíces ofrece numerosas oportunidades para el uso de las matemáticas aplicadas. Aunque no siempre es evidente en la universidad, estas habilidades desempeñan un papel crucial en el desarrollo de un negocio exitoso. En el futuro, la capacidad para comprender e interpretar la información generada por estas técnicas puede ser crucial para su propio éxito.

Finalmente, al examinar la gráfica de la función f representada en la figura 19, usted deberá convencerse de que f tiene un máximo relativo en el punto (a, b). Pero ambas $\partial f/\partial x$ y $\partial f/\partial y$ fallan al definirse en (a, b).

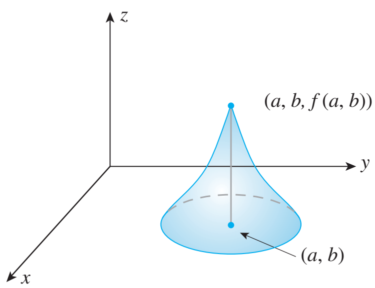


FIGURA 19
f tiene un máximo relativo en (a, b), pero no lo tiene en $\partial f/\partial x$ o $\partial f/\partial y$ así como tampoco existe en (a, b).

Para resumir, una función f de dos variables sólo puede tener un extremo relativo en un punto (a, b) en su dominio donde $\partial f/\partial x$ y $\partial f/\partial y$ ambos existen y son iguales a cero en (a, b), o por lo menos una de las derivadas parciales no existe. Como en el caso de una variable, nos referimos a un punto en el dominio de f que *puede* ascender a un extremo relativo como un punto crítico. La definición exacta es la siguiente.

Punto crítico de f

Un **punto crítico** de f es un punto (a, b) en el dominio de f tal que ambas

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = 0$$

o por lo menos una de las derivadas parciales no existe.

Para determinar la naturaleza de un punto crítico de una función $f(x, y)$ de dos variables, utilizamos la segunda derivada parcial de f. A la prueba resultante, que nos ayuda a clasificar estos puntos, se le llama **prueba de la segunda derivada** y se incorpora en el siguiente procedimiento para determinar y clasificar los extremos relativos de f.

Determinación de los extremos relativos

1. Encuentre los puntos críticos de $f(x, y)$ al resolver el sistema de ecuaciones simultáneas.

$$f_x = 0$$
$$f_y = 0$$

2. La prueba de la segunda derivada: sea

$$D(x, y) = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2$$

Entonces,

a. $D(a, b) > 0$ y $f_{xx}(a, b) < 0$ implica que $f(x, y)$ tiene un **máximo relativo** en el punto (a, b).

b. $D(a, b) > 0$ y $f_{xx}(a, b) > 0$ implica que $f(x, y)$ tiene un **mínimo relativo** en el punto (a, b).

c. $D(a, b) < 0$ implica que $f(x, y)$ no tiene un máximo relativo ni un mínimo relativo en el punto (a, b).

d. $D(a, b) = 0$ implica que la prueba es inconclusa, así que se utilizarán algunas otras técnicas para resolver el problema.

EJEMPLO 1 Encuentre los extremos relativos de la función

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

Solución Tenemos

$$f_x = 2x$$
$$f_y = 2y$$

Para encontrar el (los) punto(s) crítico(s) de f, establecemos que $f_x = 0$ y $f_y = 0$ resolvemos el sistema de ecuaciones simultáneas

$$2x = 0$$
$$2y = 0$$

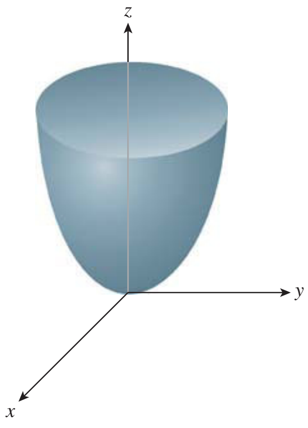


FIGURA 20
La gráfica de $f(x, y) = x^2 + y^2$.

obteniendo $x = 0$, $y = 0$ o $(0, 0)$, como el único punto crítico de f. A continuación aplicamos la prueba de la segunda derivada para determinar la naturaleza del punto crítico $(0, 0)$. Calculamos

$$f_{xx} = 2 \qquad f_{xy} = 0 \qquad f_{yy} = 2$$

y

$$D(x, y) = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = (2)(2) - 0 = 4$$

En particular, $D(0, 0) = 4$. Puesto que $D(0, 0) > 0$ y $f_{xx}(0, 0) = 2 > 0$, concluimos que $f(x, y)$ tiene un mínimo relativo en el punto $(0, 0)$. El valor del mínimo relativo es 0, también sucede al ser el mínimo absoluto de f. La gráfica de la función f mostrada en la figura 20 confirma dichos resultados. ■

EJEMPLO 2 Encuentre los extremos relativos de la función

$$f(x, y) = 3x^2 - 4xy + 4y^2 - 4x + 8y + 4$$

Solución Tenemos

$$f_x = 6x - 4y - 4$$
$$f_y = -4x + 8y + 8$$

Para encontrar los puntos críticos de f, establecemos $f_x = 0$ y $f_y = 0$ y resolvemos el sistema de ecuaciones simultáneas resultante.

$$\begin{aligned} 6x - 4y &= 4 \\ -4x + 8y &= -8 \end{aligned}$$

Al multiplicar la primera ecuación por 2 y la segunda por 3, obtenemos el sistema equivalente.

$$\begin{aligned} 12x - 8y &= 8 \\ -12x + 24y &= -24 \end{aligned}$$

Al sumar las dos ecuaciones nos da $16y = -16$, o $y = -1$. Sustituimos este valor por y dentro de cada ecuación en el sistema para obtener $x = 0$. Así, el único punto crítico de f es el punto $(0, -1)$. Después aplicamos la prueba de la segunda derivada para determinar si el punto $(0, -1)$ da una elevación a un extremo relativo de f. Calculamos

$$f_{xx} = 6 \qquad f_{xy} = -4 \qquad f_{yy} = 8$$

y

$$D(x, y) = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = (6)(8) - (-4)^2 = 32$$

Puesto que, $D(0, -1) = 32 > 0$ y $f_{xx}(0, -1) = 6 > 0$, concluimos que $f(x, y)$ tiene un mínimo relativo en el punto $(0, -1)$. El valor de $f(x, y)$ en el punto $(0, -1)$ está dado por

$$f(0, -1) = 3(0)^2 - 4(0)(-1) + 4(-1)^2 - 4(0) + 8(-1) + 4 = 0$$

Explore y analice

Suponga que $f(x, y)$ tiene un extremo relativo (máximo relativo o mínimo relativo) en un punto (a, b). Sea $g(x) = f(x, b)$ y $h(y) = f(a, y)$. Asumiendo que f y g son diferenciables, explique por qué $g'(a) = 0$ y $h'(b) = 0$. Explique por qué estos resultados son equivalentes a las condiciones $f_x(a, b) = 0$ y $f_y(a, b) = 0$.

EJEMPLO 3 Encuentre los extremos relativos de la función

$$f(x, y) = 4y^3 + x^2 - 12y^2 - 36y + 2$$

Solución Para encontrar los puntos críticos de f, establecemos $f_x = 0$ y $f_y = 0$ simultáneamente, obteniendo

$$f_x = 2x = 0$$
$$f_y = 12y^2 - 24y - 36 = 0$$

La primera ecuación implica que $x = 0$. La segunda implica que

$$y^2 - 2y - 3 = 0$$
$$(y + 1)(y - 3) = 0$$

esto es, $y = -1$ o 3. Sin embargo, existen dos puntos críticos de la función f, a saber, $(0, -1)$ y $(0, 3)$.

Después, aplicamos la prueba de la segunda derivada para determinar la naturaleza de cada uno de los dos puntos críticos. Calculamos

$$f_{xx} = 2 \qquad f_{xy} = 0 \qquad f_{yy} = 24y - 24 = 24(y - 1)$$

Por tanto,

$$D(x, y) = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = 48(y - 1)$$

Para el punto $(0, -1)$

$$D(0, -1) = 48(-1 - 1) = -96 < 0$$

Explore y analice

1. Refiérase a la prueba de la segunda derivada. ¿La condición $f_{xx}(a, b) < 0$ en el inciso 2a puede ser reemplazada por la condición $f_{yy}(a, b) < 0$? Explique su respuesta. ¿Qué hay de la condición $f_{xx}(a, b) > 0$ en el inciso 2b?
2. Sea $f(x, y) = x^4 + y^4$.
   a. Demuestre que (0, 0) es un punto crítico de f y que $D(0, 0) = 0$.
   b. Explique por qué f tiene un mínimo (de hecho, un absoluto) relativo en (0, 0). ¿Esto contradice la prueba de la segunda derivada? Explique su respuesta.

Puesto que $D(0, -1) < 0$, concluimos que el punto $(0, -1)$ da un punto silla de f. Para el punto (0, 3).

$$D(0, 3) = 48(3 - 1) = 96 > 0$$

Puesto que $D(0, 3) > 0$ y $f_{xx}(0, 3) > 0$, concluimos que la función f tiene un mínimo relativo en el punto (0, 3). Además, puesto que

$$\begin{aligned} f(0, 3) &= 4(3)^3 + (0)^2 - 12(3)^2 - 36(3) + 2 \\ &= -106 \end{aligned}$$

vemos que el valor mínimo relativo de f es -106. ■

Como en el caso de un problema de optimización práctica que incluye una función de una variable, la solución de un problema de optimización que, involucra una función de varias variables se llama encontrar el extremo *absoluto* de la función. Determinar el extremo absoluto de una función de varias variables es más difícil que sólo encontrar los extremos relativos de una función. Sin embargo, en muchas ocasiones el extremo absoluto de una función coincide en este momento con el extremo relativo mayor de la función que aparece en el interior de su dominio. Asumimos que los problemas considerados aquí pertenecen a esta categoría. Además, la existencia del extremo absoluto (solución) de un problema práctico, a menudo se deduce de la naturaleza del problema geométrico o físico.

VIDEO

EJEMPLO DE APLICACIÓN 4 Maximización de utilidades El total de los ingresos semanales (en dólares) que Acrosonic obtiene al fabricar y vender sus sistemas de estantes con altavoces está dada por:

$$R(x, y) = -\frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{8}y^2 - \frac{1}{4}xy + 300x + 240y$$

donde x denota el número completo de unidades ensambladas y y el número de kits fabricados y vendidos cada semana. El total del costo semanal atribuible a la fabricación de estos altavoces es

$$C(x, y) = 180x + 140y + 5{,}000$$

dólares, en donde x y y tienen el mismo significado como antes. Determine cuántas unidades ensambladas y cuántos kits debería fabricar Acrosonic por semana para maximizar sus utilidades.

Solución La contribución de las utilidades semanales de Acrosonic derivadas de la producción y venta de los sistemas de estantes con altavoces está dada por

$$\begin{aligned} P(x, y) &= R(x, y) - C(x, y) \\ &= \left(-\frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{8}y^2 - \frac{1}{4}xy + 300x + 240y\right) - (180x + 140y + 5{,}000) \\ &= -\frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{8}y^2 - \frac{1}{4}xy + 120x + 100y - 5{,}000 \end{aligned}$$

Para encontrar el máximo relativo de la función de utilidad $P(x, y)$, primero localizamos el (los) punto(s) crítico(s) de P. Establecemos que $P_x(x, y)$ y $P_y(x, y)$ es igual a cero, obtenemos

$$P_x = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}y + 120 = 0$$

$$P_y = -\frac{3}{4}y - \frac{1}{4}x + 100 = 0$$

Al resolver la primera de estas ecuaciones para y produce

$$y = -2x + 480$$

el cual, sobre la sustitución dentro de la segunda ecuación, produce

$$\begin{aligned} -\frac{3}{4}(-2x + 480) - \frac{1}{4}x + 100 &= 0 \\ 6x - 1{,}440 - x + 400 &= 0 \\ x &= 208 \end{aligned}$$

Sustituimos este valor de x en la ecuación $y = -2x + 480$ para obtener

$$y = 64$$

Sin embargo, la función P tiene un único punto crítico (208, 64). Para demostrar que el punto (208, 64) es una solución a nuestro problema, utilizamos la prueba de la segunda derivada. Calculamos

$$P_{xx} = -\frac{1}{2} \qquad P_{xy} = -\frac{1}{4} \qquad P_{yy} = -\frac{3}{4}$$

Así,

$$D(x, y) = \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{4}\right) - \left(-\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{3}{8} - \frac{1}{16} = \frac{5}{16}$$

En especial, $D(208, 64) = 5/16 > 0$.

Puesto que, $D(208, 64) > 0$ y $P_{xx}(208, 64) < 0$, el punto (208, 64) permanece en un máximo relativo de P. Este máximo relativo es también el máximo absoluto de P. Concluimos que Acrosonic puede maximizar sus utilidades semanalmente al fabricar 208 unidades ensambladas y 64 kits de sus sistemas de estantes con altavoces. La utilidad máxima semanal realizable de la fabricación y venta de esos sistemas de estantes con altavoces está dada por

$$\begin{aligned} P(208, 64) &= -\frac{1}{4}(208)^2 - \frac{3}{8}(64)^2 - \frac{1}{4}(208)(64) \\ &\quad + 120(208) + 100(64) - 5{,}000 \\ &= 10{,}680 \end{aligned}$$

o \$10,680. ■

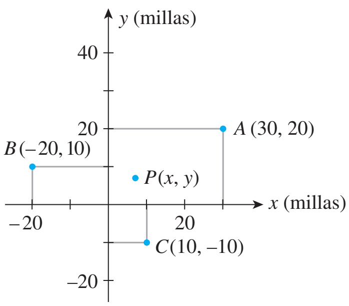


FIGURA 21
Ubicación de un sitio para la estación de televisión.

EJEMPLO DE APLICACIÓN 5 Ubicación de un sitio para la estación de televisión Una estación de televisión servirá para las poblaciones *A, B* y *C,* cuyas localidades se muestran en la figura 21. Determine un lugar para la ubicación de la estación si la suma de los cuadrados de las distancias de cada pueblo se minimiza.

Solución Suponga que el sitio requerido está localizado en el punto $P(x, y)$. Con la ayuda de la fórmula de la distancia, encontramos que el cuadrado de la distancia del pueblo A al lugar es

$$(x - 30)^2 + (y - 20)^2 \qquad d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

Las distancias respectivas de los pueblos B y C al lugar son encontradas de manera similar, entonces la suma de los cuadrados de las distancias de cada pueblo al lugar está dada por

$$\begin{aligned} f(x, y) &= (x - 30)^2 + (y - 20)^2 + (x + 20)^2 \\ &\quad + (y - 10)^2 + (x - 10)^2 + (y + 10)^2 \end{aligned}$$

Para encontrar el mínimo relativo de $f(x, y)$, primero encontramos el (los) punto(s) crítico(s) de f. Utilizando la regla de la cadena para encontrar $f_x(x, y)$ y $f_y(x, y)$ y establecer cada uno igual a cero, obtenemos

$$\begin{aligned} f_x &= 2(x - 30) + 2(x + 20) + 2(x - 10) = 6x - 40 = 0 \\ f_y &= 2(y - 20) + 2(y - 10) + 2(y + 10) = 6y - 40 = 0 \end{aligned}$$

del cual deducimos que $(\frac{20}{3}, \frac{20}{3})$ es un único punto crítico de f. Puesto que,

$$f_{xx} = 6 \qquad f_{xy} = 0 \qquad f_{yy} = 6$$

tenemos

$$D(x, y) = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = (6)(6) - 0 = 36$$

Puesto que $D(\frac{20}{3}, \frac{20}{3}) > 0$ y $f_{xx}(\frac{20}{3}, \frac{20}{3}) > 0$, concluimos que el punto $(\frac{20}{3}, \frac{20}{3})$ permanece en un mínimo relativo de f, de esta manera, el lugar requerido tiene coordenadas $x = \frac{20}{3}$ y $y = \frac{20}{3}$.

12.3 Ejercicios de autoevaluación

1. Sea $f(x, y) = 2x^2 + 3y^2 - 4xy + 4x - 2y + 3$.
   a. Encuentre el punto crítico de f.
   b. Utilice la prueba de la segunda derivada para clasificar la naturaleza del punto crítico.
   c. Encuentre el extremo relativo de f, si existe.

2. Robertson Controls fabrica dos modelos básicos de termostatos, uno mecánico estándar y uno electrónico de lujo. Los ingresos mensuales de Robertson (en cientos de dólares) son

$$R(x, y) = -\frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{4}xy + 20x + 60y$$

donde x (en unidades de un ciento) denota el número de termostatos mecánicos fabricados, y y (en unidades de un ciento) el número de termostatos electrónicos que fabrica cada mes. El costo mensual de la fabricación de estos termostatos es

$$C(x, y) = 7x + 20y + 280$$

cientos de dólares. Encuentre cuántos termostatos de cada modelo fabricaría Robertson cada mes para maximizar sus utilidades. ¿Cuál es la utilidad máxima?

Las soluciones de los ejercicios de autoevaluación 12.3 se encuentran en la página 859.

12.3 Preguntas de concepto

1. Explique los términos (a) máximo relativo de una función $f(x, y)$ y (b) el máximo absoluto de una función $f(x, y)$.

2. **a.** ¿Cuál es punto crítico de una función $f(x, y)$?
   b. Explique el papel de un punto crítico al determinar el extremo relativo de una función de dos variables.

3. Explique cómo se utiliza la prueba de la segunda derivada para determinar los extremos relativos de una función de dos variables.

12.3 Ejercicios

Encuentre el (los) punto(s) crítico(s) de una función en los ejercicios 1-20. Utilice, de ser posible, la prueba de la segunda derivada para clasificar la naturaleza de cada punto. Finalmente, determine los extremos relativos de la función.

1. $f(x, y) = 1 - 2x^2 - 3y^2$
2. $f(x, y) = x^2 - xy + y^2 + 1$
3. $f(x, y) = x^2 - y^2 - 2x + 4y + 1$
4. $f(x, y) = 2x^2 + y^2 - 4x + 6y + 3$
5. $f(x, y) = x^2 + 2xy + 2y^2 - 4x + 8y - 1$
6. $f(x, y) = x^2 - 4xy + 2y^2 + 4x + 8y - 1$
7. $f(x, y) = 2x^3 + y^2 - 9x^2 - 4y + 12x - 2$
8. $f(x, y) = 2x^3 + y^2 - 6x^2 - 4y + 12x - 2$
9. $f(x, y) = x^3 + y^2 - 2xy + 7x - 8y + 4$
10. $f(x, y) = 2y^3 - 3y^2 - 12y + 2x^2 - 6x + 2$
11. $f(x, y) = x^3 - 3xy + y^3 - 2$
12. $f(x, y) = x^3 - 2xy + y^2 + 5$
13. $f(x, y) = xy + \frac{4}{x} + \frac{2}{y}$
14. $f(x, y) = \frac{x}{y^2} + xy$
15. $f(x, y) = x^2 - e^{y^2}$
16. $f(x, y) = e^{x^2-y^2}$
17. $f(x, y) = e^{x^2+y^2}$
18. $f(x, y) = e^{xy}$
19. $f(x, y) = \text{en}(1 + x^2 + y^2)$
20. $f(x, y) = xy + \text{en}\, x + 2y^2$

21. **Maximización de utilidades** El ingreso total mensual (en dólares) de Country Workshop obtenido en la fabricación y venta de sus pupitres de tapa corrediza está dado por

$$R(x, y) = -0.2x^2 - 0.25y^2 - 0.2xy + 200x + 160y$$

donde x denota el número de unidades terminadas y y el número de unidades sin terminar fabricadas y vendidas semanalmente. El costo total semanal atribuible a la fabricación de estos pupitres está dado por

$$C(x, y) = 100x + 70y + 4{,}000$$

dólares. Determine cuántas unidades terminadas y cuántas sin terminar debería fabricar la empresa cada semana para maximizar sus utilidades. ¿Cuál es la utilidad máxima a obtener?

22. **Maximización de utilidades** El ingreso total diario (en dólares) que Weston Publishing obtiene al publicar y vender sus diccionarios en lengua inglesa está dado por

$$R(x, y) = -0.005x^2 - 0.003y^2 - 0.002xy + 20x + 15y$$

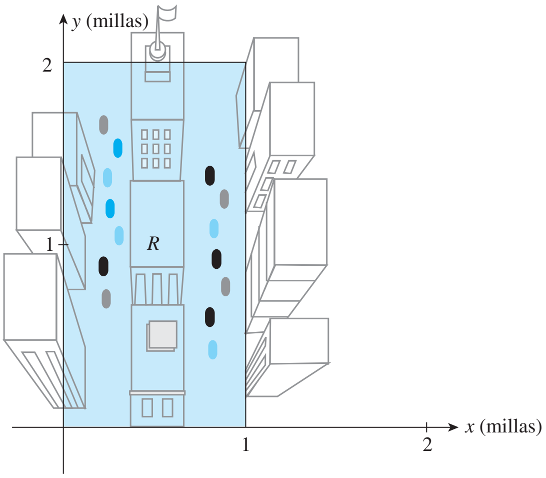
donde x denota el número de ejemplares de la edición de lujo y y el número de ejemplares de la versión estándar que son publicados y vendidos diariamente. El costo total diario de publicar estos diccionarios está dado por

$$C(x, y) = 6x + 3y + 200$$

dólares. Determine cuántos ejemplares de la versión de lujo y cuántos de la versión estándar debería publicar Weston cada día para maximizar sus utilidades. ¿Cuál es la utilidad máxima a obtener?

23. **Precio máximo** La región rectangular R mostrada en la figura acompañante representa el distrito financiero de una ciudad. El precio del terreno dentro del distrito es aproximado por la función

$$p(x, y) = 200 - 10\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - 15(y - 1)^2$$



donde $p(x, y)$ es el precio del terreno en el punto (x, y) en dólares por pie cuadrado y x y y son las medidas en millas. ¿En qué punto dentro del distrito financiero el precio del terreno es el más alto?

24. **Maximización de utilidades** Importaciones C&G importa dos tipos de vino blanco, uno de Alemania y otro de Italia. El vino alemán tiene un costo de \$4 por botella, y el italiano \$3 por botella. Se ha calculado que si el vino alemán se vende al menudeo en p dólares por botella y el vino italiano en q dólares por botella, entonces

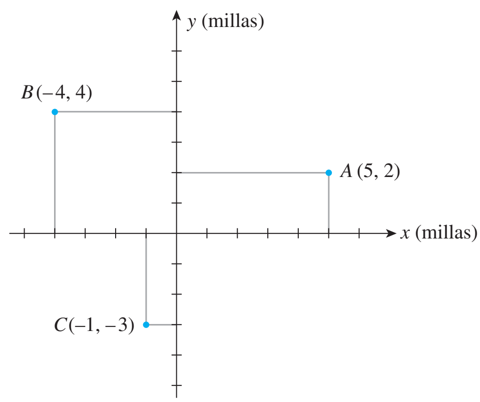
$$2{,}000 - 150p + 100q$$

botellas del vino alemán y

$$1{,}000 + 80p - 120q$$

botellas del vino italiano se vendieran cada semana. Determine el precio unitario para cada marca que le permitirá a C&G obtener la máxima utilidad semanal posible.

25. **Determinación del sitio óptimo** Una estación auxiliar de suministro eléctrico atenderá a tres comunidades, A, B y C, cuyas ubicaciones respectivas se muestran en la figura acompañante. Determine dónde deberían estar localizadas si la suma de cuadrados de las distancias de cada comunidad al lugar se minimiza.



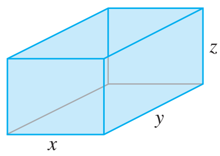
26. **Empaque** Una caja rectangular abierta que tiene un volumen de 108 pulg^3 será construida a partir de una hoja delgada. Encuentre las dimensiones de dicha caja si la cantidad de material utilizado en su construcción es el mínimo.
Sugerencia: Sean las dimensiones de la caja x'' por y'' por z''. Entonces, $xyz = 108$ y la cantidad de material utilizada está dada por $S = xy + 2yz + 2xz$. Demuestre que

$$S = f(x, y) = xy + \frac{216}{x} + \frac{216}{y}$$

Minimice $f(x, y)$.

27. **Empaque** Una caja rectangular abierta de un área de superficie de 300 pulg^2 será construida a partir de una hoja delgada. Encuentre las dimensiones de la caja si el volumen de la misma es lo más grande posible. ¿Cuál es el volumen máximo?

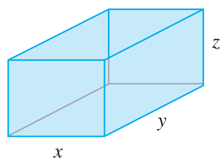
Sugerencia: Sean las dimensiones de la caja $x \times y \times z$ (vea la siguiente figura). Entonces la superficie del área es $xy + 2xz + 2yz$ y su volumen xyz.



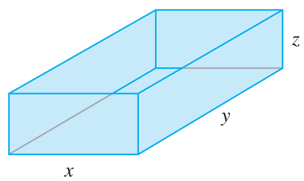
28. **Empaque** El reglamento postal especifica que la longitud y la dimensión combinada de un paquete enviado por paquetería postal no debe exceder 130 pulg. Encuentre las dimensiones del paquete rectangular que tendría el mayor volumen posible bajo estos lineamientos.
Sugerencia: Sean las dimensiones de la caja x'' por y'' por z'' (vea la siguiente figura). Entonces, $2x + 2z + y = 130$, y el volumen $V = xyz$. Demuestre que:

$$V = f(x, z) = 130xz - 2x^2z - 2xz^2$$

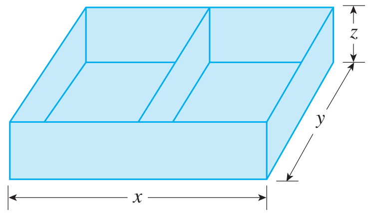
Maximice $f(x, z)$.



29. **Minimización de los costos de calefacción y refrigeración** Un edificio de forma rectangular tendrá un volumen de 12,000 pies^3. Se estima que los costos anuales de calefacción y refrigeración serán de \$2 por pie cuadrado para el techo, \$4 por pie cuadrado para el frente y la parte de atrás y \$3 por pie cuadrado para los lados. Encuentre las dimensiones del edificio que resultarán en un costo anual mínimo de calefacción y refrigeración. ¿Cuál es el costo anual mínimo?



30. **Empaque** Una caja abierta que tiene un volumen de 48 pulg^3 está por construirse. Si la caja incluirá una división paralela a un lado de la caja, como se muestra en la figura, y la cantidad de material empleada será la mínima, ¿cuáles serían las dimensiones de la caja?



En los ejercicios 31-36, determine si el enunciado es verdadero o falso. Si es verdadero, explique por qué lo es, si es falso dé un ejemplo que demuestre por qué lo es.

31. Si $f_x(a, b) = 0$ y $f_y(a, b) = 0$, entonces f debe tener un extremo relativo en (a, b).

32. Si (a, b) es un punto crítico de f y ambas condiciones $f_{xx}(a, b) < 0$ y $f_{yy}(a, b) < 0$ se mantienen, entonces f tiene un máximo relativo en (a, b).

33. Si $f(x, y)$ tiene un máximo relativo en (a, b), entonces $f_x(a, b) = 0$ y $f_y(a, b) = 0$.

34. Sea $h(x, y) = f(x) + g(y)$. Si $f(x) > 0$ y $g(y) < 0$, entonces h no puede tener un máximo o un mínimo relativo en cualquier punto.

35. Si $f(x, y)$ satisface $f_{xx}(a, b) \neq 0$, $f_{xy}(a, b) = 0$, $f_{yy}(a, b) \neq 0$ y $f_{xx}(a, b) + f_{yy}(a, b) = 0$ en el punto crítico (a, b) de f entonces f no puede tener un extremo relativo en (a, b).

36. Suponga que $h(x, y) = f(x) + g(y)$, donde f y g tienen cerca una segunda derivada continua en a y b, respectivamente. Si a es un número crítico de f, b es un número crítico de g, y $f''(a)\,g''(b) > 0$, entonces h tienen un extremo relativo en (a, b).

12.3 Soluciones de los ejercicios de autoevaluación

1. **a.** Para encontrar el (los) punto(s) crítico(s) de f, resolvemos el sistema de ecuaciones

$$f_x = 4x - 4y + 4 = 0$$

$$f_y = -4x + 6y - 2 = 0$$

obteniendo $x = -2$ y $y = -1$. Así, el único punto crítico de f es el punto $(-2, -1)$.

b. Tenemos $f_{xx} = 4$, $f_{xy} = -4$ y $f_{yy} = 6$, así que

$$\begin{aligned} D(x, y) &= f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 \\ &= (4)(6) - (-4)^2 = 8 \end{aligned}$$

Puesto que $D(-2, -1) > 0$ y $f_{xx}(-2, -1) > 0$, concluimos que f tiene un punto mínimo relativo en el punto $(-2, -1)$.

c. El valor mínimo relativo de $f(x, y)$ y en el punto $(-2, -1)$ es

$$\begin{aligned} f(-2, -1) &= 2(-2)^2 + 3(-1)^2 - 4(-2)(-1) \\ &\quad + 4(-2) - 2(-1) + 3 \\ &= 0 \end{aligned}$$

2. La utilidad mensual de Robertson es

$$\begin{aligned} P(x, y) &= R(x, y) - C(x, y) \\ &= \left(-\frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{4}xy + 20x + 60y\right) - (7x + 20y + 280) \\ &= -\frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{4}xy + 13x + 40y - 280 \end{aligned}$$

El punto crítico de P se encuentra al resolver el sistema

$$P_x = -\frac{1}{4}x - \frac{1}{4}y + 13 = 0$$

$$P_y = -\frac{1}{4}x - y + 40 = 0$$

dando $x = 16$ y $y = 36$. Entonces, (16, 36) es el punto crítico de P. Después,

$$P_{xx} = -\frac{1}{4} \qquad P_{xy} = -\frac{1}{4} \qquad P_{yy} = -1$$

y

$$\begin{aligned} D(x, y) &= P_{xx}P_{yy} - P_{xy}^2 \\ &= \left(-\frac{1}{4}\right)(-1) - \left(-\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{3}{16} \end{aligned}$$

Puesto que, $D(16, 36) > 0$ y $P_{xx}(16, 36) < 0$, el punto (16, 36) produce un máximo relativo de P. Concluimos que la utilidad mensual se maximiza al fabricar 1,600 termostatos mecánicos y 3,600 electrónicos cada mes. La utilidad mensual máxima realizable es

$$\begin{aligned} P(16, 36) &= -\frac{1}{8}(16)^2 - \frac{1}{2}(36)^2 - \frac{1}{4}(16)(36) \\ &\quad + 13(16) + 40(36) - 280 \\ &= 544 \end{aligned}$$

o $54,400.

CAPÍTULO 12 Resumen de los términos principales

TÉRMINOS

bienes complementarios (842)
bienes sustitutos (842)
curva de nivel (831)
derivadas parciales de segundo orden de f (844)
dominio (828)
función de dos variables (828)
función de producción Cobb-Douglas (841)
máximo absoluto (850)
máximo relativo (850)
mínimo absoluto (850)
mínimo relativo (850)
primera derivada parcial de f (838)
productividad marginal del capital (841)
productividad marginal del trabajo (841)
punto crítico (852)
prueba de la segunda derivada (853)
punto silla (851)
sistema cartesiano de coordenadas tridimensionales (830)
valor máximo absoluto (850)
valor máximo relativo (850)
valor mínimo absoluto (850)
valor mínimo relativo (850)

CAPÍTULO 12 Preguntas de revisión de conceptos

Llene los espacios en blanco.

1. El dominio de una función f de dos variables es un subconjunto del _____ plano. La regla de f se asocia con cada _____ en el dominio de f uno y sólo uno _____ _____ indicado por $z =$ _____.

2. Si la función f tiene una regla $z = f(x, y)$, entonces, x y y son llamados _____ variables, y z es un _____ variable. El número z se llama también el _____ de f.

3. La gráfica de una función f de dos variables es establecida para todos los puntos (x, y, z), donde _____, y (x, y) es el dominio de _____. La gráfica de una función de dos variables es un _____ en el espacio tridimensional.

4. El trazo de la gráfica de $f(x, y)$ en el plano $z = c$ es la curva con ecuación _____ que yace en el plano $z = c$. La proyección del trazo de f en el plano $z = c$ dentro del plano xy se le conoce como _____ _____ de f. El contorno del mapa asociado con f se obtiene al trazar el _____ _____ de f que corresponden a varios valores determinados de _____.

5. La derivada parcial $\partial f/\partial x$ de f en (x, y) se puede encontrar al pensar en y con un _____ _____ en la expresión de f, y diferenciando esta expresión con respecto a _____ como si fuera una función de x sola.

6. El número $f_x(a, b)$ mide la _____ de la línea tangente de la curva C obtenida por la intersección de la gráfica de f y el plano $y = b$ en el punto _____. Este mide también la tasa de cambio de f con respecto a _____ en el punto (a, b) con y que se mantiene constante con valor _____.

7. Una función $f(x, y)$ tiene un máximo relativo en (a, b) si $f(x, y)$ ______ en $f(a, b)$ para todos los puntos (x, y) que están lo suficientemente cerca de ______. El valor máximo absoluto de $f(x, y)$ es el número $f(a, b)$ como $f(x, y)$ ______ $f(a, b)$ para toda (x, y) en el ______ de f.

8. Un punto crítico de $f(x, y)$ es un punto (a, b) en el ______ de f, como ______ ______ ______ o por lo menos una de las derivadas parciales de f no ______. Un punto crítico de f es un ______ para un extremo relativo en f.

CAPÍTULO 12 Ejercicios de revisión

1. Sea $f(x, y) = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$. Calcule $f(0, 1)$, $f(1, 0)$ y $f(1, 1)$. ¿Existe $f(0, 0)$?

2. Sea $f(x, y) = \dfrac{xe^y}{1 + \ln xy}$. Calcule $f(1, 1)$, $f(1, 2)$ y $f(2, 1)$. ¿Existe $f(1, 0)$?

3. Sea $h(x, y, z) = xye^z + \dfrac{x}{y}$. Calcule $h(1, 1, 0)$, $h(-1, 1, 1)$ y $h(1, -1, 1)$.

4. Encuentre el dominio de la función $f(u, v) = \dfrac{\sqrt{u}}{u - v}$.

5. Encuentre el dominio de la función $f(x, y) = \dfrac{x - y}{x + y}$.

6. Encuentre el dominio de la función $f(x, y) = x\sqrt{y} + y\sqrt{1 - x}$.

7. Encuentre el dominio de la función

$$f(x, y, z) = \frac{xy\sqrt{z}}{(1 - x)(1 - y)(1 - z)}$$

En los ejercicios 8-11, trace las curvas de nivel de la función correspondiente a cada valor *z*.

8. $z = f(x, y) = 2x + 3y$; $z = -2, -1, 0, 1, 2$

9. $z = f(x, y) = y - x^2$; $z = -2, -1, 0, 1, 2$

10. $z = f(x, y) = \sqrt{x^2 - y^2}$; $z = 0, 1, 2, 3, 4$

11. $z = f(x, y) = e^{xy}$; $z = 1, 2, 3$

Calcule la primera derivada parcial de la función de los ejercicios 12-21.

12. $f(x, y) = x^2y^3 + 3xy^2 + \dfrac{x}{y}$

13. $f(x, y) = x\sqrt{y} + y\sqrt{x}$ **14.** $f(u, v) = \sqrt{uv^2 - 2u}$

15. $f(x, y) = \dfrac{x - y}{y + 2x}$ **16.** $g(x, y) = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$

17. $h(x, y) = (2xy + 3y^2)^5$ **18.** $f(x, y) = (xe^y + 1)^{1/2}$

19. $f(x, y) = (x^2 + y^2)e^{x^2+y^2}$

20. $f(x, y) = \text{En}(1 + 2x^2 + 4y^4)$

21. $f(x, y) = \text{En}\left(1 + \dfrac{x^2}{y^2}\right)$

En los ejercicios 22-27 calcule la derivada parcial de segundo orden de la función.

22. $f(x, y) = x^3 - 2x^2y + y^2 + x - 2y$

23. $f(x, y) = x^4 + 2x^2y^2 - y^4$

24. $f(x, y) = (2x^2 + 3y^2)^3$ **25.** $g(x, y) = \dfrac{x}{x + y^2}$

26. $g(x, y) = e^{x^2+y^2}$ **27.** $h(s, t) = \text{En}\left(\dfrac{s}{t}\right)$

28. Sea $f(x, y, z) = x^3y^2z + xy^2z + 3xy - 4z$. Calcule $f_x(1, 1, 0)$, $f_y(1, 1, 0)$ y $f_z(1, 1, 0)$ e interprete sus resultados.

En los ejercicios 29-34, encuentre el (los) punto(s) de las funciones. Después utilice la prueba de la segunda derivada para clasificar, de ser posible, la naturaleza de cada uno de estos puntos. Finalmente, calcule los extremos relativos de cada función.

29. $f(x, y) = 2x^2 + y^2 - 8x - 6y + 4$

30. $f(x, y) = x^2 + 3xy + y^2 - 10x - 20y + 12$

31. $f(x, y) = x^3 - 3xy + y^2$

32. $f(x, y) = x^3 + y^2 - 4xy + 17x - 10y + 8$

33. $f(x, y) = e^{2x^2+y^2}$

34. $f(x, y) = \text{En}(x^2 + y^2 - 2x - 2y + 4)$

35. IQ El IQ (coeficiente de inteligencia) de una persona cuya edad cronológica es c y su edad mental es m está de-finida como

$$I(c, m) = \frac{100m}{c}$$

Describa el nivel de la curva de I. Trace el nivel de la curva que corresponde a $I = 90, 100, 120, 180$ e interprete sus resultados.

36. Funciones de ingresos Una división de Ditton Industries fabrica licuadoras de 16 y 10 velocidades. Los directivos de la empresa estiman que se requieren diariamente x unidades del modelo de 16 velocidades y y unidades del modelo de 10 velocidades cuando los precios son

$$p = 80 - 0.02x - 0.1y$$
$$q = 60 - 0.1x - 0.05y$$

dólares, respectivamente.

a. Encuentre la función del ingreso total diario $R(x, y)$.
b. Encuentre el dominio de la función R.
c. Calcule $R(100, 300)$ e interprete sus resultados.

37. **Demanda de reproductores de CD** En una investigación llevada a cabo por la revista *Home Entertainment*, se determinó que la ecuación para la demanda de reproductores de CD está dada por

$$x = f(p, q) = 900 - 9p - e^{0.4q}$$

mientras que la función de demanda de los reproductores de CD está dada por

$$y = g(p, q) = 20{,}000 - 3{,}000q - 4p$$

donde p y q indican el precio unitario (en dólares) para los reproductores de CD y de audio, respectivamente, y x y y denotan el número de reproductores de CD de audio demandada por semana. Determine si estos dos productos son sustitutos, complementarios o no tienen relación.

38. **Maximización de los ingresos** El ingreso mensual de Odissey Travel Agency depende de la cantidad de dinero x (en miles de dólares) gastada en publicidad por mes y el número de agentes y en su empleo con base en la regla

$$R(x, y) = -x^2 - 0.5y^2 + xy + 8x + 3y + 20$$

Determine la cantidad de dinero que la agencia debería gastar por mes y el número de agentes que debería emplear para maximizar su ingreso mensual.

39. **Minimización de los costos de la cerca** El propietario de Rancho Grande desea incluir una pieza rectangular en las tierras de pastoreo a lo largo de la parte recta de un río y luego subdividirla usando una valla paralela a los lados. No se requiere valla a lo largo del río. Si el costo del material empleado a los lados cuesta \$3 por yarda y el costo del material divisor es \$2 por yarda, ¿cuáles serán las dimensiones para una tierra de pastoreo de 303,750 yardas cuadradas si el costo de la valla es el mínimo?

40. **Función de producción Cobb-Douglas** Demuestre que la función de producción Cobb-Douglas $P = kx^a y^{1-a}$, donde $0 < a < 1$, satisface la ecuación

$$x\frac{\partial P}{\partial x} + y\frac{\partial P}{\partial y} = P$$

CAPÍTULO 12 Antes de continuar . . .

1. Encuentre el dominio de

$$f(x, y) = \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{(1 - x)(2 - y)}$$

2. Trace las curvas de nivel de la función $f(x, y) = x + 2y^2$ correspondientes a $z = -3, -2, 1, 0, 1, 2, 3$.

3. Encuentre $f_x(1, 2)$ y $f_y(1, 2)$ si $f(x, y) = x^3y - 2x^2y^2 + 3xy^3$ e interprete sus resultados.

4. Encuentre la primera derivada parcial y la de segundo orden de $f(x, y) = x^2y + e^{xy}$.

5. Encuentre los extremos relativos, si cualquiera, de $f(x, y) = 2x^3 + 2y^3 - 6xy - 5$.

Respuestas de los ejercicios impares

CAPÍTULO 1

Ejercicios 1.1, página 6

1. Entero, racional y real **3.** Racional y real

5. Irracional y real **7.** Irracional y real

9. Racional y real **11.** Falso **13.** Verdadero **15.** Falso

17. Ley conmutativa de la suma

19. Ley conmutativa de la multiplicación **21.** Ley distributiva

23. Ley asociativa de la suma **25.** Propiedad 1 de los negativos

27. Propiedad 1 de las propiedades del cero

29. Propiedad 2 de las propiedades del cero

31. Propiedad 2 de la división **33.** Propiedades 2 y 5 de la división

35. Propiedad 6 de la división y ley distributiva **37.** Falso

39. Falso **41.** Falso

Ejercicios 1.2, página 13

1. 81 **3.** $\frac{8}{27}$ **5.** -64 **7.** $-\frac{54}{125}$ **9.** 256

11. $243y^5$ **13.** $6x - 3$ **15.** $9x^2 + 3x + 1$

17. $4y^2 + y + 8$ **19.** $1.2x^3 - 4.2x^2 + 2.5x - 8.2$

21. $6x^5$ **23.** $2x^3 + 4x$ **25.** $7m^2 - 9m$

27. $14a - 7b$ **29.** $6x^2 + 5x - 6$

31. $6x^2 - 5xy - 6y^2$ **33.** $12r^2 - rs - 6s^2$

35. $0.06x^2 - 0.06xy - 2.52y^2$ **37.** $6x^3 - 3x^2y + 4xy - 2y^2$

39. $4x^2 + 12xy + 9y^2$ **41.** $4u^2 - v^2$

43. $2x^2 - x + 2$ **45.** $4x^2 + 6xy + 9y^2 + 2y - x + 2$

47. $2t^4 - 4t^3 + 9t^2 - 2t + 4$ **49.** $-2x + 1$ **51.** $-x - 1$

53. $x^2 - 10x + 50$ **55.** $22x^3 - 20x^2 - 6x$

57. $-0.000002x^3 - 0.02x^2 + 1{,}000x - 120{,}000$

59. $3.5t^2 + 2.4t + 71.2$ **61.** Falso **63.** Falso **65.** m

Ejercicios 1.3, página 19

1. $2m(3m - 1)$ **3.** $3ab(3b - 2a)$ **5.** $5mn(2m - 3n + 4)$

7. $(3x - 5)(2x + 1)$ **9.** $(2c - d)(3a + b + 4ac - 2ad)$

11. $(2m + 1)(m - 6)$ **13.** $(x - 3y)(x + 2y)$ **15.** Prima

17. $(2a - b)(2a + b)$ **19.** $(uv - w)(uv + w)$ **21.** Prima

23. Prima **25.** $(x + 4)(x - 1)$ **27.** $2y(3x + 2)(2x - 3)$

29. $(7r - 4)(5r + 3)$ **31.** $xy(3x - y)(3x + y)$

33. $(x^2 - 4y)(x^2 + 4y)$ **35.** $-8ab$

37. $(2m + 1)(4m^2 - 2m + 1)$ **39.** $(2r - 3s)(4r^2 + 6rs + 9s^2)$

41. $u^2(v^2 - 2)(v^4 + 2v^2 + 4)$ **43.** $(2x + 1)(x^2 + 3)$

45. $(3a + b)(x + 2y)$ **47.** $(u - v)(u + v)(u^2 + v^2)$

49. $(x + y)(2x - 3y)(2x + 3y)$ **51.** $(x^3 - 2)(x + 3)$

53. $(au + c)(u + 1)$ **55.** $P(1 + rt)$ **57.** $D^2\left(\frac{k}{2} - \frac{D}{3}\right)$

Ejercicios 1.4, página 24

1. $\frac{4}{x}$ **3.** $\frac{4}{3}$ **5.** $\frac{2x - 1}{2x}$ **7.** $\frac{x - 1}{x + 1}$ **9.** $\frac{x + 2}{2x + 3}$

11. $x + y$ **13.** $\frac{1}{2}x$ **15.** $\frac{2}{5}x^2$ **17.** $\frac{5x}{2}$ **19.** $\frac{4}{3}$

21. $\frac{3(3r - 2)}{2}$ **23.** $\frac{k + 1}{k - 2}$ **25.** $\frac{10x + 7}{(2x + 3)(2x - 1)}$

27. $\frac{5x - 9}{(x - 3)(x + 2)(x - 1)}$ **29.** $\frac{4m^3 - 3}{(2m^2 - 2m - 1)\,(2m^2 - 3m + 3)}$

31. $-\frac{x^2 - x - 3}{(x + 1)(x - 1)}$ **33.** $\frac{2(x^2 - x + 2)}{(x + 2)(x - 2)}$

35. $\frac{x^3 - 2x^2 + 3x + 24)}{(x + 3)(x + 2)(x - 2)(x + 1)}$ **37.** $\frac{bx - ay}{ab(x - y)}$

39. $\frac{x + 1}{x - 1}$ **41.** $\frac{x + y}{xy - 1}$ **43.** $\frac{y - x}{x^2y^2}$ **45.** $-\frac{1}{2x(x + h)}$

Ejercicios 1.5, página 29

1. -8 **3.** $\frac{1}{49}$ **5.** -16 **7.** $\frac{7}{12}$ **9.** 0.0004 **11.** 1

13. 1 **15.** $\frac{1}{32}$ **17.** 1 **19.** $\frac{1}{27}$ **21.** $\frac{1}{2}x^5$ **23.** $\frac{3}{2x}$

25. $\frac{1}{a^6}$ **27.** $\frac{8y^6}{x^6}$ **29.** $\frac{8}{xy}$ **31.** $-2x^2y^5$ **33.** $\frac{3}{2uv^2}$

35. $864x^4$ **37.** $\frac{1}{4x^8}$ **39.** $\frac{4u4}{9v^5}$ **41.** $\frac{1}{1728x^2y^3z^2}$

43. $\frac{a^{10}}{b^{12}}$ **45.** $9a^2b^8$ **47.** $\frac{u^8}{16}$ **49.** $\frac{1 - x}{1 + x}$

51. $\frac{1}{uv}$ **53.** $\frac{b + a}{b - a}$ **55.** Falso **57.** Falso

Ejercicios 1.6, página 34

1. $x = 4$ **3.** $y = \frac{40}{3}$ **5.** $x = -\frac{2}{3}$ **7.** $y = 5$

9. $p = 15$ **11.** $p = 0$ **13.** $k = \frac{3}{2}$ **15.** $x = 2$ **17.** $x = 8$

19. $x = \frac{1}{2}$ **21.** $x = \frac{1}{2}$ **23.** $y = \frac{3}{2}$ **25.** $x = \frac{17}{8}$

27. $q = -1$ **29.** $k = -2$ **31.** Sin solución **33.** $x = 1$

35. $k = \frac{5}{2}$ **37.** $k = \frac{1}{3}$ **39.** $r = \dfrac{I}{Pt}$ **41.** $q = -\dfrac{p}{3} + \dfrac{1}{3}$

43. $x = \dfrac{Vb}{a - V}$ **45.** $m = \dfrac{rB(n + 1)}{2I}$

47. $t = \dfrac{I}{Pr}$; $\dfrac{3}{2}$ año **49.** **a.** $C = \dfrac{NV - St}{N - t}$ **b.** $115,000

51. **a.** $t = \dfrac{24c - a}{a}$ **b.** 5 años

Ejercicios 1.7, página 42

1. 9 **3.** 4 **5.** 3 **7.** 4 **9.** -5 **11.** 4

13. $\frac{2}{3}$ **15.** $\frac{9}{4}$ **17.** $\frac{1}{4}$ **19.** $-\frac{2}{3}$ **21.** 9 **23.** $\frac{1}{16}$

25. $\frac{3}{4}$ **27.** 64 **29.** $x^{1/5}$ **31.** x **33.** $\dfrac{9}{x^6}$ **35.** $\dfrac{y^{5/2}}{x^3}$

37. $x^{12/5} - 2x^{17/5}$ **39.** $4p^2 - 2p$ **41.** $4\sqrt{2}$ **43.** $-3\sqrt[3]{2}$

45. $4xy\sqrt{y}$ **47.** m^2np^4 **49.** $\sqrt[3]{3}$ **51.** $\sqrt[6]{x}$ **53.** $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

55. $\dfrac{3\sqrt{x}}{2x}$ **57.** $\dfrac{2\sqrt{3y}}{3}$ **59.** $\dfrac{\sqrt[3]{x^2}}{x}$ **61.** $\sqrt{3} - 1$

63. $-(1 + \sqrt{2})^2$ **65.** $\dfrac{q(\sqrt{q} + 1)}{q - 1}$ **67.** $\dfrac{y\sqrt[3]{xz^2}}{xz}$ **69.** $\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$

71. $\dfrac{\sqrt[3]{18}}{3}$ **73.** $\dfrac{\sqrt{6}}{2x}$ **75.** $\dfrac{\sqrt[3]{18y^2}}{3}$ **77.** $\dfrac{\sqrt{a}(1 + a)}{a}$

79. $\dfrac{x + y}{x - y}$ **81.** $\dfrac{\sqrt{x + 1}(3x + 2)}{2(x + 1)}$ **83.** $\dfrac{3 + x^{1/3}}{6x^{1/2}(1 + x^{1/3})^2}$

85. Verdadero **87.** Verdadero

Ejercicios 1.8, página 49

1. $x = -3, 2$ **3.** $x = -2, 2$ **5.** $x = -4, 3$

7. $t = -1, \frac{1}{2}$ **9.** $x = 2$ **11.** $m = -2, \frac{3}{2}$ **13.** $x = -\frac{3}{2}, \frac{3}{2}$

15. $z = -2, \frac{3}{2}$ **17.** $x = -4, 2$ **19.** $x = 1 - \dfrac{\sqrt{6}}{2}, 1 + \dfrac{\sqrt{6}}{2}$

21. $m = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{13}, -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{13}$

23. $x = -\dfrac{3}{4} - \dfrac{\sqrt{41}}{4}, -\dfrac{3}{4} + \dfrac{\sqrt{41}}{4}$ **25.** $x = \pm\dfrac{\sqrt{13}}{2}$

27. $x = -\frac{3}{2}, 2$ **29.** $m = 2 \pm \sqrt{3}$ **31.** $x = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{4}\sqrt{10}$

33. $x = -1 \pm \frac{1}{2}\sqrt{10}$ **35.** $x = -0.93, 3.17$ **37.** $x = \pm\sqrt{2}, \pm\sqrt{3}$

39. $y = \pm\sqrt{2}, \pm\sqrt{3}$ **41.** $x = -\frac{7}{2}, -\frac{5}{3}$ **43.** $w = \frac{4}{9}, \frac{9}{4}$

45. $x = -2, -\frac{3}{2}$ **47.** $x = -\frac{5}{2}, 1$ **49.** $y = -\frac{3}{2}, 4$

51. $x = -8, 2$ **53.** $x = -\frac{16}{3}$ **55.** $t = -1 \pm \frac{1}{2}\sqrt{6}$

57. $u = -3$ o 2 **59.** $r = 3$ **61.** $s = 6$

63. Dos soluciones reales **65.** Ninguna solución real

67. Una solución real **69.** Dos soluciones reales

71. 9.2 seg **73.** 1.41 seg luego de pasar el árbol **75.** 10,000

77. 40,000 **79.** 3.82 o 26.18 días

81. $12 \times 6 \times 2$ pulg **83.** 30 y 90 pies

85. $1{,}500 \times 750$ yd **87.** 1.83 pies **89.** Falso **91.** Falso

Ejercicios 1.9, página 60

1. Falso **3.** Falso

5. 

7. 

9. 

11. $(-\infty, 2)$ **13.** $(-\infty, -5]$ **15.** $(-4, 6)$

17. $(-\infty, -3) \cup (3, \infty)$ **19.** $(-2, 3)$ **21.** $[-3, 5]$

23. $(-\infty, 1] \cup \left[\frac{3}{2}, \infty\right)$ **25.** $(-\infty, -3] \cup (2, \infty)$

27. $(-\infty, 0] \cup (1, \infty)$ **29.** 4 **31.** 2 **33.** $5\sqrt{3}$ **35.** $\pi + 1$

37. 2 **39.** Falso **41.** Falso **43.** Verdadero

45. $a - b < x < a + b$ **47.** Falso **49.** Verdadero **51.** Falso

53. $50.70 **55.** [362, 488.7] **57.** $32,000

59. Entre 1,000 y 4,000 unidades

61. Entre 98.04 y 98.36% de contaminantes tóxicos

63. Luego de 2 min **65.** 4 seg **67.** $|x - 0.5| < 0.01$

CAPÍTULO 1 Preguntas de revisión de conceptos, página 63

1. **a.** Racional; repetir; terminar
b. Irracional; terminado; repetido

2. **a.** $b + a$; $(a + b) + c$; a; 0
b. ba; $(ab)c$; $1 \cdot a$; 1 **c.** $ab + ac$

3. **a.** a; $-(ab) = a(-b)$; ab **b.** 0; 0

4. **a.** Polinomio; x; grado; término; polinomio; coeficiente **b.** Parecido

5. Producto; primo; $x(x + 2)(x - 1)$

6. **a.** Polinomios **b.** Numerador; denominador; factores; 1; -1
c. Denominador; fracciones

7. Compuesto; $\dfrac{1 + \dfrac{1}{x}}{1 - \dfrac{1}{y}}$

8. **a.** $\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{n \text{ factores}}$; base; exponente; potencia
b. 1; no definido **c.** $\dfrac{1}{a^n}$

9. **a.** Ecuación **b.** Número **c.** $ax + b = 0$; 1

10. **a.** $a^n = b$ **b.** Pares **c.** No **d.** Raíz real

11. **a.** Radical; $b^{1/n}$ **b.** Radical

12. **a.** $ax^2 + bx + c = 0$

b. Factorización; completar la secuencia; $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Capítulo 1 Ejercicios de revisión, página 63

1. Racional y real **2.** Irracional y real

3. Irracional y real **4.** Completo, entero, racional y real

5. Racional y real **6.** Irracional y real **7.** $\frac{27}{8}$

8. 25 **9.** $\frac{1}{144}$ **10.** -32 **11.** $\frac{64}{27}$ **12.** $\frac{1}{4}$ **13.** $\frac{3}{5}$

14. $3\sqrt[3]{3}$ **15.** $4(x^2 + y)^2$ **16.** $\dfrac{a^{15}}{b^{11}}$ **17.** $\dfrac{2x}{3z}$ **18.** $-x^{1/2}$

19. $6xy^7$ **20.** $\frac{9}{2}a^5b^8$ **21.** $9x^2y^4$ **22.** $\dfrac{x}{y^{1/2}}$

23. $5x^4 + 20x^3 + 12x^2 + 14x + 3$ **24.** $9x^3 - 18x^2 + 17x - 12$

25. $-2x^2 + 9y^2 + 12xy + 7x + 3$ **26.** $3a - b$

27. $\dfrac{180}{(t + 6)^2}$ **28.** $\dfrac{15x^2 + 24x + 2}{4(3x^2 + 2)(x + 2)}$

29. $\dfrac{78x^2 - 8x - 27}{3(2x^2 - 1)(3x - 1)}$ **30.** $\dfrac{2\sqrt{x + 1}(x + 2)}{x + 1}$

31. $-2\pi r^2(\pi r - 50)$ **32.** $2vw(v^2 + w^2 + u^2)$ **33.** $(4 - x)(4 + x)$

34. $6t(2t - 3)(t + 1)$ **35.** $-2(x + 3)(x - 1)$

36. $4(3x - 5)(x - 6)$ **37.** $(3a - 5b)(3a + 5b)$

38. $u^3(2uv + 3)(4u^2v^2 - 6uv + 9)$ **39.** $3a^2b^2(2a^2b^2c - ac - 3)$

40. $(2x - y)(3x + y)$ **41.** $\dfrac{x + 2}{x + 3}$ **42.** $\dfrac{4(t^2 - 4)}{(t^2 + 4)^2}$ **43.** 2

44. $\dfrac{3x(2x^3 + 2x + 1)}{(x^2 + 2)(x^3 + 1)}$ **45.** $\dfrac{x}{(x + 2)(x - 3)}$

46. $\dfrac{x\sqrt{1 + 3x^2}(3x^2 - 5x + 1)}{(x - 1)^2}$ **47.** $x = -\frac{3}{4}, \frac{1}{2}$

48. $x = -2, \frac{1}{3}$ **49.** $x = \dfrac{3 \pm \sqrt{41}}{4}$ **50.** $x = \dfrac{-5 \pm \sqrt{13}}{2}$

51. $y = \frac{1}{2}, 1$ **52.** $m = -1.2871, 8.2871$ **53.** $x = 0, -3, 1$

54. $x = \dfrac{\pm\sqrt{2}}{2}$ **55.** $x = 14$ **56.** $p = -2$ **57.** $x = -\frac{5}{3}, 0$

58. $q = -\frac{6}{17}$ **59.** $k = 2$ **60.** $x = 1$ **61.** $x = \dfrac{100C}{20 + C}$

62. $I = \dfrac{rB(n + 1)}{2m}$ **63.** $[-2, \infty)$ **64.** $[-1, 2]$

65. $(-\infty, -4) \cup (5, \infty)$ **66.** $(-\infty, -5) \cup (5, \infty)$ **67.** 4

68. 1 **69.** $\pi - 6$ **70.** $8 - 3\sqrt{3}$ **71.** $[-2, \frac{1}{2}]$ **72.** $[-4, 3]$

73. $(-2, -\frac{3}{2})$ **74.** $(-1, 4)$ **75.** $[\frac{2}{3}, 2]$ **76.** $\frac{2}{3}; \frac{3}{2}$

77. $\dfrac{1}{\sqrt{x} + 1}$ **78.** $\dfrac{x}{z\sqrt[3]{xy}}$ **79.** $\dfrac{x - \sqrt{x}}{2x}$ **80.** $\dfrac{3(1 - 2\sqrt{x})}{1 - 4x}$

81. $x = 1 \pm \sqrt{6}$ **82.** $x = -2 \pm \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

83. \$100 **84.** \$400

Capítulo 1 Antes de seguir, página 65

1. $3(5x^2 - 9x + 4)$

2. **a.** $x^2(x - 3)(x + 2)$ **b.** $a(a + 1)(a - 2b - a^2)$

3. $\dfrac{5x^2 - 1}{(3x + 1)(x - 2)(x + 1)}$ **4.** $\dfrac{1}{2xy}$ **5.** $\dfrac{2s^2}{1 - 2s}$

6. $7 - 4\sqrt{3}$ **7.** **a.** -4 o $\frac{3}{2}$ **b.** $\frac{1}{2}(3 + \sqrt{17})$ o $\frac{1}{2}(3 - \sqrt{17})$

8. 21 **9.** $[-\frac{2}{3}, \frac{3}{2}]$ **10.** $[-2, -1]$

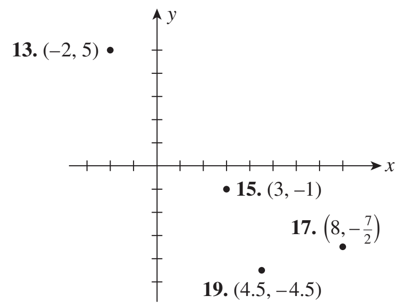
CAPÍTULO 2

Ejercicios 2.1, página 73

1. (3, 3); Cuadrante I **3.** $(2, -2)$; Cuadrante IV

5. $(-4, -6)$; Cuadrante III **7.** A **9.** E, F y G

11. F **13–19.** Vea la siguiente figura.



21. $\frac{1}{2}$ **23.** No definido **25.** 5 **27.** $\frac{5}{6}$

29. $\dfrac{d - b}{c - a}$ $(a \neq c)$ **31.** **a.** 4 **b.** -8 **33.** Paralela

35. $a = -5$ **37.** Sí

Ejercicios 2.2, página 80

1. (e) **3.** (a) **5.** (f) **7.** Perpendicular **9.** $y = -3$

11. $y = 2x - 10$ **13.** $y = 2$ **15.** $y = 3x - 2$

17. $y = x + 1$ **19.** $y = 3x + 4$ **21.** $y = 5$

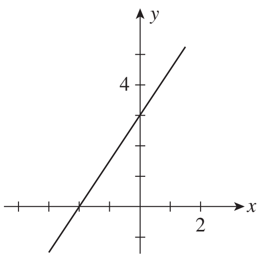
23. $y = \frac{1}{2}x$; $m = \frac{1}{2}$; $b = 0$ **25.** $y = \frac{2}{3}x - 3$; $m = \frac{2}{3}$; $b = -3$

27. $y = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$; $m = -\frac{1}{2}$; $b = \frac{7}{2}$ **29.** $y = \frac{1}{2}x + 3$

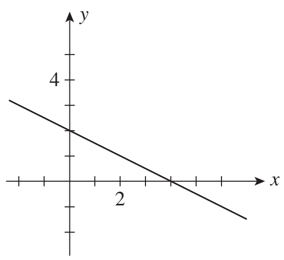
31. $y = \frac{4}{3}x + \frac{4}{3}$ **33.** $y = -6$ **35.** $y = b$

37. $y = \frac{2}{3}x - \frac{2}{3}$ **39.** $k = 8$

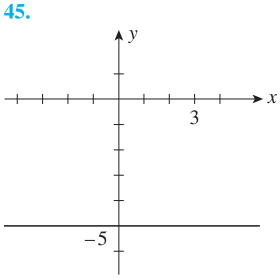
41.



43.

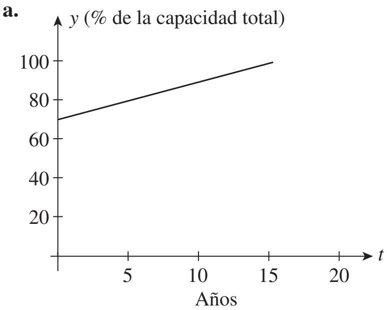


45.



49. $y = -2x - 4$ **51.** $y = \frac{1}{8}x - \frac{1}{2}$ **53.** Sí

55. **a.**



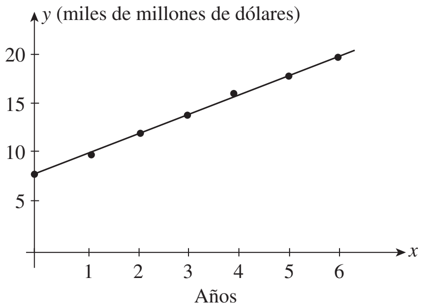
b. 1.9467; 70.082

c. La capacidad de utilización se ha incrementado 1.9467% cada año desde 1990 cuando se estableció en 70.082%

d. En la primera mitad de 2005

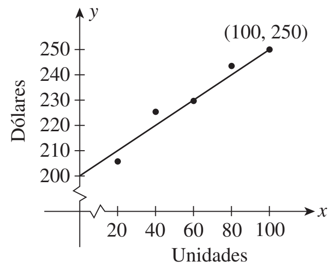
57. **a.** $y = 0.55x$ **b.** 2,000 **59.** 84.8%

61. **a** y **b.**



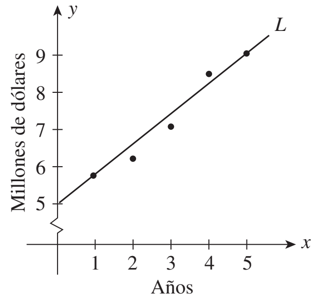
c. $y = 1.82x + 7.9$ **d.** $17,000 millones; igual

63. **a** y **b.**



c. $y = \frac{1}{2}x + 200$ **d.** $227

65. **a** y **b.**



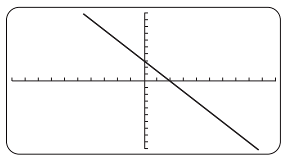
c. $y = 0.8x + 5$ **d.** $12.2 millones

67. Falso **69.** Verdadero **71.** Verdadero

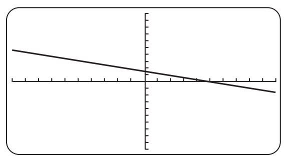
Ejercicios de uso de la tecnología 2.2, página 87

Calculadora graficadora

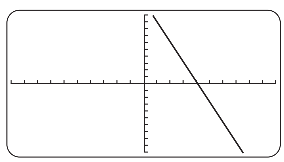
1.



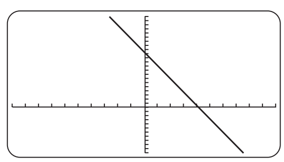
3.



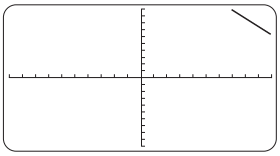
5. **a.**



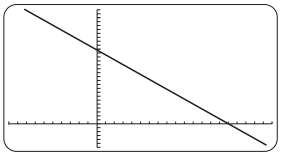
b.



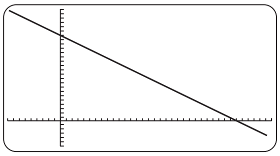
7. a.



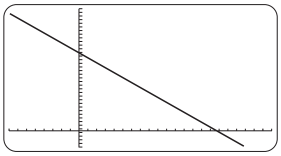
b.



9.

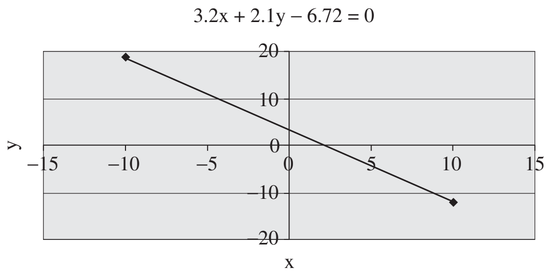


11.

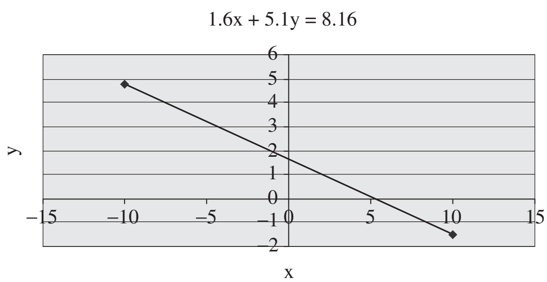


Excel

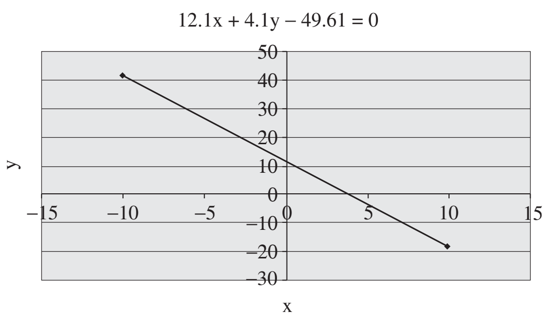
1.



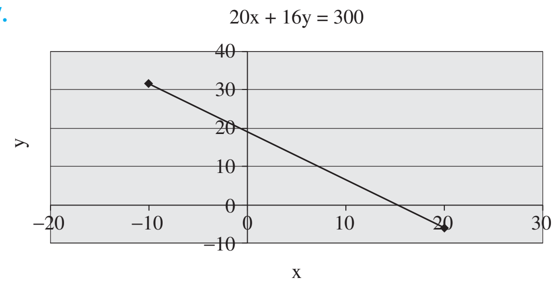
3.



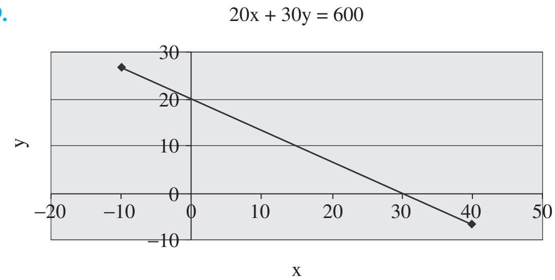
5.



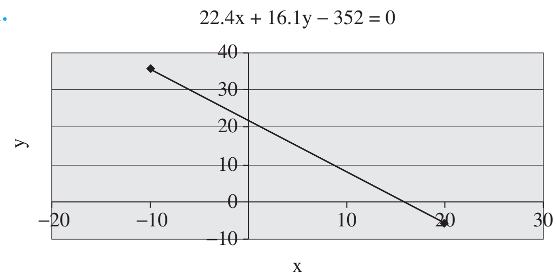
7.



9.



11.



Ejercicios 2.3, página 95

1. $21, -9, 5a + 6, -5a + 6, 5a + 21$

3. $-3, 6, 3a^2 - 6a - 3, 3a^2 + 6a - 3, 3x^2 - 6$

5. $2a + 2h + 5, -2a + 5, 2a^2 + 5, 2a - 4h + 5, 4a - 2h + 5$

7. $\frac{8}{15}, 0, \frac{2a}{a^2 - 1}, \frac{2(2 + a)}{a^2 + 4a + 3}, \frac{2(t + 1)}{t(t + 2)}$

9. $8, \frac{2a^2}{\sqrt{a - 1}}, \frac{2(x + 1)^2}{\sqrt{x}}, \frac{2(x - 1)^2}{\sqrt{x - 2}}$

11. $5, 1, 1$ **13.** $\frac{5}{2}, 3, 3, 9$

15. **a.** -2 **b.** (i) $x = 2$; (ii) $x = 1$
c. $[0, 6]$ **d.** $[-2, 6]$

17. Sí **19.** Sí **21.** 7

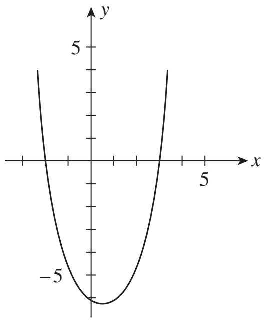
23. $(-\infty, \infty)$ **25.** $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$

27. $(-\infty, \infty)$ **29.** $(-\infty, 5)$

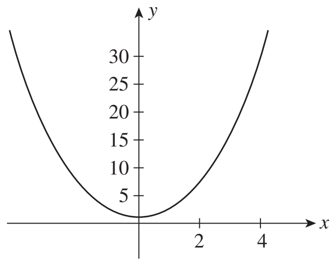
31. $(-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, \infty)$

33. $[-3, \infty)$ **35.** $(-\infty, -2) \cup (-2, 1)$

37. **a.** $(-\infty, \infty)$
b. $6, 0, -4, -6, -\frac{25}{4}, -6, -4, 0$
c.

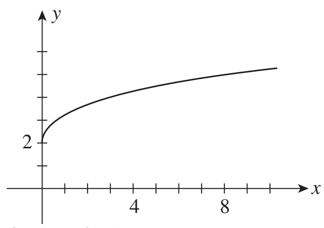


39.



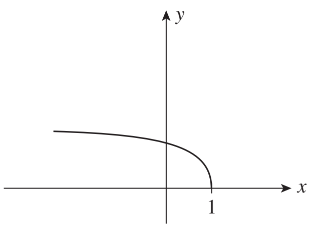
$(-\infty, \infty)$; $[1, \infty)$

41.



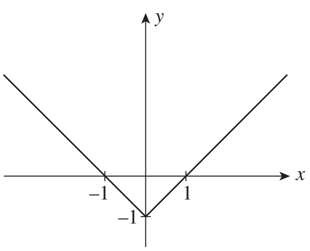
$[0, \infty)$; $[2, \infty)$

43.



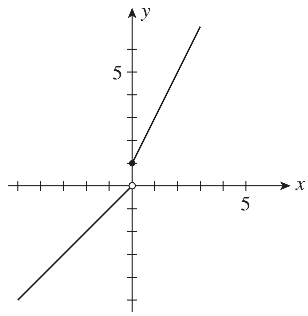
$(-\infty, 1]$; $[0, \infty)$

45.



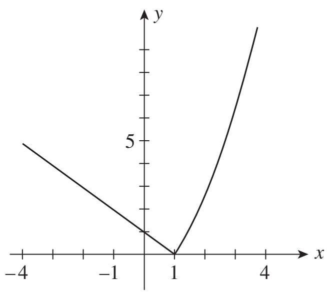
$(-\infty, \infty)$; $[-1, \infty)$

47.



$(-\infty, \infty)$; $(-\infty, 0) \cup [1, \infty)$

49.



$(-\infty, \infty)$; $[0, \infty)$

51. Sí **53.** No **55.** Sí **57.** Sí

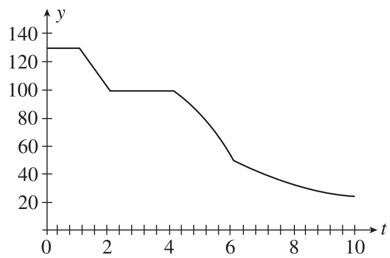
59. 10π pulg. **61.** 8

63. **a.** $f(t) = \begin{cases} 0.0185t + 0.58 & \text{si } 0 \leq t \leq 20 \\ 0.015t + 0.65 & \text{si } 20 < t \leq 30 \end{cases}$
b. 0.0185 por año de 1960 a 1980; 0.015 por año de 1980 a 1990
c. 1983

65. 20; 26 **67.** \$5,600 millones; \$7,800 millones

69. **a.** \$0.6 billones; \$0.6 billones **b.** \$0.96 billones; \$1.2 billones

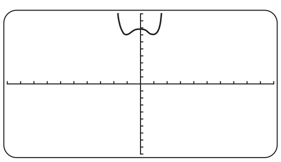
71. **a.** 130 tons por día; 100 tons por día; 40 tons por día
b.



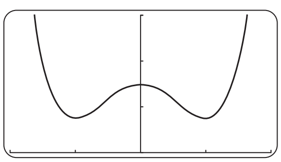
73. Falso **75.** Falso

Ejercicios de uso de la tecnología 2.3, página 102

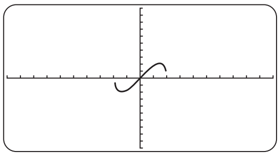
1. **a.**



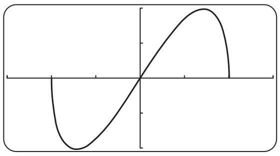
b.



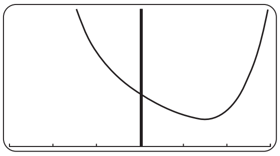
3. a.



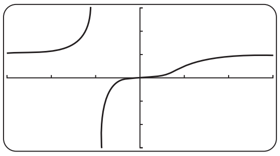
b.



5.

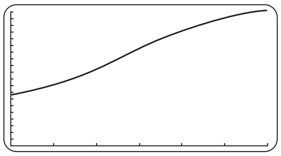


7.



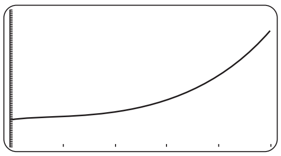
9. 18.5505 **11.** 4.1616

13. a.



b. \$62.96 millones; \$107.66 millones

15. a.



b. 44.7; 52.7; 129.2

Ejercicios 2.4, página 108

1. $f(x) + g(x) = x^3 + x^2 + 3$ **3.** $f(x)g(x) = x^5 - 2x^3 + 5x^2 - 10$

5. $\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{x^3 + 5}{x^2 - 2}$ **7.** $\dfrac{f(x)g(x)}{h(x)} = \dfrac{x^5 - 2x^3 + 5x^2 - 10}{2x + 4}$

9. $f(x) + g(x) = x - 1 + \sqrt{x + 1}$

11. $f(x)g(x) = (x - 1)\sqrt{x + 1}$

13. $\dfrac{g(x)}{h(x)} = \dfrac{\sqrt{x + 1}}{2x^3 - 1}$ **15.** $\dfrac{f(x)g(x)}{h(x)} = \dfrac{(x - 1)\sqrt{x + 1}}{2x^3 - 1}$

17. $\dfrac{f(x) - h(x)}{g(x)} = \dfrac{x - 2x^3}{\sqrt{x + 1}}$

19. $f(x) + g(x) = x^2 + \sqrt{x} + 3$;
$f(x) - g(x) = x^2 - \sqrt{x} + 7$;
$f(x)g(x) = (x^2 + 5)(\sqrt{x} - 2)$; $\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{x^2 + 5}{\sqrt{x} - 2}$

21. $f(x) + g(x) = \dfrac{(x - 1)\sqrt{x + 3} + 1}{x - 1}$;
$f(x) - g(x) = \dfrac{(x - 1)\sqrt{x + 3} - 1}{x - 1}$;
$f(x)g(x) = \dfrac{\sqrt{x + 3}}{x - 1}$; $\dfrac{f(x)}{g(x)} = (x - 1)\sqrt{x + 3}$

23. $f(x) + g(x) = \dfrac{2(x^2 - 2)}{(x - 1)(x - 2)}$;
$f(x) - g(x) = \dfrac{-2x}{(x - 1)(x - 2)}$;
$f(x)g(x) = \dfrac{(x + 1)(x + 2)}{(x - 1)(x - 2)}$; $\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{(x + 1)(x - 2)}{(x - 1)(x + 2)}$

25. $f(g(x)) = x^4 + x^2 + 1$; $g(f(x)) = (x^2 + x + 1)^2$

27. $f(g(x)) = \sqrt{x^2 - 1} + 1$; $g(f(x)) = x + 2\sqrt{x}$

29. $f(g(x)) = \dfrac{x}{x^2 + 1}$; $g(f(x)) = \dfrac{x^2 + 1}{x}$ **31.** 49

33. $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$ **35.** $f(x) = 2x^3 + x^2 + 1$ y $g(x) = x^5$

37. $f(x) = x^2 - 1$ y $g(x) = \sqrt{x}$

39. $f(x) = x^2 - 1$ y $g(x) = \dfrac{1}{x}$

41. $f(x) = 3x^2 + 2$ y $g(x) = \dfrac{1}{x^{3/2}}$ **43.** $3h$ **45.** $-h(2a + h)$

47. $2a + h$ **49.** $3a^2 + 3ah + h^2 - 1$ **51.** $-\dfrac{1}{a(a + h)}$

53. El ingreso total en dólares de ambos restaurantes en el tiempo t

55. El valor en dólares de las acciones de IBM que tiene Nancy en el tiempo t

57. La contaminación por monóxido de carbono en partes por millón en el tiempo t

59. $C(x) = 0.6x + 12{,}100$

61. a. $f(t) = 267$; $g(t) = 2t^2 + 46t + 733$
b. $f(t) + g(t) = 2t^2 + 46t + 1{,}000$ **c.** 1,936 tons

63. a. 23; en 2002, 23% de los delitos graves reportados terminó en arrestos o en la identificación de los sospechosos.
b. 18; en 2007, 18% de los delitos graves reportados terminó en arrestos o en la identificación de los sospechosos.

65. a. $P(x) = -0.000003x^3 - 0.07x^2 + 300x - 100{,}000$
b. \$182,375

67. a. $3.5t^2 + 2.4t + 71.2$ **b.** 71,200; 109,900

69. a. 55%; 98.2% **b.** \$444,700; \$1,167,600

71. a. $s(x) = f(x) + g(x) + h(x)$

73. Verdadero **75.** Falso

Ejercicios 2.5, página 117

1. Sí; $y = -\frac{2}{3}x + 2$ **3.** Sí; $y = \frac{1}{2}x + 2$

5. Sí; $y = \frac{1}{2}x + \frac{9}{4}$ **7.** No **9.** No

11. a. $C(x) = 8x + 40{,}000$ **b.** $R(x) = 12x$
c. $P(x) = 4x - 40{,}000$
d. Pérdida de \$8,000; utilidad de \$8,000

13. $m = -1$; $b = 2$ **15.** $(2, 10)$ **17.** $(4, \frac{2}{3})$ **19.** $(-4, -6)$

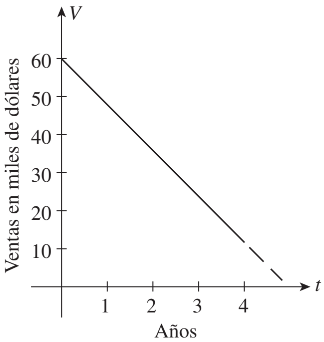
21. 1,000 unidades; \$15,000 **23.** 6,000 unidades; \$240

25. \$900,000; 800,000

27. **a.** $y = 1.053x$ **b.** \$1,074.06

29. $C(x) = 0.6x + 12{,}100$; $R(x) = 1.15x$;
$P(x) = 0.55x - 12{,}100$

31. **a.** 12,000/año **b.** $V = 60{,}000 - 12{,}000t$
c.



d. \$24,000

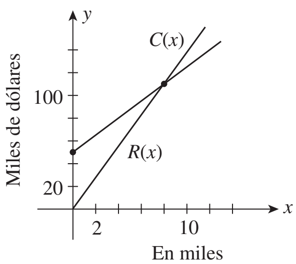
33. \$900,000; \$800,000

35. **a.** $m = a/1.7$; $b = 0$ **b.** 117.65 mg

37. **a.** $f(t) = 6.5t + 20$ $(0 \leq t \leq 8)$ **b.** \$72 millones

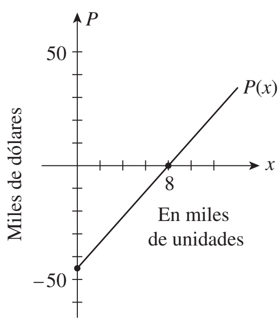
39. **a.** $F = \frac{9}{5}C + 32$ **b.** 68 °F **c.** 21.1 °C

41. **a.**



b. 8,000 unidades; \$112,000

c.

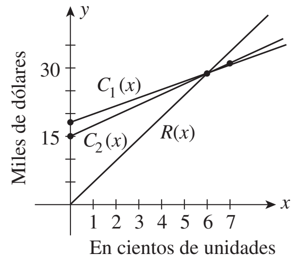


d. (8,000, 0)

43. 9,529 unidades; \$83,331

45. **a.** $C_1(x) = 18{,}000 + 15x$
$C_2(x) = 15{,}000 + 20x$

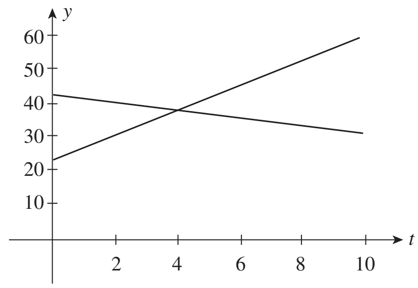
b.



c. máquina I; máquina II; máquina I
d. (\$1,500); \$1,500; \$4,750

47. Mediados de 2003

49. **a.**



b. Febrero de 2005

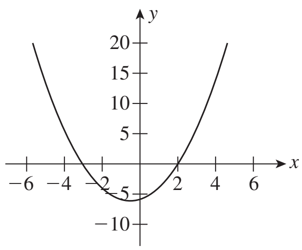
51. Verdadero

Ejercicios de uso de la tecnología 2.5, página 123

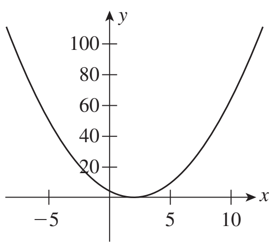
1. 2.2875 **3.** 2.880952381 **5.** 7.2851648352
7. 2.4680851064

Ejercicios 2.6, página 129

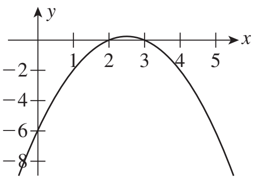
1. Vértice: $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{25}{4}\right)$; intersecciones de x: -3, 2



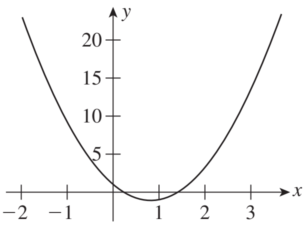
3. Vértice: (2, 0); intersección de x: 2



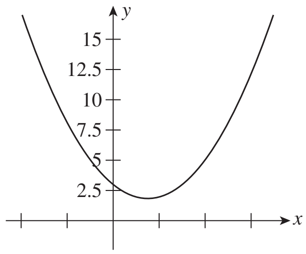
5. Vértice: $\left(\frac{5}{2}, \frac{1}{4}\right)$; intersecciones de x: 2, 3



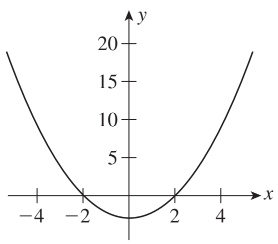
7. Vértice: $\left(\frac{5}{6}, -\frac{13}{12}\right)$; intersecciones de x: 0.2324, 1.4343



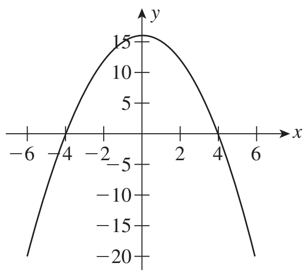
9. Vértice: $\left(\frac{3}{4}, \frac{15}{8}\right)$; no hay intersecciones de x



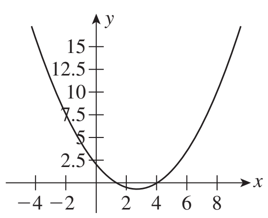
11. Vértice: $(0, -4)$; intersecciones de x: ± 2



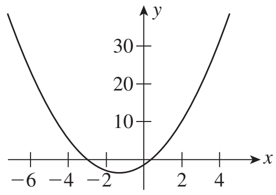
13. Vértice: $(0, 16)$; intersecciones de x: ± 4



15. Vértice: $\left(\frac{8}{3}, -\frac{2}{3}\right)$; intersecciones de x: $\frac{4}{3}$, 4



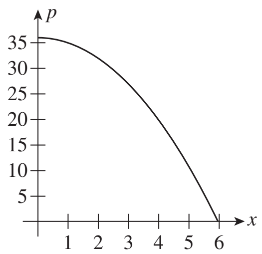
17. Vértice: $\left(-\frac{4}{3}, -\frac{10}{3}\right)$; intersecciones de x: $\frac{1}{3}$, -3



19. $(-2, 0)$; $(1, 3)$ **21.** $(-2, -2)$; $(3, 3)$

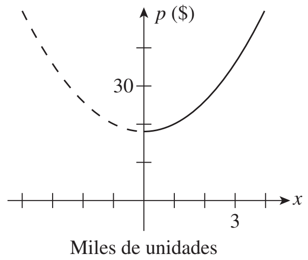
23. $(-1.1205, 0.1133)$, $(2.3205, -8.8332)$

25. **a.**



b. 5,000

27. **a.**

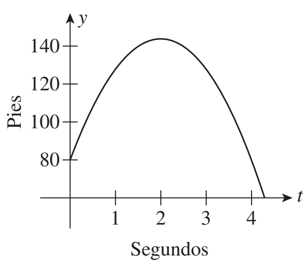


b. $26

29. 2,500; $67.50 **31.** 11,000; $3

33. **a.** 3.6 millones; 9.5 millones **b.** 11.2 millones

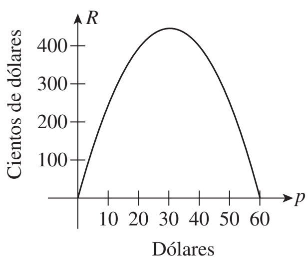
35. **a.**



b. $t = 2$; 144 pies

37. 3,000

39. **a.**



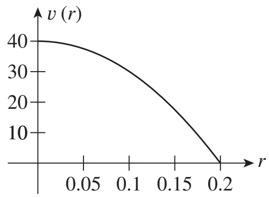
b. $30

41. 123,780,000 kWh; 175,820,000 kWh

43. **a.** $3,250 millones
b. $3,880 millones ; $4,390 millones ; $4,780 millones

45. 500; $32.50

47. **a.**



b. 0, 0.2. La velocidad de la sangre es mayor a lo largo de la arteria central ($r = 0$) y menor a lo largo de la pared de la arteria ($r = 0.2$). La velocidad máxima es $v(0) = 40$ cm/seg y la velocidad mínima $v(0.2) = 0$ cm/seg.

49. $\dfrac{28}{\pi + 4}$ pies por $\dfrac{28}{\pi + 4}$ pies **51.** Verdadero **53.** Verdadero

55. Verdadero

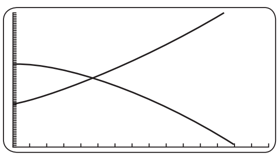
Ejercicios de uso de la tecnología 2.6, página 133

1. $(-3.0414, 0.1503)$; $(3.0414, 7.4497)$

3. $(-2.3371, 2.4117)$; $(6.0514, -2.5015)$

5. $(-1.1055, -6.5214)$; $(1.1055, -1.8783)$

7. **a.**



b. 438 relojes de \$40.92

Ejercicios 2.7, página 140

1. Función polinomial; grado 6

3. Función polinomial; grado 6

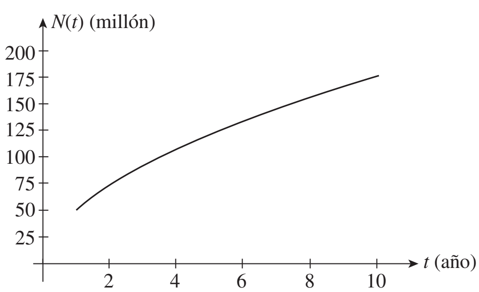
5. Alguna otra función

7. **a.** $R(x) = \dfrac{100x}{40 + x}$ **b.** 60%

9. \$751.50 por año; \$1,772.38 por año

11. **a.** 320,000 **b.** 3,923,200

13. **a.**

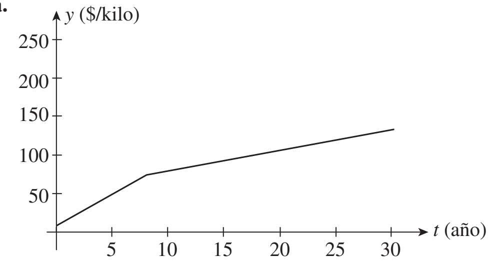


b. 157,000,000

15. 582,650; 1,605,590 **17.** \$699; \$130

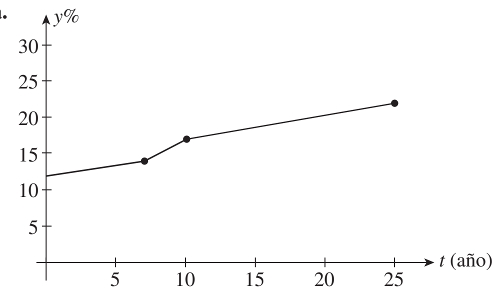
19. $\dfrac{110}{\frac{1}{2}t + 1} - 26\left(\dfrac{1}{4}t^2 - 1\right)^2 - 52$; \$32, \$6.71, \$3; la brecha se cerró.

21. **a.**



b. \$7.44 por kilogramo; \$108.48 por kilogramo

23. **a.**



b. 13.43%; $18\frac{2}{3}$%

25. **b.** A principios de 2002

27. $f(x) = 2x + \dfrac{500}{x}$; $x > 0$ **29.** $f(x) = 0.5x^2 + x + \dfrac{8}{x}$

31. $f(x) = (22 + x)(36 - 2x)$ bushels/acre

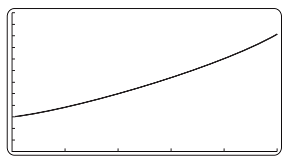
33. **a.** $P(x) = (10{,}000 + x)(5 - 0.0002x)$ **b.** \$60,800

35. Falso **37.** Falso

Ejercicios de uso de la tecnología 2.7, página 145

1. **a.** $y = 0.1375t^2 + 0.675t + 3.1$

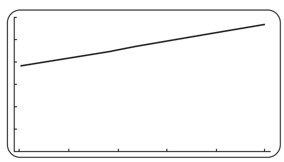
b.



c. 3.1; 3.9; 5; 6.4; 8; 9.9

3. **a.** $f(t) = 1.85t + 16.9$

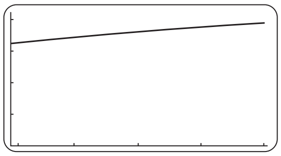
b.

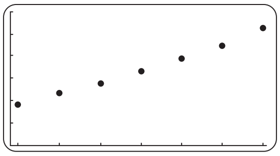


c.

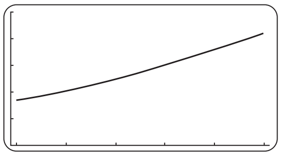
t	1	2	3	4	5	6
y	18.8	20.6	22.5	24.3	26.2	28.0

d. 31.7 galones

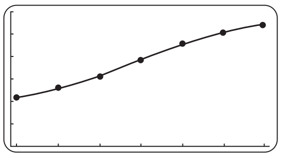
5. a. $f(t) = -0.221t^2 + 4.14t + 64.8$
b.

c. 77.8 millones

7. a.


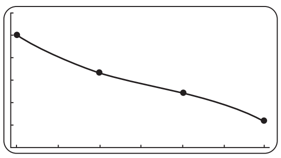
b. $f(t) = 2.94t^2 + 38.75t + 188.5$ **c.** \$604,000 millones

9. a. $f(t) = -0.00081t^3 + 0.0206t^2 + 0.125t + 1.69$
b.


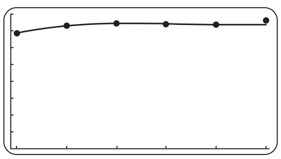
c. \$1.8 billones; \$4.2 billones

11. a. $f(t) = -0.425t^3 + 3.6571t^2 + 4.018t + 43.7$
b.


c. \$43.7 millones; \$77.2 millones; \$107.7 millones

13. a. $f(t) = -2.4167t^3 + 24.5t^2 - 123.33t + 506$
b.


c. 506,000; 338,000; 126,000

15. a. $f(t) = 0.000133t^4 + 0.00353t^3 - 0.04487t^2 + 0.143t + 1.71$
b.


c. 1.71 mg; 1.81 mg; 1.85 mg; 1.84 mg; 1.82 mg; 1.83 mg
d. 1.9 mg por cigarro

CAPÍTULO 2 Preguntas de revisión de conceptos, página 149

1. Ordenada; abscisa (coordenada x); ordenada (coordenada y)

2. a. x-; y-; **b.** Tercero

3. a. $\dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ **b.** Indefinido **c.** 0 **d.** Positivo

4. $m_1 = m_2$; $m_1 = -\dfrac{1}{m^2}$

5. a. $y - y_1 = m(x - x_1)$; forma punto-pendiente
b. $y = mx + b$; pendiente-intersección

6. a. $Ax + By + C = 0$ (A, B, ambas no pueden ser cero) **b.** $-\dfrac{a}{b}$

7. Dominio; rango; B **8.** Dominio, $f(x)$; vertical, punto

9. $f(x) \pm g(x)$; $f(x)g(x)$; $\dfrac{f(x)}{g(x)}$; $A \cap B$; $A \cap B$; 0

10. $g[f(x)]$; f; $f(x)$; g

11. $ax^2 + bx + c$; parábola; hacia arriba; hacia abajo; vértice; $\dfrac{-b}{2a}$; $x = \dfrac{-b}{2a}$

12. a. $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$
($a_n \neq 0$; n, un entero positivo)
b. Lineal; cuadrática
c. Cociente; polinomios
d. x^r (r, un número real)

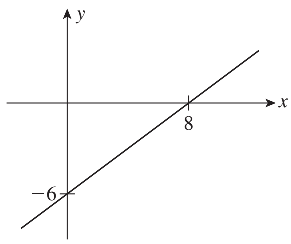
CAPÍTULO 2 Ejercicios de revisión, página 149

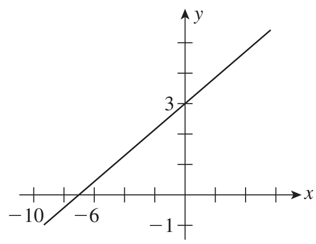
1. $x = -2$ **2.** $y = 4$ **3.** $y = -\frac{1}{10}x + \frac{19}{5}$

4. $y = -\frac{4}{5}x + \frac{12}{5}$ **5.** $y = \frac{5}{2}x + 9$ **6.** $y = \frac{3}{4}x + \frac{11}{2}$

7. $y = -\frac{1}{2}x - 3$ **8.** $\frac{3}{5}$; $-\frac{6}{5}$ **9.** $y = -\frac{3}{4}x + \frac{9}{2}$

10. $y = -\frac{3}{5}x + \frac{12}{5}$ **11.** $y = -\frac{3}{2}x - 7$

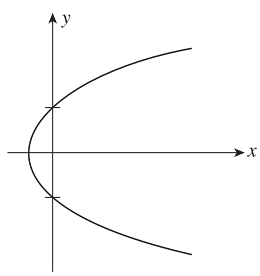
12.


13.


14. $(-\infty, 9]$ **15.** $(-\infty, -1) \cup \left(-1, \frac{3}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2}, \infty\right)$

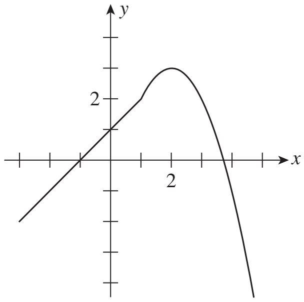
16. a. 0 **b.** $3a^2 + 17a + 20$ **c.** $12a^2 + 10a - 2$
d. $3a^2 + 3h^2 + 6ah + 5a + 5h - 2$

17. a. De 1985 a 1990
b. A partir de 1990
c. 1990; \$3,500 millones

18. a.


b. No **c.** Sí

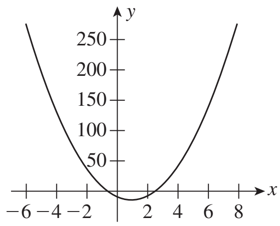
19.



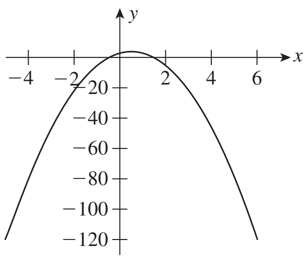
20. **a.** $\dfrac{2x+3}{x}$ **b.** $\dfrac{1}{x(2x+3)}$

c. $\dfrac{1}{2x+3}$ **d.** $\dfrac{2}{x}+3$

21. Vértice: $\left(\frac{11}{12}, -\frac{361}{24}\right)$; intersecciones de x: $-\frac{2}{3}, \frac{5}{2}$



22. Vértice: $(\frac{1}{2}, 4)$; intersecciones de x: $-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}$



23. $(2, -3)$ **24.** $(6, \frac{21}{2})$ **25.** $(-2, \frac{1}{3})$ **26.** $(2{,}500, 50{,}000)$

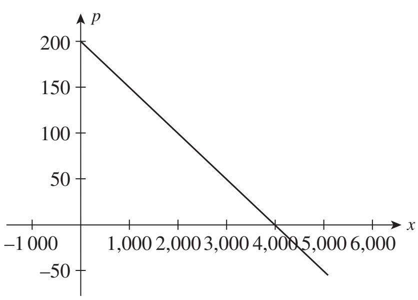
27. L_2 **28.** L_2

29. 60,000 **30.** **a.** $f(x) = x + 2.4$ **b.** \$5.4 millones

31. **a.** $6x + 30{,}000$ **b.** $10x$ **c.** $4x - 30{,}000$
d. (\$6,000); \$2,000; \$18,000

32. **a.** \$200,000/por año **b.** \$4,000,000

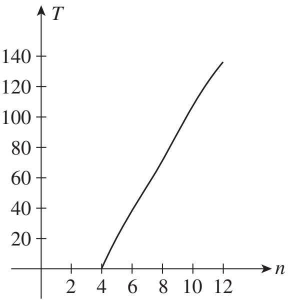
33. $p = -0.05x + 200$



34. $p = \frac{1}{36}x + \frac{400}{9}$ **35.** 117 mg

36. **a.** $y = 0.25x$ **b.** 1,600 **37.** \$45,000 **38.** 400; 800

39.



40. 5,000; \$20

A medida que la longitud de la lista crece, el tiempo necesario para aprender la lista aumenta una cantidad muy grande.

41. **a.** $r = f(V) = \sqrt[3]{(3V)/(4\pi)}$ **b.** $g(t) = \frac{9}{2}\pi t$ **c.** $h(t) = \frac{3}{2}\sqrt[3]{t}$
d. 3 pies

CAPÍTULO 2 Antes de seguir, página 151

1. $y = \frac{7}{5}x - \frac{3}{5}$ **2.** $y = -\frac{1}{3}x + \frac{4}{3}$ **3.** **a.** 3 **b.** 2 **c.** $\frac{17}{4}$

4. **a.** $\dfrac{1}{x+1} + x^2 + 1$ **b.** $\dfrac{x^2+1}{x+1}$ **c.** $\dfrac{1}{x^2+2}$ **d.** $\dfrac{1}{(x+1)^2} + 1$

5. $108x^2 - 4x^3$

CAPÍTULO 3

Ejercicios 3.1, página 158

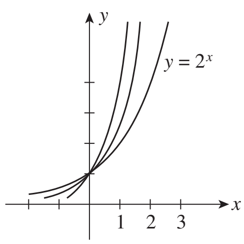
1. **a.** 16 **b.** 27 **3.** **a.** 3 **b.** $\sqrt{5}$

5. **a.** -3 **b.** 8 **7.** **a.** $4x^3$ **b.** $5xy^2\sqrt{x}$

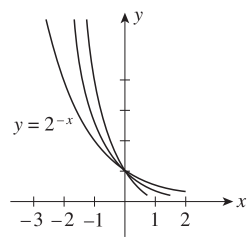
9. **a.** $\dfrac{2}{a^2}$ **b.** $\dfrac{1}{3}b^2$ **11.** **a.** $8x^9y^6$ **b.** $16x^4y^4z^6$

13. 2 **15.** 3 **17.** 3 **19.** $\dfrac{5}{4}$ **21.** 1 o 2

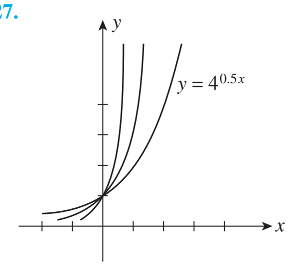
23.



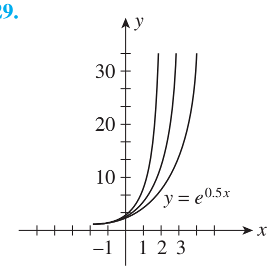
25.



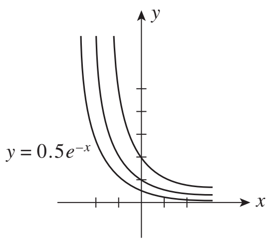
27.



29.



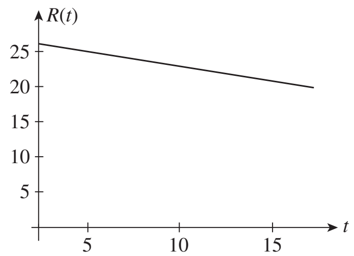
31.



33. $f(x) = 100\left(\frac{6}{5}\right)^x$ **35.** 54.56

37. **a.** 26.3%; 24.67%; 21.71%; 19.72%

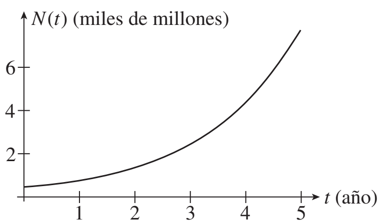
b.



39. **a.**

Año	0	1	2	3	4	5
Direcciones web (miles de millones)	0.45	0.80	1.41	2.49	4.39	7.76

b.



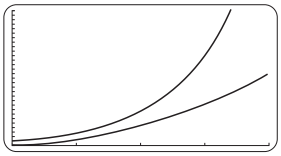
41. 34,210,000

43. **a.** 0.08 g/cm^3 **b.** 0.12 g/cm^3

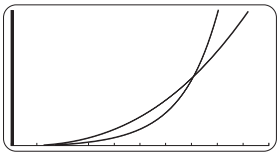
45. Falso **47.** Verdadero

Ejercicios de uso de la tecnología 3.1, página 161

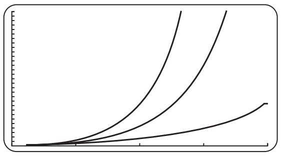
1.



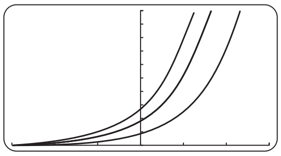
3.



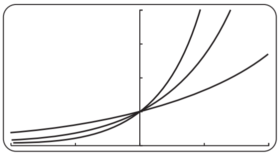
5.



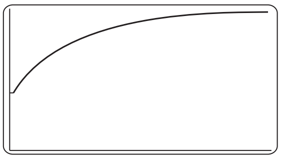
7.



9.

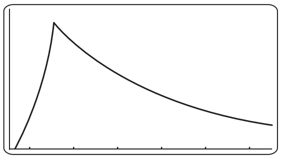


11. **a.**



b. 0.08 g/cm^3 **c.** 0.12 g/cm^3

13. **a.**



b. 20 seg **c.** 35.1 seg

Ejercicios 3.2, página 168

1. $\log_2 64 = 6$ **3.** $\log_3 \frac{1}{9} = -2$ **5.** $\log_{1/3} \frac{1}{3} = 1$

7. $\log_{32} 8 = \frac{3}{5}$ **9.** $\log_{10} 0.001 = -3$ **11.** 1.0792

13. 1.2042 **15.** 1.6813 **17.** $\ln a^2b^3$ **19.** $\ln \frac{3\sqrt{xy}}{\sqrt[3]{z}}$

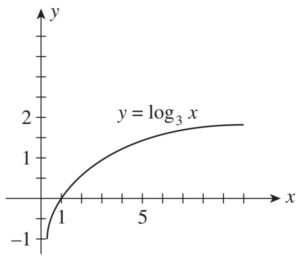
21. $\log x + 4\log(x + 1)$ **23.** $\frac{1}{2}\log(x + 1) - \log(x^2 + 1)$

25. $\ln x - x^2$ **27.** $-\frac{3}{2}\ln x - \frac{1}{2}\ln(1 + x^2)$ **29.** $x = 8$

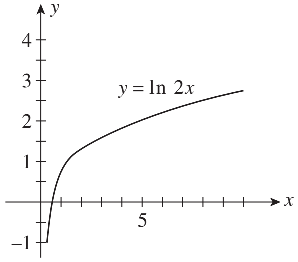
31. $x = 3$ **33.** $x = 10$ **35.** $x = \frac{3}{2}$ **37.** $x = \frac{16}{7}$

39. $x = \frac{11}{3}$ **41.** $x = 3$

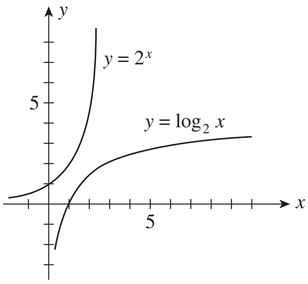
43.



45.



47.



49. 5.1986 **51.** −0.0912 **53.** −8.0472 **55.** −4.9041

57. $-2 \ln\left(\frac{A}{B}\right)$ **59.** $2 + 2.8854 \ln x$ **61.** 105.7 mm

63. **a.** $10^3 I_0$ **b.** 100,000 veces más grande
c. 10,000,000 de veces más grande

65. 27.40 años **67.** 6.44 años **69.** **a.** 9.12 seg **b.** 20.27 seg

71. Falso **73.** **a.** ln 2

Ejercicios 3.3, página 177

1. **a.** 0.05 **b.** 400
c.

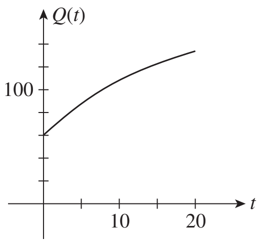
t	0	10	20	100	1,000
Q	400	660	1,087	59,365	2.07×10^{24}

3. **a.** $Q(t) = 100e^{0.035t}$ **b.** 266 min **c.** $Q(t) = 1000e^{0.035t}$

5. **a.** 54.93 años **b.** 14,250 millones **7.** 8.7 lb/in^2

9. $Q(t) = 100e^{-0.049t}$; 70.7 g **11.** Hace 13,412 años

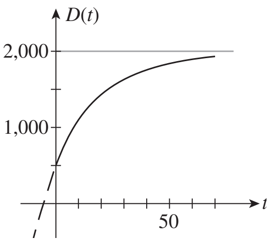
13.



a. 60 palabras por minuto **b.** 107 palabras por minuto
c. 136 palabras por minuto

15. \$5.806 billones ; \$8.575 billones

17.



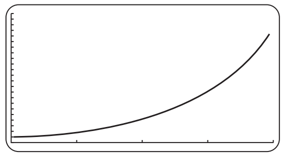
a. 573 computadoras; 1,177 computadoras; 1,548 computadoras; 1,925 computadoras
b. 2,000 computadoras

19. 122.3 cm **21.** 86.1%

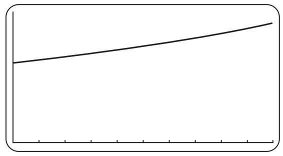
23. 76.4 millones **25.** 1,080

Ejercicios de uso de la tecnología 3.3, página 180

1. **a.**

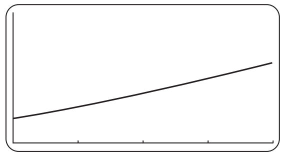


3. **a.**



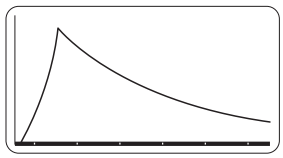
b. 666 millones, 926.8 millones

5. **a.**



b. 325 millones

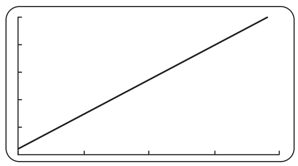
7. **a.**



b. 0 **c.** 0.237 g/cm^3
d. 0.760 g/cm^3

9. **a.** $f(t) = \dfrac{544.65}{1 + 1.65e^{-0.1846t}}$

b.



CAPÍTULO 3 Revisión de conceptos, página 182

1. Potencia; 0; 1; exponencial

2. **a.** $(-\infty, \infty)$; $(0, \infty)$ **b.** (0, 1); izquierdo; derecho

3. **a.** $(0, \infty)$; $(-\infty, \infty)$; (1, 0) **b.** Disminuye; aumenta

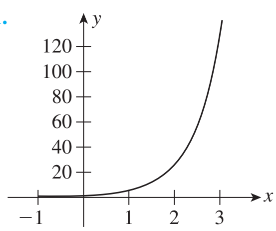
4. **a.** x **b.** x

5. **a.** Inicialmente; crecimiento **b.** Decadencia
c. Tiempo; una mitad

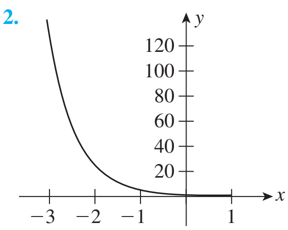
6. **a.** Curva de aprendizaje; C
b. Modelo de crecimiento logístico; A; capacidad de carga

Capítulo 3 Ejercicios de revisión, página 182

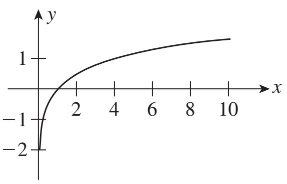
1.



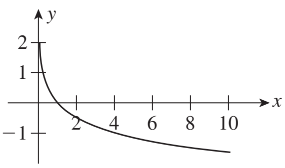
2.



3.



4.



5. $\log_3 81 = 4$ **6.** $\log_9 3 = \frac{1}{2}$ **7.** $\log_{2/3} \frac{27}{8} = -3$

8. $\log_{16} 0.125 = -\frac{3}{4}$ **9.** 3.4011 **10.** 2.1972 **11.** 1.2809

12. 4.3174 **13.** $x + y + z$ **14.** $x + 2y - z$ **15.** $y + 2z$

16. $x = 3$ **17.** $x = -2, 1$ **18.** $x = -5$ **19.** $x = -2, 3$

20. $x = \frac{15}{2}$ **21.** $x = 2$ **22.** $x \approx 1.1610$ **23.** $x \approx -0.9464$

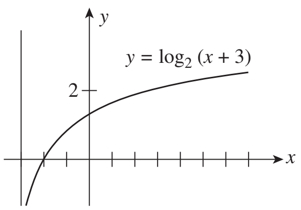
24. $x \approx -2.5025$ **25.** $x \approx -1.2528$ **26.** $x \approx 2.8332$

27. $x \approx 1.8195$ **28.** $x \approx 0.2409$ **29.** $x \approx 33.8672$

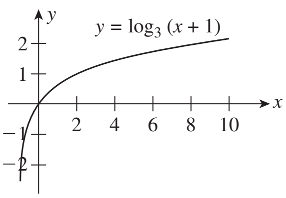
30. $x \approx \pm 1.8934$ **31.** $x \approx 2.5903$ **32.** $x = -9.1629$

33. $x \approx 8.9588$ **34.** $x \approx 3.4657$ **35.** $x \approx -9.1629$

36.

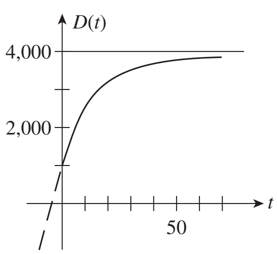


37.



38. **a.** $Q(t) = 2{,}000e^{0.01831t}$ **b.** 161,992 **39.** $k \approx 0.0004$

40.



a. 1,175; 2,540; 3,289 **b.** 4,000

41. $\approx$ 970 estudiantes

42. **a.** 12.5/1,000 nacidos vivos
b. 9.3/1,000 nacidos vivos
c. 6.9/1,000 nacidos vivos

43. **a.** 0 g/cm³ **b.** 0.0361 g/cm³

CAPÍTULO 3 Antes de continuar, página 183

1. $\frac{12}{x^6}$ **2.** $x =$ En 3 **3.** $x = 0$ o 8 **4.** -0.9589 **5.** 8.7 min

CAPÍTULO 4

Ejercicios 4.1, página 197

1. \$80; \$580 **3.** \$836 **5.** \$1,000 **7.** 146 días

9. 10%/año **11.** \$1,718.19 **13.** \$4,974.47

15. \$27,566.93 **17.** \$261,751.04 **19.** \$214,986.69

21. $10\frac{1}{4}$% anual **23.** 8.3% anual **25.** \$29,277.61

27. \$30,255.95 **29.** \$6,885.64 **31.** 2.2 años

33. 7.7 años **35.** 6.08% anual **37.** 2.06 años **39.** 24% anual

41. \$123,600 **43.** 5% anual **45.** \$852.21 **47.** \$255,256

49. \$2.58 millones **51.** \$22,163.75 **53.** \$26,267.49

55. **a.** \$34,626.88 **b.** \$33,886.16 **c.** \$33,506.76

57. Acme Mutual Fund **59.** \$23,329.48 **61.** \$5,994.86

63. \$115,300 millones **65.** Inversión A

67. \$33,885.14; \$33,565.38 **69.** $80{,}000e^{\sqrt{t}/2-0.09t}$; \$151,718

73. 4.2% **75.** 5.83% **77.** Verdadero **79.** Verdadero

Ejercicios de uso de la tecnología 4.1, página 204

1. \$5,872.78 **3.** \$475.49 **5.** 8.95% anual

7. 10.20% anual **9.** \$29,743.30 **11.** \$53,303.25

Ejercicios 4.2, página 211

1. \$15,937.42 **3.** \$54,759.35 **5.** \$37,965.57

7. \$137,209.97 **9.** \$28,733.19 **11.** \$15,558.61

13. \$15,011.29 **15.** \$109,658.91 **17.** \$455.70

19. \$44,526.45 **21.** Karen **23.** \$9,850.12 **25.** \$608.54

27. Entre \$383,242 y \$469,053

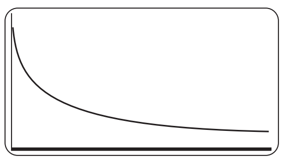
29. Entre \$307,014 y \$373,768 **31.** \$17,887.62

33. Falso

Ejercicios de uso de la tecnología 4.2, página 215

1. \$59,622.15 **3.** \$8,453.59 **5.** \$35,607.23

7. \$13,828.60 **9.** **a.**



b. \$35,038.78 por año

Ejercicios 4.3, página 222

1. \$14,902.95 **3.** \$444.24 **5.** \$622.13

7. \$731.79 **9.** \$1,491.19 **11.** \$516.76

13. \$172.95 **15.** \$1,957.36 **17.** \$3,450.87

19. \$16,274.54 **21.** **a.** \$212.27 **b.** \$1,316.36; \$438.79

23. **a.** \$387.21; \$304.35 **b.** \$1,939.56; \$2,608.80

25. \$1,761.03; \$41,833; \$59,461; \$124,853 **27.** \$60,982.31

29. \$3,135.48 **31.** \$242.23 **33.** \$199.07

35. \$2,090.41; \$4,280.21 **37.** \$24,639.53 **39.** \$33,835.20

41. \$212.77 **43.** \$167,341.33 **45.** \$1,957.80; \$257,135.23

47. **a.** \$1,681.71 **b.** \$194,282.67 **c.** \$1,260.11 **d.** \$421.60

49. \$1,000.92 **51.** \$71,799

Ejercicios de uso de la tecnología 4.3, página 227

1. \$628.02 **3.** \$1 685.47 **5.** \$1,960.96

7. \$894.12 **9.** \$18,288.92

Ejercicios 4.4, página 234

1. 30 **3.** $-\frac{9}{2}$ **5.** $-3, 8, 19, 30, 41$ **7.** $x + 6y$

9. 795 **11.** 792 **13.** 550

15. **a.** 275 **b.** -280 **17.** Al inicio de la semana 37

19. \$15.80 **21.** **b.** \$800 **23.** GP; 256; 508 **25.** No es un GP

27. GP; 1/3; $364\frac{1}{3}$ **29.** 3; 0 **31.** 293,866

33. \$56,284 **35.** Aumento de 8% anual

37. **a.** \$20,113.57 **b.** \$87,537.38 **39.** \$25,165.82

41. \$39,321.60; \$110,678.40 **43.** Verdadero

CAPÍTULO 4 Preguntas de revisión de conceptos, página 237

1. **a.** Original; $P(1 + rt)$ **b.** Interés; $P(1 + i)^n$; $A(1 + i)^{-n}$

2. Simple; uno; nominal; m; $\left(1 + \frac{r}{m}\right)^m - 1$

3. Anualidad; anualidad ordinaria; anualidad simple

4. **a.** $R\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right]$ **b.** $R\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right]$

5. $\frac{Pi}{1-(1+i)^{-n}}$ **6.** Futuro: $\frac{iS}{(1+i)^n - 1}$

7. Constante d; $a + (n - 1)d$; $\frac{n}{2}[2a + (n - 1)d]$

8. Constante r; ar^{n-1}; $\frac{a(1-r^n)}{1-r}$

CAPÍTULO 4 Ejercicios de revisión, página 238

1. **a.** \$7,320.50 **b.** \$7,387.28 **c.** \$7,422.53
d. \$7,446.77

2. **a.** \$19,859.95 **b.** \$20,018.07 **c.** \$20,100.14
d. \$20,156.03

3. **a.** 12% **b.** 12.36% **c.** 12.5509% **d.** 12.6825%

4. **a.** 11.5% **b.** 11.8306% **c.** 12.0055% **d.** 12.1259%

5. \$30,000.29 **6.** \$39,999.95 **7.** \$5,557.68

8. \$23,221.71 **9.** \$7,861.70 **10.** \$173,804.43

11. \$694.49 **12.** \$318.93 **13.** \$332.73 **14.** \$208.44

15. 7.442% **16.** 10.034% **17.** \$80,000

18. \$2,592,702; \$8,612,002 **19.** \$5,491,922 **20.** \$2,982.73

21. \$15,000 **22.** \$5,000 **23.** 7.6% **24.** \$218.64

25. \$73,178.41 **26.** \$13,026.89 **27.** \$2,000

28. **a.** \$965.55 **b.** \$227,598 **c.** \$42,684

29. **a.** \$1,217.12 **b.** \$99,081.60 **c.** \$91,367

30. \$19,573.56 **31.** \$4,727.67 **32.** 205.09; 20.27% anual

33. \$2,203.83

CAPÍTULO 4 Antes de continuar, página 239

1. \$2,540.47 **2.** 6.18% anual **3.** \$569,565.47 **4.** \$1,213.28

5. \$35.13 **6.** **a.** 210 **b.** 127.5

CAPÍTULO 5

Ejercicios 5.1, página 247

1. Solución única; (2, 1) **3.** No tiene solución

5. Solución única; (3, 2)

7. Número infinito de soluciones; $(t; \frac{2}{5}t - 2)$; t, un parámetro

9. Solución única; $(1, -2)$

11. No tiene solución **13.** $k = -2$

15. $\begin{aligned} x + y &= 500 \\ 42x + 30y &= 18{,}600 \end{aligned}$ **17.** $\begin{aligned} x + y &= 100 \\ 5x + 6y &= 560 \end{aligned}$

19. $\begin{aligned} x + y &= 1{,}000 \\ 0.5x + 1.5y &= 1{,}300 \end{aligned}$

21. $\begin{aligned} 0.06x + 0.08y + 0.12z &= 21{,}600 \\ z &= 2x \\ 0.12z &= 0.08y \end{aligned}$

23. $\begin{aligned} 18x + 20y + 24z &= 26{,}400 \\ 4x + 4y + 3z &= 4{,}900 \\ 5x + 4y + 6z &= 6{,}200 \end{aligned}$

25. $\begin{aligned} 12{,}000x + 18{,}000y + 24{,}000z &= 1{,}500{,}000 \\ x &= 2y \\ x + y + z &= 100 \end{aligned}$

27. $\begin{aligned} 10x + 6y + 8z &= 100 \\ 10x + 12y + 6z &= 100 \\ 5x + 4y + 12z &= 100 \end{aligned}$

29. Verdadero

Ejercicios 5.2, página 260

1. $\left[\begin{array}{rr|r} 2 & -3 & 7 \\ 3 & 1 & 4 \end{array}\right]$

3. $\left[\begin{array}{rrr|r} 0 & -1 & 2 & 6 \\ 2 & 2 & -8 & 7 \\ 0 & 3 & 4 & 0 \end{array}\right]$

5. $\begin{aligned} 3x + 2y &= -4 \\ x - y &= 5 \end{aligned}$ **7.** $\begin{aligned} x + 3y + 2z &= 4 \\ 2x &= 5 \\ 3x - 3y + 2z &= 6 \end{aligned}$

9. Sí **11.** No **13.** Sí **15.** No **17.** No

19. $\left[\begin{array}{rr|r} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -5 & -10 \end{array}\right]$ **21.** $\left[\begin{array}{rr|r} 1 & -2 & -3 \\ 0 & 16 & 20 \end{array}\right]$

23. $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & -1 & -5 & -7 \\ 0 & -7 & -7 & -14 \end{array}\right]$

25. $\left[\begin{array}{ccc|c} -6 & -11 & 0 & -5 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 0 & -10 \end{array}\right]$

27. $\left[\begin{array}{cc|c} 3 & 9 & 6 \\ 2 & 1 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow{\frac{1}{3}R_1} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{array}\right]$

$\xrightarrow{R_2 - 2R_1} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -5 & 0 \end{array}\right]$

$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1 - 3R_2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$

29. $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 3 \\ 3 & 8 & 3 & 7 \\ 2 & -3 & 1 & -10 \end{array}\right] \xrightarrow[R_3 - 2R_1]{R_2 - 3R_1}$

$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & -9 & -1 & -16 \end{array}\right] \xrightarrow{-R_2}$

$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -9 & -1 & -16 \end{array}\right] \xrightarrow[R_3 + 9R_2]{R_1 - 3R_2}$

$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow[-R_3]{R_1 + R_3}$

$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right]$

31. (2, 0)

33. $(-1, 2, -2)$

35. $(4, -2)$

37. $(-1, 2)$

39. $\left(\frac{7}{9}, -\frac{1}{9}, -\frac{2}{3}\right)$

41. $(19, -7, -15)$

43. (3, 0, 2)

45. $(1, -2, 1)$

47. $(-20, -28, 13)$

49. $(4, -1, 3)$

51. 300 acres de maíz, 200 acres de trigo

53. En 100 lb de café mezclado, utilizar 40 lb del café de \$5/lb y 60 lb del café de \$6/lb

55. 200 niños y 800 adultos

57. \$40,000 en una cuenta de ahorro, \$120,000 en fondos de inversión, \$80,000 en bonos

59. 400 bolsas de fertilizante grado A; 600 bolsas de fertilizante grado B; 300 bolsas de fertilizante grado C

61. 60 automóviles compactos, 30 medianos y 10 grandes

63. 1 oz de comida I, 2 de comida II, 6 de comida III

65. 240 asientos frente a la orquesta, 560 detrás de la orquesta, 200 asientos de balcón frontal

67. 7 días en Londres, 4 en París y 3 en Roma

69. Falso

Ejercicios de uso de la tecnología 5.2, página 265

1. $x_1 = 3; x_2 = 1; x_3 = -1; x_4 = 2$

3. $x_1 = 5; x_2 = 4; x_3 = -3; x_4 = -4$

5. $x_1 = 1; x_2 = -1; x_3 = 2; x_4 = 0; x_5 = 3$

Ejercicios 5.3, página 271

1. **a.** Una solución **b.** $(3, -1, 2)$

3. **a.** Una solución **b.** (2, 4)

5. **a.** Número infinito de soluciones
b. $(4 - t, -2, t)$; parámetro t

7. **a.** No tiene solución

9. **a.** Número infinito de soluciones
b. $(2, -1, 2 - t, t)$; parámetro t

11. **a.** Número infinito de soluciones
b. $(2 - 3s, 1 + s, s, t)$; parámetros s, t

13. (2, 1) **15.** No tiene solución **17.** $(1, -1)$

19. $(2 + 2t, t)$; parámetro t

21. $(\frac{4}{3} - \frac{2}{3}t, t)$; parámetro t

23. $(-2, + \frac{1}{2}s - \frac{1}{2}t, s, t)$; parámetros s, t

25. $(-1, \frac{17}{7}, \frac{23}{7})$

27. $(1 - \frac{1}{4}s + \frac{1}{4}t, s, t)$; parámetros s, t

29. No tiene solución **31.** $(2, -1, 4)$

33. $x = 20 + z$, $y = 40 - 2z$; 25 automóviles compactos, 30 medianos y 5 grandes; 30 automóviles compactos, 20 medianos y 10 grandes

37. \$10,000 en una cuenta en el mercado de dinero, \$60,000 en acciones y \$30,000 en bonos; \$20,000 en una cuenta en el mercado de dinero, \$70,000 en acciones y \$10,000 en bonos

39. **a.**
$$\begin{array}{rrrrrrrcr} x_1 & & & & & +x_6 & & = & 1{,}700 \\ x_1 & -x_2 & & & & & +x_7 & = & 700 \\ & x_2 & -x_3 & & & & & = & 300 \\ & & -x_3 & +x_4 & & & & = & 400 \\ & & & -x_4 & +x_5 & & +x_7 & = & 700 \\ & & & & x_5 & +x_6 & & = & 1{,}800 \end{array}$$
b. $(1{,}700 - s, 1{,}000 - s + t, 700 - s + t, 1{,}100 - s + t, 1{,}800 - s, s, t)$; (900, 1,000, 700, 1,100, 1,000, 800, 800); (1,000, 1,100, 800, 1,200, 1,100, 700, 800)
c. x_6 debe tener por lo menos 300 automóviles por hora

41. $k = -36$; $(4 + \frac{2}{3}y - \frac{4}{3}z, y, z)$ **43.** Falso

Ejercicios de uso de la tecnología 5.3, página 275

1. $(1 + t, 2 + t, t)$; un parámetro t

3. $(-\frac{17}{7} + \frac{6}{7}t, 3 - t, -\frac{18}{7} + \frac{1}{7}t, t)$; un parámetro t

5. No tiene solución

Ejercicios 5.4, página 281

1. 4×4; 4×3; 1×5; 4×1 **3.** 2; 3; 8

5. D; $D^T = [1 \quad 3 \quad -2 \quad 0]$ **7.** 3×2; 3×2; 3×3; 3×3

9. $\begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 6 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ **11.** $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -4 \\ -1 & -8 & 1 \\ 6 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

13. $\begin{bmatrix} 3 & 5 & 9 \\ 4 & 10 & 13 \end{bmatrix}$ **15.** $\begin{bmatrix} 3 & -4 & -16 \\ 17 & -4 & 16 \end{bmatrix}$

17. $\begin{bmatrix} -1.9 & 3.0 & -0.6 \\ 6.0 & 9.6 & 1.2 \end{bmatrix}$

19. $\begin{bmatrix} \frac{7}{2} & 3 & -1 & \frac{10}{3} \\ -\frac{19}{6} & \frac{2}{3} & -\frac{17}{2} & \frac{23}{3} \\ \frac{29}{3} & \frac{17}{6} & -1 & -2 \end{bmatrix}$

21. $u = 3, x = \frac{5}{2}, y = 7$ y $z = 2$

23. $x = 2, y = 2, z = -\frac{7}{3}$ y $u = 15$

31. $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix}$ **33.** $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -1 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

35. $\begin{bmatrix} 220 & 215 & 210 & 205 \\ 220 & 210 & 200 & 195 \\ 215 & 205 & 195 & 190 \end{bmatrix}$ **37.** $B = \begin{bmatrix} 350.2 & 370.8 & 391.4 \\ 422.3 & 442.9 & 453.2 \\ 638.6 & 679.8 & 721 \end{bmatrix}$

39. **a.** $D = \begin{bmatrix} 2{,}960 & 1{,}510 & 1{,}150 \\ 1{,}100 & 550 & 490 \\ 1{,}230 & 590 & 470 \end{bmatrix}$

b. $E = \begin{bmatrix} 3{,}256 & 1{,}661 & 1{,}265 \\ 1{,}210 & 605 & 539 \\ 1{,}353 & 649 & 517 \end{bmatrix}$

41. $\begin{array}{r} \\ \text{MA} \\ \text{U.S.} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 2000 & 2001 & 2002 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 6.88 & 7.05 & 7.18 \\ 4.13 & 4.09 & 4.06 \end{bmatrix} \end{array}$

43. $\begin{array}{r} \\ \text{Mujeres} \\ \text{Hombres} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{Blanco} & \text{Negro} & \text{Hispano} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 81 & 76.1 & 82.2 \\ 76 & 69.9 & 75.9 \end{bmatrix} \end{array}$

$\begin{array}{r} \\ \text{Blanco} \\ \text{Negro} \\ \text{Hispano} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{Mujeres} & \text{Hombres} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 81 & 76 \\ 76.1 & 69.9 \\ 82.2 & 75.9 \end{bmatrix} \end{array}$

45. Verdadero **47.** Falso

Ejercicios de uso de la tecnología 5.4, página 287

1. $\begin{bmatrix} 15 & 38.75 & -67.5 & 33.75 \\ 51.25 & 40 & 52.5 & -38.75 \\ 21.25 & 35 & -65 & 105 \end{bmatrix}$

3. $\begin{bmatrix} -5 & 6.3 & -6.8 & 3.9 \\ 1 & 0.5 & 5.4 & -4.8 \\ 0.5 & 4.2 & -3.5 & 5.6 \end{bmatrix}$

5. $\begin{bmatrix} 16.44 & -3.65 & -3.66 & 0.63 \\ 12.77 & 10.64 & 2.58 & 0.05 \\ 5.09 & 0.28 & -10.84 & 17.64 \end{bmatrix}$

Ejercicios 5.5, página 294

1. 2×5; no definido **3.** 1×1; 7×7

5. $n = s$; $m = t$ **7.** $\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$

9. $\begin{bmatrix} 9 \\ -10 \end{bmatrix}$ **11.** $\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 9 & 13 \end{bmatrix}$

13. $\begin{bmatrix} 2 & 9 \\ 5 & 16 \end{bmatrix}$ **15.** $\begin{bmatrix} 0.57 & 1.93 \\ 0.64 & 1.76 \end{bmatrix}$

17. $\begin{bmatrix} 6 & -3 & 0 \\ -2 & 1 & -8 \\ 4 & -4 & 9 \end{bmatrix}$ **19.** $\begin{bmatrix} 5 & 1 & -3 \\ 1 & 7 & -3 \end{bmatrix}$

21. $\begin{bmatrix} -4 & -20 & 4 \\ 4 & 12 & 0 \\ 12 & 32 & 20 \end{bmatrix}$ **23.** $\begin{bmatrix} 4 & -3 & 2 \\ 7 & 1 & -5 \end{bmatrix}$

27. $AB = \begin{bmatrix} 10 & 7 \\ 22 & 15 \end{bmatrix}$; $BA = \begin{bmatrix} 5 & 8 \\ 13 & 20 \end{bmatrix}$

31. $A = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$ **33.** **a.** $A^T = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 4 & -6 \end{bmatrix}$

35. $AX = B$, donde $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$,

y $B = \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \end{bmatrix}$

37. $AX = B$, donde $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 0 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$,

y $B = \begin{bmatrix} 6 \\ 7 \\ 4 \end{bmatrix}$

39. $AX = B$, donde $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -3 & 2 & 4 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$,

y $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$

41. **a.** $AB = \begin{bmatrix} 51{,}400 \\ 54{,}200 \end{bmatrix}$

b. La primera entrada muestra que el total de teneduría en acciones de William es \$51.400; la segunda entrada muestra que el total de teneduría en acciones de William es \$54,200.

43. **a.**

$A = \begin{array}{r} \\ \\ \text{Kaitlin} \\ \text{Emma} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \text{N} & \text{S} & \text{D} & \text{R} \\ \text{coronas} & \text{coronas} & \text{coronas} & \text{rublos} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 82 & 68 & 62 & 1{,}200 \\ 64 & 74 & 44 & 1{,}600 \end{bmatrix} \end{array}$

b. $B = \begin{bmatrix} 0.1651 \\ 0.1462 \\ 0.1811 \\ 0.0387 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{N} \\ \text{S} \\ \text{D} \\ \text{R} \end{array}$ **c.** Kaitlin: \$81.15; Emma: \$91.27

45. $B = \begin{bmatrix} 0.78 \\ 0.88 \\ 0.80 \end{bmatrix}$; 2006: \$71.412 millones, 2007: \$74.536 millones, 2008: \$80.096 millones

47. $\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} \text{Dem} & \text{Rep} & \text{Ind} \end{array} \\ BA = & [41{,}000 \quad 35{,}000 \quad 14{,}000] \end{array}$

49. $AB = \begin{bmatrix} 1{,}575 & 1{,}590 & 1{,}560 & 975 \\ 410 & 405 & 415 & 270 \\ 215 & 205 & 225 & 155 \end{bmatrix}$

51. [277.60]; esto representa la factura del teléfono de Cindy por llamadas de larga distancia a Londres, Tokio y Hong Kong.

53. **a.** $\begin{bmatrix} 8{,}800 \\ 3{,}380 \\ 1{,}020 \end{bmatrix}$ **b.** $\begin{bmatrix} 8{,}800 \\ 3{,}380 \\ 1{,}020 \end{bmatrix}$ **c.** $\begin{bmatrix} 17{,}600 \\ 6{,}760 \\ 2{,}040 \end{bmatrix}$

55. Falso **57.** Verdadero

Ejercicios de uso de la tecnología 5.5, página 300

1. $\begin{bmatrix} 18.66 & 15.2 & -12 \\ 24.48 & 41.88 & 89.82 \\ 15.39 & 7.16 & -1.25 \end{bmatrix}$

3. $\begin{bmatrix} 20.09 & 20.61 & -1.3 \\ 44.42 & 71.6 & 64.89 \\ 20.97 & 7.17 & -60.65 \end{bmatrix}$

5. $\begin{bmatrix} 32.89 & 13.63 & -57.17 \\ -12.85 & -8.37 & 256.92 \\ 13.48 & 14.29 & 181.64 \end{bmatrix}$

7. $\begin{bmatrix} 128.59 & 123.08 & -32.50 \\ 246.73 & 403.12 & 481.52 \\ 125.06 & 47.01 & -264.81 \end{bmatrix}$

9. $\begin{bmatrix} 87 & 68 & 110 & 82 \\ 119 & 176 & 221 & 143 \\ 51 & 128 & 142 & 94 \\ 28 & 174 & 174 & 112 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 113 & 117 & 72 & 101 & 90 \\ 72 & 85 & 36 & 72 & 76 \\ 81 & 69 & 76 & 87 & 30 \\ 133 & 157 & 56 & 121 & 146 \\ 154 & 157 & 94 & 127 & 122 \end{bmatrix}$

11. $\begin{bmatrix} 170 & 18.1 & 133.1 & -106.3 & 341.3 \\ 349 & 226.5 & 324.1 & 164 & 506.4 \\ 245.2 & 157.7 & 231.5 & 125.5 & 312.9 \\ 310 & 245.2 & 291 & 274.3 & 354.2 \end{bmatrix}$

Ejercicios 5.6, página 309

5. $\begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ **7.** No existe

9. $\begin{bmatrix} 2 & -11 & -3 \\ 1 & -6 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ **11.** No existe

13. $\begin{bmatrix} -\frac{13}{10} & \frac{7}{5} & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & 0 \\ -\frac{7}{10} & \frac{3}{5} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

15. $\begin{bmatrix} 3 & 4 & -6 & 1 \\ -2 & -3 & 5 & -1 \\ -4 & -4 & 7 & -1 \\ -4 & -5 & 8 & -1 \end{bmatrix}$

17. **a.** $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$; $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$
b. $x = -1$; $y = 1$

19. **a.** $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$; $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ -8 \end{bmatrix}$
b. $x = -1$; $y = 2$; $z = -3$

21. **a.** $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$; $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 7 \end{bmatrix}$
b. $x = 1$; $y = 1$; $z = 2$

23. **a.** $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$; $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 7 \\ 9 \end{bmatrix}$
b. $x_1 = 1$; $x_2 = 2$; $x_3 = 0$; $x_4 = 3$

25. **b.** **(i)** $x = \frac{24}{5}$; $y = \frac{23}{5}$ **(ii)** $x = \frac{2}{5}$; $y = \frac{9}{5}$

27. **b.** **(i)** $x = -1$; $y = 3$; $z = 2$
(ii) $x = 1$; $y = 8$; $z = -12$

29. **b.** **(i)** $x = -\frac{2}{17}$; $y = -\frac{10}{17}$; $x = -\frac{60}{17}$
(ii) $x = 1$; $y = 0$; $z = -5$

31. **b.** **(i)** $x_1 = 1$; $x_2 = -4$; $x_3 = 5$; $x_4 = -1$
(ii) $x_1 = 12$; $x_2 = -24$; $x_3 = 21$; $x_4 = -7$

33. **a.** $A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{5}{2} & -\frac{3}{2} \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

35. **a.** $ABC = \begin{bmatrix} 4 & 10 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$; $A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$;
$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$; $C^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{8} & -\frac{3}{8} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$

37. $\begin{bmatrix} \frac{5}{7} & \frac{3}{7} \\ -\frac{3}{7} & \frac{8}{7} \end{bmatrix}$

39. **a.** 3,214; 3,929 **b.** 4,286; 3,571 **c.** 3,929; 5,357

41. **a.** 400 acres de soya; 300 de maíz; 300 de trigo
b. 500 acres de soya; 400 de maíz; 300 de trigo

43. **a.** \$80,000 en inversiones de alto riesgo; \$20,000 en inversiones de riesgo medio; \$100,000 en inversiones de bajo riesgo
b. \$88,000 en inversiones de alto riesgo; \$22,000 en inversiones de riesgo medio; \$110,000 en inversiones de bajo riesgo
c. \$56,000 en inversiones de alto riesgo; \$64,000 en inversiones de riesgo medio; \$120,000 en inversiones de bajo riesgo

45. Todos los valores de k excepto $k = \frac{3}{2}$; $\frac{1}{3 - 2k}\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -k & 1 \end{bmatrix}$

47. Verdadero **49.** Verdadero

Ejercicios de uso de la tecnología 5.6, página 315

1. $\begin{bmatrix} 0.36 & 0.04 & -0.36 \\ 0.06 & 0.05 & 0.20 \\ -0.19 & 0.10 & 0.09 \end{bmatrix}$

3. $\begin{bmatrix} 0.01 & -0.09 & 0.31 & -0.11 \\ -0.25 & 0.58 & -0.15 & -0.02 \\ 0.86 & -0.42 & 0.07 & -0.37 \\ -0.27 & 0.01 & -0.05 & 0.31 \end{bmatrix}$

5. $\begin{bmatrix} 0.30 & 0.85 & -0.10 & -0.77 & -0.11 \\ -0.21 & 0.10 & 0.01 & -0.26 & 0.21 \\ 0.03 & -0.16 & 0.12 & -0.01 & 0.03 \\ -0.14 & -0.46 & 0.13 & 0.71 & -0.05 \\ 0.10 & -0.05 & -0.10 & -0.03 & 0.11 \end{bmatrix}$

7. $x = 1.2; y = 3.6; z = 2.7$

9. $x_1 = 2.50; x_2 = -0.88; x_3 = 0.70; x_4 = 0.51$

CAPÍTULO 5 Preguntas de revisión de conceptos, página 316

1. **a.** Uno; muchos; no **b.** Uno; muchos; no **2.** Ecuaciones

3. $R_i \leftrightarrow R_j$; cR_i; $R_i + aR_j$; solución

4. **a.** Única **b.** No; número infinito; única

5. Tamaño; entradas **6.** Tamaño; correspondiente

7. $m \times n$; $n \times m$; a_{ji} **8.** cA; c

9. **a.** Columnas; filas **b.** $m \times p$

10. **a.** $A(BC)$; $AB + AC$ **b.** $n \times r$

11. $A^{-1}A$; AA^{-1}; singular **12.** $A^{-1}B$

CAPÍTULO 5 Ejercicios de revisión, página 317

1. $\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 4 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$ **2.** $\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$ **3.** $\begin{bmatrix} -6 & -2 \end{bmatrix}$ **4.** $\begin{bmatrix} 17 \\ 13 \end{bmatrix}$

5. $x = 2; y = 3; z = 1; w = 3$ **6.** $x = 2; y = -2$

7. $a = 3; b = 4; c = -2; d = 2; e = -3$

8. $x = -1; y = -2; z = 1$

9. $\begin{bmatrix} 8 & 9 & 11 \\ -10 & -1 & 3 \\ 11 & 12 & 10 \end{bmatrix}$ **10.** $\begin{bmatrix} -1 & 7 & -3 \\ -2 & 5 & 11 \\ 10 & -8 & 2 \end{bmatrix}$

11. $\begin{bmatrix} 6 & 18 & 6 \\ -12 & 6 & 18 \\ 24 & 0 & 12 \end{bmatrix}$ **12.** $\begin{bmatrix} -10 & 10 & -18 \\ 4 & 14 & 26 \\ 16 & -32 & -4 \end{bmatrix}$

13. $\begin{bmatrix} -11 & -16 & -15 \\ -4 & -2 & -10 \\ -6 & 14 & 2 \end{bmatrix}$ **14.** $\begin{bmatrix} 5 & 20 & 19 \\ -2 & 20 & 8 \\ 26 & 10 & 30 \end{bmatrix}$

15. $\begin{bmatrix} -3 & 17 & 8 \\ -2 & 56 & 27 \\ 74 & 78 & 116 \end{bmatrix}$ **16.** $\begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -2 & -5 \\ \frac{11}{2} & -1 & 11 \\ \frac{7}{2} & -3 & 0 \end{bmatrix}$

17. $x = 1; y = -1$ **18.** $x = -1; y = 3$

19. $x = 1; y = 2; z = 3$

20. $(2, 2t - 5, t)$; un parámetro t **21.** No tiene solución

22. $x = 1; y = -1; z = 2; w = 2$

23. $x = 1; y = 0; z = 1$ **24.** $x = 2; y = -1; z = 3$

25. $\begin{bmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix}$ **26.** $\begin{bmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{8} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$

27. $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}$ **28.** $\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{8} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}$

29. $\begin{bmatrix} \frac{5}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{7}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{5}{4} \end{bmatrix}$ **30.** $\begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ \frac{7}{8} & -\frac{3}{4} & -\frac{5}{8} \\ -\frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{3}{8} \end{bmatrix}$

31. $\begin{bmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & 0 \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{30} & \frac{1}{15} & -\frac{1}{6} \end{bmatrix}$ **32.** $\begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ -2 & 1 & 1 \\ -1 & \frac{1}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix}$

33. $\begin{bmatrix} \frac{3}{2} & 1 \\ -\frac{7}{2} & -1 \end{bmatrix}$ **34.** $\begin{bmatrix} \frac{11}{24} & -\frac{7}{8} \\ -\frac{1}{12} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$

35. $\begin{bmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{3}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$ **36.** $\begin{bmatrix} \frac{4}{7} & -\frac{3}{7} \\ -\frac{3}{7} & \frac{4}{7} \end{bmatrix}$

37. $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{7} & \frac{3}{7} \\ \frac{1}{7} & -\frac{2}{7} \end{bmatrix}$; $x = -1; y = -2$

38. $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & \frac{3}{10} \\ -\frac{1}{5} & \frac{1}{10} \end{bmatrix}$; $x = 2; y = 1$

39. $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{2}{5} & \frac{4}{5} \\ -1 & 1 & -1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{5} & -\frac{7}{10} \end{bmatrix}$; $x = 1; y = 2; z = 4$

40. $A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{7} & \frac{2}{7} \\ -1 & -\frac{4}{7} & \frac{6}{7} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$; $x = 3; y = -1; z = 2$

41. \$9,274, \$8,628 y \$11,366

42. \$2,300,000; \$2,450,000; un incremento de \$150,000

43. **a.** $A = \begin{bmatrix} 800 & 1{,}200 & 400 & 1{,}500 \\ 600 & 1{,}400 & 600 & 2{,}000 \end{bmatrix}$ **b.** $B = \begin{bmatrix} 50.26 \\ 31.00 \\ 103.07 \\ 38.67 \end{bmatrix}$

b. William: \$176,641; Michael: \$212,738

44. **a.** $A = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \text{IBM} & \text{Google} & \text{Boeing} & \text{GM} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 800 & 500 & 1{,}200 & 1{,}500 \\ 500 & 600 & 2{,}000 & 800 \end{bmatrix} \end{array}$

$B = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \text{IBM} & \text{Google} & \text{Boeing} & \text{GM} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 800 & 600 & 1{,}000 & 1{,}200 \\ 700 & 500 & 2{,}100 & 900 \end{bmatrix} \end{array}$

b. $C = \begin{array}{cc} \begin{array}{cccc} \text{IBM} & \text{Google} & \text{Boeing} & \text{GM} \end{array} & \\ \begin{bmatrix} 100 & 100 & -200 & -300 \\ 200 & -100 & 100 & 100 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \text{Olivia} \\ \text{Max} \end{array} \end{array}$

45. 30 de cada tipo

46. Houston: 100,000 galones; Tulsa: 600,000 galones

CAPÍTULO 5 Antes de continuar, página 319

1. $\left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{5}{3}\right)$

2. **a.** $(2, -3, 1)$ **b.** No tiene solución
c. $(2, 1 - 3t, t)$, un parámetro t **d.** $(0, 0, 0, 0)$
e. $(2 + t, 3 - 2t, t)$, parámetro t

3. **a.** $(-1, 2)$ **b.** $(\frac{4}{7}, -\frac{5}{7} + 2t, t)$, parámetro t

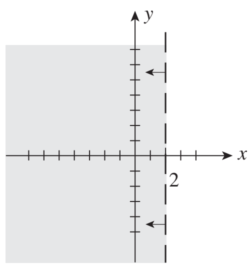
4. **a.** $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 5 & -2 & 6 \end{bmatrix}$ **b.** $\begin{bmatrix} 14 & 3 & 7 \\ 14 & 5 & 1 \end{bmatrix}$ **c.** $\begin{bmatrix} 0 & 5 & 3 \\ 4 & -1 & -11 \end{bmatrix}$

5. $\begin{bmatrix} 3 & -2 & -5 \\ -3 & 2 & 6 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ **6.** $(1, -1, 2)$

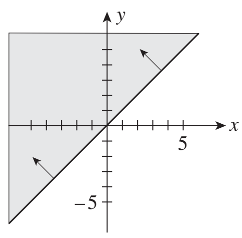
CAPÍTULO 6

Ejercicios 6.1, página 327

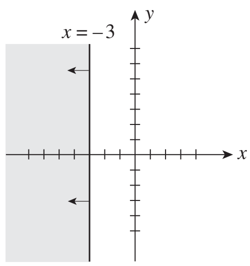
1.



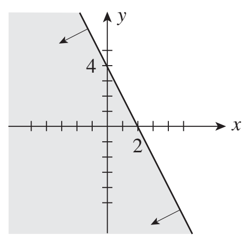
3.



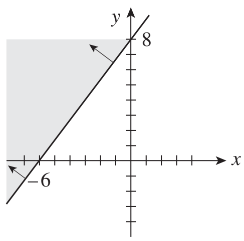
5.



7.



9.



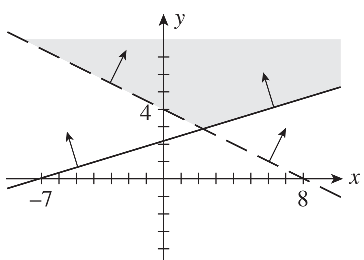
11. $x \geq 1$; $x \leq 5$; $y \geq 2$; $y \leq 4$

13. $2x - y \geq 2$; $5x + 7y \geq 35$; $x \leq 4$

15. $x - y \geq -10$; $7x + 4y \leq 140$; $x + 3y \geq 30$

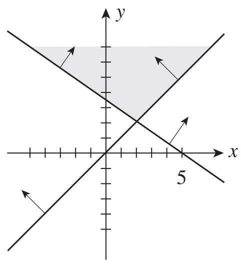
17. $x + y \geq 7$; $x \geq 2$; $y \geq 3$; $y \leq 7$

19.



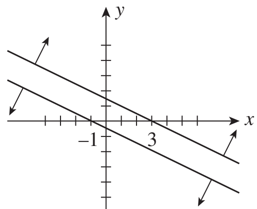
No acotada

21.



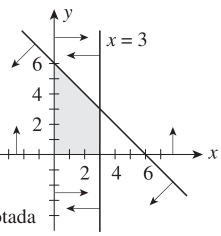
No acotada

23.



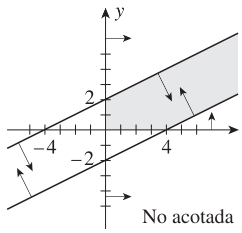
Acotada No tiene solución

25.



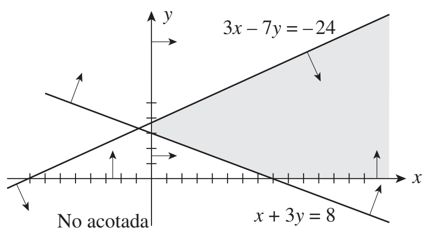
Acotada

27.



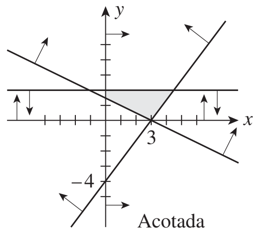
No acotada

29.



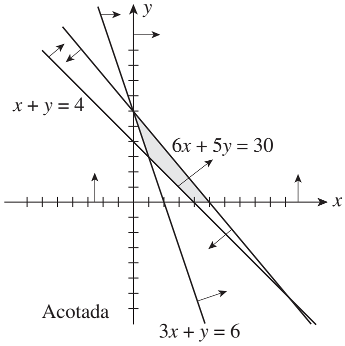
No acotada

31.

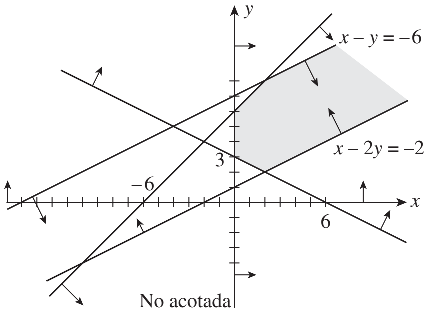


Acotada

33.



35.



37. Falso **39.** Verdadero

Ejercicios 6.2, página 334

1. Maximizar $P = 3x + 4y$
sujeto a
$$\begin{aligned} 6x + 9y &\le 300\\ 5x + 4y &\le 180\\ x \ge 0,\ y &\ge 0 \end{aligned}$$

3. Maximizar $P = 2x + 1.5y$
sujeto a
$$\begin{aligned} 3x + 4y &\le 1{,}000\\ 6x + 3y &\le 1{,}200\\ x \ge 0,\ y &\ge 0 \end{aligned}$$

5. Maximizar $P = 45x + 20y$
sujeto a
$$\begin{aligned} 40x + 16y &\le 3{,}200\\ 3x + 4y &\le 520\\ x \ge 0,\ y &\ge 0 \end{aligned}$$

7. Maximizar $P = 0.1x + 0.12y$
sujeto a
$$\begin{aligned} x + y &\le 20\\ x - 4y &\ge 0\\ x \ge 0,\ y &\ge 0 \end{aligned}$$

9. Maximizar $P = 50x + 40y$
sujeto a
$$\begin{aligned} \tfrac{1}{200}x + \tfrac{1}{200}y &\le 1\\ \tfrac{1}{100}x + \tfrac{1}{300}y &\le 1\\ x \ge 0,\ y &\ge 0 \end{aligned}$$

11. Minimizar $C = 14{,}000x + 16{,}000y$
sujeto a
$$\begin{aligned} 50x + 75y &\ge 650\\ 3{,}000x + 1{,}000y &\ge 18{,}000\\ x \ge 0,\ y &\ge 0 \end{aligned}$$

13. Minimizar $C = 300x + 500y$
sujeto a
$$\begin{aligned} x + y &\ge 10\\ x &\le 5\\ y &\le 10\\ y &\ge 6\\ x &\ge 0 \end{aligned}$$

15. Minimizar $C = 2x + 5y$
sujeto a
$$\begin{aligned} 30x + 25y &\ge 400\\ x + 0.5y &\ge 10\\ 2x + 5y &\ge 40\\ x \ge 0,\ y &\ge 0 \end{aligned}$$

17. Minimizar $C = 1{,}000x + 800y$
sujeto a
$$\begin{aligned} 70{,}000x + 10{,}000y &\ge 2{,}000{,}000\\ 40{,}000x + 20{,}000y &\ge 1{,}400{,}000\\ 20{,}000x + 40{,}000y &\ge 1{,}000{,}000\\ x \ge 0,\ y &\ge 0 \end{aligned}$$

19. Maximizar $P = 0.1x + 0.15y + 0.2z$
sujeto a
$$\begin{aligned} x + y + z &\le 2{,}000{,}000\\ -2x - 2y + 8z &\le 0\\ -6x + 4y + 4z &\le 0\\ -10x + 6y + 6z &\le 0\\ x \ge 0,\ y \ge 0,\ z &\ge 0 \end{aligned}$$

21. Maximizar $P = 18x + 12y + 15z$
sujeto a
$$\begin{aligned} 2x + y + 2z &\le 900\\ 3x + y + 2z &\le 1{,}080\\ 2x + 2y + z &\le 840\\ x \ge 0,\ y \ge 0,\ z &\ge 0 \end{aligned}$$

23. Maximizar $P = 26x + 28y + 24z$
sujeto a
$$\begin{aligned} \tfrac{5}{4}x + \tfrac{3}{2}y + \tfrac{3}{2}z &\le 310\\ x + y + \tfrac{3}{4}z &\le 205\\ x + y + \tfrac{1}{2}z &\le 190\\ x \ge 0,\ y \ge 0,\ z &\ge 0 \end{aligned}$$

25. Minimizar $C = 60x_1 + 60x_2 + 80x_3 + 80x_4 + 70x_5 + 50x_6$
sujeto a
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &\le 300\\ x_4 + x_5 + x_6 &\le 250\\ x_1 + x_4 &\ge 200\\ x_2 + x_5 &\ge 150\\ x_3 + x_6 &\ge 200\\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ \ldots,\ x_6 &\ge 0 \end{aligned}$$

27. Maximizar $P = x + 0.8y + 0.9z$
sujeto a
$$\begin{aligned} 8x + 4z &\le 16{,}000\\ 8x + 12y + 8z &\le 24{,}000\\ 4y + 4z &\le 5{,}000\\ z &\le 800\\ x \ge 0,\ y \ge 0,\ z &\ge 0 \end{aligned}$$

29. Falso

Ejercicios 6.3, página 345

1. Máx: 35; Mín: 5 **3.** No hay valor máximo; Mín: 27

5. Máx: 44; Mín: 15 **7.** $x = 0$; $y = 6$; $P = 18$

9. Cualquier punto (x, y) trazado en el segmento de recta que une $(\frac{5}{2}, 0)$ y $(1, 3)$; $P = 5$

11. $x = 0$; $y = 8$; $P = 64$

13. $x = 0$; $y = 4$; $P = 12$

15. $x = 2$; $y = 1$; $C = 10$

17. Cualquier punto (x, y) trazado en el segmento de recta que une $(20, 10)$ y $(40, 0)$; $C = 120$

19. $x = 14$; $y = 3$; $C = 58$

21. $x = 3$; $y = 3$; $C = 75$

23. $x = 15$; $y = 17.5$; $P = 115$

25. $x = 10; y = 38; P = 134$

27. Máx: $x = 6; y = \frac{33}{2}; P = 258$; Mín: $x = 15; y = 3; P = 186$

29. 20 del producto A, 20 del B; $140

31. 120 del producto A, 60 del B; $480

33. 40 mesas; 100 sillas; $3,800

35. $16 millones en préstamos hipotecarios, $4 millones en préstamos automotrices; $2.08 millones

37. 50 unidades completamente ensambladas, 150 kits; $8,500

39. Saddle Mine: 4 días; Horseshoe Mine: 6 días; $152,000

41. Reserva: 4 millones de galones; tubería: 6 millones de galones; $4,200

43. Número infinito de soluciones; 10 oz de comida A y 4 oz de comida B o 20 oz de comida A y 0 oz de comida B, etc., con un valor mínimo de 40 mg de colesterol

45. 30 en el periódico I, 10 en el periódico II; $38,000

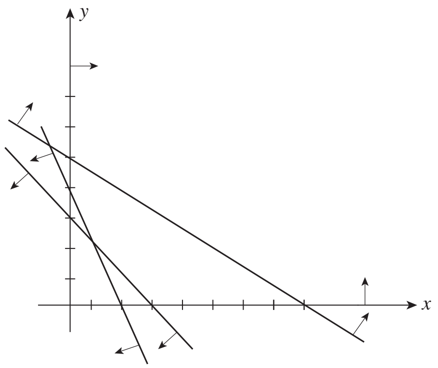
47. 80 de I a A, 20 de I a B, 0 de II a A, 50 de II a B

49. $22,500 en acciones de crecimiento y $7,500 en acciones especulativas; máximo rendimiento: $5,250

51. 750 urbanos, 750 suburbanos; $10,950

53. Falso **55.** **a.** Verdadero **b.** Verdadero

59. **a.**



b. No tiene solución

Ejercicios 6.4, página 367

1. En forma final; $x = \frac{30}{7}, y = \frac{20}{7}, u = 0, v = 0; P = \frac{220}{7}$

3. No en forma final; el elemento pivote es $\frac{1}{2}$, ubicado en el primer renglón, segunda columna

5. En forma final; $x = \frac{1}{3}, y = 0, z = \frac{13}{3}, u = 0, v = 6, w = 0;$ $P = 17$

7. No en forma final; el elemento pivote es 1, ubicado en el tercer renglón, segunda columna

9. En forma final; $x = 30, y = 10, z = 0, u = 0, v = 0; P = 60$; $x = 30, y = 0, z = 0, u = 10, v = 0; P = 60$; entre otros

11. $x = 0, y = 4, u = 0, v = 1; P = 16$

13. $x = 6, y = 3, u = 0, v = 0; P = 96$

15. $x = 6, y = 6, u = 0, v = 0, w = 0; P = 60$

17. $x = 0, y = 4, z = 4, u = 0, v = 0; P = 36$

19. $x = 0, y = 3, z = 0, u = 90, v = 0, w = 75; P = 12$

21. $x = 15, y = 3, z = 0, u = 2, v = 0, w = 0; P = 78$

23. $x = \frac{5}{4}, y = \frac{15}{2}, z = 0, u = 0, v = \frac{15}{4}, w = 0; P = 90$

25. $x = 2, y = 1, z = 1, u = 0, v = 0, w = 0; P = 87$

29. Nada en el modelo A, 2,500 en el modelo B; $100,000

31. 65 acres de cultivo A, 80 acres de cultivo B; $25,625; no

33. $62,500 en el fondo del mercado de dinero, $125,000 en el fondo de capital accionario de renta variable y $62,500 en el fondo de crecimiento e ingresos; $25,625

35. 180 unidades del producto A, 140 del B y 200 del C; $7,920; no

37. 22 min del tiempo de publicidad de la mañana, 3 min del tiempo de publicidad de la tarde

39. 80 unidades del producto A, 80 del B y 60 del C; utilidad máxima; $5,760; no

41. 9,000 botellas de la fórmula I, 7,833 botellas de la fórmula II, 6,000 botellas de la fórmula III; utilidad máxima; $4,986.60; Sí, ingredientes para 4 167 botellas de la fórmula II

43. Proyecto A: $800,000, proyecto B: $800,000 y proyecto C: $400,000

45. Falso **47.** Verdadero

Ejercicios de uso de la tecnología 6.4, página 376

1. $x = 1.2, y = 0, z = 1.6, w = 0; P = 8.8$

3. $x = 1.6, y = 0, z = 0, w = 3.6; P = 12.4$

Ejercicios 6.5, página 384

1. $x = 4, y = 0; C = -8$

3. $x = 4, y = 3; C = -18$

5. $x = 0, y = 13, z = 18, w = 14; C = -111$

7. $x = \frac{5}{4}, y = \frac{1}{4}, u = 2, v = 3;\ C = P = 13$

9. $x = 5, y = 10, z = 0, u = 1, v = 2; C = P = 80$

11. Maximizar $P = 4u + 6v$
sujeto a
$$\begin{aligned} u + 3v &\le 2 \\ 2u + 2v &\le 5; \quad x = 4, y = 0; C = 8 \\ u \ge 0, v &\ge 0 \end{aligned}$$

13. Maximizar $P = 60u + 40v + 30w$
sujeto a
$$\begin{aligned} 6u + 2v + w &\le 6 \\ u + v + w &\le 4; \quad x = 10, y = 20; C = 140 \\ u \ge 0, v \ge 0, w &\ge 0 \end{aligned}$$

15. Maximizar $P = 10u + 20v$
sujeto a
$$\begin{aligned} 20u + v &\le 200 \\ 10u + v &\le 150; \quad x = 0, y = 0, z = 10; C = 1{,}200 \\ u + 2v &\le 120 \\ u \ge 0, v &\ge 0 \end{aligned}$$

17. Maximizar $P = 10u + 24v + 16w$
sujeto a
$$\begin{aligned} u + 2v + w &\le 6 \\ 2u + v + w &\le 8; \quad x = 8, y = 0, z = 8; C = 80 \\ 2u + v + w &\le 4 \\ u \ge 0, v \ge 0, w &\ge 0 \end{aligned}$$

19. Maximizar $P = 6u + 2v + 4w$
sujeto a
$$\begin{aligned} 2u + 6v \quad\quad &\le 30 \\ 4u \quad\quad + 6w &\le 12; \quad x = \tfrac{1}{3}, y = \tfrac{4}{3}, z = 0; C = 26 \\ 3u + v + 2w &\le 20 \\ u \ge 0, v \ge 0, w &\ge 0 \end{aligned}$$

21. 2 recipientes tipo A; 3 recipientes tipo B; $250,000

23. 30 en el periódico I, 10 en el periódico II; $38,000

25. 8 oz de jugo de naranja; 6 oz de jugo de toronja; 178 calorías

27. Verdadero

Ejercicios de uso de la tecnología 6.5, página 390

1. $x = 1.333333$, $y = 3.333333$, $z = 0$; y $C = 4.66667$

3. $x = 0.9524$, $y = 4.2857$, $z = 0$; $C = 6.0952$

CAPÍTULO 6 Preguntas de revisión de conceptos, página 390

1. **a.** Medio plano; recta **b.** $ax + by \le c$; $ax + by = c$

2. **a.** Puntos; cada una **b.** Acotada; contenido

3. Función objetivo; maximizado; minimizado; lineal; desigualdades

4. **a.** Punto esquina **b.** Recta

5. Maximizado; no negativo; menor que; igual a

6. Ecuaciones; variables de holgura; $-c_1x_1 - c_2x_2 - \cdots - c_nx_n + P = 0$; abajo; aumentado

7. Minimizado; no negativo; mayor que; igual a

8. Dual; objetivo; valor óptimo

CAPÍTULO 6 Ejercicios de revisión, página 391

1. Máx: 18-cualquier punto (x, y) trazado en el segmento de recta que une $(0, 6)$ a $(3, 4)$; Mín: 0

2. Máx: 27; Mín: 7 **3.** $x = 0$; $y = 4$; $P = 20$

4. $x = 0$; $y = 12$; $P = 36$

5. $x = 3$; $y = 4$; $C = 26$ **6.** $x = 1.25$; $y = 1.5$; $C = 9.75$

7. $x = 3$; $y = 10$; $P = 29$ **8.** $x = 8$; $y = 0$; $P = 48$

9. $x = 20$; $y = 0$; $C = 40$ **10.** $x = 2$; $y = 6$; y $C = 14$

11. Máx: $x = 22$; $y = 0$; $Q = 22$; Mín: $x = 3$; $y = \frac{5}{2}$; $Q = \frac{11}{2}$

12. Máx: $x = 12$; $y = 6$; $Q = 54$; Mín: $x = 4$; $y = 0$; $Q = 8$

13. $x = 3$, $y = 4$, $u = 0$, $v = 0$ y $P = 25$

14. $x = 3$, $y = 6$, $u = 4$, $v = 0$, $w = 0$ y $P = 36$

15. $x = \frac{56}{5}$, $y = \frac{2}{5}$, $z = 0$, $u = 0$, $v = 0$ y $P = 23\frac{3}{5}$

16. $x = 0$, $y = \frac{11}{3}$, $z = \frac{25}{6}$, $u = \frac{37}{6}$, $v = 0$, $w = 0$ y $P = \frac{119}{6}$

17. $x = \frac{3}{2}$, $y = 1$, $u = \frac{1}{4}$, $v = \frac{5}{4}$ y $C = \frac{13}{2}$

18. $x = \frac{32}{11}$, $y = \frac{36}{11}$, $u = \frac{2}{11}$, $v = 0$ y $C = \frac{104}{11}$

19. $x = \frac{3}{4}$, $y = 0$, $z = \frac{7}{4}$, $u = 6$, $v = 6$ y $C = 60$

20. $x = 0$, $y = 2$, $z = 0$, $u = 1$, $v = 0$, $w = 0$ y $C = 4$

21. $40,000 en cada empresa; $P = \$13,600$

22. 60 radiorrelojes del modelo A; 60 radiorrelojes del modelo B; $P = \$1,320$

23. 93 del modelo A, 180 del modelo B; $P = \$456$

24. Mina Saddle: 4 días; Mina Horseshoe: 6 días; $152,000

25. $70,000 en acciones de primera clase; $0 en acciones de crecimiento; $30,000 en acciones especulativas; máximo rendimiento: $13,000

26. 0 unidades del producto A, 30 unidades del producto B, 0 unidades del producto C; $P = \$180$

CAPÍTULO 6 Antes de continuar, página 393

1. Mín: $x = 3$, $y = 16$; $C = -7$; Máx: $x = 28$, $y = 8$; $P = 76$

2. Máx: $x = 0$, $y = \frac{24}{7}$; $P = \frac{72}{7}$

3.

x	y	z	u	v	w	P	Constante
2	1	−1	1	0	0	0	3
1	−2	3	0	1	0	0	1
3	2	4	0	0	1	0	17
−1	−2	3	0	0	0	1	0

4. $x = 2$; $y = 0$; $z = 11$; $u = 2$; $v = 0$; $w = 0$; $P = 28$

5. Máx: $x = 6$, $y = 2$; $P = 34$

CAPÍTULO 7

Ejercicios 7.1, página 402

1. $\{x \mid x$ es un medallista de oro en los Juegos Olímpicos de Invierno 2010$\}$

3. $\{x \mid x$ es un entero mayor de 2 y menor de 8$\}$

5. $\{2, 3, 4, 5, 6\}$ **7.** $\{-2\}$

9. **a.** Verdadero **b.** Falso **11.** **a.** Falso **b.** Falso

13. Verdadero **15.** **a.** Verdadero **b.** Falso

17. **a.** y **b.**

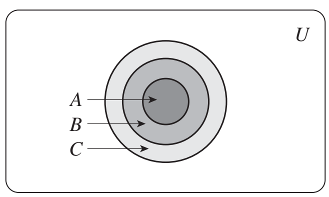
63. **a.** −0.9 mil toneladas métricas por año; 20.3 mil toneladas métricas por año
b. Sí

19. **a.** $\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}$
b. $\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}$
c. $\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 4\}$

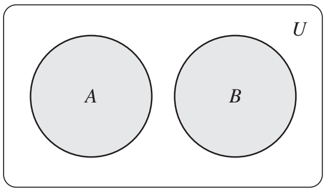
21. $\{1, 2, 3, 4, 6, 8, 10\}$

23. {Jill, John, Jack, Susan, Sharon}

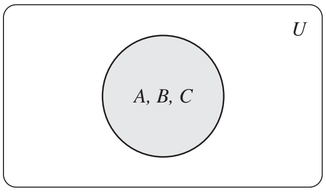
25. **a.**



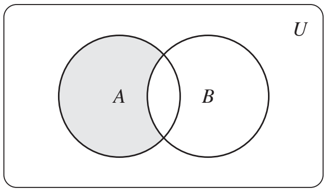
b.



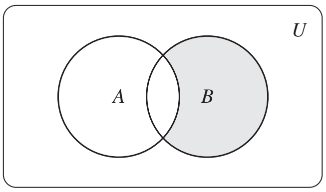
c.



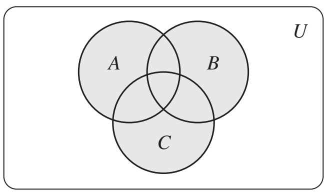
27. a.



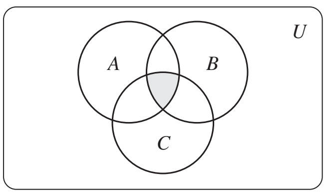
b.



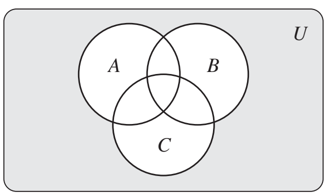
29. a.



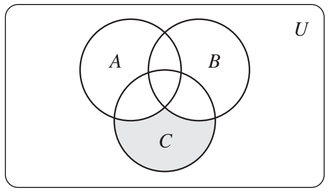
b.



31. a.



b.



33. **a.** {2, 4, 6, 8, 10}
b. {1, 2, 4, 5, 6, 8, 9, 10}
c. {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}

35. **a.** $C = \{1, 2, 4, 5, 8, 9\}$ **b.** $\varnothing$
c. {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}

37. **a.** No disjunto **b.** Disjunto

39. **a.** El conjunto de los empleados de Universal Life Insurance que no toman té
b. El conjunto de los empleados de Universal Life Insurance que no toman café

41. **a.** El conjunto de los empleados de Universal Life Insurance que toman té, pero no café
b. El conjunto de los empleados de Universal Life Insurance que toman café, pero no té

43. **a.** El conjunto de los empleados en un hospital que no son médicos
b. El conjunto de los empleados en un hospital que no son enfermeras

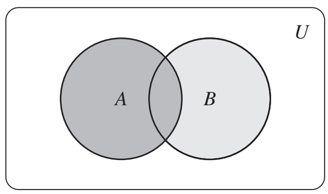
45. **a.** El conjunto de los empleados en un hospital que son médicas
b. El conjunto de los empleados en un hospital que son tanto médicos como administradores

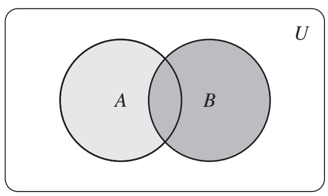
47. **a.** $D \cap F$ **b.** $R \cap F^c \cap L^c$

49. **a.** B^c **b.** $A \cap B$ **c.** $A \cap B \cap C^c$

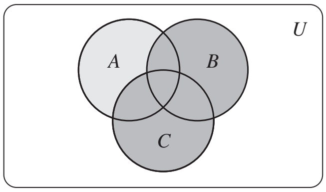
51. **a.** $A \cap B \cap C$; el conjunto de turistas que tomaron el metro, un taxi y un autobús en un periodo de más de una semana en Londres
b. $A \cap C$; el conjunto de turistas que tomaron el metro y un autobús en un periodo de más de una semana en Londres
c. B^c; el conjunto de turistas que no tomaron un taxi en un periodo de más de una semana en Londres

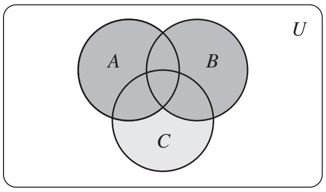
53.



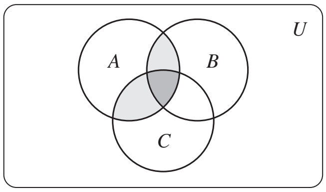


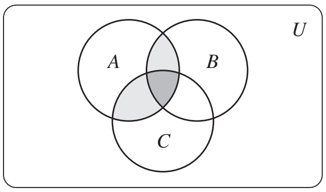
55.





57.





61. **a.** x, y, v, r, w, u **b.** v, r

63. **a.** s, t, y **b.** t, z, w, x, s **65.** $A \subset C$

67. Falso **69.** Verdadero **71.** Verdadero

Ejercicios 7.2, página 408

3. **a.** 4 **b.** 5 **c.** 7 **d.** 2

7. 20

9. **a.** 140 **b.** 100 **c.** 60

11. 13 **13.** 0 **15.** 13 **17.** 61

19. **a.** 106 **b.** 64 **c.** 38 **d.** 14

21. **a.** 182 **b.** 118 **c.** 56 **d.** 18 **23.** 30

25. **a.** 64 **b.** 10 **27.** **a.** 36 **b.** 36 **29.** 5

31. **a.** 62 **b.** 33 **c.** 25 **d.** 38

33. **a.** 108 **b.** 15 **c.** 45 **d.** 12

35. **a.** 22 **b.** 80

37. Verdadero **39.** Verdadero

Ejercicios 7.3, página 415

1. 12 **3.** 64 **5.** 24

7. 24 **9.** 60 **11.** Mil millones **13.** 5^{50}

15. 400 **17.** 9,990

19. **a.** 17,576,000 **b.** 17,576,000

21. 1,024; 59,049 **23.** 2,730

25. 217 **27.** Verdadero

Ejercicios 7.4, página 426

1. 360 **3.** 10 **5.** 120

7. 20 **9.** n **11.** 1

13. 35 **15.** 1 **17.** 84

19. $\dfrac{n(n-1)}{2}$ **21.** $\dfrac{n!}{2}$

23. Permutación **25.** Combinación

27. Permutación **29.** Combinación

31. $P(4, 4) = 24$ **33.** $P(4, 4) = 24$

35. $P(9, 9) = 362{,}880$ **37.** $C(12, 3) = 220$

39. 151,200 **41.** 2,520

43. 20 **45.** $C(12, 3) = 220$

47. $C(100, 3) = 161{,}700$ **49.** $P(6, 6) = 720$

51. $P(12, 6) = 665{,}280$

53. **a.** $P(10, 10) = 3{,}628{,}800$
b. $P(3, 3)P(4, 4)P(3, 3)P(3, 3) = 5{,}184$

55. **a.** $P(20, 20) = 20!$
b. $P(5, 5)P[(4, 4)]^5 = 5!(4!)^5 = 955{,}514{,}880$

57. **a.** $P(12, 9) = 79{,}833{,}600$
b. $C(12, 9) = 220$ **c.** $C(12, 9) \cdot C(3, 2) = 660$

59. $2\{C(2, 2) + [C(3, 2) - C(2, 2)]\} = 6$

61. $C(3,3)[C(8, 6) + C(8, 7) + C(8, 8)] = 37$

63. **a.** $C(12, 3) = 220$ **b.** $C(11, 2) = 55$
c. $C(5, 1)C(7, 2) + C(5, 2)C(7, 1) + C(5, 3) = 185$

65. $P(7, 3) + C(7, 2)P(3, 2) = 336$

67. $C(5, 1)C(3, 1)C(6, 2)[C(4, 1) + C(3, 1)] = 1{,}575$

69. $10C(4, 1) = 40$

71. $C(4, 1)C(13, 5) - 40 = 5{,}108$

73. $13C(4, 3) \cdot 12C(4, 2) = 3{,}744$

75. $C(6, 2) = 15$

77. $C(12, 6) + C(12, 7) + C(12, 8) + C(12, 9) +$
$C(12, 10) + C(12, 11) + C(12, 12) = 2{,}510$

79. $4! = 24$ **83.** Verdadero **85.** Verdadero

Ejercicios de uso de la tecnología 7.4, página 431

1. $1.307674368 \times 10^{12}$ **3.** $2.56094948229 \times 10^{16}$

5. 674,274,182,400 **7.** 133,784,560

9. 4,656,960

11. 658,337,004,000

Ejercicios 7.5, página 436

1. $\{a, b, d, f\}$; $\{a\}$ **3.** $\{b, c, e\}$; $\{a\}$ **5.** No **7.** S

9. $\varnothing$ **11.** Sí **13.** Sí **15.** $E \cup F$ **17.** G^c

19. $(E \cup F \cup G)^c$

21. **a.** $\{(2, 1), (3, 1), (4, 1), (5, 1), (6, 1), (3, 2), (4, 2), (5, 2), (6, 2), (4, 3), (5, 3), (6, 3), (5, 4), (6, 4), (6, 5)\}$
b. $\{(1, 2), (2, 4), (3, 6)\}$

23. $\varnothing$, $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$, $\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\{b, c\}$, S

25. **a.** $S = \{\text{B, R}\}$ **b.** $\varnothing$, $\{\text{B}\}$, $\{\text{R}\}$, S

27. **a.** $S = \{(\text{H}, 1), (\text{H}, 2), (\text{H}, 3), (\text{H}, 4), (\text{H}, 5), (\text{H}, 6), (\text{T}, 1), (\text{T}, 2), (\text{T}, 3), (\text{T}, 4), (\text{T}, 5), (\text{T}, 6)\}$
b. $\{(\text{H}, 2), (\text{H}, 4), (\text{H}, 6)\}$

29. **a.** No **b.** No

31. $S = \{ddd, ddn, dnd, ndd, dnn, ndn, nnd, nnn\}$

33. **a.** {ABC, ABD, ABE, ACD, ACE, ADE, BCD, BCE, BDE, CDE}
b. 6 **c.** 3 **d.** 6

35. **a.** E^c **b.** $E^c \cap F^c$ **c.** $E \cup F$
d. $(E \cap F^c) \cup (E^c \cap F)$

37. **a.** $\{t \mid t > 0\}$ **b.** $\{t \mid 0 < t \leq 2\}$ **c.** $\{t \mid t > 2\}$

39. **a.** $S = \{0, 1, 2, 3, \ldots, 10\}$ **b.** $E = \{0, 1, 2, 3\}$
c. $F = \{5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

41. **a.** $S = \{0, 1, 2, \ldots, 20\}$
b. $E = \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$ **c.** $F = \{20\}$

47. Falso

Ejercicios 7.6, página 444

1. {(H, H)}, {(H, T)}, {(T, H)}, {(T, T)}

3. $\{(D, m)\}$, $\{(D, f)\}$, $\{(R, m)\}$, $\{(R, f)\}$, $\{(I, m)\}$, $\{(I, f)\}$

5. $\{(1, i)\}$, $\{(1, d)\}$, $\{(1, s)\}$, $\{(2, i)\}$, $\{(2, d)\}$, $\{(2, s)\}$, . . . , $\{(5, i)\}$, $\{(5, d)\}$, $\{(5, s)\}$

7. $\{(\text{A}, \text{Rh}^+)\}$, $\{(\text{A}, \text{Rh}^-)\}$, $\{(\text{B}, \text{Rh}^+)\}$, $\{(\text{B}, \text{Rh}^-)\}$, $\{(\text{AB}, \text{Rh}^+)\}$, $\{(\text{AB}, \text{Rh}^-)\}$, $\{(\text{O}, \text{Rh}^+)\}$, $\{(\text{O}, \text{Rh}^-)\}$

9.

Grado	A	B	C	D	F
Probabilidad	.10	.25	.45	.15	.05

11.

Respuesta	Rezagados	Se mantienen	Aumentan rápidamente	No saben
Probabilidad	.40	.44	.12	.04

13.

Opinión	**A favor**	**En contra**	**No saben**
Probabilidad	.47	.46	.07

15.

Evento	A	B	C	D	E
Probabilidad	.026	.199	.570	.193	.012

17. **a.** $S = \{(0 < x \leq 200), (200 < x \leq 400), (400 < x \leq 600), (600 < x \leq 800), (800 < x \leq 1{,}000), (x > 1{,}000)\}$

b.

Automóviles, x	**Probabilidad**
$0 < x \leq 200$	.075
$200 < x \leq 400$	.1
$400 < x \leq 600$	.175
$600 < x \leq 800$	.35
$800 < x \leq 1{,}000$	.225
$x > 1{,}000$	.075

19. .469 **21.** **a.** .856 **b.** .144 **23.** .46

25. **a.** $\frac{1}{4}$ **b.** $\frac{1}{2}$ **c.** $\frac{1}{13}$ **27.** $\frac{3}{8}$

29. **a.** .633 **b.** .276 **31.** **a.** .35 **b.** .33

33. .530 **35.** **a.** .4 **b.** .23

37. **a.** .448 **b.** .255 **39.** .783

41. Hay seis formas de obtener una suma de 7.

43. No **45.** **a.** $\frac{1}{6}$ **b.** $\frac{5}{6}$ **c.** 1 **47.** Verdadero

Ejercicios 7.7, página 454

1. $\frac{1}{2}$ **3.** $\frac{1}{36}$ **5.** $\frac{1}{9}$ **7.** $\frac{1}{52}$

9. $\frac{3}{13}$ **11.** $\frac{12}{13}$ **13.** .002; .998

15. $P(a) + P(b) + P(c) \neq 1$

17. Los cinco eventos no son mutuamente excluyentes, por ello no puede utilizarse la Propiedad (3); esto es, él podría ganar más de un bolso

19. Los dos eventos no son mutuamente excluyentes; por tanto, la probabilidad del evento dado es $\frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{36} = \frac{11}{36}$.

21. $E^C \cap F^C = \{e\} \neq \varnothing$

23. $P[(G \cup C^c)] \neq 1 - P(G) - P(C)$; él no ha considerado el caso en el que el cliente compra tanto anteojos como lentes de contacto.

25. **a.** 0 **b.** .7 **c.** .8 **d.** .3

27. **a.** $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{8}$ **b.** $\frac{1}{2}$, $\frac{5}{8}$ **c.** $\frac{1}{8}$ **d.** $\frac{3}{4}$ **29.** .332

31. **a.** .24 **b.** .46 **33.** **a.** .16 **b.** .38 **c.** .22

35. **a.** .41 **b.** .518 **37.** **a.** .52 **b.** .34

39. **a.** .439 **b.** .385 **41.** **b.** .52 **c.** .859

43. **a.** .90 **b.** .40 **c.** .40

45. **a.** .6 **b.** .332 **c.** .232 **d.** .6

49. Verdadero **51.** Falso

CAPÍTULO 7 Preguntas de revisión de conceptos, página 460

1. Conjunto; elemento; conjunto **2.** Igual **3.** Subconjunto

4. **a.** No **b.** Todo **5.** **a.** Unión **b.** Intersección

6. Complemento **7.** $A^C \cap B^C \cap C^C$

8. Permutación; combinación

9. Experimento; muestra; espacio; evento **10.** $\varnothing$

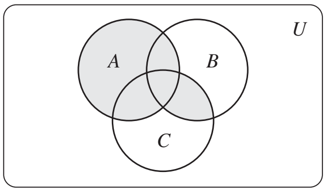
11. Uniforme; $\dfrac{1}{n}$

CAPÍTULO 7 Ejercicios de revisión, página 460

1. $\{3\}$ **2.** $\{A, E, H, L, S, T\}$ **3.** $\{4, 6, 8, 10\}$

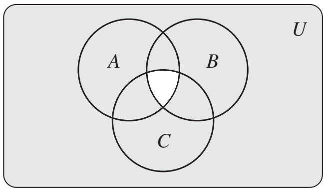
4. $\{-4\}$ **5.** Sí **6.** Sí **7.** Sí **8.** No

9.



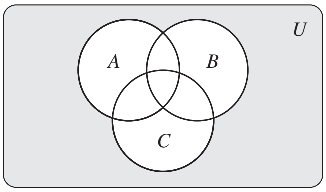
$A \cup (B \cap C)$

10.



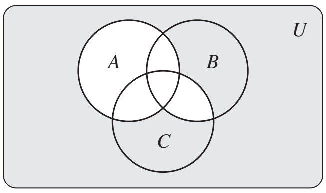
$(A \cap B \cap C)^C$

11.



$A^C \cap B^C \cap C^C$

12.



$A^C \cap (B^C \cup C^C)$

17. El conjunto de todos los participantes en un estudio de comportamiento del consumidor que evitaron comprar un producto porque no es reciclable y boicotearon los productos de una empresa debido a su historial ambiental.

18. El conjunto de todos los participantes en un estudio de comportamiento del consumidor que evitaron comprar un producto porque no es reciclable y/o reciclaron su basura voluntariamente.

19. El conjunto de todos los participantes en un estudio de comportamiento del consumidor que no usaron pañales de tela en lugar de pañales desechables y reciclaron su basura voluntariamente.

20. El conjunto de todos los participantes en un estudio de comportamiento del consumidor que no boicotearon los productos de una empresa debido a su historial ambiental y/o no reciclaron su basura voluntariamente.

21. 150 **22.** 230 **23.** 270 **24.** 30 **25.** 70 **26.** 200

27. 190 **28.** 181,440 **29.** 120 **30.** 8,400

31. **a.** 0 **b.** .6 **c.** .6 **d.** .4 **e.** 1

32. **a.** .35 **b.** .65 **c.** .05

33. **a.** .49 **b.** .39 **c.** .48

34. $\frac{2}{7}$ **35.** Ninguno

36. **a.** 446 **b.** 377 **c.** 34 **37.** 720 **38.** 20

39. **a.** 50,400 **b.** 5,040 **40.** **a.** 60 **b.** 125

41. 80 **42.** **a.** 1,287 **b.** 288

43. 720 **44.** 1,050 **45.** **a.** 5,040 **b.** 3,600

46. **a.** 487,635 **b.** 550 **c.** 341,055

47. **a.** $C(15, 4) = 1{,}365$ **b.** $C(15, 4) - C(10, 4) = 1{,}155$

48. **a.** .019 **b.** .981

CAPÍTULO 7 Antes de continuar, página 462

1. **a.** $\{d, f, g\}$ **b.** $\{b, c, d, e, f, g\}$ **c.** $\{b, c, e\}$

2. 360 **3.** 200 **4.** $\frac{5}{12}$ **5.** $\frac{4}{13}$ **6.** **a.** .9 **b.** .3

CAPÍTULO 8

Ejercicios 8.1, página 468

1. $\frac{1}{32}$ **3.** $\frac{31}{32}$

5. $P(E) = 13C(4, 2)/C(52, 2) \approx .059$

7. $C(26, 2)/C(52, 2) \approx .245$

9. $[C(3, 2)C(5, 2)]/C(8, 4) = 3/7$

11. $[C(5, 3)C(3, 1)]/C(8, 4) = 3/7$ **13.** $C(3, 2)/8 = 3/8$

15. 1/8 **17.** $C(10, 6)/2^{10} \approx .205$

19. **a.** $C(4, 2)/C(24, 2) \approx .022$
b. $1 - C(20, 2)/C(24, 2) \approx .312$

21. **a.** $C(6, 2)/C(80, 2) \approx .005$
b. $1 - C(74, 2)/C(80, 2) \approx .145$

23. **a.** .12; $C(98, 10)/C(100, 12) \approx .013$
b. .15; .015

25. $[C(12, 8)C(8, 2) + C(12, 9)C(8, 1) + C(12, 10)]/C(20, 10) \approx .085$

27. **a.** $\frac{3}{5}$ **b.** $C(3, 1)/C(5, 3) = .3$ **c.** $1 - C(3, 3)/C(5, 3) = .9$

29. $\frac{1}{729}$ **31.** .0001 **33.** .1 **35.** $40/C(52, 5) \approx .0000154$

37. $[4C(13, 5) - 40]/C(52, 5) \approx .00197$

39. $[13C(4, 3) \cdot 12C(4, 2)]/C(52, 5) \approx .00144$

41. **a.** .618 **b.** .059 **43.** .030

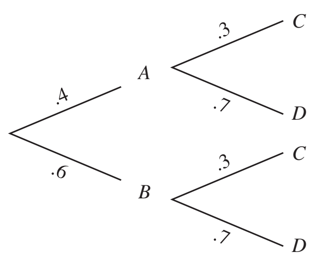
Ejercicios 8.2, página 481

1. **a.** .4 **b.** .33 **3.** .3 **5.** Independiente

7. Independiente **9.** **a.** .24 **b.** .76

11. **a.** .5 **b.** .4 **c.** .2 **d.** .35 **e.** No **f.** No

13. **a.** .4 **b.** .3 **c.** .12 **d.** .30 **e.** Sí **f.** Sí

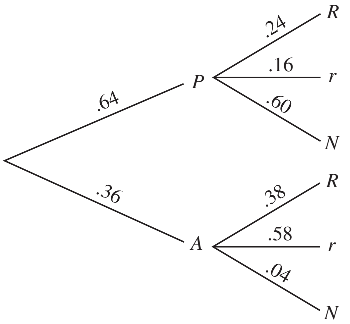


15. **a.** $\frac{1}{12}$ **b.** $\frac{1}{36}$ **c.** $\frac{1}{6}$ **d.** $\frac{1}{6}$ **e.** No

17. $\frac{4}{11}$ **19.** Independiente **21.** No independiente **23.** .1875

25. **a.** $\frac{4}{9}$ **b.** $\frac{4}{9}$ **27.** **a.** $\frac{1}{21}$ **b.** $\frac{1}{3}$ **29.** .25 **31.** $\frac{1}{7}$

33. **a.**



P = Profesional
A = Amateur
R = Recobrado antes de 48 horas
r = Recobrado después de 48 horas
N = Nunca recobrado

b. .24 **c.** .3984

35. **a.** .16 **b.** .424 **c.** .1696

37. **a.** .092 **b.** .008

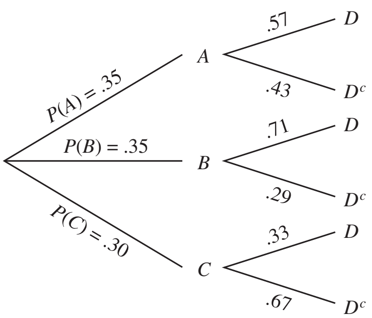
39. **a.** .28; .39; .18; .643; .292 **b.** No independiente

41. No independiente **43.** .0000068 **45.** **a.** $\frac{7}{10}$ **b.** $\frac{1}{5}$

47. 3 **51.** 1 **55.** Falso **57.** Verdadero

Ejercicios 8.3, página 489

1.



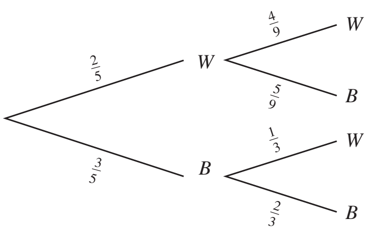
3. **a.** .45 **b.** .2222 **5.** **a.** .48 **b.** .33

7. **a.** .08 **b.** .15 **c.** .348

9. **a.** $\frac{1}{12}$ **b.** $\frac{1}{4}$ **c.** $\frac{1}{18}$ **d.** $\frac{3}{14}$

11. $\frac{4}{17}$ **13.** $\frac{4}{51}$

15.



17. $\frac{9}{17}$ **19.** .422 **21.** **a.** $\frac{3}{4}$ **b.** $\frac{2}{9}$ **23.** .125 **25.** .407

27. **a.** .543 **b.** .545 **c.** .455 **29.** .377

31. **a.** .297 **b.** .10 **33.** .856 **35.** **a.** .57 **b.** .691

37. .647 **39.** .172 **41.** .301

43. **a.** .763 **b.** .276 **c.** .724

45. **a.** .4906 **b.** .62 **c.** .186 **47.** .927

Ejercicios 8.4, página 499

1. **a.** Vea la parte (b)
b.

Resultado	GGG	GGR	GRG	RGG
Valor	3	2	2	2

Resultado	GRR	RGR	RRG	RRR
Valor	1	1	1	0

c. {GGG}

3. Cualquier entero positivo; discreto infinito **5.** $\frac{1}{6}$

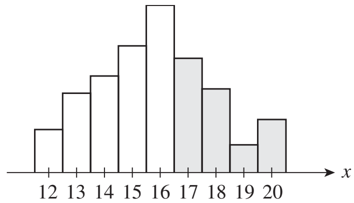
7. Cualquier entero positivo

9. $x \geq 0$; continuo

11. Cualquier entero positivo; discreto infinito

13. **a.** .20 **b.** .60 **c.** .30 **d.** 1

15.



17. **a.**

x	1	2	3	4	5	6
$P(X = x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

y	1	2	3	4	5	6
$P(Y = y)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

b.

$x + y$	2	3	4	5	6	7
$P(X + Y = x + y)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$

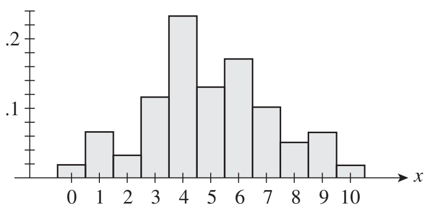
$x + y$	8	9	10	11	12
$P(X + Y = x + y)$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

19. **a.**

x	0	1	2	3	4
$P(X = x)$	.017	.067	.033	.117	.233

x	5	6	7	8	9	10
$P(X = x)$	.133	.167	.100	.050	.067	.017

b.



21.

x	1	2	3	4	5
$P(X = x)$	.007	.029	.021	.079	.164

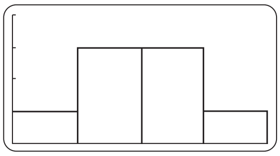
x	6	7	8	9	10
$P(X = x)$	.15	.20	.207	.114	.029

23. Verdadero

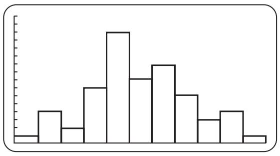
Ejercicios de uso de la tecnología 8.4, página 503

Calculadora graficadora

1.

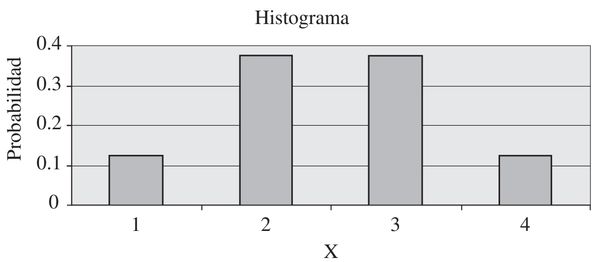


3.

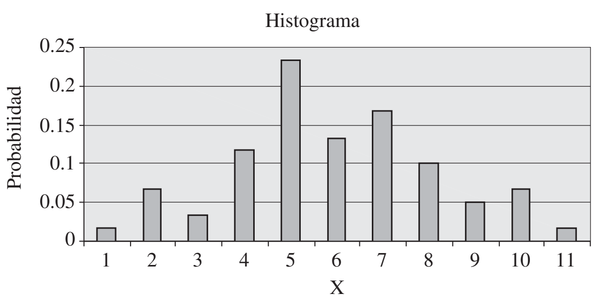


Excel

1.



3.



Ejercicios 8.5, página 513

1. a. 2.6
b.

x	0	1	2	3	4
$P(X = x)$	0	.1	.4	.3	.2

; 2.6

3. 0.86 **5.** \$78.50 **7.** 0.91

9. 0.12 **11.** 1.73 **13.** 5.16%

15. -39¢ **17.** \$50 **19.** \$118,800

21. Ciudad B **23.** Empresa B **25.** 2.86%

27. -5.3¢ **29.** -2.7¢ **31.** 2 a 3; 3 a 2

33. .4 **35.** $\frac{7}{12}$ **37.** $\frac{5}{14}$

39. a. Media: 74; moda: 85; mediana: 80 **b.** Moda

41. 3; cerrado **43.** 16; 16; 16 **45.** Verdadero

Ejercicios 8.6, página 522

1. $\mu = 2$, $\text{Var}(X) = 1$, $\sigma = 1$

3. $\mu = 0$, $\text{Var}(X) = 1$, $\sigma = 1$

5. $\mu = 518$, $\text{Var}(X) = 1891$, $\sigma \approx 43.5$

7. Figura (a) **9.** 1.56

11. $\mu = 4.5$, $\text{Var}(X) = 5.25$

13. a. Sea X = la tasa anual de nacimientos durante los años 1991-2000
b.

x	14.5	14.6	14.7	14.8	15.2	15.5	15.9	16.3
$P(X = x)$	.2	.1	.2	.1	.1	.1	.1	.1

c. $\mu = 15.07$, $\text{Var}(X) = 0.3621$, $\sigma \approx 0.6017$

15. a. Fondo de inversión A: $\mu = \$620$, $\text{Var}(X) = 267{,}600$;
Fondo de inversión B: $\mu = \$520$, $\text{Var}(X) = 137{,}600$
b. Fondo de inversión A
c. Fondo de inversión B

17. 1

19. $\mu = \$339{,}600$; $\text{Var}(X) = 1{,}443{,}840{,}000$; $\sigma \approx \$37{,}998$

21. 95.3%; 0.5% **23.** 48%; 13.9%

25. \$207,200 millones; \$4,500 millones

27. $\mu = 1607$; $\sigma \approx 182$

29. $\mu = 5.452$; $\sigma \approx 0.1713$

31. 16.88 millones; 0.68 millones

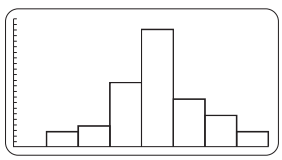
33. a. Por lo menos .75
b. Por lo menos .96

35. 7 **37.** Por lo menos $\frac{7}{16}$

39. Por lo menos $\frac{15}{16}$ **41.** Verdadero

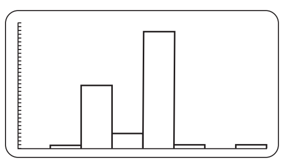
Ejercicios de uso de la tecnología 8.6, página 528

1. a.



b. $\mu = 4$, $\sigma \approx 1.40$

3. a.



b. $\mu = 17.34$, $\sigma \approx 1.11$

5. a. Sea X la variable aleatoria que da el peso de un cartón de azúcar.

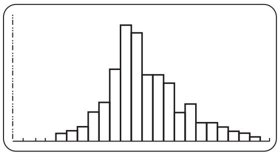
b.

x	4.96	4.97	4.98	4.99	5.00	5.01
$P(X = x)$	$\frac{3}{30}$	$\frac{4}{30}$	$\frac{4}{30}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{5}{30}$

x	5.02	5.03	5.04	5.05	5.06
$P(X = x)$	$\frac{3}{30}$	$\frac{3}{30}$	$\frac{4}{30}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{30}$

c. $\mu \approx 5.00$; $\sigma \approx 0.03$

7. a.



b. 65.875; 1.73

CAPÍTULO 8 Preguntas de revisión de conceptos, página 529

1. Condicional **2.** Independiente **3.** Una probabilidad *a posteriori*

4. Aleatorio **5.** Finito; infinito; continuo **6.** Suma; .75

7. a. $\dfrac{P(E)}{P(E^c)}$ **b.** $\dfrac{a}{a+b}$

8. $p_1(x_1 - \mu)^2 + p_2(x_2 - \mu)^2 + \cdots + p_n(x_n - \mu)^2$; $\sqrt{\text{Var}(X)}$

CAPÍTULO 8 Ejercicios de revisión, página 530

1. .18 **2.** .25 **3.** .06 **4.** .367 **5.** .49 **6.** .364

7. a. $\frac{7}{8}$ **b.** $\frac{7}{8}$ **c.** No **8. a.** .284 **b.** .984

9. .150 **10.** $\frac{2}{15}$ **11.** .00018 **12.** .00995

13. .2451 **14.** .510

15. a. {BBB, NBB, BNB, BBN, NNB, NBN, BNN, NNN}

b.

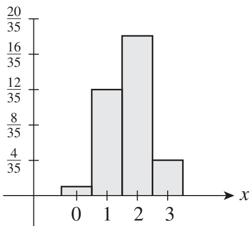
Resultado	BBB	NBB	BNB	BBN
Valor de X	0	1	1	1

Resultado	NNB	NBN	BNN	NNN
Valor de X	2	2	2	3

c.

x	0	1	2	3
$P(X = x)$	$\frac{1}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{18}{35}$	$\frac{4}{35}$

d.



16. \$100 **17. a.** .8 **b.** $\mu = 2.7$; $\sigma \approx 1.42$

18. .457 **19.** .368 **20. a.** .68 **b.** .053 **21.** .32

22. Por lo menos .75

Capítulo 8 Antes de seguir, página 531

1. .72 **2.** .3077

3.

x	−3	−2	0	1	2	3
$P(X = x)$	.05	.1	.25	.3	.2	.1

4. a. .8 **b.** .92 **5.** 0.44; 4.0064; 2

CAPÍTULO 9

Ejercicios 9.1, página 548

1. $\lim_{x \to -2} f(x) = 3$ **3.** $\lim_{x \to 3} f(x) = 3$ **5.** $\lim_{x \to -2} f(x) = 3$

7. El límite no existe.

9.

x	1.9	1.99	1.999
$f(x)$	4.61	4.9601	4.9960

x	2.001	2.01	2.1
$f(x)$	5.004	5.0401	5.41

$\lim_{x \to 2} (x^2 + 1) = 5$

11.

x	−0.1	−0.01	−0.001
$f(x)$	−1	−1	−1

x	0.001	0.01	0.1
$f(x)$	1	1	1

El límite no existe.

13.

x	0.9	0.99	0.999
$f(x)$	100	10,000	1,000,000

x	1.001	1.01	1.1
$f(x)$	1,000,000	10,000	100

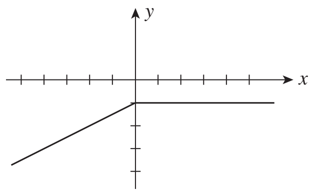
El límite no existe.

15.

x	0.9	0.99	0.999	1.001	1.01	1.1
$f(x)$	2.9	2.99	2.999	3.001	3.01	3.1

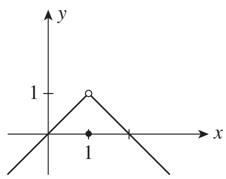
$\lim_{x \to 1} \dfrac{x^2 + x - 2}{x - 1} = 3$

17.



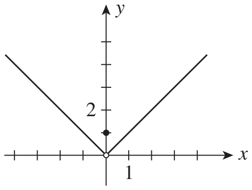
$\lim_{x \to 0} f(x) = -1$

19.



$\lim_{x \to 1} f(x) = 1$

21.



$\lim_{x\to 0} f(x) = 0$

23. 3 **25.** 3 **27.** -1 **29.** 2 **31.** -4 **33.** $\frac{5}{4}$

35. 2 **37.** $\sqrt{171} = 3\sqrt{19}$ **39.** $\frac{3}{2}$ **41.** -1 **43.** -6

45. 2 **47.** $\frac{1}{6}$ **49.** 2 **51.** -1 **53.** -10

55. El límite no existe. **57.** $\frac{5}{3}$ **59.** $\frac{1}{2}$ **61.** $\frac{1}{3}$

63. $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$; $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$ **65.** 0; 0

67. $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$; $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

69.

x	1	10	100	1,000
$f(x)$	0.5	0.009901	0.0001	0.000001

x	-1	-10	-100	$-1{,}000$
$f(x)$	0.5	0.009901	0.0001	0.000001

$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ y $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$

71.

x	1	5	10	100
$f(x)$	12	360	2,910	2.99×10^6

x	1,000	-1	-5
$f(x)$	2.999×10^9	6	-390

x	-10	-100	$-1{,}000$
$f(x)$	$-3{,}090$	-3.01×10^6	-3.0×10^9

$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ y $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

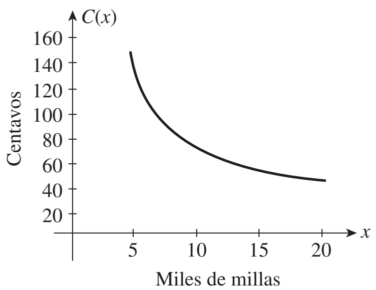
73. 3 **75.** 3 **77.** $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ **79.** 0

81. **a.** \$0.5 millones; \$0.75 millones; \$1,166,667; \$2 millones; \$4.5 millones; \$9.5 millones.
b. El límite no existe; como el porcentaje de contaminante a ser removido se acerca a 100, el costo se vuelve astronómico.

83. \$2.20; el costo promedio de producir x DVD se acercará a \$2.20 por disco a largo plazo.

85. **a.** \$24 millones; \$60 millones; \$83.1 millones **b.** \$120 millones

87. **a.** 147.5¢/mi; 71.7¢/mi; 55.1¢/mi; 48.6¢/mi; 45.4¢/mi
b.



c. Se acerca a 38.6¢/mi.

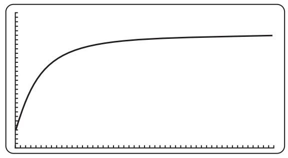
89. Falso **91.** Verdadero **93.** Verdadero

95. a moles/litro/segundo **97.** No

Ejercicios de uso de la tecnología 9.1, página 554

1. 5 **3.** 3 **5.** $\frac{2}{3}$ **7.** e^2

11. **a.**



b. 25,000

Ejercicios 9.2, página 563

1. 3; 2; el límite no existe.

3. El límite no existe; 2; el límite no existe.

5. 0; 2; el límite no existe.

7. -2; 2; el límite no existe. **9.** Verdadero **11.** Verdadero

13. Falso **15.** Verdadero **17.** Falso **19.** Verdadero **21.** 6

23. $-\frac{1}{4}$ **25.** El límite no existe. **27.** -1 **29.** 0

31. -4 **33.** El límite no existe. **35.** 4 **37.** 0; 0

39. $x = 0$; condiciones 2 y 3 **41.** Continúa donde sea

43. $x = 0$; condición 3 **45.** $(-\infty, \infty)$ **47.** $(-\infty, \infty)$

49. $(-\infty, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, \infty)$ **51.** $(-\infty, -2) \cup (-2, 1) \cup (1, \infty)$

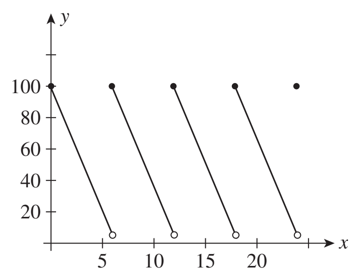
53. $(-\infty, \infty)$ **55.** $(-\infty, \infty)$ **57.** -1 y 1 **59.** 1 y 2

61. f es discontinuo en $x = 1, 2, \ldots, 12$.

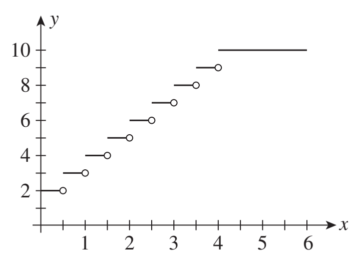
63. Michael progresa en la solución del problema hasta $x = x_1$. Entre $x = x_1$ y $x = x_2$, no realiza ningún avance. Pero en $x = x_2$ repentinamente consigue un progreso, y en $x = x_3$ procede a completar el problema.

65. Las condiciones 2 y 3 no son satisfechas en cada uno de esos puntos.

67.



69.



f es discontinuo en $x = \frac{1}{2}, 1, 1\frac{1}{2}, \ldots, 4$.

71. **a.** ∞; a medida que se reduce el tiempo para excitar el tejido. La fuerza de la corriente eléctrica se vuelve más fuerte.
b. b; a medida que se aumenta el tiempo para excitar el tejido. La fuerza de la corriente eléctrica se vuelve más pequeña y se aproxima a b.

73. 3 **75.** **a.** Sí **b.** No

77. **a.** f es un polinomio de grado 2. **b.** $f(1) = 3$ y $f(3) = -1$

79. **a.** f es un polinomio de grado 3. **b.** $f(-1) = -4$ y $f(1) = 4$

81. $x \approx 0.59$ **83.** ≈ 1.34

85. **c.** $\frac{1}{2}$; $\frac{7}{2}$; Joan ve la pelota en su camino hasta $\frac{1}{2}$ segundo luego de que fue lanzada y de nuevo $3\frac{1}{2}$ segundos más tarde.

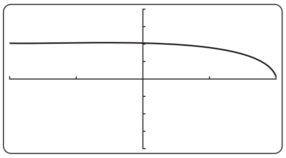
87. Falso **89.** Falso **91.** Falso **93.** Falso **95.** Falso

97. No **99.** **c.** $\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

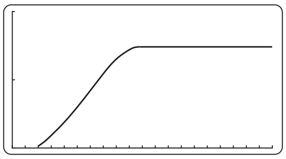
Ejercicios de uso de la tecnología 9.2, página 569

1. $x = 0, 1$ **3.** $x = 0, \frac{1}{2}$ **5.** $x = -\frac{1}{2}, 2$ **7.** $x = -2, 1$

9.



11.



Ejercicios 9.3, página 582

1. 1.5 lb/mo; 0.58 lb/mo; 1.25 lb/mo **3.** 3.1%/h; −21.2%/h

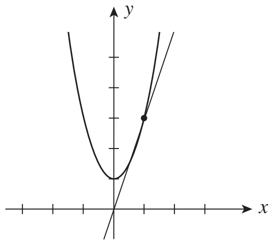
5. **a.** Automóvil A **b.** Viajan a la misma velocidad.
c. Automóvil B **d.** Ambos automóviles cubren la misma distancia.

7. **a.** P_2 **b.** P_1 **c.** El bactericida B; el bactericida A

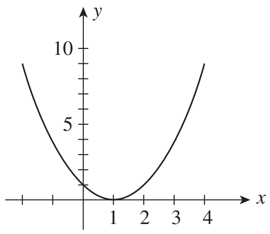
9. 0 **11.** 2 **13.** $6x$ **15.** $-2x + 3$ **17.** 2; $y = 2x + 7$

19. 6; $y = 6x - 3$ **21.** $\frac{1}{9}$; $y = \frac{1}{9}x - \frac{2}{3}$

23. **a.** $4x$ **b.** $y = 4x - 1$
c.



25. **a.** $2x - 2$ **b.** (1, 0)
c.



d. 0

27. **a.** 6; 5.5; 5.1 **b.** 5
c. Los cálculos en la parte (a) muestran que a medida que h se aproxima a cero, la velocidad promedio se aproxima a la velocidad instantánea.

29. **a.** 130 ft/seg; 128.2 ft/seg; 128.02 ft/seg **b.** 128 ft/seg
c. Los cálculos en la parte (a) muestran que, a medida que los intervalos de tiempo sobre los que se ha calculado la velocidad promedio disminuyen cada vez más, la velocidad promedio se aproxima a la velocidad instantánea del automóvil en $t = 20$.

31. **a.** 5 seg **b.** 80 ft/seg **c.** 160 ft/seg

33. **a.** $-\frac{1}{6}$ litro/atmósfera **b.** $-\frac{1}{4}$ litro/atmósfera

35. **a.** $-\frac{2}{3}x + 7$ **b.** \$333 por trimestre; −\$13,000 por trimestre

37. \$6,000 millones por año; \$10,000 millones por año

39. **a.** $f'(h)$ proporciona la tasa de cambio de la temperatura a una altura dada h.
b. Negativo **c.** ≈ -0.05 °F

41. La tasa promedio de cambio de la población de focas en $[a, a + h]$; la tasa instantánea de cambio de la población de focas en $x = a$

43. La tasa promedio de cambio de la producción industrial nacional sobre $[a, a + h]$; la tasa instantánea de cambio de la producción industrial nacional en $x = a$

45. La tasa promedio de cambio de la presión atmosférica en $[a, a + h]$; la tasa instantánea de cambio de la presión atmosférica en $x = a$

47. **a.** Sí **b.** No **c.** No

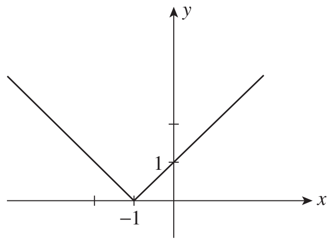
49. **a.** Sí **b.** Sí **c.** No

51. **a.** No **b.** No **c.** No

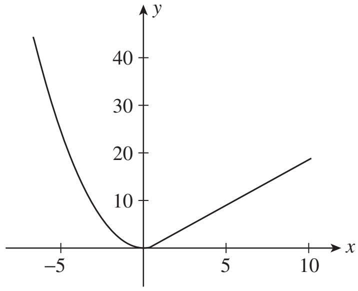
53. 32.1, 30.939, 30.814, 30.8014, 30.8001, 30.8000; 30.8 ft/seg

55. Falso

57.

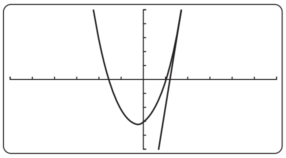


59. $a = 2$, $b = -1$

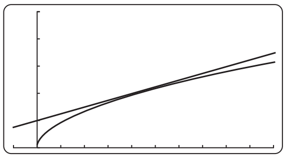


Ejercicios de uso de la tecnología 9.3, página 588

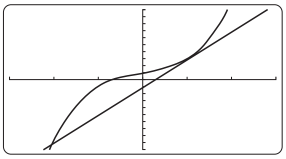
1. **a.** $y = 9x - 11$
b.



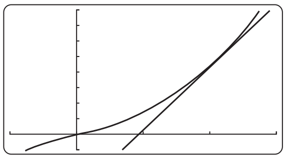
3. **a.** $y = \frac{1}{4}x + 1$
b.



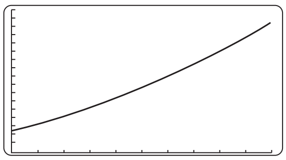
5. **a.** 4
b. $y = 4x - 1$
c.



7. **a.** 4.02
b. $y = 4.02x - 3.57$
c.



9. **a.**



b. 41.22¢/mi **c.** 1.22¢/mi por año

Ejercicios 9.4, página 595

1. 0 **3.** $5x^4$ **5.** $2.1x^{1.1}$ **7.** $6x$ **9.** $2\pi r$ **11.** $\dfrac{3}{x^{2/3}}$

13. $\dfrac{3}{2\sqrt{x}}$ **15.** $-84x^{-13}$ **17.** $10x - 3$ **19.** $-3x^2 + 4x$

21. $0.06x - 0.4$ **23.** $2x - 4 - \dfrac{3}{x^2}$ **25.** $16x^3 - 7.5x^{3/2}$

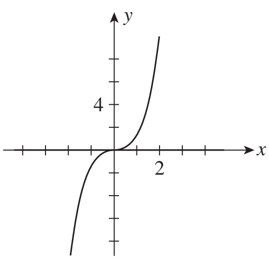
27. $-\dfrac{3}{x^2} - \dfrac{8}{x^3}$ **29.** $-\dfrac{16}{t^5} + \dfrac{9}{t^4} - \dfrac{2}{t^2}$ **31.** $2 - \dfrac{5}{2\sqrt{x}}$

33. $-\dfrac{4}{x^3} + \dfrac{1}{x^{4/3}}$ **35.** **a.** 20 **b.** -4 **c.** 20

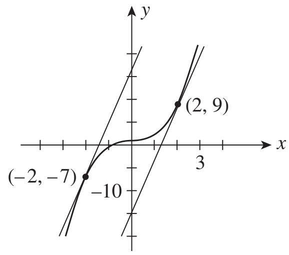
37. 3 **39.** 11 **41.** $m = 5$; $y = 5x - 4$

43. $m = -2$; $y = -2x + 2$

45. **a.** (0, 0)
b.



47. **a.** $(-2, -7)$, $(2, 9)$
b. $y = 12x + 17$ y $y = 12x - 15$
c.



49. **a.** $(0, 0)$; $(1, -\frac{13}{12})$ **b.** $(0, 0)$; $(2, -\frac{8}{3})$; $(-1, -\frac{5}{12})$
c. $(0, 0)$; $(4, \frac{80}{3})$; $(-3, \frac{81}{4})$

51. **a.** $\dfrac{16\pi}{9}$ cm³/cm **b.** $\dfrac{25\pi}{4}$ cm³/cm

53. **a.** 16.3 millones **b.** 14.3 millones por año **c.** 66.8 millones
d. 11.7 millones por año

55. **a.** 49.6%; 41.13%; 36.87%; 34.11%
b. −5.55%/año; −3.32%/año

57. **a.** 157 millones **b.** 10.4 millones/año

59. **a.** $120 - 30t$ **b.** 120 ft/seg **c.** 240 ft

61. **a.** 5%; 11.3%; 15.5% **b.** 0.63%/año; 0.525%/año

63. **a.** −0.9 mil toneladas métricas/ año; 20.3 mil toneladas métricas/año
b. Sí

65. **a.** 15 pts. por año; 12.6 pts. por año; 0 pts. por año
b. 10 pts. por año

67. **a.** $(0.0001)\left(\frac{5}{4}\right)x^{1/4}$ **b.** \$0.00125/radio

69. **a.** $20\left(1 - \dfrac{1}{\sqrt{t}}\right)$ **b.** 50 mph; 30 mph; 33.43 mph
c. −8.28; 5.86; a las 6:30 a. m., la velocidad promedio decrece a una tasa de 8.28 mph/h; a las 7 a.m. esto no ha cambiado, y a las 8 a.m. aumenta a una tasa de 5.86 mph.

71. 32 tortugas por año; 428 tortugas por año; 3,260 tortugas

73. **a.** 12%; 23.9% **b.** 0.8%/año; 1.1%/año

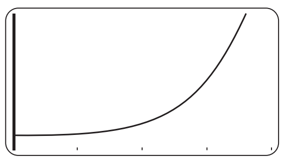
75. **a.** La población total, incluida la población de los países desarrollados y la de los países subdesarrollados o emergentes
b. $0.92t + 3.727$; ≈13 millones de personas por año

77. Verdadero

Ejercicios de uso de la tecnología 9.4, página 601

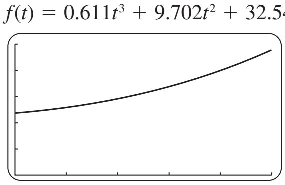
1. 1 **3.** 0.4226 **5.** 0.1613

7. **a.**



b. 3.4295 ppm/40 años; 105.4332 ppm/40 años

9. **a.** $f(t) = 0.611t^3 + 9.702t^2 + 32.544t + 473.5$
b.



c. A principios de 2000, los activos de los fondos de cobertura se incrementaron a una tasa de \$53,781 millones por año y, a principios de 2003, se incrementaron a una tasa de \$139,488 millones por año

Ejercicios 9.5, página 611

1. $2x(2x) + (x^2 + 1)(2)$, o $6x^2 + 2$

3. $(t - 1)(2) + (2t + 1)(1)$, o $4t - 1$

5. $(3x + 1)(2x) + (x^2 - 2)(3)$, o $9x^2 + 2x - 6$

7. $(x^3 - 1)(1) + (x + 1)(3x^2)$, o $4x^3 + 3x^2 - 1$

9. $(w^3 - w^2 + w - 1)(2w) + (w^2 + 2)(3w^2 - 2w + 1)$, o $5w^4 - 4w^3 + 9w^2 - 6w + 2$

11. $(5x^2 + 1)(x^{-1/2}) + (2x^{1/2} - 1)(10x)$, o $\dfrac{25x^2 - 10x\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x}}$

13. $\dfrac{(x^2 - 5x + 2)(x^2 + 2)}{x^2} + \dfrac{(x^2 - 2)(2x - 5)}{x}$, o $\dfrac{3x^4 - 10x^3 + 4}{x^2}$

15. $-\dfrac{1}{(x - 2)^2}$ **17.** $\dfrac{2x + 1 - (x - 1)(2)}{(2x + 1)^2}$, o $\dfrac{3}{(2x + 1)^2}$

19. $-\dfrac{2x}{(x^2 + 1)^2}$ **21.** $\dfrac{s^2 + 2s + 4}{(s + 1)^2}$

23. $\dfrac{(\frac{1}{2}x^{-1/2})[(x^2 + 1) - 4x^2] - 2x}{(x^2 + 1)^2}$, o $\dfrac{1 - 3x^2 - 4x^{3/2}}{2\sqrt{x}(x^2 + 1)^2}$

25. $\dfrac{2x^3 + 2x^2 + 2x - 2x^3 - x^2 - 4x - 2}{(x^2 + x + 1)^2}$, o $\dfrac{x^2 - 2x - 2}{(x^2 + x + 1)^2}$

27. $\dfrac{(x - 2)(3x^2 + 2x + 1) - (x^3 + x^2 + x + 1)}{(x - 2)^2}$, o $\dfrac{2x^3 - 5x^2 - 4x - 3}{(x - 2)^2}$

29. $\dfrac{(x^2 - 4)(x^2 + 4)(2x + 8) - (x^2 + 8x - 4)(4x^3)}{(x^2 - 4)^2(x^2 + 4)^2}$, o $\dfrac{-2x^5 - 24x^4 + 16x^3 - 32x - 128}{(x^2 - 4)^2(x^2 + 4)^2}$

31. 8 **33.** -9 **35.** $2(3x^2 - x + 3)$; 10

37. $\dfrac{-3x^4 + 2x^2 - 1}{(x^4 - 2x^2 - 1)^2}$; $-\dfrac{1}{2}$

39. 60; $y = 60x - 102$ **41.** $-\frac{1}{2}$; $y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$

43. $8x - 2$; 8 **45.** $6x^2 - 6x$; $6(2x - 1)$

47. $4t^3 - 6t^2 + 12t - 3$; $12(t^2 - t + 1)$

49. $72x - 24$ **51.** $-\dfrac{6}{x^4}$

53. $y = 7x - 5$ **55.** $\left(\frac{1}{3}, \frac{50}{27}\right)$; $(1, 2)$

57. $\left(\frac{4}{3}, -\frac{770}{27}\right)$; $(2, -30)$

59. a. $\dfrac{0.2(1 - t^2)}{(t^2 + 1)^2}$

b. 0.096%/h; 0%/h; -0.024%/h

61. $\dfrac{6{,}000}{(t + 12)^2}$; 18.5 mg/año; 12.4 mg/año

63. a. $-\dfrac{x}{(0.01x^2 + 1)^2}$ **b.** -3.2; -2.5; -1.4

65. \$38.4 millones por año; \$17.04 millones por año; \$5.71 millones por año

67. a. $\dfrac{800(2t + 5)}{(t^2 + 5t + 40)^2}$; **b.** 20,790; 554

69. a. y **b.**

t	0	1	2	3	4	5	6	7
$N'(t)$	0	2.7	4.8	6.3	7.2	7.5	7.2	6.3
$N''(t)$					0.6	0	-0.6	-1.2

71. 8.1 millones; 0.204 millones por año; -0.03 millones por año^2. Al inicio de 1998, 8.1 millones de personas recibieron beneficios por discapacidad; el número se incrementó a una tasa de 0.2 millones por año; la tasa de la tasa de cambio del número de personas decreció a una tasa de 0.03 millones de personas por año^2.

75. Falso **77.** Falso

Ejercicios de uso de la tecnología 9.5, página 617

1. 0.8750 **3.** 0.0774 **5.** -0.5000

7. 87,322/año **9.** -18 **11.** 15.2762

13. -0.6255 **15.** 0.1973

17. -68.46214: a principios de 1988, la tasa de la tasa de la tasa a la que los bancos fallaban fue de 68 bancos/año/año/año.

Ejercicios 9.6, página 625

1. $8(2x - 1)^3$ **3.** $10x(x^2 + 2)^4$

5. $3(2x - x^2)^2(2 - 2x)$, o $6x^2(1 - x)(2 - x)^2$ **7.** $-\dfrac{4}{(2x + 1)^3}$

9. $3x\sqrt{x^2 - 4}$ **11.** $\dfrac{3}{2\sqrt{3x - 2}}$ **13.** $-\dfrac{2x}{3(1 - x^2)^{2/3}}$

15. $-\dfrac{6}{(2x + 3)^4}$ **17.** $-\dfrac{1}{(2t - 3)^{3/2}}$ **19.** $-\dfrac{3(16x^3 + 1)}{2(4x^4 + x)^{5/2}}$

21. $-2(3x^2 + 2x + 1)^{-3}(6x + 2) = -4(3x + 1)(3x^2 + 2x + 1)^{-3}$

23. $3(x^2 + 1)^2(2x) - 2(x^3 + 1)(3x^2)$, o $6x(2x^2 - x + 1)$

25. $3(t^{-1} - t^{-2})^2(-t^{-2} + 2t^{-3})$

27. $\dfrac{1}{2\sqrt{x - 1}} + \dfrac{1}{2\sqrt{x + 1}}$

29. $2x^2(4)(3 - 4x)^3(-4) + (3 - 4x)^4(4x)$, o $(-12x)(4x - 1)(3 - 4x)^3$

31. $8(x - 1)^2(2x + 1)^3 + 2(x - 1)(2x + 1)^4$, o $6(x - 1)(2x - 1)(2x + 1)^3$

33. $3\left(\frac{x+3}{x-2}\right)^2\left[\frac{(x-2)(1)-(x+3)(1)}{(x-2)^2}\right]$, o $-\frac{15(x+3)^2}{(x-2)^4}$

35. $\frac{3}{2}\left(\frac{t}{2t+1}\right)^{1/2}\left[\frac{(2t+1)(1)-t(2)}{(2t+1)^2}\right]$, o $\frac{3t^{1/2}}{2(2t+1)^{5/2}}$

37. $\frac{1}{2}\left(\frac{u+1}{3u+2}\right)^{-1/2}\left[\frac{(3u+2)(1)-(u+1)(3)}{(3u+2)^2}\right]$, o

$-\frac{1}{2\sqrt{u+1}\,(3u+2)^{3/2}}$

39. $\frac{(x^2-1)^4(2x)-x^2(4)(x^2-1)^3(2x)}{(x^2-1)^8}$, o $\frac{(-2x)(3x^2+1)}{(x^2-1)^5}$

41. $\frac{2x(x^2-1)^3(3x^2+1)^2[9(x^2-1)-4(3x^2+1)]}{(x^2-1)^8}$, o

$-\frac{2x(3x^2+13)(3x^2+1)^2}{(x^2-1)^5}$

43. $\frac{(2x+1)^{-1/2}[(x^2-1)-(2x+1)(2x)]}{(x^2-1)^2}$, o

$-\frac{3x^2+2x+1}{\sqrt{2x+1}(x^2-1)^2}$

45. $\frac{(t^2+1)^{1/2}(\frac{1}{2})(t+1)^{-1/2}(1)-(t+1)^{1/2}(\frac{1}{2})(t^2+1)^{-1/2}(2t)}{t^2+1}$, o

$-\frac{t^2+2t-1}{2\sqrt{t+1}(t^2+1)^{3/2}}$

47. $4(3x+1)^3(3)(x^2-x+1)^3+(3x+1)^4(3)(x^2-x+1)^2(2x-1)$, o $3(3x+1)^3(x^2-x+1)^2(10x^2-5x+3)$

49. $\frac{4}{3}u^{1/3}$; $6x$; $8x(3x^2-1)^{1/3}$

51. $-\frac{2}{3u^{5/3}}$; $6x^2-1$; $-\frac{2(6x^2-1)}{3(2x^3-x+1)^{5/3}}$

53. $\frac{1}{2}u^{-1/2}-\frac{1}{2}u^{-3/2}$; $3x^2-1$; $\frac{(3x^2-1)(x^3-x-1)}{2(x^3-x)^{3/2}}$

55. -12 **57.** 6 **59.** No **61.** $y=-33x+57$

63. $y=\frac{43}{5}x-\frac{54}{5}$

65. 0.333 millones/semana; 0.305 millones/semana; 16 millones; 22.7 millones

67. $\frac{6.87775}{(5+t)^{0.795}}$; 0.53%/año; 64.9%

69. **a.** $8,700 millones por año **b.** $92,300 millones

71. **a.** $0.027(0.2t^2+4t+64)^{-1/3}(0.1t+1)$ **b.** 0.0091 ppm/año

73. **a.** $0.03[3t^2(t-7)^4+t^3(4)(t-7)^3]$, o $0.21t^2(t-3)(t-7)^3$
b. 90.72; 0; −90.72; a las 8 a.m. el nivel de dióxido de nitrógeno se incrementa; a las 10 a.m. el nivel detiene su incremento; a las 11 a.m. el nivel decrece.

75.

$300\left[\frac{(t+25)\frac{1}{2}(\frac{1}{2}t^2+2t+25)^{-1/2}(t+2)-(\frac{1}{2}t^2+2t+25)^{1/2}(1)}{(t+25)^2}\right]$

o $\frac{3,450t}{(t+25)^2\sqrt{\frac{1}{2}t^2+2t+25}}$;

2.9 latidos/min², 0.7 latidos/min², 0.2 latidos/min², 179 latidos/min²

77. 160π ft²/seg **79.** −27 mph/decenio; 19 mph

81.

$(1.42)\left[\frac{(3t^2+80t+550)(14t+140)-(7t^2+140t+700)(6t+80)}{(3t^2+80t+550)^2}\right]$

o $\frac{1.42(140t^2+3500t+21,000)}{(3t^2+80t+550)^2}$; 31,312 empleos/año

83. −400 relojes de pulsera/(el precio en dólares se incrementa)

85. Verdadero **87.** Verdadero

Ejercicios de uso de la tecnología 9.6, página 629

1. 0.5774 **3.** 0.9390 **5.** −4.9498

7. 10,146,200 por década; 7,810,520 por década

Ejercicios 9.7, página 637

1. $3e^{3x}$ **3.** $-e^{-t}$ **5.** e^x+1 **7.** $x^2e^x(x+3)$

9. $\frac{2e^x(x-1)}{x^2}$ **11.** $3(e^x-e^{-x})$ **13.** $-\frac{1}{e^w}$

15. $6e^{3x-1}$ **17.** $-2xe^{-x^2}$ **19.** $\frac{3e^{-1/x}}{x^2}$

21. $25e^x(e^x+1)^{24}$ **23.** $\frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$ **25.** $e^{3x+2}(3x-2)$

27. $\frac{2e^x}{(e^x+1)^2}$ **29.** $2(8e^{-4x}+9e^{3x})$ **31.** $6e^{3x}(3x+2)$

33. $y=2x-2$ **35.** $\frac{5}{x}$ **37.** $\frac{1}{x+1}$ **39.** $\frac{8}{x}$ **41.** $\frac{1}{2x}$

43. $-\frac{2}{x}$ **45.** $\frac{2(4x-3)}{4x^2-6x+3}$ **47.** $\frac{1}{x(x+1)}$ **49.** $x(1+2\ln x)$

51. $\frac{2(1-\ln x)}{x^2}$ **53.** $\frac{3}{u-2}$ **55.** $\frac{1}{2x\sqrt{\ln x}}$

57. $\frac{3(\ln x)^2}{x}$ **59.** $\frac{3x^2}{x^3+1}$ **61.** $\frac{(x\ln x+1)e^x}{x}$

63. $-\frac{1}{x^2}$ **65.** $\frac{2(2-x^2)}{(x^2+2)^2}$ **67.** $y=x-1$

69. −0.1694, −0.1549, −0.1415; el porcentaje de la población total reubicada fue decreciendo a una tasa de 0.17% por año en 1970, 0.15% por año en 1980 y 0.14% por año en 1990.

71. **a.** 70,000; 353,700 **b.** 37,800 por década; 191,000 por década

73. **a.** 181/100,000 personas
b. 0/100,000 personas; −27/100,000 personas; −38/100,000 personas; −32/100,000 personas
c. 52/100,000

75. **a.** 0.094; 0.075
b. 0.151/h; −0.021/h

77. **a.** −$6,065 por día; −$3,679 por día; −$2,231 por día; −$1,353 por día
b. 2 días

79. **a.** −1.63¢/botella; −1.34¢/botella
b. $231.87/botella; $217.03/botella

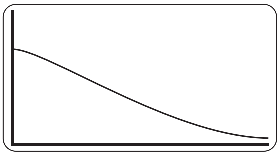
81. \$1.8/1,000 de resultado por década; -0.11/\$1,000 de resultado por década; -0.23/\$1,000 de resultado por década; -0.13/\$1,000 de resultado por década

83. Falso

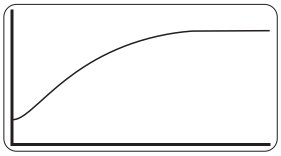
Ejercicios de uso de la tecnología 9.7, página 640

1. 5.4366 **3.** 12.3929 **5.** 0.1861

7. a. 50 **c.**



9. a.



b. 4,272 millones/medio siglo

11. a. 153,024; 235,181
b. 634; 18,401

13. a. 69.63% **b.** 5.094%/década

Ejercicios 9.8, página 649

1. a. $C(x)$ se incrementa siempre, porque a medida que crece el número de unidades x, la cantidad de dinero que debe ser gastada en producción también se incrementa.
b. 4,000

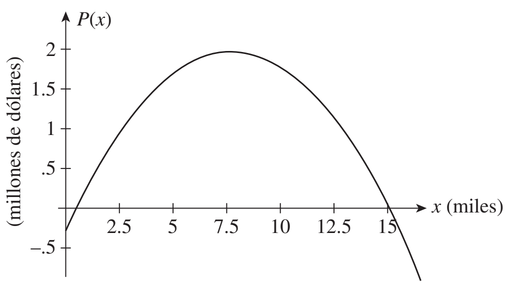
3. a. \$1.80; \$1.60 **b.** \$1.80; \$1.60

5. a. $100 + \dfrac{200,000}{x}$ **b.** $-\dfrac{200,000}{x^2}$
c. $\overline{C}(x)$ se aproxima a \$100 si el nivel de producción es muy alto.

7. $\dfrac{2,000}{x} + 2 - 0.0001x;\ -\dfrac{2,000}{x^2} - 0.0001$

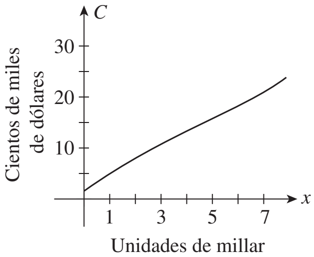
9. a. $8,000 - 200x$ **b.** 200, 0, -200 **c.** \$40

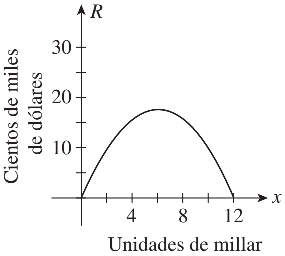
11. a. $-0.04x^2 + 600x - 300,000$
b. $-0.08x + 600$ **c.** 200; -40
d. La utilidad se incrementa a medida que aumenta la producción, alcanzando un máximo de 7,500 unidades; más allá de ese nivel, la utilidad decrece.

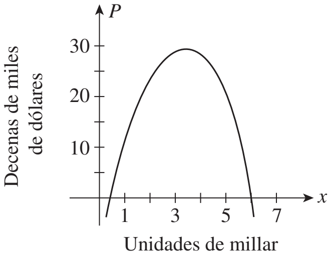


13. a. $600x - 0.05x^2$; $-0.000002x^3 - 0.02x^2 + 200x - 80,000$
b. $0.000006x^2 - 0.06x + 400$; $600 - 0.1x$; $-0.000006x^2 - 0.04x + 200$
c. 304; 400; 96

d.





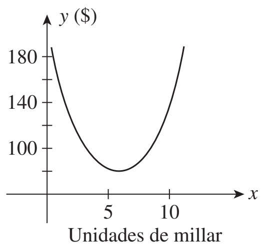


15. $0.000002x^2 - 0.03x + 400 + \dfrac{80,000}{x}$

a. $0.000004x - 0.03x - \dfrac{80,000}{x^2}$

b. -0.0132; 0.0092; el costo promedio marginal es negativo (el costo promedio decrece) cuando se producen 5,000 unidades y es positivo (el costo promedio se incrementa) cuando se producen 10,000 unidades.

c.



17. a. $\dfrac{50x}{0.01x^2 + 1}$ **b.** $\dfrac{50 - 0.5x^2}{(0.01x^2 + 1)^2}$
c. \$44,380; cuando el nivel de producción es de 2,000 unidades, el ingreso se incrementa a una tasa de \$44,380 por 1,000 unidades adicionales producidas.

19. \$1,210 millones/\$1,000 millones

21. \$0.288 miles de millones/1,000 millones

23. Verdadero

CAPÍTULO 9 Preguntas de revisión de conceptos, página 653

1. L; $f(x)$; L; a

2. a. L^r **b.** $L \pm M$ **c.** LM **d.** $\dfrac{L}{M}$; $M \neq 0$

3. a. L; x b. M; negativo; absoluto

4. a. Derecho b. Izquierdo c. L; L

5. a. Continuo b. Discontinuo c. Todos

6. a. a; a; $g(a)$ b. En todas partes c. $Q(x)$

7. a. $[a, b]$; $f(c) = M$ b. $f(x) = 0$; (a, b)

8. a. $f'(a)$ b. $y = f(a) + m(x - a)$

9. a. $\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$ b. $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$

10. a. 0 b. nx^{n-1} c. $cf'(x)$ d. $f'(x) \pm g'(x)$

11. a. $f(x)g'(x) + g(x)f'(x)$ b. $\dfrac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$

12. a. $g'[f(x)]f'(x)$ b. $n[f(x)]^{n-1}f'(x)$

13. Costo marginal; ingreso marginal; utilidad marginal; costo promedio marginal

14. a. $e^{f(x)}f'(x)$ b. $\dfrac{f'(x)}{f(x)}$

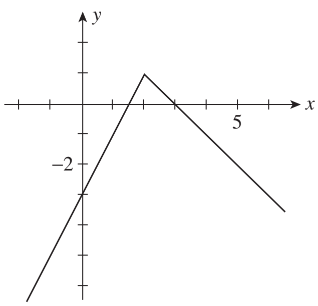
CAPÍTULO 9 Ejercicios de revisión, página 653

1. -3 2. 2 3. -21 4. 0 5. -1

6. El límite no existe. 7. 7 8. $\frac{9}{2}$ 9. 1 10. $\frac{1}{2}$

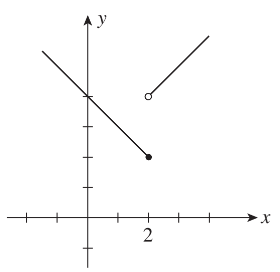
11. 1 12. 1 13. $\frac{3}{2}$ 14. El límite no existe.

15.



1; 1; 1

16.



4; 2; el límite no existe.

17. $x = 2$ 18. $x = -\frac{1}{2}, 1$ 19. $x = -1$ 20. $x = 0$

21. a. 3; 2.5; 2.1 b. 2 22. 3

23. $\dfrac{1}{x^2}$ 24. $\frac{3}{2}$; $y = \frac{3}{2}x + 5$

25. -4; $y = -4x + 4$ 26. a. Sí b. No

27. $15x^4 - 8x^3 + 6x - 2$ 28. $24x^5 + 8x^3 + 6x$

29. $\dfrac{6}{x^4} - \dfrac{3}{x^2}$ 30. $4t - 9t^2 + \frac{1}{2}t^{-3/2}$ 31. $-\dfrac{1}{t^{3/2}} - \dfrac{6}{t^{5/2}}$

32. $2x - \dfrac{2}{x^2}$ 33. $1 - \dfrac{2}{t^2} - \dfrac{6}{t^3}$ 34. $4s + \dfrac{4}{s^2} - \dfrac{1}{s^{3/2}}$

35. $2x + \dfrac{3}{x^{5/2}}$ 36. $\dfrac{(2x-1)(1) - (x+1)(2)}{(2x-1)^2}$, o $-\dfrac{3}{(2x-1)^2}$

37. $\dfrac{(2t^2+1)(2t) - t^2(4t)}{(2t^2+1)^2}$, o $\dfrac{2t}{(2t^2+1)^2}$

38. $\dfrac{(t^{1/2}+1)\frac{1}{2}t^{-1/2} - t^{1/2}(\frac{1}{2}t^{-1/2})}{(t^{1/2}+1)^2}$, o $\dfrac{1}{2\sqrt{t}\,(\sqrt{t}+1)^2}$

39. $\dfrac{(x^{1/2}+1)(\frac{1}{2}x^{-1/2}) - (x^{1/2}-1)(\frac{1}{2}x^{-1/2})}{(x^{1/2}+1)^2}$, o $\dfrac{1}{\sqrt{x}\,(\sqrt{x}+1)^2}$

40. $\dfrac{(2t^2+1)(1) - t(4t)}{(2t^2+1)^2}$, o $\dfrac{1 - 2t^2}{(2t^2+1)^2}$

41. $\dfrac{(x^2-1)(4x^3+2x) - (x^4+x^2)(2x)}{(x^2-1)^2}$, o $\dfrac{2x(x^4 - 2x^2 - 1)}{(x^2-1)^2}$

42. $3(4x+1)(2x^2+x)^2$ 43. $8(3x^3-2)^7(9x^2)$, o $72x^2(3x^3-2)^7$

44. $5(x^{1/2}+2)^4 \cdot \frac{1}{2}x^{-1/2}$, o $\dfrac{5(\sqrt{x}+2)^4}{2\sqrt{x}}$

45. $\dfrac{1}{2}(2t^2+1)^{-1/2}(4t)$, o $\dfrac{2t}{\sqrt{2t^2+1}}$

46. $\frac{1}{3}(1-2t^3)^{-2/3}(-6t^2)$, o $-2t^2(1-2t^3)^{-2/3}$

47. $-4(3t^2-2t+5)^{-3}(3t-1)$, o $-\dfrac{4(3t-1)}{(3t^2-2t+5)^3}$

48. $-\frac{3}{2}(2x^3-3x^2+1)^{-5/2}(6x^2-6x)$, o $-9x(x-1)(2x^3-3x^2+1)^{-5/2}$

49. $(2x+1)e^{2x}$ 50. $\dfrac{e^t}{2\sqrt{t}} + \sqrt{t}e^t + 1$ 51. $\dfrac{1-4t}{2\sqrt{t}e^{2t}}$

52. $\dfrac{e^x(x^2+x+1)}{\sqrt{1+x^2}}$ 53. $\dfrac{2(e^{2x}+2)}{(1+e^{-2x})^2}$ 54. $4xe^{2x^2-1}$

55. $(1-2x^2)e^{-x^2}$ 56. $3e^{2x}(1+e^{2x})^{1/2}$ 57. $(x+1)^2e^x$

58. $\ln t + 1$ 59. $\dfrac{2xe^{x^2}}{e^{x^2}+1}$ 60. $\dfrac{\ln x - 1}{(\ln x)^2}$

61. $\dfrac{x - x\ln x + 1}{x(x+1)^2}$ 62. $(x+2)e^x$ 63. $\dfrac{4e^{4x}}{e^{4x}+3}$

64. $\dfrac{(r^3 - r^2 + r + 1)e^r}{(1+r^2)^2}$ 65. $\dfrac{1 + e^x(1 - x\ln x)}{x(1+e^x)^2}$

66. $\dfrac{(2x^2 + 2x^2 \cdot \ln x - 1)e^{x^2}}{x(1+\ln x)^2}$

67. $2\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(1-\frac{1}{x^2}\right)$ o $\frac{2(x^2+1)(x^2-1)}{x^3}$

68. $\frac{(2x^2+1)^2(1)-(1+x)2(2x^2+1)(4x)}{(2x^2+1)^4}$, o $-\frac{6x^2+8x-1}{(2x^2+1)^3}$

69. $(t^2+t)^4(4t)+2t^2\cdot 4(t^2+t)^3(2t+1)$, o $4t^2(5t+3)(t^2+t)^3$

70. $(2x+1)^3\cdot 2(x^2+x)(2x+1)+(x^2+x)^2 3(2x+1)^2(2)$, o $2(2x+1)^2(x^2+x)(7x^2+7x+1)$

71. $x^{1/2}\cdot 3(x^2-1)^2(2x)+(x^2-1)^3\cdot \frac{1}{2}x^{-1/2}$, o

$\frac{(13x^2-1)(x^3-1)^2}{2\sqrt{x}}$

72. $\frac{(x^3+2)^{1/2}(1)-x\cdot\frac{1}{2}(x^3+2)^{-1/2}\cdot 3x^2}{x^3+2}$, o $\frac{4-x^3}{2(x^3+2)^{3/2}}$

73. $\frac{(4x-3)\frac{1}{2}(3x+2)^{-1/2}(3)-(3x+2)^{1/2}(4)}{(4x-3)^2}$ o

$-\frac{12x+25}{2\sqrt{3x+2}(4x-3)^2}$

74. $\frac{(t+1)^3\frac{1}{2}(2t+1)^{-1/2}(2)-(2t+1)^{1/2}\cdot 3(t+1)^2(1)}{(t+1)^6}$, o

$-\frac{5t+2}{\sqrt{2t+1}(t+1)^4}$

75. $2(12x^2-9x+2)$ **76.** $-\frac{1}{4x^{3/2}}+\frac{3}{4x^{5/2}}$

77. $\frac{(t^2+4)^2(-2t)-(4-t^2)(2)(t^2+4)(2t)}{(t^2+4)^4}$, o $\frac{2t(t^2-12)}{(t^2+4)^3}$

78. $4e^{-2x}(x-1)$ **79.** $\frac{e^x(1-e^x)}{(1+e^x)^3}$ **80.** $\frac{1}{x}$ **81.** $-\frac{9}{(3x+1)^2}$

82. $2(15x^4+12x^2+6x+1)$

83. $2(2x^2+1)^{-1/2}+2x\left(-\frac{1}{2}\right)(2x^2+1)^{-3/2}(4x)$, o $\frac{2}{(2x^2+1)^{3/2}}$

84. $(t^2+1)(14t)+(7t^2+1)(2)(t^2+1)(2t)$, o $6t(t^2+1)(7t^2+3)$

85. 0 **86.** -2

87. **a.** $(2, -25)$ y $(-1, 14)$
b. $y=-4x-17$; $y=-4x+10$

88. **a.** $\left(-2, \frac{25}{3}\right)$ y $\left(1, -\frac{13}{6}\right)$
b. $y=-2x+\frac{13}{3}$; $y=-2x-\frac{1}{6}$

89. $y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x+\frac{4}{3}\sqrt{3}$ **90.** $y=112x-80$

91. $y=-(2x-3)e^{-2}$ **92.** $y=\frac{1}{e}$

93. $-\frac{48}{(2x-1)^4}$; $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{2}, \infty\right)$ **94.** 20

95. **a.** 253.1 millones **b.** 41.6 millones de unidades por año

96. **a.** 15%; 31.99% **b.** 0.51%/año; 1.04%/año

97. 200 suscriptores/semana

98. $-14.346(1+t)^{-1.45}$; -2.92¢/min; 19.45¢/min

99. $\approx$ 75 años; 0.07 año/año

100. **a.** $-0.02x^2+600x$ **b.** $-0.04x+600$
c. 200; la venta del teléfono 10,001 traerá un ingreso de $200.

101. **a.** $2.20; $2.20 **b.** $\frac{2{,}500}{x}+2.2$; $-\frac{2{,}500}{x^2}$

c. $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2{,}500}{x}+2.2\right)=2.2$

102. **a.** $2{,}000x-0.04x^2$; $-0.000002x^3-0.02x^2+1{,}000x-120{,}000$; $0.000002x^2-0.02x+1{,}000+\frac{120{,}000}{x}$

b. $0.000006x^2-0.04x+1{,}000$; $2{,}000-0.08x$; $-0.000006x^2-0.04x+1{,}000$; $0.000004x-0.02-\frac{120{,}000}{x^2}$

c. 934; 1,760; 826
d. -0.0048; 0.010125; en un nivel de producción de 5,000, el costo promedio decrece por 0.48¢/unidad; en un nivel de producción de 8,000, el costo promedio se incrementa por 1.0125¢/unidad

CAPÍTULO 9 Antes de continuar, página 656

1. 2 **2.** **a.** 0 **b.** 1; no

3. -1; $y=-x$ **4.** $6x^2-\frac{1}{x^{2/3}}-\frac{10}{3x^{5/3}}$ **5.** $\frac{4x^2-1}{\sqrt{2x^2-1}}$

6. $-\frac{2x^2+2x-1}{(x^2+x+1)^2}$ **7.** $-\frac{1}{2(x+1)^{3/2}}$; $\frac{3}{4(x+1)^{5/2}}$; $-\frac{15}{8(x+1)^{7/2}}$

8. $\frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$ **9.** $1+\ln 2$

CAPÍTULO 10

Ejercicios 10.1, página 670

1. Decrece en $(-\infty, 0)$ y crece en $(0, \infty)$

3. Crece en $(-\infty, -1)\cup(1, \infty)$ y decrece en $(-1, 1)$

5. Decrece en $(-\infty, 0)\cup(2, \infty)$ y crece en $(0, 2)$

7. Decrece en $(-\infty, -1)\cup(1, \infty)$ y crece en $(-1, 1)$

9. Crece en $(20.2, 20.6)\cup(21.7, 21.8)$, es constante en $(19.6, 20.2)\cup(20.6, 21.1)$ y decrece en $(21.1, 21.7)\cup(21.8, 22.7)$

11. **a.** Positivo **b.** Positivo **c.** Cero **d.** Cero
e. Negativo **f.** Negativo **g.** Positivo

13. Crece en $(-\infty, \infty)$

15. Decrece en $(-\infty, \frac{3}{2})$ y crece en $(\frac{3}{2}, \infty)$

17. Decrece en $(-\infty, -\sqrt{3}/3)\cup(\sqrt{3}/3, \infty)$ y crece en $(-\sqrt{3}/3, \sqrt{3}/3)$

19. Crece en $(-\infty, -2)\cup(0, \infty)$ y decrece en $(-2, 0)$

21. Crece en $(-\infty, 3) \cup (3, \infty)$

23. Decrece en $(-\infty, 0) \cup (0, 3)$ y crece en $(3, \infty)$

25. Decrece en $(-\infty, 2) \cup (2, \infty)$

27. Decrece en $(-\infty, 1) \cup (1, \infty)$

29. Crece en $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ **31.** Crece en $(-1, \infty)$

33. Crece en $(-4, 0)$ y decrece en $(0, 4)$

35. Crece en $(0, 2)$ y decrece en $(-\infty, 0) \cup (2, \infty)$

37. Crece en $(0, e)$ y decrece en (e, ∞)

39. Crece en $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$

41. Máximo relativo: $f(0) = 1$; mínimos relativos: $f(-1) = 0$ y $f(1) = 0$

43. Máximo relativo: $f(-1) = 2$; mínimo relativo: $f(1) = -2$

45. Máximo relativo: $f(1) = 3$; mínimo relativo: $f(2) = 2$

47. Máximo relativo: $f(0) = 2$ **49.** a **51.** d

53. Máximo relativo: $f(2) = -4$

55. Máximo relativo: $f(3) = 15$ **57.** Ninguno

59. Máximo relativo: $g(0) = 4$; mínimo relativo: $g(2) = 0$

61. Máximo relativo: $f(0) = 0$; mínimos relativos: $f(-1) = -\frac{1}{2}$ y $f(1) = -\frac{1}{2}$

63. Mínimo relativo: $F(3) = -5$; máximo relativo: $F(-1) = \frac{17}{3}$

65. Mínimo relativo: $g(3) = -19$ **67.** Ninguno

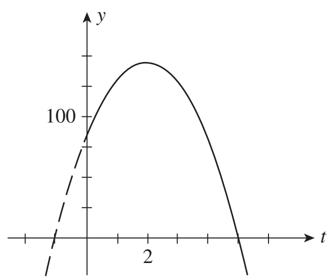
69. Máximo relativo: $f(-3) = -4$; mínimo relativo: $f(3) = 8$

71. Máximo relativo: $f(1) = \frac{1}{2}$; mínimo relativo: $f(-1) = -\frac{1}{2}$

73. Máximo relativo: $f(1) = e^{-1}$

75. Mínimo relativo: $f(1) = 1$

77.



Se incrementa en el intervalo de tiempo $(0, 2)$; cae en el intervalo de tiempo $(2, 5)$; cuando $t = 5$ seg

79. El porcentaje de la población estadounidense de 65 años y más afectado por la enfermedad que aumenta con la edad.

81. Se incrementa en $(0, 33)$ y disminuye en $(33, T)$ para algún número positivo T.

83. f disminuye en $(0, 1)$ y se incrementa en $(1, 4)$. La velocidad promedio disminuye de 6 a 7 a.m. y se incrementa de 7 a 10 a.m.

85. **a.** Se incrementa en $(0, 6)$ **b.** Las ventas aumentarán.

89. El gasto se incrementó de 2001 a 2006.

91. Se incrementa en $(0, 1)$ y disminuye en $(1, 4)$

93. Se incrementa en $(0, 4.5)$ y disminuye en $(4.5, 11)$; la contaminación aumenta de 7 a 11:30 a.m. y disminuye de 11:30 a.m. a 6 p.m.

95. **a.** $0.0021t^2 - 0.0061t + 0.1$
b. Disminuye en $(0, 1.5)$ y aumenta en $(1.5, 15)$. La brecha (escasez de enfermeras) disminuyó de 2000 a mediados de 2001 y se esperaba que se incrementara de mediados de 2001 a 2015.
c. $(1.5, 0.096)$. La brecha fue más pequeña ($\approx$ 96,000) a mediados de 2001.

97. Verdadero **99.** Verdadero **101.** Falso

105. $a = -4$; $b = 24$

107. **a.** $-2x$ si $x \neq 0$ **b.** No

Ejercicios de uso de la tecnología 10.1, página 677

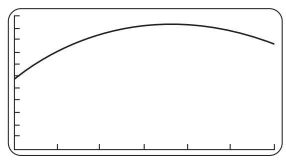
1. **a.** f decrece en $(-\infty, -0.2934)$ y crece en $(-0.2934, \infty)$.
b. Mínimo relativo: $f(-0.2934) = -2.5435$

3. **a.** f crece en $(-\infty, -1.6144) \cup (0.2390, \infty)$ y decrece en $(-1.6144, 0.2390)$.
b. Máximo relativo: $f(-1.6144) = 26.7991$; mínimo relativo: $f(0.2390) = 1.6733$

5. **a.** f decrece en $(-\infty, -1) \cup (0.33, \infty)$ y crece en $(-1, 0.33)$.
b. Máximo relativo: $f(0.33) = 1.11$; mínimo relativo: $f(-1) = -0.63$

7. **a.** f decrece en $(-\infty, 0.40)$ y crece en $(0.40, \infty)$.
b. Mínimo relativo: $f(0.40) = 0.79$

9. **a.**



b. Crece en $(0, 3.6676)$ y decrece en $(3.6676, 6)$

11. Crece en $(0, 4.5)$ y decrece en $(4.5, 11)$; 11:30 a.m.; 164 PSI

Ejercicios 10.2, página 687

1. Cóncava hacia abajo en $(-\infty, 0)$ y cóncava hacia arriba en $(0, \infty)$; punto de inflexión: $(0, 0)$

3. Cóncava hacia abajo en $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$

5. Cóncava hacia arriba en $(-\infty, 0) \cup (1, \infty)$ y cóncava hacia abajo en $(0, 1)$; puntos de inflexión: $(0, 0)$ y $(1, -1)$

7. Cóncava hacia abajo en $(-\infty, -2) \cup (-2, 2) \cup (2, \infty)$

9. **a.** Cóncava hacia arriba en $(0, 2) \cup (4, 6) \cup (7, 9) \cup (9, 12)$ y cóncava hacia abajo en $(2, 4) \cup (6, 7)$
b. $(2, \frac{5}{2})$, $(4, 2)$, $(6, 2)$ y $(7, 3)$

11. (a) **13.** (b)

15. **a.** $D_1'(t) > 0$, $D_2'(t) > 0$, $D_1''(t) > 0$ y $D_2''(t) < 0$ en $(0, 12)$
b. Con o sin la campaña promocional propuesta, los depósitos aumentarán; con la promoción, los depósitos aumentarán a una tasa creciente; sin la promoción, los depósitos aumentarán a una tasa decreciente.

17. En el tiempo t_0, correspondiente a su coordenada t, el proceso de restauración trabaja en su nivel más alto.

25. Cóncava hacia arriba en $(-\infty, \infty)$

27. Cóncava hacia abajo en $(-\infty, 0)$ y cóncava hacia arriba en $(0, \infty)$

29. Cóncava hacia arriba en $(-\infty, 0) \cup (3, \infty)$ y cóncava hacia abajo en $(0, 3)$

31. Cóncava hacia abajo en $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$

33. Cóncava hacia abajo en $(-\infty, 4)$

35. Cóncava hacia abajo en $(-\infty, 2)$ y cóncava hacia arriba en $(2, \infty)$

37. Cóncava hacia arriba en $(-\infty, -\sqrt{6}/3) \cup (\sqrt{6}/3, \infty)$ y cóncava hacia abajo en $(-\sqrt{6}/3, \sqrt{6}/3$

39. Cóncava hacia abajo en $(-\infty, 1)$ y cóncava hacia arriba en $(1, \infty)$

41. Cóncava hacia arriba en $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$

43. Cóncava hacia arriba en $(-\infty, 2)$ y cóncava hacia abajo en $(2, \infty)$

45. Cóncava hacia arriba en $(0, \infty)$ y cóncava hacia abajo en $(-\infty, 0)$

47. Cóncava hacia arriba en $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ y cóncava hacia abajo en $(-1, 0) \cup (0, 1)$

49. $(0, -2)$ **51.** $(1, -15)$

53. $(0, 1)$ y $\left(\frac{2}{3}, \frac{11}{27}\right)$ **55.** $(0, 0)$

57. $(1, 2)$ **59.** $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 2e^{-1/2})$; $(\frac{\sqrt{2}}{2}, 2e^{-1/2})$

61. $(e^{-3/2}, -\frac{3}{2}e^{-3})$ **63.** Máximo relativo: $f(1) = 5$ **65.** Ninguno

67. Máximo relativo: $f(-1) = -\frac{22}{3}$, mínimo relativo: $f(5) = -\frac{130}{3}$

69. Máximo relativo: $g(-3) = -6$; mínimo relativo: $g(3) = 6$

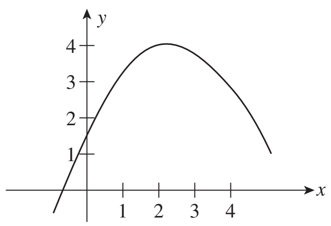
71. Ninguno **73.** Mínimo relativo: $f(-2) = 12$

75. Máximo relativo: $g(1) = \frac{1}{2}$; mínimo relativo: $g(-1) = -\frac{1}{2}$

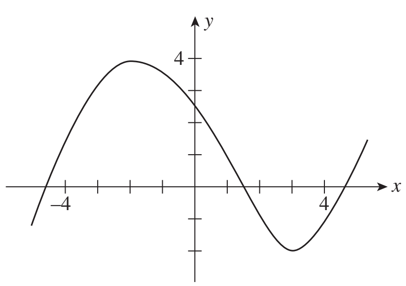
77. Mínimo relativo: $f(1) = \frac{1}{e}$

79. Mínimo relativo: $f(0) = 0$

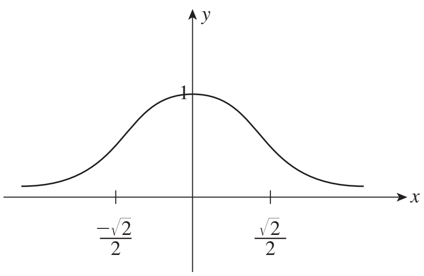
81.



83.



85.



87. **a.** N se incrementa en $(0, 12)$.
b. $N''(t) < 0$ en $(0, 6)$ y $N''(t) > 0$ en $(6, 12)$
c. La tasa de crecimiento del número de anuncios de solicitud de ayuda disminuyó los primeros 6 meses del año y aumentó en los últimos 6 meses.

89. $f(t)$ aumentó a una tasa creciente hasta que el nivel del agua alcanzó la mitad del vaso en el momento que (correspondiente al punto de inflexión) $f(t)$ aumentó a la tasa más rápida. Luego de esto, $f(t)$ aumentó a una tasa decreciente hasta que el vaso se llenó.

91. **b.** La tasa de incremento del impuesto estatal promedio a los cigarros decreció de 2001 a 2008.

93. **b.** La tasa aumentó. **95.** 10 a.m.

97. La tasa de negocios dedicados a la tecnología aumentó de 2000 a 2005.

99. **a.** Cóncava hacia arriba en $(0, 150)$; cóncava hacia abajo en $(150, 400)$; $(150, 28{,}550)$
b. \$140,000

103. $(1.9, 784.9)$; la tasa anual de gasto en fármacos se alentó casi al final de 2000.

105. **a.** $74.925t^2 - 99.62t + 41.25$; $149.85t - 99.62$
c. $(0.66, 12.91)$; la tasa aumentó menos rápido cerca de agosto de 1999.

107. **a.** 506,000; 125,480
b. El número de muertes por sarampión cayó de 1999 a 2005.
c. Abril de 2002; aproximadamente -41 muertes por año

113. Verdadero **115.** Verdadero

Ejercicios de uso de la tecnología 10.2, página 696

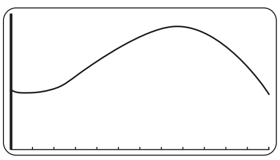
1. **a.** f es cóncava hacia arriba en $(-\infty, 0) \cup (1.1667, \infty)$ y cóncava hacia abajo en $(0, 1.1667)$.
b. $(1.1667, 1.1153)$; $(0, 2)$

3. **a.** f es cóncava hacia abajo en $(-\infty, 0)$ y cóncava hacia arriba en $(0, \infty)$.
b. $(0, 2)$

5. **a.** f es cóncava hacia abajo en $(-\infty, 0)$ y cóncava hacia arriba en $(0, \infty)$.
b. $(0, 0)$

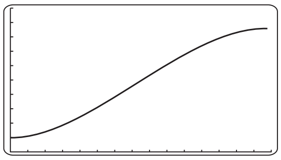
7. **a.** f es cóncava hacia abajo en $(-\infty, 0)$ y cóncava hacia arriba en $(0, \infty)$.
b. Ninguno

9. **a.**



b. $(3.9024, 77.0919)$

11. **a.**



b. Abril de 1993 ($t = 7.36$)

Ejercicios 10.3, página 704

1. Asíntota horizontal: $y = 0$

3. Asíntota horizontal: $y = 0$; asíntota vertical: $x = 0$

5. Asíntota horizontal: $y = 0$; asíntotas verticales: $x = -1$ y $x = 1$

7. Asíntota horizontal: $y = 3$; asíntota vertical: $x = 0$

9. Asíntota horizontal: $y = 0$

11. Asíntota horizontal: $y = 0$; asíntota vertical: $x = 0$

13. Asíntota horizontal: $y = 0$; asíntota vertical: $x = 0$

15. Asíntota horizontal: $y = 1$; asíntota vertical: $x = -1$

17. Ninguno

19. Asíntota horizontal: $y = 1$; asíntotas verticales: $t = -3$ y $t = 3$

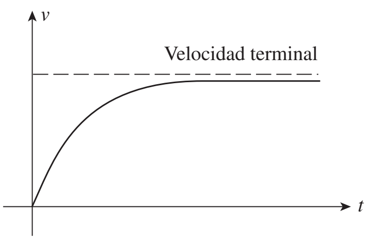
21. Asíntota horizontal: $y = 0$; asíntotas verticales: $x = -2$ y $x = 3$

23. Asíntota horizontal: $y = 2$; asíntota vertical: $t = 2$

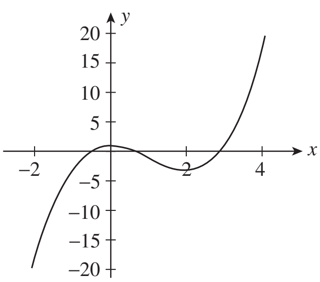
25. Asíntota horizontal: $y = 1$; asíntotas verticales: $x = -2$ y $x = 2$

27. Ninguno **29.** f es la derivada de la función g.

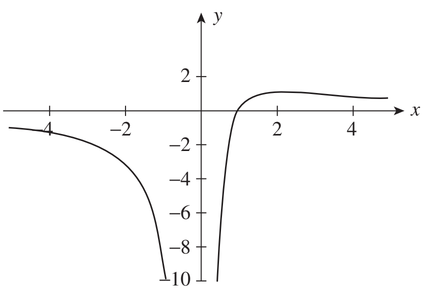
31.



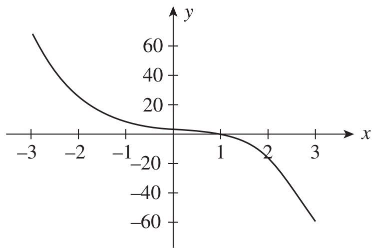
33.



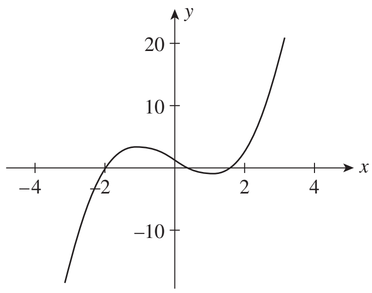
35.



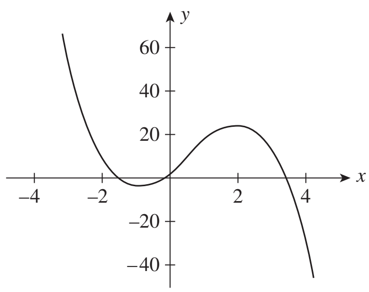
37.



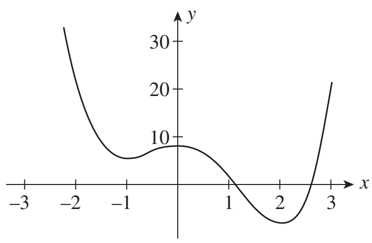
39.



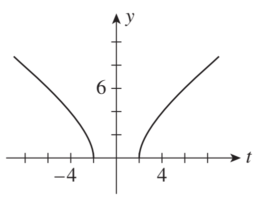
41.



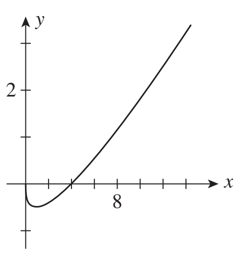
43.



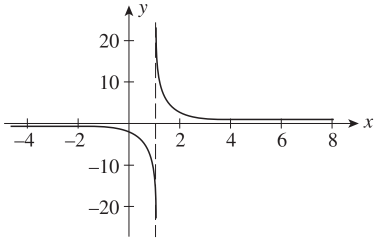
45.



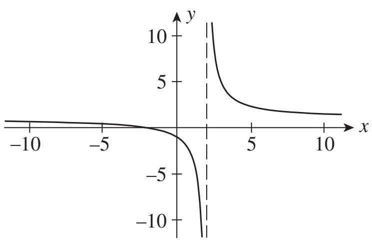
47.



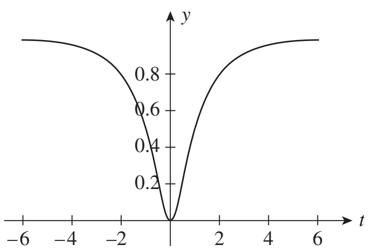
49.



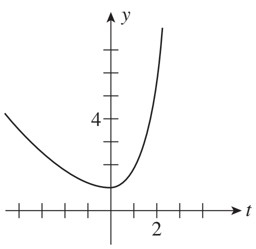
51.



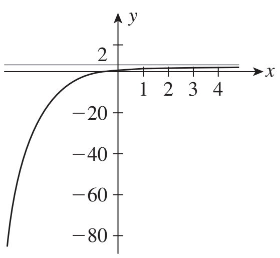
53.



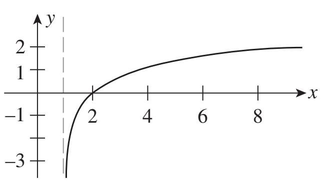
55.



57.



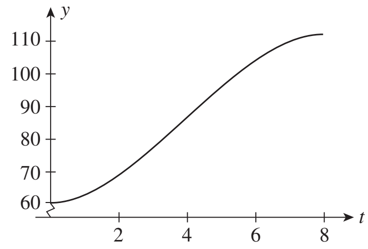
59.



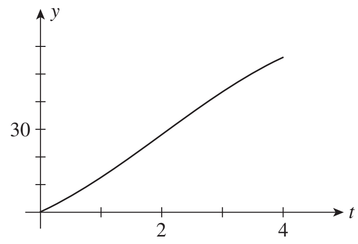
61. **a.** $x = 100$ **b.** No

63. **a.** $y = 0$
b. A medida que el tiempo avanza, la concentración del fármaco decrece y se aproxima a cero.

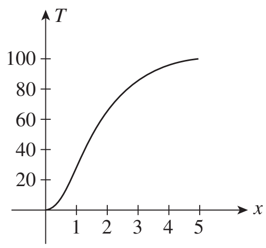
65.



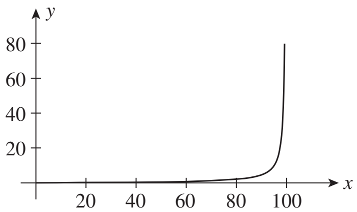
67.



69.

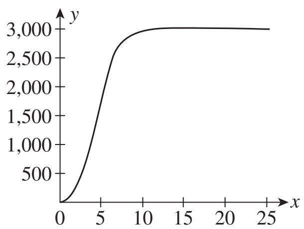


71.



73. **a.** 30 **b.** $N'(x) = \dfrac{297{,}000e^{-x}}{(1 + 99e^{-x})^2}$

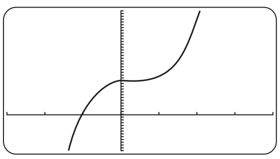
c.



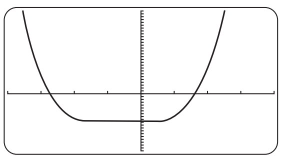
; 3,000

Ejercicios de uso de la tecnología 10.3, página 711

1.

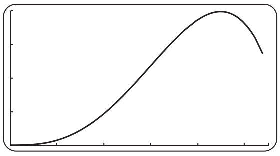


3.



5. -0.9733; 2.3165, 4.6569 **7.** 1.5142 **9.** -0.7680, 1.6783

11.



Ejercicios 10.4, página 719

1. Ninguno **3.** Mínimo absoluto: 0

5. Máximo absoluto: 3; mínimo absoluto: -2

7. Máximo absoluto: 3; mínimo absoluto: $-\frac{27}{16}$

9. Mínimo absoluto: $-\frac{41}{8}$

11. No hay extremos absolutos **13.** Máximo absoluto: 1

15. Máximo absoluto: 5; mínimo absoluto: -4

17. Máximo absoluto: 10; mínimo absoluto: 1

19. Máximo absoluto: 19; mínimo absoluto: -1

21. Máximo absoluto: 16; mínimo absoluto: -1

23. Máximo absoluto: 3; mínimo absoluto: $\frac{5}{3}$

25. Máximo absoluto: $\frac{37}{3}$; mínimo absoluto: 5

27. Máximo absoluto ≈ 1.04; mínimo absoluto: -1.5

29. No hay extremos absolutos

31. Máximo absoluto: 1; mínimo absoluto: 0

33. Máximo absoluto: 0; mínimo absoluto: -3

35. Máximo absoluto: 1; mínimo absoluto: $\frac{1}{e}$

37. Máximo absoluto: $2e^{-3/2}$; mínimo absoluto: -1

39. Máximo absoluto: $3 - \ln 3$; mínimo absoluto: 1

41. 144 ft **43.** 17.72%

45. $f(6) = 3.60, f(0.5) = 1.13$; el número de mujeres autoempleadas de tiempo completo, no rurales, durante el intervalo de tiempo de 1963 a 1993 alcanzó su nivel más alto, 3.6 millones, en 1993.

47. \$3,600 **49.** 6,000 **51.** 3,333

53. **a.** $0.0025x + 80 + \dfrac{10{,}000}{x}$ **b.** 2,000

c. 2,000 **d.** El mismo

55. 533 **57.** 7.72 años; \$160,208

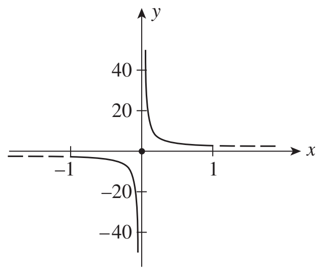
59. **a.** 2 días después el desecho orgánico fue arrojado en el estanque
b. 3.5 días después el desecho orgánico fue arrojado en el estanque

69. \$52.79/ft^2

71. **a.** 2,000; \$105,800 millones **b.** 1995; \$7,600 millones

75. $R = r$; $\dfrac{E^2}{4r}$ watts **79.** Falso **81.** Falso

85. **c.**



Ejercicios de uso de la tecnología 10.4, página 725

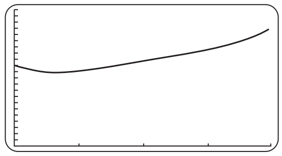
1. Máximo absoluto: 145.8985; mínimo absoluto: -4.3834

3. Máximo absoluto: 16; mínimo absoluto: -0.1257

5. Máximo absoluto: 11.8922; mínimo absoluto: 0

7. Máximo absoluto: 2.8889; mínimo absoluto: 0

9. **a.**



b. 21.51%

11. **b.** 1,145

Ejercicios 10.5, página 732

1. 25×25 ft

3. $750 \times 1{,}500$ yd; 1,125,000 yd^2

5. $10\sqrt{2} \times 40\sqrt{2}$ ft

7. $\frac{16}{3} \times \frac{16}{3}$ in $\times \frac{4}{3}$ in

9. 5.04×5.04 in $\times$ 5.04 in

11. 18×18 in $\times$ 36 in; 11,664 in^3

13. $r = \dfrac{36}{\pi}$ in; $l = 36$ in; $\dfrac{46{,}656}{\pi}$ in^3

15. $\frac{2}{3}\sqrt[3]{9} \times \sqrt[3]{9} \times \frac{2}{5}\sqrt[3]{9}$ ft

17. 250; \$62,500; \$250

19. 85; \$28,900; \$340 **21.** 60 millas por hora

23. $w \approx 13.86$ in; $h \approx 19.60$ in

25. $x = 2250$ ft **27.** $x \approx 2.68$

29. 440 ft; 140 ft; 184,874 ft^2 **31.** 45, 44,445

CAPÍTULO 10 Revisión de conceptos, página 738

1. **a.** $f(x_1) < f(x_2)$ **b.** $f(x_1) > f(x_2)$

2. **a.** Incremento **b.** $f'(x) < 0$ **c.** Constante

3. **a.** $f(x) \leq f(c)$ **b.** $f(x) \geq f(c)$

4. **a.** Dominio; $=0$; existe **b.** Valor crítico
c. Extremo relativo

5. **a.** $f'(x)$ **b.** >0 **c.** Concavidad
d. Máximo relativo; extremo relativo

6. $\pm\infty$; $\pm\infty$ 7. 0; 0 8. b; b

9. **a.** $f(x) \le f(c)$; máximo absoluto
b. $f(x) \ge f(c)$; intervalo abierto

10. Continua; absoluta; absoluta

CAPÍTULO 10 Ejercicios de revisión, página 738

1. **a.** f crece en $(-\infty, 1) \cup (1, \infty)$
b. No hay extremos relativos
c. Cóncava hacia abajo en $(-\infty, 1)$ y cóncava hacia arriba en $(1, \infty)$
d. $(1, -\frac{17}{3})$

2. **a.** f crece en $(-\infty, 2) \cup (2, \infty)$
b. No hay extremos relativos
c. Cóncava hacia abajo en $(-\infty, 2)$ y cóncava hacia arriba en $(2, \infty)$
d. $(2, 0)$

3. **a.** f crece en $(-1, 0) \cup (1, \infty)$ y decrece en $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$
b. Valor máximo relativo: 0; valor mínimo relativo: -1
c. Cóncava hacia arriba en $\left(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \infty\right)$ y cóncava hacia abajo en $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$
d. $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{5}{9}\right)$; $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{5}{9}\right)$

4. **a.** f crece en $(-\infty, -2) \cup (2, \infty)$ y decrece en $(-2, 0) \cup (0, 2)$
b. Valor máximo relativo: -4; valor mínimo relativo: 4
c. Cóncava hacia abajo en $(-\infty, 0)$ y cóncava hacia arriba en $(0, \infty)$
d. Ninguno

5. **a.** f crece en $(-\infty, 0) \cup (2, \infty)$ y decrece en $(0, 1) \cup (1, 2)$
b. Valor máximo relativo: 0; valor mínimo relativo: 4
c. Cóncava hacia arriba en $(1, \infty)$; y cóncava hacia abajo en $(-\infty, 1)$
d. Ninguno

6. **a.** f crece en $(1, \infty)$
b. No hay extremos relativos
c. Cóncava hacia abajo en $(1, \infty)$
d. Ninguno

7. **a.** f decrece en $(-\infty, 1) \cup (1, \infty)$
b. No hay extremos relativos
c. Cóncava hacia abajo en $(-\infty, 1)$ y cóncava hacia arriba en $(1, \infty)$
d. $(1, 0)$

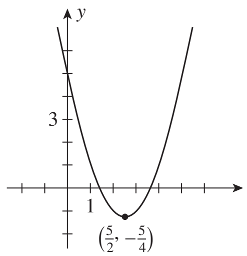
8. **a.** f crece en $(1, \infty)$
b. No hay extremos relativos
c. Cóncava hacia abajo en $(1, \frac{4}{3})$ y cóncava hacia arriba en $(\frac{4}{3}, \infty)$
d. $\left(\frac{4}{3}, \frac{4\sqrt{3}}{9}\right)$

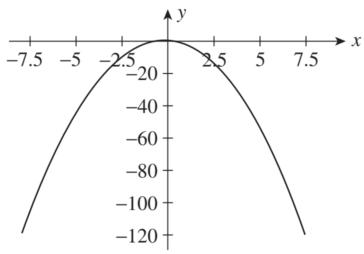
9. **a.** f crece en $(-\infty, -1) \cup (-1, \infty)$
b. No hay extremos relativos
c. Cóncava hacia abajo en $(-1, \infty)$ y cóncava hacia arriba en $(-\infty, -1)$
d. Ninguno

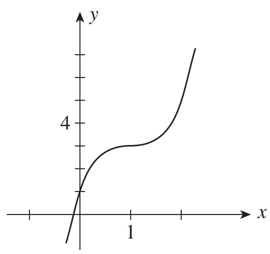
10. **a.** f decrece en $(-\infty, 0)$ y decrece en $(0, \infty)$
b. Valor mínimo relativo: -1
c. Cóncava hacia abajo en $\left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \cup \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \infty\right)$ y cóncava hacia arriba en $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$
d. $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{3}{4}\right)$; $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{3}{4}\right)$

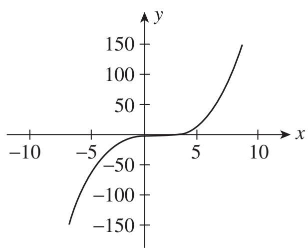
11. **a.** f crece en $(-\infty, 3)$ y decrece en $(3, \infty)$
b. Valor máximo relativo: e^3
c. Cóncava hacia arriba en $(-\infty, 2)$ y cóncava hacia abajo en $(2, \infty)$
d. $(2, 2e^2)$

12. **a.** f decrece en $(0, e^{-1/2})$ y crece en $(e^{-1/2}, \infty)$
b. Valor mínimo relativo: $-\frac{1}{2}e^{-1}$
c. Cóncava hacia abajo en $(0, e^{-3/2})$ y cóncava hacia arriba en $(e^{-3/2}, \infty)$
d. $(e^{-3/2}, -\frac{3}{2}e^{-3})$

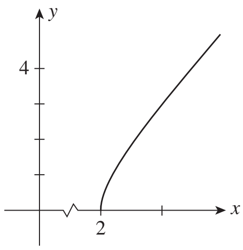
13.


14.


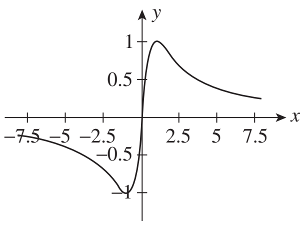
15.


16.


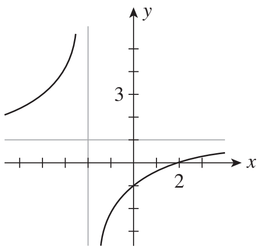
17.



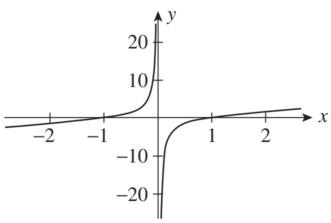
18.



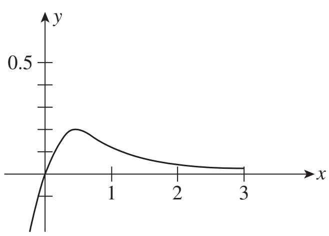
19.



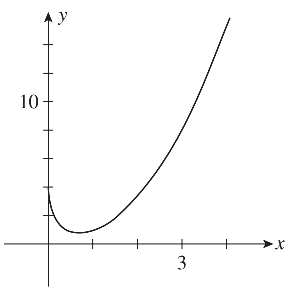
20.



21.



22.



23. Asíntota vertical: $x = -\frac{3}{2}$; asíntota horizontal: $y = 0$

24. Asíntota horizontal: $y = 2$; asíntota vertical: $x = -1$

25. Asíntota vertical: $x = -2$, $x = 4$, asíntota horizontal: $y = 0$

26. Asíntota horizontal: $y = 1$; asíntota vertical: $x = 1$

27. Mínimo absoluto: $-\frac{25}{8}$

28. Mínimo absoluto: 0

29. Máximo absoluto: 5; mínimo absoluto: 0

30. Máximo absoluto: $\frac{5}{3}$; mínimo absoluto: 1

31. Máximo absoluto: -16; mínimo absoluto: -32

32. Máximo absoluto: $\frac{1}{2}$; mínimo absoluto: 0

33. Máximo absoluto: $\frac{8}{3}$; mínimo absoluto: 0

34. Máximo absoluto: $\frac{215}{9}$; mínimo absoluto: 7

35. Máximo absoluto: $1/e$; mínimo absoluto: $-2e^2$

36. Máximo absoluto: $(\ln 2)/2$; mínimo absoluto: 0

37. Máximo absoluto: $\frac{1}{2}$; mínimo absoluto: $-\frac{1}{2}$

38. No hay extremos absolutos

39. \$4,000

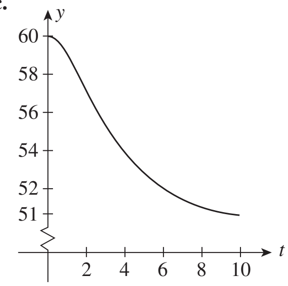
40. **c.** Se espera que los gastos de reservaciones online aumenten a un ritmo creciente durante ese periodo.

41. **a.** $16.25t + 24.625$; aumentaron las ventas.
b. 16.25; la tasa de ventas aumentó de 2002 a 2005.

42. **a.** $I'(t) = -\dfrac{200t}{(t^2 + 10)^2}$

b. $I''(t) = \dfrac{-200(10 - 3t^2)}{(t^2 + 10)^3}$; cóncava hacia arriba en $(\sqrt{10/3}, \infty)$; cóncava hacia abajo en $(0, \sqrt{10/3})$

c.



d. La tasa de declinación de la calidad ambiental de la fauna silvestre aumentó los primeros 1.8 años. Después de ese tiempo la tasa de declinación disminuyó.

43. 168 **44.** 3,000

45. **a.** $0.001x + 100 + \dfrac{4{,}000}{x}$ **b.** 2,000

46. 10 a.m.

47. **a.** Decrece en (0, 12.7); crece en (12.7, 30)
b. (12.7, 7.9)
c. El porcentaje de mujeres de 65 años o más en la fuerza de trabajo disminuyó de 1970 a septiembre de 1982 y aumentó de septiembre de 1982 a 2000. Alcanzó un valor mínimo de 7.9% en septiembre 1982.

49. 74.07 in^3 **50.** Radio: 2 ft; altura: 8 ft

51. $1 \times 2 \times 2$ ft **52.** 20,000 casos

53. $a = -4$; $b = 11$ **54.** $c \geq \frac{3}{2}$

56. **a.** $f'(x) = 3x^2$ si $x \neq 0$ **b.** No

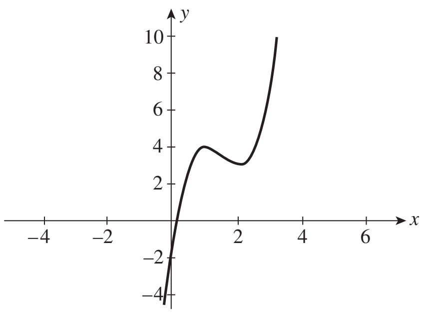
CAPÍTULO 10 Antes de continuar, página 740

1. Decrece en $(-\infty, 0) \cup (2, \infty)$; crece en $(0, 1) \cup (1, 2)$

2. Valor máximo relativo: $(1, e^{-1})$; punto de inflexión: $(2, 2e^{-2})$

3. Cóncava hacia abajo en $(-\infty, \frac{1}{4})$; cóncava hacia arriba en $(\frac{1}{4}, \infty)$; $\left(\frac{1}{4}, \frac{83}{96}\right)$

4.



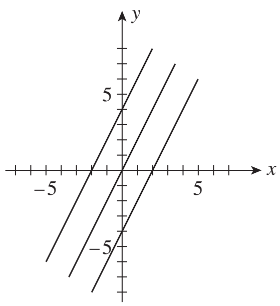
5. Mínimo absoluto: -5; máximo absoluto: 80

6. $r = h = \dfrac{1}{\sqrt[3]{\pi}}$ (ft)

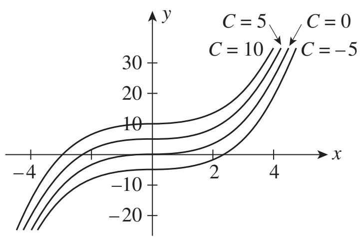
CAPÍTULO 11

Ejercicios 11.1, página 750

5. **b.** $y = 2x + C$



7. **b.** $y = \frac{1}{3}x^3 + C$



9. $6x + C$ **11.** $\frac{1}{4}x^4 + C$ **13.** $-\dfrac{1}{3x^3} + C$

15. $\frac{3}{5}x^{5/3} + C$ **17.** $-\dfrac{4}{x^{1/4}} + C$ **19.** $-\dfrac{2}{x} + C$

21. $\frac{2}{3}\pi t^{3/2} + C$ **23.** $3x - x^2 + C$

25. $\dfrac{1}{3}x^3 + \dfrac{1}{2}x^2 - \dfrac{1}{2x^2} + C$ **27.** $4e^x + C$

29. $x + \frac{1}{2}x^2 + e^x + C$ **31.** $x^4 + \dfrac{2}{x} - x + C$

33. $\frac{2}{7}x^{7/2} + \frac{4}{5}x^{5/2} - \frac{1}{2}x^2 + C$ **35.** $\frac{2}{3}x^{3/2} + 6\sqrt{x} + C$

37. $\frac{1}{9}u^3 + \frac{1}{3}u^2 - \frac{1}{3}u + C$ **39.** $\frac{2}{3}t^3 - \frac{3}{2}t^2 - 2t + C$

41. $\frac{1}{3}x^3 - 2x - \dfrac{1}{x} + C$ **43.** $\frac{1}{3}s^3 + s^2 + s + C$

45. $e^t + \dfrac{t^{e+1}}{e+1} + C$ **47.** $\dfrac{1}{2}x^2 + x - \ln|x| - \dfrac{1}{x} + C$

49. $\ln|x| + \dfrac{4}{\sqrt{x}} - \dfrac{1}{x} + C$ **51.** $x^2 + x + 1$

53. $x^3 + 2x^2 - x - 5$ **55.** $x - \dfrac{1}{x} + 2$ **57.** $x + \ln|x|$

59. $\sqrt{x}$ **61.** $e^x + \frac{1}{2}x^2 + 2$ **63.** Rama A

65. $s(t) = \frac{4}{3}t^{3/2}$ **67.** \$3,370 **69.** 5,000 unidades; \$34,000

71. **a.** $0.0029t^2 + 0.159t + 1.6$ **b.** \$4.16 billones

73. **a.** $-0.125t^3 + 1.05t^2 + 2.45t + 1.5$ **b.** 24.375 millones

75. **a.** $-1.493t^3 + 34.9t^2 + 279.5t + 2{,}917$ **b.** \$9,168

77. **a.** $3.133t^3 - 6.7t^2 + 14.07t + 36.7$ **b.** 103,201

79. **a.** $y = 4.096t^3 - 75.2797t^2 + 695.23t + 3{,}142$ **b.** \$4,264.11

81. 21,960 **83.** $-t^3 + 96t^2 + 120t$; 63,000 ft

85. **a.** $0.75t^4 - 5.9815t^3 + 14.3611t^2 + 26.632t + 108$
b. \$321.25 millones

87. **a.** $9.3e^{-0.02t}$ **b.** 7,030 **c.** 6,619

89. $\frac{1}{2}k(R^2 - r^2)$ **91.** $9\frac{7}{9}$ ft/seg^2; 396 ft **93.** 0.924 ft/sec^2

95. **a.** $\dfrac{2t}{t+4}$ **b.** $\frac{2}{5}$ in; $\frac{2}{3}$ in **97.** Verdadero **99.** Verdadero

Ejercicios 11.2, página 762

1. $\frac{1}{5}(4x + 3)^5 + C$ **3.** $\frac{1}{3}(x^3 - 2x)^3 + C$

5. $-\dfrac{1}{2(2x^2 + 3)^2} + C$ **7.** $\frac{2}{3}(t^3 + 2)^{3/2} + C$

9. $\frac{1}{20}(x^2 - 1)^{10} + C$ **11.** $-\frac{1}{5}\ln|1 - x^5| + C$

13. $\ln(x - 2)^2 + C$ **15.** $\frac{1}{2}\ln(0.3x^2 - 0.4x + 2) + C$

17. $\frac{1}{6}\ln|3x^2 - 1| + C$ **19.** $-\frac{1}{2}e^{-2x} + C$ **21.** $-e^{2-x} + C$

23. $-\frac{1}{2}e^{-x^2} + C$ **25.** $e^x + e^{-x} + C$ **27.** $\ln(1 + e^x) + C$

29. $2e^{\sqrt{x}} + C$ **31.** $-\dfrac{1}{6(e^{3x} + x^3)^2} + C$ **33.** $\frac{1}{8}(e^{2x} + 1)^4 + C$

35. $\frac{1}{2}(\ln 5\, x^2) + C$ **37.** $\ln|\ln\ x| + C$ **39.** $\frac{2}{3}(\ln x)^{3/2} + C$

41. $\frac{1}{2}e^{x^2} - \frac{1}{2}\ln(x^2 + 2) + C$

43. $\frac{2}{3}(\sqrt{x} - 1)^3 + 3(\sqrt{x} - 1)^2 + 8(\sqrt{x} - 1) + 4\ln|\sqrt{x} - 1| + C$

45. $\dfrac{(6x + 1)(x - 1)6}{42} + C$

47. $5 + 4\sqrt{x} - x - 4\ln(1 + \sqrt{x}) + C$

49. $-\frac{1}{252}(1 - v)^7(28v^2 + 7v + 1) + C$

51. $\frac{1}{2}[(2x - 1)^5 + 5]$ **53.** $e^{-x^2+1} - 1$ **55.** 17,341,000

57. $21{,}000 - \dfrac{20{,}000}{\sqrt{1 + 0.2t}}$; 6,858 **59.** $\dfrac{250}{\sqrt{16 + x^2}}$

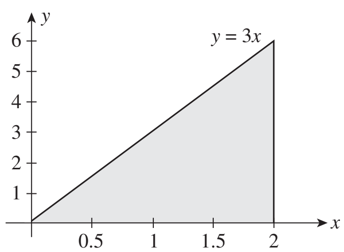
61. $30(\sqrt{2t + 4} - 2)$; $14{,}400\,\pi$ ft^2

63. $\dfrac{65.8794}{1 + 2.449e^{-0.3277t}} + 0.3$; 56.22 in. **65.** $\dfrac{r}{a}(1 - e^{-at})$ **67.** Verdadero

Ejercicios 11.3, página 772

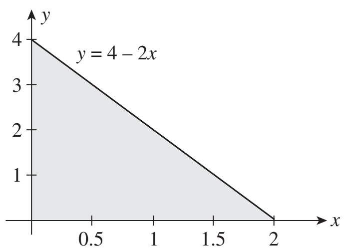
1. 4.27

3. **a.** 6



b. 4.5 **c.** 5.25 **d.** Sí

5. **a.** 4



b. 4.8 **c.** 4.4 **d.** Sí

7. **a.** 18.5 **b.** 18.64 **c.** 18.66 **d.** ≈18.7

9. **a.** 25 **b.** 21.12 **c.** 19.88 **d.** ≈19.9

11. **a.** 0.0625 **b.** 0.16 **c.** 0.2025 **d.** ≈0.2

13. 4.64 **15.** 0.95 **17.** 9,400 ft^2

Ejercicios 11.4, página 782

1. 6 **3.** 8 **5.** 12 **7.** 9 **9.** ln 2 **11.** $17\frac{1}{3}$ **13.** $18\frac{1}{4}$

15. $e^2 - 1$ **17.** 6 **19.** 14 **21.** $18\frac{2}{3}$ **23.** $\frac{4}{3}$ **25.** 45

27. $\frac{7}{12}$ **29.** ln 2 **31.** 56 **33.** $\frac{256}{15}$ **35.** $\frac{2}{3}$ **37.** $2\frac{2}{3}$

39. $19\frac{1}{2}$ **41.** **a.** $4,100 **b.** $900 **43.** **a.** $2,800 **b.** $219.20

45. **a.** $0.86t^{0.96} + 0.04$ **b.** $4,840 millones **47.** $10{,}133\frac{1}{3}$ ft

49. **a.** $0.2833t^3 - 1.936t^2 + 5t + 5.6$ **b.** 12.8% **c.** 5.2%

51. 695.5 millones **53.** 149.1 millones **55.** $\frac{23}{15}$

57. Falso **59.** Falso

Ejercicios de uso de la tecnología 11.4, página 785

1. 6.1787 **3.** 0.7873 **5.** −0.5888 **7.** 2.7044

9. 3.9973 **11.** 46%; 24% **13.** 333,209 **15.** 903,213

Ejercicios 11.5, página 792

1. 10 **3.** $\frac{19}{15}$ **5.** $32\frac{4}{15}$ **7.** $\sqrt{3} - 1$ **9.** $24\frac{1}{5}$

11. $\frac{32}{15}$ **13.** $18\frac{2}{15}$ **15.** $\frac{1}{2}(e^4 - 1)$ **17.** $\frac{1}{2}e^2 + \frac{5}{6}$ **19.** 0

21. 2 ln 4 **23.** $\frac{1}{3}(\ln 19 - \ln 3)$ **25.** $2e^4 - 2e^2 - \ln 2$

27. $\frac{1}{2}(e^{-4} - e^{-8} - 1)$ **29.** 6 **31.** $\frac{1}{2}$ **33.** $2(\sqrt{e} - \frac{1}{e})$ **35.** 5

37. $\frac{17}{3}$ **39.** −1 **41.** $\frac{13}{6}$ **43.** $\frac{1}{4}(e^4 - 1)$

45. 120.3 mil millones de toneladas métricas

47. ≈$2.24 millones **49.** $40,339.50 **51.** $3,240 millones por año

53. **a.** 160.7 mil millones de galones/año
b. 150.1 mil millones de galones/año /año

55. 9.8% **57.** 16,863 **59.** $14.78 **61.** 80.7%

69. Propiedad 5 **71.** 0 **73.** **a.** −1 **b.** 5 **c.** −13

75. Verdadero **77.** Falso **79.** Verdadero

Ejercicios de uso de la tecnología 11.5, página 796

1. 7.71667 **3.** 17.56487 **5.** 10,140 **7.** 60.45 mg/día

Ejercicios 11.6, página 803

1. 108 **3.** $\frac{2}{3}$ **5.** $2\frac{2}{3}$ **7.** $1\frac{1}{2}$ **9.** 3 **11.** $3\frac{1}{3}$

13. 27 **15.** $2(e^2 - e^{-1})$ **17.** $12\frac{2}{3}$ **19.** $3\frac{1}{3}$ **21.** $4\frac{3}{4}$

23. 12 − ln 4 **25.** $e^2 - e - \ln 2$ **27.** $2\frac{1}{2}$ **29.** $7\frac{1}{3}$ **31.** $\frac{3}{2}$

33. $e^3 - 4 + \frac{1}{e}$ **35.** $20\frac{5}{6}$ **37.** $\frac{1}{12}$ **39.** $\frac{71}{6}$ **41.** 18

43. S es el ingreso adicional que podría obtener viajes Odyssey por el cambio a la nueva agencia; $S = \int_0^b [g(x) - f(x)]\,dx$

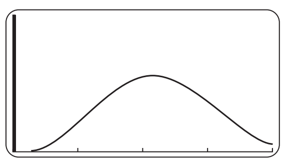
45. Déficit: $= \int_{2010}^{2050} [f(t) - g(t)]\,dt$

47. **a.** $A_2 - A_1$
b. La distancia que el automóvil 2 está por delante del automóvil 1 después de t segundos

49. 30 ft/seg más rápido **51.** 21,850 **53.** Verdadero **55.** Falso

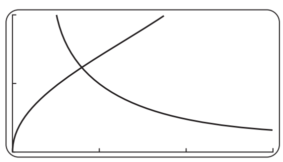
Ejercicios de uso de la tecnología 11.6, página 808

1. **a.**



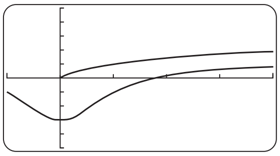
b. 1074.2857

3. **a.**



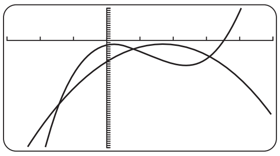
b. 0.9961

5. **a.**



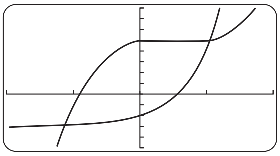
b. 5.4603

7. **a.**



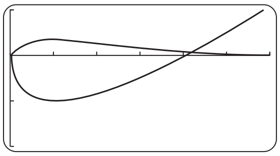
b. 25.8549

9. **a.**



b. 10.5144

11. **a.**



b. 3.5799

13. 207.43

Ejercicios 11.7, página 818

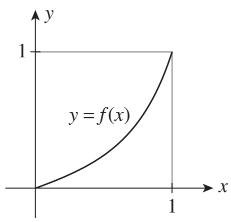
1. \$11,667 **3.** \$6,667 **5.** \$11,667

7. Excedente del consumidor: \$13,333; excedente del productor: \$11,667

9. \$824,200 **11.** \$148,239 **13.** \$43,788

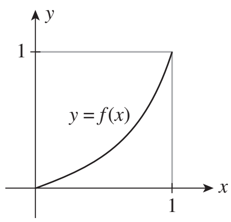
15. \$47,916 **17.** \$142,423 **19.** \$24,780

21. **a.**



b. 0.175; 0.816

23. **a.**



b. 0.104; 0.504

Ejercicios de uso de la tecnología 11.7, página 820

1. Excedente del consumidor: \$18,000,000; excedente del productor: \$11,700,000

3. Excedente del consumidor: \$33,120; excedente del productor: \$2,880

5. Inversión A

CAPÍTULO 11 Revisión de conceptos, página 822

1. **a.** $F'(x) = f(x)$ **b.** $F(x) + C$

2. **a.** $c\int f(x)\,dx$ **b.** $\int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$

3. **a.** Desconocido **b.** Función **4.** $g'(x)\,dx$; $\int f(u)\,du$

5. **a.** $\int_a^b f(x)\,dx$ **b.** Menos

6. **a.** $F(b) - F(a)$; antiderivada **b.** $\int_a^b f'(x)\,dx$

7. **a.** $\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ **b.** Área; área **8.** $\int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx$

9. **a.** $\int_0^{\bar{x}} D(x)\,dx - \bar{p}\,\bar{x}$ **b.** $\bar{p}\,\bar{x} - \int_0^{\bar{x}} S(x)\,dx$

10. **a.** $e^{rT}\int_0^T R(t)e^{-rt}\,dt$ **b.** $\int_0^T R(t)e^{-rt}\,dt$

11. $A = \dfrac{mP}{r}(e^{rT} - 1)$ **12.** $L = 2\int_0^1 [x - f(x)]\,dx$

Capítulo 11 Ejercicios de revisión, página 823

1. $\frac{1}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + C$ **2.** $\frac{1}{12}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + 8x + C$

3. $\frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{2}x^4 - \dfrac{1}{x} + C$ **4.** $\frac{3}{4}x^{4/3} - \frac{2}{3}x^{3/2} + 4x + C$

5. $\frac{1}{2}x^4 + \frac{2}{5}x^{5/2} + C$ **6.** $\frac{2}{7}x^{7/2} - \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{3}x^{3/2} - x + C$

7. $\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 2\ln|x| + 5x + C$ **8.** $\frac{1}{3}(2x+1)^{3/2} + C$

9. $\frac{3}{8}(3x^2 - 2x + 1)^{4/3} + C$ **10.** $\dfrac{(x^3+2)^{11}}{33} + C$

11. $\frac{1}{2}\ln(x^2 - 2x + 5) + C$ **12.** $-e^{-2x} + C$

13. $\frac{1}{2}e^{x^2+x+1} + C$ **14.** $\dfrac{1}{e^{-x} + x} + C$ **15.** $\frac{1}{6}(\ln x)^6 + C$

16. $(\ln x)^2 + C$ **17.** $\dfrac{(11x^2 - 1)(x^2+1)^{11}}{264} + C$

18. $\frac{2}{15}(3x - 2)(x+1)^{3/2} + C$ **19.** $\frac{2}{3}(x+4)\sqrt{x-2} + C$

20. $2(x-2)\sqrt{x+1} + C$ **21.** $\frac{1}{2}$ **22.** -6 **23.** $5\frac{2}{3}$

24. 242 **25.** -80 **26.** $\frac{132}{5}$ **27.** $\frac{1}{2}\ln 5$ **28.** $\frac{1}{15}$

29. 4 **30.** $1 - \dfrac{1}{e^2}$ **31.** $\dfrac{e-1}{2(1+e)}$ **32.** $\frac{1}{2}$

33. $f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 1$ **34.** $f(x) = \sqrt{x^2+1}$

35. $f(x) = x + e^{-x} + 1$ **36.** $f(x) = \frac{1}{2}(\ln x)^2 - 2$

37. -4.28 **38.** \$6,740

39. **a.** $-0.015x^2 + 60x$; **b.** $p = -0.015x + 60$

40. $V(t) = 1{,}900(t - 10)^2 + 10{,}000$; \$40,400

41. **a.** $0.05t^3 - 1.8t^2 + 14.4t + 24$ **b.** 56°F

42. **a.** $-0.01t^3 + 0.109t^2 - 0.032t + 0.1$ **b.** 1.076 mil millones

43. 3.375 ppm **44.** $3{,}000t - 50{,}000(1 - e^{-0.04t})$; 16,939

45. $N(t) = 15{,}000\sqrt{1 + 0.4t} + 85{,}000$; 112,659

46. 26,027 **47.** $\dfrac{240}{5-x} - 30$

48. \$3,100 **49.** 37.7 millones

50. **a.** $S(t) = 205.89 - 89.89e^{-0.176t}$ **b.** \$161.43 mil millones

51. 15 **52.** $\frac{1}{2}(e^4 - 1)$

53. $\frac{2}{3}$ **54.** $\frac{9}{2}$

55. $e^2 - 3$ **56.** $\frac{3}{10}$ **57.** $\frac{1}{2}$

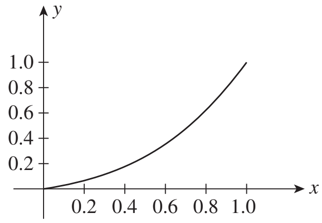
58. 234,500 barriles **59.** $\frac{1}{3}$ **60.** 26 °F

61. 49.7 ft/seg **62.** 67,600/año **63.** $270,000

64. Excedente del consumidor: $2,083; excedente del productor: $3,333

65. $197,652 **66.** $174,420 **67.** $505,696

68. **a.**



b. 0.1017; 0.3733 **c.** 0.315

69. 90,888

CAPÍTULO 11 Ejercicios de revisión, página 826

1. $\frac{1}{2}x^4 + \frac{2}{3}x^{3/2} + 2\ln|x| - 4\sqrt{x} + C$ **2.** $e^x + \frac{1}{2}x^2 + 1$

3. $\sqrt{x^2+1} + C$ **4.** $\frac{1}{3}(2\sqrt{2} - 1)$ **5.** $\frac{9}{2}$

CAPÍTULO 12

Ejercicios 12.1, página 834

1. $f(0, 0) = -4$; $f(1, 0) = -2$; $f(0, 1) = -1$; $f(1, 2) = 4$; $f(2, -1) = -3$

3. $f(1, 2) = 7$; $f(2, 1) = 9$; $f(-1, 2) = 1$; $f(2, -1) = 1$

5. $g(1, 2) = 4 + 3\sqrt{2}$; $g(2, 1) = 8 + \sqrt{2}$; $g(0, 4) = 2$; $g(4, 9) = 56$

7. $h(1, e) = 1$; $h(e, 1) = -1$; $h(e, e) = 0$

9. $g(1, 1, 1) = e$; $g(1, 0, 1) = 1$; $g(-1, -1, -1) = -e$

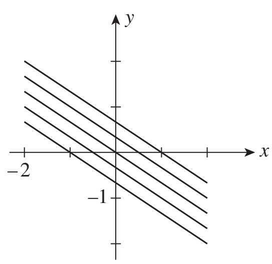
11. Todos los valores reales de x y y

13. Todos los valores reales de u y v excepto aquellos que satisfacen la ecuación $u = v$

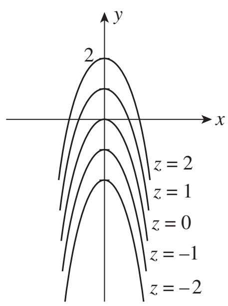
15. Todos los valores reales de r y s que satisfacen la ecuación $rs \geq 0$

17. Todos los valores reales de x y y que satisfacen la ecuación $x + y > 5$

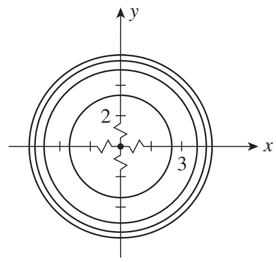
19.



21.



23.



25. $\sqrt{x^2 + y^2} = 5$ **27.** 9π ft³ **29.** **a.** 24.69 **b.** 81 kg

31. **a.** $-\frac{1}{5}x^2 - \frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{5}xy + 200x + 160y$
b. El conjunto de todos los puntos (x, y) que satisfacen
$200 - \frac{1}{5}x - \frac{1}{10}y \geq 0$, $160 - \frac{1}{10}x - \frac{1}{4}y \geq 0$, $x \geq 0$, $y \geq 0$

33. **a.** $-0.005x^2 - 0.003y^2 - 0.002xy + 20x + 15y$
b. El conjunto de todos los pares ordenados (x, y) para los cuales
$20 - 0.005x - 0.001y \geq 0$
$15 - 0.001x - 0.003y \geq 0$, $x \geq 0$, $y \geq 0$

35. **a.** El conjunto de todos los pares ordenados (P, T), donde P y T son números positivos
b. 11.10 L

37. $7,200 mil millones **39.** 103

41. **a.** $1,798.65; $2,201.29 **b.** $2,509.32

43. 40.28 veces la gravedad

45. Las curvas de nivel de V tiene la ecuación $\frac{kT}{P} = C$ (C, una constante positiva). Las curvas de nivel son una familia de líneas rectas $T = \left(\frac{C}{k}\right)P$ trazadas en el primer cuadrante puesto que k, T y P son positivas. Cada punto de la curva de nivel $V = C$ el mismo volumen C.

47. Falso **49.** Falso **51.** Falso

Ejercicios 12.2, página 846

1. **a.** 4; 4
b. $f_x(2, 1) = 4$ dice que la pendiente de la recta tangente a la curva de intersección de la superficie $z = x^2 + 2y^2$ y el plano $y = 1$ en el punto $(2, 1, 6)$ es de 4. $f_y(2, 1) = 4$ indica que la pendiente de la recta tangente a la curva de intersección de la superficie $z = x^2 + 2y^2$ y el plano $x = 2$ en el punto $(2, 1, 6)$ es de 4.
c. $f_x(2, 1) = 4$ indica que la tasa de cambio de $f(x, y)$ con respecto a x cuando y se mantiene fija con un valor de 1 es 4 unidades/unidad de cambio en x.
$f_y(2, 1) = 4$ indica que la tasa de cambio de $f(x, y)$ con respecto a y cuando x se mantiene fija con un valor de 2 es de 4 unidades/unidad de cambio en y.

3. 2; 3 **5.** $4x$; 4 **7.** $-\frac{4y}{x^3}$; $\frac{2}{x^2}$ **9.** $\frac{2v}{(u+v)^2}$; $-\frac{2u}{(u+v)^2}$

11. $3(2s - t)(s^2 - st + t^2)^2$; $3(2t - s)(s^2 - st + t^2)^2$

13. $\frac{4x}{3(x^2+y^2)^{1/3}}$; $\frac{4x}{3(x^2+y^2)^{1/3}}$ **15.** ye^{xy+1}; xe^{xy+1}

17. $\ln y + \frac{y}{x}$; $\frac{x}{y} + \ln x$ **19.** $e^u \ln v$; $\frac{e^u}{v}$

21. $yz + y^2 + 2xz$; $xz + 2xy + z^2$; $xy + 2yz + x^2$

23. ste^{rst}; rte^{rst}; rse^{rst} **25.** $f_x(1, 2) = 8$; $f_y(1, 2) = 5$

27. $f_x(2, 1) = 1$; $f_y(2, 1) = 3$ **29.** $f_x(1, 2) = \frac{1}{2}$; $f_y(1, 2) = -\frac{1}{4}$

31. $f_x(1, 1) = e$; $f_y(1, 1) = e$

33. $f_x(1, 0, 2) = 0$; $f_y(1, 0, 2) = 8$; $f_z(1, 0, 2) = 0$

35. $f_{xx} = 2y$; $f_{xy} = 2x + 3y^2 = f_{yx}$; $f_{yy} = 6xy$

37. $f_{xx} = 2$; $f_{xy} = f_{yx} = -2$; $f_{yy} = 4$

39. $f_{xx} = \dfrac{y^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$; $f_{xy} = f_{yx} = -\dfrac{xy}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$;

$f_{yy} = \dfrac{x^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$

41. $f_{xx} = \dfrac{1}{y^2}e^{-x/y}$; $f_{xy} = \dfrac{y - x}{y^3}e^{-x/y} = f_{yx}$;

$f_{yy} = \dfrac{x}{y^3}\left(\dfrac{x}{y} - 2\right)e^{-x/y}$

43. **a.** $f_x = 7.5$; $f_y = 40$ **b.** Sí

45. $p_x = 10$, en (0, 1), el precio de la tierra está cambiando a una tasa de \$10/ft^2/milla hacia la derecha; $p_y = 0$, en (0, 1), el precio de la tierra es constante/milla hacia arriba.

47. Bienes complementarios

49. \$30 por unidad en escritorios terminados; −\$25/unidad en escritorios sin terminar. Los ingresos semanales aumentan \$30 por unidad por cada escritorio terminado adicional producido (después de 300) cuando el nivel de producción de escritorios sin terminar permanece fijo en 250; los ingresos disminuyen \$25 por unidad cuando se fabrica cada escritorio sin terminar adicional (después de 250) y el nivel de producción de escritorios terminados permanece fijo en 300.

51. **a.** ≈20°F **b.** ≈ −0.3°F

53. 0.039 L/grado; −0.015 L/mm de mercurio. El volumen aumenta 0.039 L cuando la temperatura aumenta 1 grado (después de 300 K) y la presión se fija en 800 mm de mercurio. El volumen se reduce 0.015 L cuando la presión aumenta 1 mm de mercurio (más allá de 800 mm) y la temperatura se fija en 300 K.

57. Falso **59.** Verdadero

Ejercicios de uso de la tecnología 12.2, página 849

1. 1.3124; 0.4038 **3.** −1.8889; 0.7778 **5.** −0.3863; −0.8497

Ejercicios 12.3, página 857

1. (0, 0); valor máximo relativo: $f(0, 0) = 1$

3. (1, 2); punto de silla: $f(1, 2) = 4$

5. (8, −6); valor mínimo relativo: $f(8, -6) = -41$

7. (1, 2) y (2, 2); punto de silla: $f(1, 2) = -1$; valor mínimo relativo: $f(2, 2) = -2$

9. $(-\frac{1}{3}, \frac{11}{3})$ y (1, 5); punto de silla: $f(-\frac{1}{3}, \frac{11}{3}) = -\frac{319}{27}$; valor mínimo relativo: $f(1, 5) = -13$

11. (0, 0) y (1, 1); punto de silla: $f(0, 0) = -2$; valor mínimo relativo: $f(1, 1) = -3$

13. (2, 1); valor mínimo relativo: $f(2, 1) = 6$

15. (0, 0); punto de silla: $f(0, 0) = -1$

17. (0, 0); valor mínimo relativo: $f(0, 0) = 1$

19. (0, 0); valor mínimo relativo: $f(0, 0) = 0$

21. 200 unidades terminadas y 100 unidades no terminadas; \$10,500

23. El precio del terreno (\$200/ft^2) es el más alto en $(\frac{1}{2}, 1)$

25. (0, 1) proporciona la ubicación deseada.

27. 10″ × 10″ × 5″; 500 in^3

29. 30″ × 40″ × 10″; \$7,200 **31.** Falso **33.** Falso

35. Verdadero

CAPÍTULO 12 Revisión de conceptos, página 860

1. xy; par ordenado; número real; $f(x, y)$

2. Independiente; dependiente; valor

3. $z = f(x, y)$; f; superficie

4. $f(x, y) = c$; curva de nivel; curvas de nivel; c

5. Número fijo; x **6.** Pendiente; $(a, b, f(a, b))$; x; b

7. ≤; (a, b); ≤; dominio

8. Dominio; $f_x(a, b) = 0$ y $f_y(a, b) = 0$; existe; candidato

CAPÍTULO 12 Ejercicios de revisión, página 861

1. 0, 0, $\frac{1}{2}$; no **2.** $\dfrac{e, e^2}{1 + \ln 2}, \dfrac{2e}{1 + \ln 2}$; no

3. 2, $-(e + 1)$, $-(e + 1)$

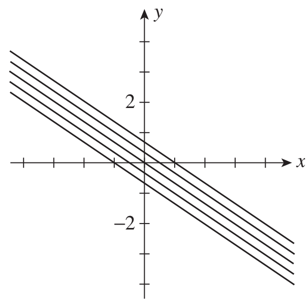
4. El conjunto de todos los pares ordenados (u, v) tal que $u \neq v$

5. El conjunto de todos los pares ordenados (x, y) tal que $y \neq -x$

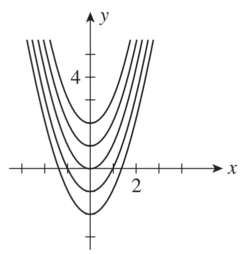
6. El conjunto de todos los pares ordenados (x, y) tal que $x \leq 1$ y $y \geq 0$

7. El conjunto de todas las tripletas (x, y, z) tales que $z \geq 0$ y $x \neq 1$, $y \neq 1$ y $z \neq 1$

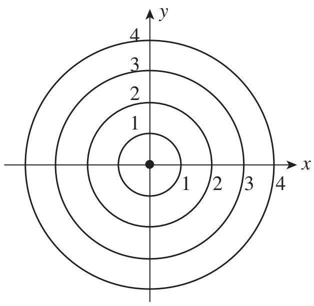
8. $2x + 3y = z$



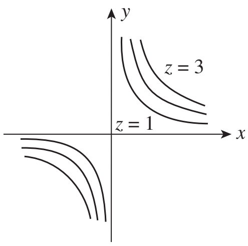
9. $z = y - x^2$



10. $z = \sqrt{x^2 + y^2}$



11. $z = e^{xy}$



12. $f_x = 2xy^3 + 3y^2 + \dfrac{1}{y}$; $f_y = 3x^2y^2 + 6xy - \dfrac{x}{y^2}$

13. $f_x = \sqrt{y} + \dfrac{y}{2\sqrt{x}}$; $f_y = \dfrac{x}{2\sqrt{y}} + \sqrt{x}$

14. $f_u = \dfrac{v^2 - 2}{2\sqrt{uv^2 - 2u}}$; $f_v = \dfrac{uv}{\sqrt{uv^2 - 2u}}$

15. $f_x = \dfrac{3y}{(y + 2x)^2}$; $f_y = -\dfrac{3x}{(y + 2x)^2}$

16. $g_x = \dfrac{y(y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^2}$; $g_y = \dfrac{x(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2}$

17. $h_x = 10y(2xy + 3y^2)^4$; $h_y = 10(x + 3y)(2xy + 3y^2)^4$

18. $f_x = \dfrac{e^y}{2(xe^y + 1)^{1/2}}$; $f_y = \dfrac{xe^y}{2(xe^y + 1)^{1/2}}$

19. $f_x = 2x(1 + x^2 + y^2)e^{x^2+y^2}$; $f_y = 2y(1 + x^2 + y^2)e^{x^2+y^2}$

20. $f_x = \dfrac{4x}{1 + 2x^2 + 4y^4}$; $f_y = \dfrac{16y^3}{1 + 2x^2 + 4y^4}$

21. $f_x = \dfrac{2x}{x^2 + y^2}$; $f_y = -\dfrac{2x^2}{y(x^2 + y^2)}$

22. $f_{xx} = 6x - 4y$; $f_{xy} = -4x = f_{yx}$; $f_{yy} = 2$

23. $f_{xx} = 12x^2 + 4y^2$; $f_{xy} = 8xy = f_{yx}$; $f_{yy} = 4x^2 - 12y^2$

24. $f_{xx} = 12(2x^2 + 3y^2)(10x^2 + 3y^2)$;
$f_{xy} = 144xy(2x^2 + 3y^2) = f_{yx}$;
$f_{yy} = 18(2x^2 + 3y^2)(2x^2 + 15y^2)$

25. $g_{xx} = \dfrac{-2y^2}{(x + y^2)^3}$; $g_{xy} = \dfrac{2y(x - y^2)}{(x + y^2)^3} = g_{yx}$;
$g_{yy} = \dfrac{2x(3y^2 - x)}{(x + y^2)^3}$

26. $g_{xx} = 2(1 + 2x^2)e^{x^2+y^2}$; $g_{xy} = 4xye^{x^2+y^2} = g_{yx}$;
$g_{yy} = 2(1 + 2y^2)e^{x^2+y^2}$

27. $h_{ss} = -\dfrac{1}{s^2}$; $h_{st} = h_{ts} = 0$; $h_{tt} = \dfrac{1}{t^2}$

28. $f_x(1, 1, 0) = 3$; $f_y(1, 1, 0) = 3$; $f_z(1, 1, 0) = -2$

29. $(2, 3)$; valor mínimo relativo: $f(2, 3) = -13$

30. $(8, -2)$; punto de silla en $f(8, -2) = -8$

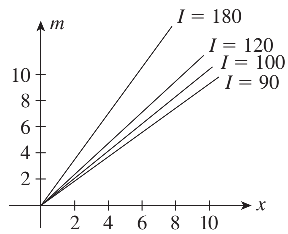
31. $(0, 0)$ y $\left(\frac{3}{2}, \frac{9}{4}\right)$; punto de silla en $f(0, 0) = 0$;
valor mínimo relativo: $f\left(\frac{3}{2}, \frac{9}{4}\right) = -\frac{27}{16}$

32. $\left(-\frac{1}{3}, \frac{13}{3}\right)$, $(3, 11)$; punto de silla en $f\left(-\frac{1}{3}, \frac{13}{3}\right) = -\frac{445}{27}$;
valor mínimo relativo: $f(3, 11) = -35$

33. $(0, 0)$; valor mínimo relativo: $f(0, 0) = 1$

34. $(1, 1)$; valor mínimo relativo: $f(1, 1) = \ln 2$

35. $k = \dfrac{100\,m}{c}$



36. **a.** $R(x, y) = -0.02x^2 - 0.2xy - 0.05y^2 + 80x + 60y$
b. El conjunto de todos los puntos que satisfacen $0.02x + 0.1y \le 80$, $0.1x + 0.05y \le 60$, $x \ge 0$, $y \ge 0$
c. 15,300; los ingresos obtenidos de la venta de 100 licuadoras eléctricas de 16 velocidades y 300 de 10 velocidades son de $15,300.

37. Complementario

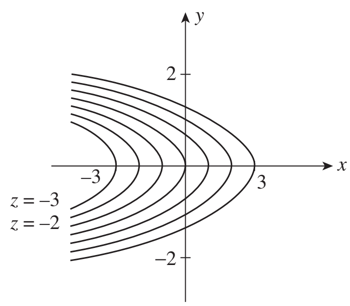
38. La empresa debe gastar $11,000 en publicidad y emplear 14 agentes si quiere maximizar sus ingresos.

39. 337.5 yd × 900 yd

CAPÍTULO 12 Antes de seguir, página 862

1. Todos los valores reales de x y y que satisfacen $x \ge 0$, $x \ne 1$, $y \ge 0$, $y \ne 2$

2.



3. 14; 29; en el punto (1, 2), $f(x, y)$ se incrementa a una tasa de 14 unidades por cada unidad que aumenta en x con y constante en un valor de 2; $f(x, y)$ se incrementa a una tasa de 29 unidades por cada unidad que aumenta en y con x fija en 2.

4. $f_x = 2xy + ye^{xy}$; $f_{xx} = 2y + y^2e^{xy}$; $f_{xy} = 2x + (xy + 1)e^{xy} = f_{yx}$;
$f_y = x^2 + xe^{xy}$; $f_{yy} = x^2e^{xy}$

5. Valor mínimo relativo: $(1, 1, -7)$

ÍNDICE ANALÍTICO

Índice de uso de la tecnología

Reglas básicas de diferenciación

1. $\dfrac{d}{dx}(c) = 0 \quad c$, una constante

2. $\dfrac{d}{dx}(u^n) = nu^{n-1}\dfrac{du}{dx}$

3. $\dfrac{d}{dx}(u \pm v) = \dfrac{du}{dx} \pm \dfrac{dv}{dx}$

4. $\dfrac{d}{dx}(cu) = c\dfrac{du}{dx} \quad c$, una constante

5. $\dfrac{d}{dx}(uv) = u\dfrac{dv}{dx} + v\dfrac{du}{dx}$

6. $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{v\dfrac{du}{dx} - u\dfrac{dv}{dx}}{v^2}$

7. $\dfrac{d}{dx}(e^u) = e^u\dfrac{du}{dx}$

8. $\dfrac{d}{dx}(\ln u) = \dfrac{1}{u} \cdot \dfrac{du}{dx}$

Reglas básicas de integración

1. $\displaystyle\int du = u + C$

2. $\displaystyle\int kf(u)\, du = k\int f(u)\, du, \quad k$, una constante

3. $\displaystyle\int [f(u) \pm g(u)]\, du = \int f(u)\, du \pm \int g(u)\, du$

4. $\displaystyle\int u^n\, du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1$

5. $\displaystyle\int e^u\, du = e^u + C$

6. $\displaystyle\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C$

Fórmulas

Ecuación de una recta

a. forma punto-pendiente: $y - y_1 = m(x - x_1)$
b. forma pendiente-intersección: $y = mx + b$
c. forma general: $Ax + By + C = 0$

Interés compuesto

$$A = P(1 + i)^n \qquad (i = r/m,\ n = mt)$$

donde A es la cantidad acumulada al final de n periodos de conversión, P es el principal, r es la tasa de interés por año, m es el número de periodos de conversión por año y t es el número de años.

Tasa de interés efectiva

$$r_{\text{ef}} = \left(1 + \frac{r}{m}\right)^m - 1$$

donde r_{ef} es la tasa de interés efectiva, r es la tasa de interés nominal anual y m es el número de periodos de conversión por año.

Valor futuro de una anualidad

$$S = R\left[\frac{(1 + i)^n - 1}{i}\right]$$

Valor presente de una anualidad

$$P = R\left[\frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i}\right]$$

Fórmula de amortización

$$R = \frac{Pi}{1 - (1 + i)^{-n}}$$

Pago de un fondo de amortización

$$R = \frac{iS}{(1 + i)^n - 1}$$

El número de permutaciones de *n* objetos distintos tomados *r* a la vez

$$P(n, r) = \frac{n!}{(n - r)!}$$

El número de permutaciones de *n* objetos, no todos distintos

$$\frac{n!}{n_1!\,n_2!\cdots n_m!}, \text{ donde } n_1 + n_2 + \cdots + n_m = n$$

El número de combinaciones de *n* objetos distintos tomados *r* a la vez

$$C(n, r) = \frac{n!}{r!(n - r)!}$$

Regla del producto para la probabilidad

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B \mid A)$$

Fórmula de Bayes

$$P(A_i \mid E) = \frac{P(A_i) \cdot P(E \mid A_i)}{P(A_1) \cdot P(E \mid A_1) + P(A_2) \cdot P(E \mid A_2) + \cdots + P(A_n) \cdot P(E \mid A_n)}$$

Valor esperado de una variable aleatoria

$$E(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \cdots + x_n p_n$$

Lista de aplicaciones

NEGOCIOS Y ECONOMÍA

(*continúa*)

Lista de aplicaciones (*continuación*)

CIENCIAS SOCIALES

CIENCIAS DE LA VIDA

INTERÉS GENERAL

Notas

Notas

EL APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS MEDIANTE LAS APLICACIONES AL MUNDO REAL

Las matemáticas son parte integral de nuestra vida cotidiana. Esta obra ilustra este punto con su enfoque aplicado. Los objetivos de esta edición son: 1) proporcionar un texto aplicado que motive al lector, a la vez que proporcione la experiencia en las técnicas cuantitativas necesarias para comprender y apreciar mejor los cursos de la materia, 2) sentar las bases para cursos más avanzados, como estadística e investigación de operaciones y 3) hacer del libro una herramienta útil.

ENFOQUE DEL LIBRO

- **Nivel de presentación.** Su enfoque es intuitivo, y se establecen los resultados de manera informal, sin mermar el contenido y el rigor matemático.
- **Solución de problemas.** Numerosos ejemplos y aplicaciones ilustran cada concepto y resultado nuevos.
- **Introducción intuitiva a los conceptos.** Los conceptos matemáticos se presentan con ejemplos concretos de la vida real.
- **Conexiones.** El ejemplo del maglev, el tren de levitación magnética, se utiliza como hilo conductor en el desarrollo del cálculo de los límites por medio de la integración.
- **Modelado.** Muchas de las aplicaciones se basan en modelos matemáticos construidos a partir de datos extraídos de diversas fuentes, como periódicos actuales, revistas e Internet.

CARACTERÍSTICAS PROBADAS

- **Ejercicios de autoevaluación.**
- **Uso de calculadora graficadora y Excel** como herramientas para resolver problemas.
- **Antes de continuar...** Estos ejercicios brindan al lector la oportunidad de ver si domina las habilidades básicas desarrolladas en cada capítulo.
- **Explore y analice.** Estas preguntas se pueden discutir en clase o asignarse como tarea, o bien, como proyectos de equipo.
- **Portafolios.** En esta sección se relatan las experiencias de diversos profesionales que utilizan las matemáticas en su lugar de trabajo.

LO NUEVO EN ESTA EDICIÓN

- **Revisión del álgebra donde el lector más lo necesita.**
- **Motivantes aplicaciones del mundo real.** Se agregaron más de 220 nuevas aplicaciones a los ejemplos y ejercicios.
- **Conexiones con la tecnología.** Se actualizaron muchas secciones de Uso de la tecnología.
- **Diversos tipos de problemas y preguntas.** Se agregan preguntas de rutina, de verdadero o falso y preguntas conceptuales para mejorar las series de ejercicios.
- El sitio web **http://latinoamerica.cengage.com/tan** incorpora excelentes recursos de tecnología educativa que están a la vanguardia.

ISBN-13: 978-607481758-4
ISBN-10: 607481758-8
9 786074 817584

CENGAGE Learning™

http://latinoamerica.cengage.com